ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1994, том 337, № 2, с. 196 - 199

МЕХАНИКА

УДК 517.9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

© 1994 г. А. Д. Полянин, А. И. Журов

Представлено академиком Д.М. Климовым 25.01.94 г.

Поступило 27.01.94 г.

Предлагается алгебраический метод поиска точных аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (систем уравнений) и связанных с ними уравнений нелинейной механики. Метод основан на непосредственном задании структуры решения в параметрическом виде с учетом зависимости от произвольных постоянных, ряда неопределенных параметров и функций, которые находятся далее из дифференциальных уравнений методами компьютерной алгебры [1]. Приведены конкретные примеры, иллюстрирующие возможности предложенного метода. Указанный подход позволяет найти новые интегрируемые уравнения, которые не удается решить другими [2 - 6] методами.

1. Предварительные замечания. Обыкновенных дифференциальных уравнений, точное аналитическое (общее) решение которых можно записать в явном виде ($C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные)

$$y = y(x; C_1, \ldots, C_n) \tag{1}$$

или

$$x = x(y; C_1, \ldots, C_n), \tag{2}$$

известно сравнительно немного [2, 3]. Решения вида (1) имеют, например, достаточно простые и хорошо изученные линейные уравнения, уравнение Бернулли и др.

Гораздо больше существует уравнений, точное аналитическое решение которых можно представить в параметрическом виде

$$x = x(t; C_1, \ldots, C_n)\ ,\ y = y(t; C_1, \ldots, C_n). \tag{3}$$

Такие решения, например, в ряде случаев имеют уравнения Абеля, уравнения Эмдена–Фаулера, уравнения теории горения и теории химических реакторов, уравнения тепломассопереноса, уравнения пограничного слоя неньютоновской жидкости и др. [5, 6].

Институт проблем механики Российской Академии наук, Москва

2. Описание алгебраического метода. Будем искать общее решение некоторого семейства дифференциальных уравнений полиномиального типа (коэффициенты которых являются полиномами относительно зависимой и независимой переменных), которые описываются "свободными" параметрами A_s. Решение будем задавать в параметрической форме; оно должно содержать параметр t, произвольные постоянные интегрирования $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и "неопределенные" коэффициенты a_m, b_m, $m = 1, 2, \ldots, M$. Анализ конкретных результатов, приведенных в книгах [5, 6], показывает, что решение целесообразно искать в виде полиномов (которые могут содержать дробные степени) или отношений полиномов относительно произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$.

Для наглядности ограничимся далее случаем уравнения первого порядка. Зависимость решения от параметра t будем задавать в виде

$$x = x(f_1, \ldots, f_k; C)\ ,\ y = y(f_1, \ldots, f_k; C) \tag{4}$$

с помощью набора некоторых функций $f_i = f_i(t)$, подлежащих определению в ходе исследования. (Зависимость x и y от a_m и b_m для простоты не указана.) Структура правых частей в (4) по f_i и C задается априорно (например, x и y линейны относительно функций f_i и степенным образом зависят от C; см. пример). Подставляя решение (4) в исходное уравнение и выделяя члены при одинаковых степенях постоянной C, получим

$$\sum_n C^n \left(\sum_l K_{nl} \Psi_{nl} \right) = 0, \tag{5}$$

где $K_{nl} = K_{nl}(A_s, a_m, b_m)$ не зависят от f_i и C, а Ψ_{nl} зависят от функций f_i и их производных. Функции f_i выбираются из условия, чтобы в выражении (5) осталось как можно меньше линейно независимых Ψ_{nl}. Если все Ψ_{nl} линейно независимы, то для удовлетворения (5) следует решить определяющую систему

$$K_{nl}(A_s, a_m, b_m) = 0. \tag{6}$$

Для решения системы (6), в которую может входить значительное число неизвестных, удобно использовать методы компьютерной алгебры [1}. При этом целесообразно величины, входящие в (6) линейным образом, считать искомыми и выразить их через остальные (которые могут входить нелинейно).

3. Конкретные примеры. Для иллюстрации эффективности описанного метода, рассмотрим следующее 10-параметрическое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{11}x^2 + A_2y + A_1x)\,y'_x = \\ = B_{22}x^2 + B_{12}xy + B_{11}y^2 + B_2x + B_1y, \qquad (7)$$

которое часто встречается в теории динамических систем второго порядка [7 - 9]. Важно отметить также, что уравнение (7) несколькими различными способами может быть сведено к уравнениям Абеля второго рода и связанным с ними уравнениям теории горения, теории химических реакторов и теории нелинейных колебаний [5, 6].

Решение ищем в параметрическом виде

$$x = a_1(C^m f(t) + a_2Cg(t)\ , \ y = b_1C^m f(t) + b_2Cg(t), \quad (8)$$

где C – произвольная постоянная; функции f и g, значения параметра m и "неопределенные" коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 подлежат определению в ходе решения задачи.

Подставим выражения (8) в уравнение (7) с учетом равенства $y'_x = y'_t/x'_t$. После выделения членов при одинаковых степенях постоянной интегрирования C получим

$$K_1C^{3m}\varphi_1 + C^{2m+1}(K_2\varphi_2 + K_3\varphi_3) + K_4C^{2m}\varphi_4 + \\ + C^{m+2}(K_5\varphi_5 + K_6\varphi_6) + C^{m+1}(K_7\varphi_7 + K_8\varphi_8) + \\ + K_9C^3\varphi_9 + K_{10}C^2\varphi_{10} = 0. \qquad (9)$$

Здесь коэффициенты $K_i = K_i(A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i; a_1, a_2; b_1, b_2)$ не зависят от C и t и линейны относительно параметров $A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i$ уравнения (7), а функции $\varphi_i = \varphi_i(t)$ выражаются через f, g следующим образом (штрих обозначает производную по t):

$$\varphi_1 = f^2f', \quad \varphi_2 = f^2g', \quad \varphi_3 = gff', \quad \varphi_4 = ff', \\ \varphi_5 = fgg', \quad \varphi_6 = g^2f', \quad \varphi_7 = fg', \quad \varphi_8 = gf', \quad (10) \\ \varphi_9 = g^2g', \quad \varphi_{10} = gg'.$$

Если все функции φ_i линейно независимы, то для удовлетворения (9) следует положить $K_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 10$. Получится система из 10 линейных однородных уравнений относительно 10 неизвестных A_{ij}, B_{ij}, A_i, B_i, которая в невырожденном случае имеет только тривиальное (нулевое) решение. Равенство (9) допускает нетривиальное решение (относительно A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i), если хотя бы две функции φ_i и φ_j, стоящие при одинаковых степенях C, будут линейно зависимы (в этом случае уравнений будет меньше, чем неизвестных).

Например, для $m = 3/2$ в (9) при C^3 стоят функции φ_4 и φ_9. Накладывая условие пропорциональности $\varphi_4 = \mathrm{const}\,\varphi_9$, с учетом выражений (10) получим уравнение для f и g: $ff' = \mathrm{const}\,g^2g'$. Интегрируя, имеем $f^2 = \alpha g^3 + \beta$, где α, β – произвольные постоянные. Без ограничения общности можно положить $f = \sqrt{\alpha g^3 + \beta}$, $g = t$ (одну из функций f или g всегда за счет перепараметризации можно взять равной t, если $f'g' \neq 0$). Перебирая значения параметра m и считая линейно зависимыми (пропорциональными) другие функции φ_i при одинаковых степенях параметра C, получим другие уравнения для определения f и g. Результаты такого анализа приведены ниже в табл. 1 (наиболее громоздкие формулы опущены).

Рассмотрим подробнее первый случай в табл. 1, который в силу (7) соответствует решению вида

$$x = a_nt^n + a_1Ct, \quad y = b_nt^n + b_1Ct, \qquad (11)$$

где n, a_n, a_1, b_n, b_1 – "неопределенные" коэффициенты. Подставим выражения (11) в уравнение (7). После выделения членов при одинаковых степенях параметра t и постоянной интегрирования C получим

$$\Lambda_{3n-1}t^{3n-1} + \Lambda_{2n}Ct^{2n} + \Lambda_{2n-1}t^{2n-1} + \Lambda_{n+1}C^2t^{n+1} + \\ + \Lambda_nCt^n + \Lambda_2C^3t^2 + \Lambda_1C^2t = 0, \qquad (12)$$

где коэффициенты $\Lambda_k = \Lambda_k(A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i; a_n, a_1; b_n, b_1; n)$ имеют следующий вид:

$$\Lambda_{3n-1} = n\,(b_n^3A_{22} + b_n^2a_nA_{12} + b_na_n^2A_{11} - \\ - a_n^3B_{22} - a_n^2b_nB_{12} - a_nb_n^2B_{11}\,),$$

$$\Lambda_{2n} = b_n^2b_1\,(2n+1)\,A_{22} + a_n\,(a_nb_1 + 2na_1b_n)\,A_{11} + \\ + b_n\,[\,(n+1)\,a_nb_1 + na_1b_n]\,A_{12} - a_n^2a_1\,(2n+1)\,B_{22} - \\ - b_n\,(b_na_1 + 2b_1a_nn)\,B_{11} - \\ - a_n\,[\,(n+1)\,b_na_1 + nb_1a_n]\,B_{12}, \qquad (13)$$

$$\Lambda_{2n-1} = n\,(b_n^2A_2 + b_na_nA_1 - a_n^2B_2 - a_nb_nB_1)\,, \Lambda_{n+1} = \\ = b_nb_1^2\,(n+2)\,A_{22} + a_1\,(na_1b_n + 2a_nb_1)\,A_{11} + \\ + b_1\,[a_nb_1 + (n+1)\,a_1b_n]\,A_{12} - a_1^2a_n\,(n+2)\,B_{22} - \\ - b_1\,(nb_1a_n + 2b_na_1)\,B_{11} - a_1[b_na_1 + (n+1)\,b_1a_n]B_{12},$$

$$\Lambda_n = (n+1)\,b_nb_1A_2 + (a_nb_1 + na_1b_n)\,A_1 - \\ - (n+1)\,a_na_1B_2 - (b_na_1 + nb_1a_n)\,B_1,$$

$$\Lambda_2 = b_1^3A_{22} + b_1^2a_1A_{12} + b_1a_1^2A_{11} -$$

Таблица 1. Показатели m и функции f и g, при которых уравнение (7) допускает решение вида (8)

№	m	f	g
1	0	t^n	t
2	0	$\ln\|t\|$	t
3	0	$1/\ln\|t\|$	t
4	0	$t^n+\beta$	t
5	0	t	$\|t\|^n\|\alpha t+\beta\|^k$
6	1	t^n	t
7	1	$tP_\alpha^n P_\beta^k$	$P_\alpha^n P_\beta^k$
8	1	$tQ_2^n\psi(t)$	$Q_2^n\psi(t)$
9	3/2	t	$(\alpha t^3+\beta)^{1/2}$
10	2	t	$(\alpha t^n+\beta t)^{1/2}$
11	2	$t^n+\beta t^2$	t

Примечание. $P_\alpha = |\alpha_1 t+\alpha_0|$, $P_\beta = |\beta_1 t+\beta_0|$, $Q_2 = \alpha t^2+\beta t+\gamma$, $\psi(t) = \exp\left(k\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\alpha t+\beta}{\Delta^{1/2}}\right)$, $\Delta = 4\alpha\gamma-\beta^2 > 0$.

$$-a_1^3B_{22}-a_1^2b_1B_{12}-a_1b_1^2B_{11},$$

$$\Lambda_1 = b_1^2A_2+b_1a_1A_1-a_1^2B_2-a_1b_1B_1.$$

Определяющая система в данном случае состоит из 7 уравнений

$$\Lambda_k(A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i; a_n, a_1; b_n, b_1; n) = 0, \qquad (14)$$

которые линейны относительно коэффициентов уравнения (7) A_{ij}, B_{ij}, A_i, B_i (это видно из равенств (13)).

Считая параметры A_{22}, B_{22}, A_2, a_n, a_1, b_n, b_1, n произвольными, решим систему (14) относительно остальных параметров A_{12}, A_{11}, B_{12}, B_{11}, A_1, B_1, B_2 методами компьютерной алгебры, используя символьные вычисления на ЭВМ с помощью системы Reduce [1]. Вместо A_{22}, B_{22} и A_2 введем параметры p, q и r так, чтобы решение принимало более простой вид. В результате получим

$$\begin{gathered}A_{22} = (n-1)\,a_1a_np,\\ A_{12} = (a_1b_n-na_nb_1)\,p-(n-1)\,a_1a_nq,\\ A_{11} = (na_nb_1-a_1b_n)\,q,\quad A_2 = (n-1)\,a_1a_nr,\\ A_1 = (a_1b_n-na_nb_1)\,r,\quad B_{22} = (n-1)\,b_1b_nq,\\ B_{12} = -(n-1)\,b_1b_np+(b_1a_n-nb_na_1)\,q,\\ B_{11} = (nb_na_1-b_1a_n)\,p,\quad B_2 = -(n-1)\,b_1b_nr,\\ B_1 = -(b_1a_n-nb_na_1)\,r.\end{gathered} \qquad (15)$$

Формулы (15) определяют 8-параметрическое семейство нелинейных дифференциальных уравнений (6) с произвольными параметрами p, q, r, a_n, a_1, b_n, b_1, n, которое допускает аналитическое решение в виде (11), где C – произвольная постоянная.

Для иллюстрации метода приведем еще итоговые результаты, соответствующие случаям 2, 3, 9 и 11 в табл. 1.

При

$$\begin{gathered}A_{22} = a_1a_2p,\quad A_{12} = -b_1a_2p-a_1a_2q,\quad A_{11} = b_1a_2q,\\ A_2 = a_1(a_1b_2-a_2b_1)\,p,\quad A_1 = -a_1(a_1b_2-a_2b_1)\,q,\\ B_{22} = b_1b_2q,\quad B_{12} = -b_1b_2p-a_1b_2q,\quad B_{11} = a_1b_2p,\\ B_2 = -b_1(a_1b_2-a_2b_1)\,q,\quad B_1 = b_1(a_1b_2-a_2b_1)\,p\end{gathered} \qquad (16)$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = a_1\ln|t|+a_2Ct,\quad y = b_1\ln|t|+b_2Ct, \qquad (17)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, p, q – произвольные параметры.

При

$$\begin{gathered}A_{22} = a_1a_2^2,\quad A_{12} = -2a_1a_2b_2,\quad A_{11} = a_1a_2^2,\\ A_2 = -a_1a_2(a_1b_2-a_2b_1),\quad A_1 = -b_1a_2(a_1b_2-a_2b_1),\\ B_{22} = b_1b_2^2,\quad B_{12} = -2b_1b_2a_2,\quad B_{11} = b_1a_2^2,\\ B_2 = b_1b_2(a_1b_2-a_2b_1),\quad B_1 = a_1b_2(a_1b_2-a_2b_1)\end{gathered} \qquad (18)$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = a_1\frac{1}{\ln|t|}+a_2Ct,\quad y = b_1\frac{1}{\ln|t|}+b_2Ct, \qquad (19)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – произвольные параметры.

При

$$\begin{gathered}A_{22} = 3\alpha a_1^3,\quad A_{12} = -6\alpha a_1^2b_1,\quad A_{11} = 3\alpha a_1b_1^2,\\ A_2 = -2a_2^2(a_1b_2-a_2b_1),\quad A_1 = 2a_2b_2(a_1b_2-a_2b_1),\\ B_{22} = 3\alpha b_1^3,\quad B_{12} = -6\alpha b_1^2a_1,\quad B_{11} = 3\alpha b_1a_1^2,\\ B_2 = -2b_2^2(b_1a_2-b_2a_1),\quad B_1 = 2b_2a_2(b_1a_2-b_2a_1)\end{gathered} \qquad (20)$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$\begin{gathered}x = a_1C^3t+a_2C^2\sqrt{\alpha t^3+\beta},\\ y = b_1C^3t+b_2C^2\sqrt{\alpha t^3+\beta},\end{gathered} \qquad (21)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, α, β – произвольные параметры. В решении (21) для удобства C было переобозначено на C^2.

При

$$\begin{gathered}A_{22} = (n-2)\,a_1^3\beta,\quad A_{12} = -2\,(n-2)\,a_1^2b_1\beta,\\ A_{11} = (n-2)\,a_1b_1^2\beta,\\ A_2 = (n-1)\,(a_1b_2-a_2b_1)\,a_1a_2,\\ A_1 = (na_1b_2-a_2b_1)\,(a_1b_2-a_2b_1),\\ B_{22} = (n-2)\,b_1^3\beta,\quad B_{12} = -2\,(n-2)\,b_1^2a_1\beta,\end{gathered} \qquad (22)$$

$$B_{11} = (n-2)\, b_1 a_1^2 \beta,$$
$$B_2 = (n-1)\,(b_1 a_2 - b_2 a_1)\, b_1 b_2,$$
$$B_1 = (n b_1 a_2 - b_2 a_1)\,(b_1 a_2 - b_2 a_1)$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= a_1 C^2 (t^n + \beta t^2) + a_2 C t, \\ y &= b_1 C^2 (t^n + \beta t^2) + b_2 C t, \end{aligned} \tag{23}$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, n, \beta$ – произвольные параметры.

Отметим, что помимо решений вида (8) уравнение (7) имеет и другие решения при соответствующих коэффициентах A_{ij}, B_{ij}, A_i, B_i. В частности, при

$$\begin{gathered} A_{22} = 0, \quad A_{12} = -n a_1 c_n, \quad A_{11} = n b_1 c_n, \\ A_2 = (n-1)\, a_n a_1, \quad A_1 = -n a_n b_1 + a_1 b_n, \\ B_{22} = 0, \quad B_{12} = n b_1 c_n, \quad B_{11} = -n a_1 c_n, \\ B_2 = -(n-1)\, b_n b_1, \quad B_1 = n b_n a_1 - b_1 a_n \end{gathered} \tag{24}$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = \frac{a_n t^n + a_1 C t}{c_n t^n + c_0 C}, \quad y = \frac{b_n t^n + b_1 C t}{c_n t^n + c_0 C}, \tag{25}$$

где $n, a_n, a_1, b_n, b_1, c_n, c_0$ – произвольные параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климов Д.М., Руденко В.М.* Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 215 с.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
3. *Murphy G.M.* Ordinary Differential Equations and Their Solutions. N.Y.: D. Van Norstrand Company, Inc., 1960. 451 p.
4. *Zwillinger D.* Handbook of Differential Equations. San Diego; N.Y.; L.: Acad. Press, Inc., 1989. 673 p.
5. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям (Приложения в механике, точные решения). М.: Наука, 1993. 464 с.
6. *Zaitsev V.F., Polyanin A.D.* Discrete Group Methods for Integrating Equations of Nonlinear Mechanics. Boca Raton; L.: CRC Press, 1993. 375 p.
7. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
8. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
9. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.