Некоторые определенные интегралы от специальных функций

А.А. Трубин

Киев, Национальный технический университет Украины (КПИ), Украина
email: atrubin@ukrpost.net

Реферат

В статье приведено несколько определенных интегралов от специальных функций. К ним относится: обобщение интеграла Зоммерфельда, интегралы, выражаемые через функции Ломмеля двух переменных, два определенных интеграла от сфероидальных функций, а также несколько интегралов, выражающихся через неполную функцию Струве и функцию обобщенного интегрального синуса.

1 Введение

Применение интегральных преобразований в оптике и технической электродинамике часто позволяет существенно упростить задачу, получив решение в удобном для вычислений и анализа аналитическом виде. Несмотря на то, что на сегодняшний день известно значительное число определенных интегралов от специальных функций, исследователь часто сталкивается с необходимостью преобразовывать известные табличные интегралы, а если повезет, то и находить новые не тривиальные соотношения, отсутствующие в справочной литературе. В настоящей работе приведено несколько определенных интегралов, которые в разное время были получены автором в процессе решения различных задач прикладной электродинамики. Весьма возможно, что некоторые из них известны, поэтому автор будет благодарен критику за предоставленные ссылки. В свое оправдание могу только сказать, что приведенные выражения отсутствуют в перечисленных ниже ссылках к данной статье [1 – 20].

2 Обобщения определенных интегралов от цилиндрических функций

Обобщение интеграла Зоммерфельда:

$$J_{mn} = \int_0^\infty e^{-ib\sqrt{1-t^2}} J_m(ct) P_n^m\left(\sqrt{1-t^2}\right) \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ = i^{m-n} P_n^m\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right) h_n^{(2)}\left(\sqrt{b^2+c^2}\right), \qquad (1)$$

где $J_m(x)$ - функция Бесселя первого рода; $P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} d^m P_n(x)/dx^m$ - присоединенная функция Лежандра первого рода; $h_n^{(2)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля второго рода [11], $i^2 = -1$.
В частном случае $n = m$ интеграл (1) совпадает с интегралом Сонина - Гегенбауэра ($\mu = m$; $\nu = 1/2$, [3] с. 109).

Доказательство проводим методом математической индукции. Начальное значение J_{00} является известным интегралом Зоммерфельда (см. [3], с.109, формула (52)). Путем дифференцирования по параметрам,

$$J_{01} = i\frac{d}{db}J_{00}, \text{ а } J_{11} = \frac{d}{dc}J_{00}. \qquad (2)$$

доказываем справедливость (1) для $m = 0, 1; n = 1$.
Далее, используя рекуррентную формулу для присоединенных функций Лежандра, находим первую рекуррентную формулу:

$$J_{mn+1} = \frac{1}{n-m+1}\left[-(n+m)J_{mn-1} + i(2n+1)\frac{d}{db}J_{mn}\right] \qquad (3)$$

Используя рекуррентные формулы для функций Бесселя и присоединенных функций Лежандра, находим вторую рекуррентную формулу:

$$J_{m+1n} = \sum_{s=m+1}^{n}(2s-1)\left[\frac{d}{dc}J_{ms-1} - \frac{m}{c}J_{ms-1}\right]. \qquad (4)$$

При этом, суммирование в (4) проводится с шагом 2.
Применяя теперь рекуррентные формулы для присоединенных функций Лежандра и сферических функций Ханкеля, доказываем справедливость соотношений (3), (4) для правой части выражения (1), что с учетом начальных значений (2) доказывает справедливость (1).

Интегралы, выражаемые через функцию Ломмеля двух переменных $U_m(w, z)$:

$$I_m = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{J_m(b\sqrt{x^2+1})}{(x^2+1)^{m/2}}dx$$

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[2U_0(w,b) - J_0(b)\right];$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\frac{b}{w}U_1(w,b) - \frac{w}{b}U_{-1}(w,b) - J_1(b)\right];$$

$$I_{m+2} = \frac{2m+1}{b}I_{m+1} - \frac{a^2+b^2}{b}I_m - \frac{a}{b^2}J_m(b).$$

Здесь $m \geq 0$, $w = \sqrt{a^2+b^2} - a$.

3 Определенные интегралы от элементарных функций

$$\int_0^y \frac{\sin(a\sqrt{y^2-t^2})}{\sqrt{y^2-t^2}}\cos bt\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(ay\cos\varphi)\cos(by\sin\varphi)d\varphi =$$
$$= \frac{\pi}{2}H_0(w_0, y\sqrt{a^2+b^2}).$$

$$\int_y^\infty \frac{e^{-a\sqrt{t^2-y^2}}}{\sqrt{t^2-y^2}} \cos bt\, dt = \frac{\pi}{2}\left[H_0\left(w_0, y\sqrt{a^2+b^2}\right) - Y_0\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right)\right]$$

Где $\sin w_0 = a/\sqrt{a^2+b^2}$, $H_0(w,z)$ – неполная функция Струве [17]; $Y_0(z)$ - функция Неймана [11].

4 Несколько определенных интегралов, содержащих функцию обобщенного интегрального синуса

Как известно, функция обобщенного интегрального синуса S(a,x) определяется выражением [2]:

$$S(a,x) = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{a^2+t^2}}{\sqrt{a^2+t^2}} dt \,.$$

Для вывода необходимых выражений, нам понадобится следующее разложение [9]:

$$S(a,x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-\frac{1}{2})^m}{m!(2m+1)} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(a)}{a^{m+1/2}} \,, \qquad (5)$$

Интегрируя (5), получим:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\beta-1} S(cx\sin\alpha, cx\cos\alpha) x\, dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, 2^{\beta-1}\Gamma(\beta)\cos(\alpha) c \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!(2m+1)} \left(\frac{c^2}{2}\cos^2\alpha\right)^m \frac{J_{m+\beta+\frac{1}{2}}(c\sin\alpha)}{(c\sin\alpha)^{m+\beta+\frac{1}{2}}} \,. \qquad (6)$$

Полагая в (6) $\beta = n$, где n – целое, положительное число, и используя правила дифференцирования функций Бесселя, а также разложение (5), найдем:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n-1} S(ax,bx) x dx = 2^{n-1}(n-1)! \left(-\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^n S(a,b),$$

Полагая в (6) $\beta = n + 1/2$, находим также:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} S(ax,bx) x dx =$$

$$= \sqrt{\pi}\, 2^{n-1}\Gamma(n+1/2) \left(-\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{n+1} \int_0^b J_0\left(\sqrt{a^2+t^2}\right) dt \,.$$

Несобственный интеграл по бесконечному интервалу выражается через интеграл по конечному интервалу от функции Ханкеля второго рода

$$\int_0^\infty S(ax,bx) e^{-ic\sqrt{1-x^2}} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\int_0^b \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{a^2+c^2+t^2})}{\sqrt{a^2+c^2+t^2}}\, dt.$$

5 Определенные интегралы от сфероидальных функций

Путем дифференцирования по параметрам выражений (см., например, [19] с. 136, 137), находим:

$$\int_{-1}^{1} e^{\pm ic\eta\xi t} J_m\left(c[(1-\eta^2)(\xi^2 \pm 1)(1-t^2)]^{\frac{1}{2}}\right) S_{mn}(c,t)t\,dt =$$

$$= (\pm i)^{n-m-1} \frac{2}{c} [\frac{\eta}{\xi}\left(\frac{\xi^2 \pm 1}{1-\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\xi}{\eta}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2 \pm 1}\right)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \times$$

$$\times [\frac{1}{\xi}\left(\frac{\xi^2 \pm 1}{1-\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} S_{mn}(c,\eta) \frac{d}{d\xi} R_{mn}^{(1)}(c,\xi) + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2 \pm 1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\eta} S_{mn}(c,\eta) R_{mn}^{(1)}(c,\xi)].$$

Откуда получаем:

$$\int_{-1}^{1} \sin(c\eta\xi t) J_m\left(c[(1-\eta^2)(\xi^2 \pm 1)(1-t^2)]^{\frac{1}{2}}\right) S_{mn}(c,t)t\,dt =$$

$$= \sin\left[(n-m-1)\frac{\pi}{2}\right] \frac{2}{c} [\frac{\eta}{\xi}\left(\frac{\xi^2 \pm 1}{1-\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\xi}{\eta}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2 \pm 1}\right)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \times$$

$$\times [\frac{1}{\xi}\left(\frac{\xi^2 \pm 1}{1-\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} S_{mn}(c,\eta) \frac{d}{d\xi} R_{mn}^{(1)}(c,\xi) + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2 \pm 1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\eta} S_{mn}(c,\eta) R_{mn}^{(1)}(c,\xi)];$$

$$\int_{-1}^{1} \cos(c\eta\xi t) J_m\left(c[(1-\eta^2)(\xi^2 \pm 1)(1-t^2)]^{\frac{1}{2}}\right) S_{mn}(c,t)t\,dt =$$

$$= \cos\left[(n-m-1)\frac{\pi}{2}\right] \frac{2}{c} [\frac{\eta}{\xi}\left(\frac{\xi^2 \pm 1}{1-\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\xi}{\eta}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2 \pm 1}\right)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \times$$

$$\times [\frac{1}{\xi}\left(\frac{\xi^2 \pm 1}{1-\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} S_{mn}(c,\eta) \frac{d}{d\xi} R_{mn}^{(1)}(c,\xi) + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1-\eta^2}{\xi^2 \pm 1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\eta} S_{mn}(c,\eta) R_{mn}^{(1)}(c,\xi)].$$

Знак “+” относится к сплюснутым, а знак “-“ к вытянутым сфероидальным функциям, угловым $S_{mn}(c,\eta)$ и радиальным $R_{mn}^{(1)}(c,\xi)$ [19].

Ссылки

[1] *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. – М.: ИЛ, 1949. – Т. I. –798 с.

[2] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция; функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 294 с.

[3] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя; парабалического цилиндра; ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 295 с.

[4] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции; функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967. – 299 с.

[5] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т.1– М.: Наука, 1969. – 343 с.

[6] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т.2 – М.: Наука, 1970. – 327 с.

[7] *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965. – 588 с.

[8] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

[9] *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.

[10] *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

[11] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

[12] *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.

[13] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: Элементарные функции.– М.: Наука, 1981.– 797 с.

[14] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 749 с.

[15] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

[16] *Филлипов Ю.Ф.* Таблицы неопределенных интегралов от высших трансцендентных функций. – Харьков: Вища школа, 1983. – 108 с.

[17] *Агрест М.М., Максимов М.З.* Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. – М.: Атомиздат, 1965. – 352 с.

[18] *Meixner J., Schafke F.W.* Mathieusche funktionen und Spheroid funktionen. – Berlin: Springerverlag, 1954. – 410 c.

[19] *Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. – М.: Наука, 1976. – 319 с.

[20] Таблицы обобщенных интегральных синусов и косинусов. –М.: ВЦ АН СССР, 1966.- (БМТ Вып. 37 38).