

УДК 517.9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

© 1994 г. А. Д. Полянин, А. И. Журов

Представлено академиком Д.М. Климовым 25.01.94 г.

Поступило 27.01.94 г.

Предлагается алгебраический метод поиска точных аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (систем уравнений) и связанных с ними уравнений нелинейной механики. Метод основан на непосредственном задании структуры решения в параметрическом виде с учетом зависимости от произвольных постоянных, ряда неопределенных параметров и функций, которые находятся далее из дифференциальных уравнений методами компьютерной алгебры [1]. Приведены конкретные примеры, иллюстрирующие возможности предложенного метода. Указанный подход позволяет найти новые интегрируемые уравнения, которые не удастся решить другими [2 - 6] методами.

1. Предварительные замечания. Обыкновенных дифференциальных уравнений, точное аналитическое (общее) решение которых можно записать в явном виде (C_1, C_2, \dots, C_n - произвольные постоянные)

$$y = y(x; C_1, \dots, C_n) \quad (1)$$

или

$$x = x(y; C_1, \dots, C_n), \quad (2)$$

известно сравнительно немного [2, 3]. Решения вида (1) имеют, например, достаточно простые и хорошо изученные линейные уравнения, уравнение Бернулли и др.

Гораздо больше существует уравнений, точное аналитическое решение которых можно представить в параметрическом виде

$$x = x(t; C_1, \dots, C_n), \quad y = y(t; C_1, \dots, C_n). \quad (3)$$

Такие решения, например, в ряде случаев имеют уравнения Абеля, уравнения Эмдена-Фаулера, уравнения теории горения и теории химических реакторов, уравнения тепломассопереноса, уравнения пограничного слоя неньютоновской жидкости и др. [5, 6].

2. Описание алгебраического метода. Будем искать общее решение некоторого семейства дифференциальных уравнений полиномиального типа (коэффициенты которых являются полиномами относительно зависимой и независимой переменных), которые описываются "свободными" параметрами A_s . Решение будем задавать в параметрической форме; оно должно содержать параметр t , произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, \dots, C_n и "неопределенные" коэффициенты $a_m, b_m, m = 1, 2, \dots, M$. Анализ конкретных результатов, приведенных в книгах [5, 6], показывает, что решение целесообразно искать в виде полиномов (которые могут содержать дробные степени) или отношений полиномов относительно произвольных постоянных C_1, \dots, C_n .

Для наглядности ограничимся далее случаем уравнения первого порядка. Зависимость решения от параметра t будем задавать в виде

$$x = x(f_1, \dots, f_k; C), \quad y = y(f_1, \dots, f_k; C) \quad (4)$$

с помощью набора некоторых функций $f_i = f_i(t)$, подлежащих определению в ходе исследования. (Зависимость x и y от a_m и b_m для простоты не указана.) Структура правых частей в (4) по f_i и C задается априорно (например, x и y линейны относительно функций f_i и степенным образом зависят от C ; см. пример). Подставляя решение (4) в исходное уравнение и выделяя члены при одинаковых степенях постоянной C , получим

$$\sum_n C^n \left(\sum_l K_{nl} \Psi_{nl} \right) = 0, \quad (5)$$

где $K_{nl} = K_{nl}(A_s, a_m, b_m)$ не зависят от f_i и C , а Ψ_{nl} зависят от функций f_i и их производных. Функции f_i выбираются из условия, чтобы в выражении (5) осталось как можно меньше линейно независимых Ψ_{nl} . Если все Ψ_{nl} линейно независимы, то для удовлетворения (5) следует решить определяющую систему

$$K_{nl}(A_s, a_m, b_m) = 0. \quad (6)$$

Для решения системы (6), в которую может входить значительное число неизвестных, удобно использовать методы компьютерной алгебры [1]. При этом целесообразно величины, входящие в (6) линейным образом, считать искомыми и выразить их через остальные (которые могут входить нелинейно).

3. Конкретные примеры. Для иллюстрации эффективности описанного метода, рассмотрим следующее 10-параметрическое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{11}x^2 + A_2y + A_1x)y'_x = B_{22}x^2 + B_{12}xy + B_{11}y^2 + B_2x + B_1y, \quad (7)$$

которое часто встречается в теории динамических систем второго порядка [7 - 9]. Важно отметить также, что уравнение (7) несколькими различными способами может быть сведено к уравнениям Абеля второго рода и связанным с ними уравнениям теории горения, теории химических реакторов и теории нелинейных колебаний [5, 6].

Решение ищем в параметрическом виде

$$x = a_1(C^m f(t) + a_2 C g(t)), \quad y = b_1 C^m f(t) + b_2 C g(t), \quad (8)$$

где C - произвольная постоянная; функции f и g , значения параметра m и "неопределенные" коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 подлежат определению в ходе решения задачи.

Подставим выражения (8) в уравнение (7) с учетом равенства $y'_x = y'_t/x'_t$. После выделения членов при одинаковых степенях постоянной интегрирования C получим

$$K_1 C^{3m} \varphi_1 + C^{2m+1} (K_2 \varphi_2 + K_3 \varphi_3) + K_4 C^{2m} \varphi_4 + C^{m+2} (K_5 \varphi_5 + K_6 \varphi_6) + C^{m+1} (K_7 \varphi_7 + K_8 \varphi_8) + K_9 C^3 \varphi_9 + K_{10} C^2 \varphi_{10} = 0. \quad (9)$$

Здесь коэффициенты $K_i = K_i(A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i; a_1, a_2; b_1, b_2)$ не зависят от C и t и линейны относительно параметров $A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i$ уравнения (7), а функции $\varphi_i = \varphi_i(t)$ выражаются через f, g следующим образом (штрих обозначает производную по t):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= f^2 f', & \varphi_2 &= f^2 g', & \varphi_3 &= g f f', & \varphi_4 &= f f', \\ \varphi_5 &= f g g', & \varphi_6 &= g^2 f', & \varphi_7 &= f g', & \varphi_8 &= g f', \\ \varphi_9 &= g^2 g', & \varphi_{10} &= g g'. \end{aligned} \quad (10)$$

Если все функции φ_i линейно независимы, то для удовлетворения (9) следует положить $K_i = 0, i = 1, 2, \dots, 10$. Получится система из 10 линейных однородных уравнений относительно 10 неизвестных A_{ij}, B_{ij}, A_i, B_i , которая в невырожденном случае имеет только тривиальное (нулевое) решение. Равенство (9) допускает нетривиальное решение (относительно $A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i$), если хотя

бы две функции φ_i и φ_j , стоящие при одинаковых степенях C , будут линейно зависимы (в этом случае уравнений будет меньше, чем неизвестных).

Например, для $m = 3/2$ в (9) при C^3 стоят функции φ_4 и φ_9 . Накладывая условие пропорциональности $\varphi_4 = \text{const} \varphi_9$, с учетом выражений (10) получим уравнение для f и $g: f f' = \text{const} g^2 g'$. Интегрируя, имеем $f^2 = \alpha g^3 + \beta$, где α, β - произвольные постоянные. Без ограничения общности можно положить $f = \sqrt{\alpha g^3 + \beta}, g = t$ (одну из функций f или g всегда за счет перепараметризации можно взять равной t , если $f' g' \neq 0$). Перебирая значения параметра m и считая линейно зависимыми (пропорциональными) другие функции φ_i при одинаковых степенях параметра C , получим другие уравнения для определения f и g . Результаты такого анализа приведены ниже в табл. 1 (наиболее громоздкие формулы опущены).

Рассмотрим подробнее первый случай в табл. 1, который в силу (7) соответствует решению вида

$$x = a_n t^n + a_1 C t, \quad y = b_n t^n + b_1 C t, \quad (11)$$

где n, a_n, a_1, b_n, b_1 - "неопределенные" коэффициенты. Подставим выражения (11) в уравнение (7). После выделения членов при одинаковых степенях параметра t и постоянной интегрирования C получим

$$\Lambda_{3n-1} t^{3n-1} + \Lambda_{2n} C t^{2n} + \Lambda_{2n-1} t^{2n-1} + \Lambda_{n+1} C^2 t^{n+1} + \Lambda_n C t^n + \Lambda_2 C^3 t^2 + \Lambda_1 C^2 t = 0, \quad (12)$$

где коэффициенты $\Lambda_k = \Lambda_k(A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i; a_n, a_1; b_n, b_1; n)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Lambda_{3n-1} &= n (b_n^3 A_{22} + b_n^2 a_n A_{12} + b_n a_n^2 A_{11} - a_n^3 B_{22} - a_n^2 b_n B_{12} - a_n b_n^2 B_{11}), \\ \Lambda_{2n} &= b_n^2 b_1 (2n+1) A_{22} + a_n (a_n b_1 + 2n a_1 b_n) A_{11} + b_n [(n+1) a_n b_1 + n a_1 b_n] A_{12} - a_n^2 a_1 (2n+1) B_{22} - b_n (b_n a_1 + 2b_1 a_n n) B_{11} - a_n [(n+1) b_n a_1 + n b_1 a_n] B_{12}, \\ \Lambda_{2n-1} &= n (b_n^2 A_2 + b_n a_n A_1 - a_n^2 B_2 - a_n b_n B_1), \Lambda_{n+1} = b_n b_1^2 (n+2) A_{22} + a_1 (n a_1 b_n + 2 a_n b_1) A_{11} + b_1 [a_n b_1 + (n+1) a_1 b_n] A_{12} - a_1^2 a_n (n+2) B_{22} - b_1 (n b_1 a_n + 2 b_n a_1) B_{11} - a_1 [b_n a_1 + (n+1) b_1 a_n] B_{12}, \\ \Lambda_n &= (n+1) b_n b_1 A_2 + (a_n b_1 + n a_1 b_n) A_1 - (n+1) a_n a_1 B_2 - (b_n a_1 + n b_1 a_n) B_1, \\ \Lambda_2 &= b_1^3 A_{22} + b_1^2 a_1 A_{12} + b_1 a_1^2 A_{11} - \end{aligned}$$

Таблица 1. Показатели m и функции f и g , при которых уравнение (7) допускает решение вида (8)

№	m	f	g
1	0	t^n	t
2	0	$\ln t $	t
3	0	$1/\ln t $	t
4	0	$t^n + \beta$	t
5	0	t	$ t ^n \alpha + \beta ^k$
6	1	t^n	t
7	1	$tP_\alpha^n P_\beta^k$	$P_\alpha^n P_\beta^k$
8	1	$tQ_2^n \Psi(t)$	$Q_2^n \Psi(t)$
9	3/2	t	$(\alpha t^3 + \beta)^{1/2}$
10	2	t	$(\alpha t^n + \beta t)^{1/2}$
11	2	$t^n + \beta t^2$	t

Примечание. $P_\alpha = |\alpha_1 t + \alpha_0|$, $P_\beta = |\beta_1 t + \beta_0|$, $Q_2 = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, $\Psi(t) = \exp\left(k \arctg \frac{2\alpha t + \beta}{\Delta^{1/2}}\right)$, $\Delta = 4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$.

$$-a_1^3 B_{22} - a_1^2 b_1 B_{12} - a_1 b_1^2 B_{11},$$

$$\Lambda_1 = b_1^2 A_2 + b_1 a_1 A_1 - a_1^2 B_2 - a_1 b_1 B_1.$$

Определяющая система в данном случае состоит из 7 уравнений

$$\Lambda_k(A_{ij}, B_{ij}; A_i, B_i; a_n, a_1; b_n, b_1; n) = 0, \quad (14)$$

которые линейны относительно коэффициентов уравнения (7) A_{ij} , B_{ij} , A_i , B_i (это видно из равенств (13)).

Считая параметры A_{22} , B_{22} , A_2 , a_n , a_1 , b_n , b_1 , n произвольными, решим систему (14) относительно остальных параметров A_{12} , A_{11} , B_{12} , B_{11} , A_1 , B_1 , B_2 методами компьютерной алгебры, используя символьные вычисления на ЭВМ с помощью системы Reduce [1]. Вместо A_{22} , B_{22} и A_2 введем параметры p , q и r так, чтобы решение принимало более простой вид. В результате получим

$$A_{22} = (n-1) a_1 a_n p,$$

$$A_{12} = (a_1 b_n - n a_n b_1) p - (n-1) a_1 a_n q,$$

$$A_{11} = (n a_n b_1 - a_1 b_n) q, \quad A_2 = (n-1) a_1 a_n r,$$

$$A_1 = (a_1 b_n - n a_n b_1) r, \quad B_{22} = (n-1) b_1 b_n q, \quad (15)$$

$$B_{12} = -(n-1) b_1 b_n p + (b_1 a_n - n b_n a_1) q,$$

$$B_{11} = (n b_n a_1 - b_1 a_n) p, \quad B_2 = -(n-1) b_1 b_n r,$$

$$B_1 = -(b_1 a_n - n b_n a_1) r.$$

Формулы (15) определяют 8-параметрическое семейство нелинейных дифференциальных уравнений (6) с произвольными параметрами p , q , r , a_n , a_1 , b_n , b_1 , n , которое допускает аналитическое решение в виде (11), где C – произвольная постоянная.

Для иллюстрации метода приведем еще итоговые результаты, соответствующие случаям 2, 3, 9 и 11 в табл. 1.

При

$$A_{22} = a_1 a_2 p, \quad A_{12} = -b_1 a_2 p - a_1 a_2 q, \quad A_{11} = b_1 a_2 q, \\ A_2 = a_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) p, \quad A_1 = -a_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) q, \quad (16)$$

$$B_{22} = b_1 b_2 q, \quad B_{12} = -b_1 b_2 p - a_1 b_2 q, \quad B_{11} = a_1 b_2 p, \\ B_2 = -b_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) q, \quad B_1 = b_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) p$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = a_1 \ln|t| + a_2 C t, \quad y = b_1 \ln|t| + b_2 C t, \quad (17)$$

где a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , p , q – произвольные параметры.

При

$$A_{22} = a_1 a_2^2, \quad A_{12} = -2a_1 a_2 b_2, \quad A_{11} = a_1 a_2^2, \\ A_2 = -a_1 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad A_1 = -b_1 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad (18)$$

$$B_{22} = b_1 b_2^2, \quad B_{12} = -2b_1 b_2 a_2, \quad B_{11} = b_1 a_2^2,$$

$$B_2 = b_1 b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad B_1 = a_1 b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = a_1 \frac{1}{\ln|t|} + a_2 C t, \quad y = b_1 \frac{1}{\ln|t|} + b_2 C t, \quad (19)$$

где a_1 , a_2 , b_1 , b_2 – произвольные параметры.

При

$$A_{22} = 3\alpha a_1^3, \quad A_{12} = -6\alpha a_1^2 b_1, \quad A_{11} = 3\alpha a_1 b_1^2, \\ A_2 = -2a_2^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad A_1 = 2a_2 b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad (20)$$

$$B_{22} = 3\alpha b_1^3, \quad B_{12} = -6\alpha b_1^2 a_1, \quad B_{11} = 3\alpha b_1 a_1^2,$$

$$B_2 = -2b_2^2 (b_1 a_2 - b_2 a_1), \quad B_1 = 2b_2 a_2 (b_1 a_2 - b_2 a_1)$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = a_1 C^3 t + a_2 C^2 \sqrt{\alpha t^3 + \beta}, \\ y = b_1 C^3 t + b_2 C^2 \sqrt{\alpha t^3 + \beta}, \quad (21)$$

где a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , α , β – произвольные параметры. В решении (21) для удобства C было переобозначено на C^2 .

При

$$A_{22} = (n-2) a_1^3 \beta, \quad A_{12} = -2(n-2) a_1^2 b_1 \beta,$$

$$A_{11} = (n-2) a_1 b_1^2 \beta,$$

$$A_2 = (n-1) (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_1 a_2,$$

$$A_1 = (n a_1 b_2 - a_2 b_1) (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

$$B_{22} = (n-2) b_1^3 \beta, \quad B_{12} = -2(n-2) b_1^2 a_1 \beta, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= (n-2)b_1a_1^2\beta, \\ B_2 &= (n-1)(b_1a_2 - b_2a_1)b_1b_2, \\ B_1 &= (nb_1a_2 - b_2a_1)(b_1a_2 - b_2a_1) \end{aligned}$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= a_1C^2(t^n + \beta t^2) + a_2Ct, \\ y &= b_1C^2(t^n + \beta t^2) + b_2Ct, \end{aligned} \quad (23)$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, n, \beta$ – произвольные параметры.

Отметим, что помимо решений вида (8) уравнение (7) имеет и другие решения при соответствующих коэффициентах A_{ij}, B_{ij}, A_i, B_i . В частности, при

$$\begin{aligned} A_{22} &= 0, \quad A_{12} = -na_1c_n, \quad A_{11} = nb_1c_n, \\ A_2 &= (n-1)a_n a_1, \quad A_1 = -na_n b_1 + a_1 b_n, \\ B_{22} &= 0, \quad B_{12} = nb_1c_n, \quad B_{11} = -na_1c_n, \\ B_2 &= -(n-1)b_n b_1, \quad B_1 = nb_n a_1 - b_1 a_n \end{aligned} \quad (24)$$

решение уравнения (7) имеет вид

$$x = \frac{a_n t^n + a_1 C t}{c_n t^n + c_0 C}, \quad y = \frac{b_n t^n + b_1 C t}{c_n t^n + c_0 C}, \quad (25)$$

где $n, a_n, a_1, b_n, b_1, c_n, c_0$ – произвольные параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 215 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
3. Murphy G.M. Ordinary Differential Equations and Their Solutions. N.Y.: D. Van Nostrand Company, Inc., 1960. 451 p.
4. Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. San Diego; N.Y.; L.: Acad. Press, Inc., 1989. 673 p.
5. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям (Приложения в механике, точные решения). М.: Наука, 1993. 464 с.
6. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. Discrete Group Methods for Integrating Equations of Nonlinear Mechanics. Boca Raton; L.: CRC Press, 1993. 375 p.
7. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
8. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
9. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.