УДК 517.9

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2008 А.Д. Полянин[1]

В статье описана общая схема исследования математических уравнений, основанная на использовании инвариантов и позволяющая упрощать алгебраические уравнения и системы, понижать порядок обыкновенных дифференциальных уравнений (или их интегрировать), а также получать точные решения нелинейных уравнений математической физики. Построение инвариантов осуществляется путем поиска преобразований, сохраняющих вид рассматриваемых уравнений (при этом не используются понятия и сложный аппарат группового анализа). Приведены многочисленные примеры решения конкретных алгебраических и дифференциальных уравнений. Важно отметить, что применение простейших преобразований сдвига и масштабирования (и их комбинаций) позволяет единообразно описать разрешимых (или допускающих понижение порядка) обыкновенных дифференциальных уравнений значительно больше, чем описано в классических и специальных учебниках. При использовании указанного простого метода надо уметь решать лишь самые простые алгебраические уравнения и системы и уметь дифференцировать. Последнее обстоятельство говорит о целесообразности введения данного метода в стандартные курсы лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики, которые читаются студентам, специализирующимся в области прикладной математики, физики и механики (этот метод с успехом можно включать также в соответствующие специальные курсы, читаемые в некоторых технических и педагогических вузах).

Ключевые слова: *инвариант, алгебраическое уравнение, дифференциальное уравнение, групповой анализ.*

[1]Полянин Андрей Дмитриевич (polyanin@ipmnet.ru), Учреждение Российской академии наук Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

1. Симметрии. Общая схема использования инвариантов для решения математических уравнений

1.1. Симметрии. Преобразования, сохраняющие вид уравнений. Инварианты

В природе и технике часто встречаются геометрические симметрии: зеркальная симметрия, когда одна половина предмета зеркально-симметрична другой, и центральная симметрия, когда предмет переходит сам в себя при повороте относительно некоторого центра. Однако понятие симметрии гораздо шире, чем в указанных случаях, в общем случае под симметрией понимается неизменность при какой-либо процедуре не только предметов, но и физических явлений, математических формул, уравнений и т. д. В данной работе пойдет речь о симметрии алгебраических и дифференциальных уравнений и о том как использовать это свойство, чтобы находить решения или упрощать уравнения.

Под симметриями математических уравнений будут пониматься преобразования, сохраняющие вид уравнений. Ниже приведены примеры конкретных уравнений, которые сохраняют свой вид при некоторых простых преобразованиях.

Пример 1: Рассмотрим биквадратное уравнение

$$x^4 + ax^2 + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Замена $x = -\overline{x}$ приводит к точно такому же уравнению

$$\overline{x}^4 + a\overline{x}^2 + 1 = 0$$

(т.е. уравнение (1.1) сохраняет вид при преобразовании $x = -\overline{x}$).

Два других преобразования $x = \pm 1/\tilde{x}$ также сохраняют вид уравнения (1.1), поскольку после умножения на $\tilde{x}^4$ получим

$$\tilde{x}^4 + a\tilde{x}^2 + 1 = 0.$$

Пример 2: Вид дифференциального уравнения

$$y''_{xx} - y'_x = 0 \tag{1.2}$$

не изменится, если сделать любое преобразование

$$\begin{array}{lll} x = \overline{x} + a, & y = \overline{y} & (a \text{ — любое число}); \\ x = \overline{x}, & y = \overline{y} + b & (b \text{ — любое число}); \\ x = \overline{x}, & y = c\overline{y} & (c \text{ — любое число, не равное нулю}), \end{array} \tag{1.3}$$

поскольку для всех трех указанных преобразований в результате получим точно такое же уравнение

$$\overline{y}''_{\overline{x}\overline{x}} - \overline{y}'_{\overline{x}} = 0.$$

Далее будет показано, что преобразования, сохраняющие вид уравнений, позволяют "размножать" решения уравнений.

Инвариант преобразования — функция (отличная от постоянной), которая сохраняет вид при действии данного преобразования. Инвариант преобразования может зависеть от независимых и зависимой переменной и их производных (если идет речь о дифференциальных уравнениях). Для пояснения понятия инвариантов, которые сохраняют вид при заданных преобразованиях, рассмотрим несколько простых конкретных примеров.

Пример 3: Преобразование одновременного сдвига по обоим осям

$$x = \bar{x} + a, \quad y = \bar{y} + a,$$

где a — любое число, имеет инвариант

$$I = y - x = \bar{y} - \bar{x}.$$

Если x — независимая переменная, а y — зависимая переменная, то другими инвариантами этого преобразования являются производные

$$I_2 = y'_x = \bar{y}'_{\bar{x}}, \qquad I_3 = y''_{xx} = \bar{y}''_{\bar{x}\bar{x}}, \quad \ldots .$$

Пример 4: Преобразование одинакового изменения масштабов длины по обоим осям

$$x = a\bar{x}, \qquad y = a\bar{y},$$

где $a \neq 0$ — любое число, имеет инвариант

$$I_1 = \frac{y}{x} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}.$$

Если x — независимая переменная, а y — зависимая переменная, то имеются также более сложные инварианты, которые зависят от производных и сохраняют вид при действии данного преобразования, например,

$$I_2 = y'_x = \bar{y}'_{\bar{x}}, \qquad I_3 = xy''_{xx} = \bar{x}\bar{y}''_{\bar{x}\bar{x}}, \quad \ldots .$$

1.2. Общая схема использования инвариантов для решения математических уравнений

Ниже изображена принципиальная схема исследования математических уравнений, которая основана на поиске преобразований, сохраняющих вид уравнений, с последующем переходом в уравнении от исходных переменных к новым переменным — инвариантам преобразований.

Принципиальная схема исследования математических уравнений

Исходное уравнение
⇓
Ищется преобразование, сохраняющее вид уравнения
⇓
Определяются инварианты, сохраняющие вид при действии данного преобразования
⇓
Исходное уравнение записывается в терминах инвариантов

После выполнения указанных действий уравнение часто упрощается или приводится к разрешимому виду. Важно отметить, что данная схема с успехом может применяться для самых различных типов математических уравнений (см. далее разделы 2–4).

Для лучшего понимания и усвоения идей использования инвариантов для решения математических уравнений при изложении дальнейшего материала применяется схема "от простого к сложному": сначала кратко излагаются соответствующие результаты для алгебраических уравнений, потом — для обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем — для нелинейных уравнений математической физики.

2. Алгебраические уравнения и системы уравнений

2.1. Уравнения, содержащие четные степени

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n-4}x^{2n-4} + \dots + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0, \tag{2.1}$$

содержащие только четные степени. Биквадратное уравнение является частным случаем уравнения (2.1) при $n = 2$.

Замена

$$x = -\bar{x} \tag{2.2}$$

приводит точно к такому же уравнению для $\bar{x}$ (говорят, что уравнение (2.1) инвариантно относительно преобразования (2.2)). Отсюда следует, что если уравнение (2.1) имеет решение $x = x_1$, то оно имеет также другое решение $x = -x_1$.

Возводя в квадрат обе части (2.2), получим простейшую алгебраическую функцию, которая сохраняет вид при преобразовании (2.2):

$$x^2 = \bar{x}^2. \tag{2.3}$$

Эта функция и является инвариантом преобразования (2.2). Если выбирать инвариант (2.3) за новую переменную, $z = x^2$, то уравнение (2.1) порядка $2n$ преобразуется к уравнению порядка n:

$$a_{2n}z^n + a_{2n-2}z^{n-1} + a_{2n-4}z^{n-2} + \cdots + a_4z^2 + a_2z + a_0 = 0.$$

Таким образом в данном случае переход от исходной переменной x к инварианту преобразования (2.3) $z = x^2$ позволяет упростить рассматриваемое уравнение (понизить его порядок в два раза).

2.2. Возвратные уравнения

Возвратное алгебраическое уравнение четной степени имеет вид

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a_0 \neq 0). \tag{2.4}$$

Левая часть этого уравнения называется *возвратным многочленом.*

Замена

$$x = \frac{1}{\bar{x}} \tag{2.5}$$

преобразует уравнение (2.4) в точно такое же уравнение Отсюда следует, что если уравнение (2.4) имеет корень $x = b$, то оно имеет также другое решение $x = 1/b$.

Простейшее возвратное уравнение — квадратное уравнение

$$a_0x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Делим его на x^2:

$$a_0\Bigl(x + \frac{1}{x}\Bigr) + a_1 = 0.$$

Результат удобно представить в форме уравнения первого порядка

$$a_0z + a_1 = 0,$$

где

$$z = x + \frac{1}{x} = \bar{x} + \frac{1}{\bar{x}} \tag{2.6}$$

— простейший *инвариант преобразования* (2.5).

Теорема 1: В общем случае возвратное уравнение порядка $2n$ допускает понижение порядка с помощью подстановки (2.6). В результате получается алгебраическое уравнение порядка n.

Пример 1: Рассмотрим возвратное уравнение четвертого порядка

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Делим его на x^2:

$$a\Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) + b\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + c = 0. \tag{2.7}$$

Учитываем, что

$$\Big(x + \frac{1}{x}\Big)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2.$$

В результате уравнение (2.7) путем замены (2.6) (основанной на инварианте преобразования (2.5)) сводится к квадратному уравнению

$$az^2 + bz + c - 2a = 0.$$

Теорема 2: В общем случае возвратное алгебраическое уравнение нечетного порядка

$$P_{2n+1}(x) = 0,$$

где $P_{2n+1}(x) \equiv a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ имеет корень $x = -1$, а его левая часть допускает представление

$$P_{2n+1}(x) = (x+1)Q_{2n}(x),$$

где $Q_{2n}(x)$ — возвратный многочлен степени $2n$.

Пример 2: Возвратное уравнение третьего порядка

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

может быть представлено в виде

$$(x+1)[a_0x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0] = 0.$$

Из теоремы 2 следует, что возвратное уравнение порядка $2n+1$ после деления на $(x+1)$ и введения новой переменной (2.6) сводится к уравнению порядка n.

2.3. Обобщенные возвратные уравнения

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$\begin{gathered} a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \cdots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n + \\ + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2 a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1}a_1x + \lambda^n a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Первые $n+1$ членов этого уравнения (которые расположены на первой строке) совпадают с соответствующими членами возвратного уравнения (2.4), а оставшиеся члены (которые расположены на второй строке) отличаются множителями вида λ^m от соответствующих членов возвратного уравнения.

Нетрудно проверить, что преобразование

$$x = \frac{\lambda}{\bar{x}}, \tag{2.9}$$

сохраняет вид уравнения (2.8), а простейший инвариант преобразования (2.9) записывается так:

$$z = x + \frac{\lambda}{x} = \bar{x} + \frac{\lambda}{\bar{x}}. \qquad (2.10)$$

Введение новой переменной по формуле (2.10) приводит (2.8) к уравнению n-го порядка.

Пример 3: Рассмотрим уравнение четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0,$$

которое является частным случаем уравнения (2.8) при $n = 2$, $\lambda = -1$. Замена

$$z = x - \frac{1}{x}$$

приводит к квадратному уравнению

$$az^2 + bz + 2a + c = 0.$$

2.4. Системы алгебраических уравнений, симметричные относительно перестановки аргументов

Многочлен $P(x, y)$ от двух переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при перестановке аргументов: $P(x, y) = P(y, x)$.

Замечание: В терминах преобразований симметрический многочлен определяется как многочлен сохраняющий вид при преобразовании $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$.

Простейшие симметричные многочлены

$$u = x + y, \quad w = xy \qquad (2.11)$$

называются *элементарными*. Эти многочлены являются простейшими алгебраическими инвариантами при перестановке аргументов.

Любой симметрический многочлен от двух переменных может быть единственным образом выражен через элементарные многочлены.

Для решения систем двух алгебраических уравнений

$$P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0,$$

где P и Q — симметричные многочлены, полезно в качестве новых переменных использовать элементарные симметрические многочлены (2.11). Подобные системы обладают следующим свойством: если система имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0$, $y = x_0$.

Пример 4: Рассмотрим нелинейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + axy + y^2 &= b, \\ x^4 + cx^2y^2 + y^4 &= d. \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Система (2.12) не меняется при перестановке аргументов.

Переходя в (2.12) от x, y к переменным (2.11) и учитывая формулы

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2w,$$
$$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2-2w)^2 - 2w^2 = u^4 - 4u^2w + 2w^2,$$

получим

$$\begin{aligned} u^2 - (a-2)w &= b, \\ u^4 - 4u^2w + (c+2)w^2 &= d. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Исключая из уравнений u, приходим к квадратному уравнению

$$(a^2 + c - 2)w^2 - 2abw + b^2 - d = 0.$$

Дальнейшая процедура определения решений элементарна и мы ее опускаем.

Пример 5: Рассмотрим нелинейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a, \\ x^3 + y^3 &= b. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Переходя к переменным (2.11) и учитывая равенство $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$, получим

$$\begin{aligned} u^2 - 2w &= a, \\ u^3 - 3uw &= b. \end{aligned}$$

Исключив w, приходим к кубическому уравнению

$$u^3 - 3au + 2b = 0. \tag{2.15}$$

Отметим, что прямое исключение из системы (2.14) переменной y приводит к существенно более сложному чем (2.15) уравнению шестого порядка:

$$(a - x^2)^3 = (b - x^3)^2 \quad \Longrightarrow \quad 2x^6 - 3ax^4 - 2bx^3 + 3a^2x^2 + b^2 - a^3 = 0.$$

Замечание: Дополнительный теоретический материал по алгебраическим уравнениям и системам уравнений, обладающими свойствами симметрии (т.е. допускающими преобразования, сохраняющими вид уравнений), и многочисленные примеры можно найти в [1, 2].

2.5. Краткие выводы

Описанный метод исследования, основанный на использовании инвариантов, позволяет решать и упрощать некоторые типы алгебраических уравнений (путем понижения их степени) и систем алгебраических уравнений.

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

3.1. Преобразования, сохраняющие вид уравнения, и их инварианты

Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

инвариантно относительно (обратимого) преобразования

$$x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = \psi(\bar{x}, \bar{y}), \tag{3.2}$$

если в результате подстановки (3.2) в (3.1) получим точно такое же уравнение

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'_{\bar{x}}, \ldots, \bar{y}^{(n)}_{\bar{x}}) = 0. \tag{3.3}$$

Функция F в уравнениях (3.1) и (3.3) одинакова.

Преобразования, сохраняющие вид уравнения, позволяют "размножать" его решения. Действительно, пусть известно частное решение

$$y = g(x) \tag{3.4}$$

уравнения (3.1). Поскольку уравнение (3.1) после перехода к новым переменным (3.2) сохраняет такой же вид, то преобразованное уравнение (3.3) имеет решение

$$\bar{y} = g(\bar{x}). \tag{3.5}$$

Возвращаясь в (3.5) к старым переменным по формулам (3.2) (их предварительно надо разрешить относительно $\bar{x}$ и $\bar{y}$) получим решение уравнения (3.1), которое, в случае общего положения будет отличаться от исходного решения (3.4).

Пример 1: Уравнение третьего порядка

$$y'''_{xxx} - y'_x = 0 \tag{3.6}$$

имеет частное решение

$$y = e^x.$$

Преобразование

$$x = \bar{x} + a, \qquad y = \bar{y} + b \tag{3.7}$$

сохраняет вид этого уравнения, поэтому преобразованное уравнение третьего порядка $\bar{y}'''_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}'_{\bar{x}} = 0$ имеет решение $\bar{y} = e^{\bar{x}}$. Подставляя сюда старые переменные, полученные обращением формул (3.7), имеем новое решение уравнения (3.6):

$$y = Ae^x + b, \qquad A = e^{-a},$$

содержащее две произвольные постоянные A и b.

Функция $I(x, y, y'_x)$ (отличная от постоянной) называется *инвариантом преобразования* (3.2), если она сохраняется при этом преобразовании

$$I(x, y, y'_x) = I(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'_{\bar{x}}).$$

Замечание: Если $I = I(x, y, y'_x)$ — инвариант преобразования (3.2), то $\Psi(I)$, где Ψ — произвольная функция, тоже является инвариантом данного преобразования.

3.2. Процедура понижения порядка уравнений при $n \geqslant 2$ (приведение уравнений к разрешимому виду $n = 1$)

Конкретизируем описанную в разделе 1 общую схему использования инвариантов для анализа математических уравнений применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

На первом этапе ищется преобразование

$$x = \varphi(\overline{x}, \overline{y}; a), \qquad y = \psi(\overline{x}, \overline{y}; a), \tag{3.8}$$

которое сохраняет вид уравнения (3.1). Преобразование (3.8) обязательно должно зависеть от *одного свободного параметра* $a \in [a_1, a_2]$ (само исходное уравнение (3.1) от этого параметра не зависит).

На втором этапе рассматриваемой схемы для уравнений второго и более высоких порядков (при $n \geqslant 2$) строятся два функционально-независимых инварианта преобразования (3.8):

$$I_1 = I_1(x, y), \qquad I_2 = I_2(x, y, y'_x). \tag{3.9}$$

На третьем этапе инварианты (3.9) выбираются в качестве новых переменных для уравнения (3.1), т.е. делается преобразование

$$u = I_2, \quad z = I_1, \quad u = u(z).$$

Указанная процедура приводит к понижению порядка уравнения на единицу.

Для уравнений первого порядка (при $n = 1$) на третьем этапе в (3.1) надо сделать замену

$$z = I_1, \quad z = z(x).$$

В результате уравнение приводится к разрешимому виду (к уравнению с разделяющимися переменными).

3.3. Используемые преобразования. Процедура определения инвариантов

Далее в качестве преобразований (3.8) будем использовать только простейшие преобразования вида

$x = \overline{x} + A, \quad y = \overline{y} + B$ *преобразование сдвига*;
$x = A\overline{x}, \quad y = B\overline{y}$ *преобразование масштабирования*

и их комбинации

$$x = A_1\overline{x} + B_1, \quad y = A_2\overline{y} + B_2. \tag{3.10}$$

В этом случае между производными имеют место линейные соотношения

$$y'_x = \frac{A_2}{A_1}\overline{y}'_{\overline{x}}, \quad y''_{xx} = \frac{A_2}{A_1^2}\overline{y}''_{\overline{x}\overline{x}}, \quad y^{(n)}_x = \frac{A_2}{A_1^n}\overline{y}^{(n)}_{\overline{x}}. \tag{3.11}$$

Коэффициенты преобразования A_1, A_2, B_1, B_2 определяются из условия инвариантности рассматриваемого уравнения (коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 должны зависеть от одного свободного параметра a).

Справедливо следующее утверждение. Пусть преобразование (3.10) сохраняет вид некоторого уравнения, имеющего частное решение (3.4). Тогда это уравнение имеет также решение

$$y = B_2 + A_2 g\Big(\frac{x - B_1}{A_1}\Big).$$

Первый инвариант I_1 получаем путем исключения параметра a из равенств (3.10), а второй инвариант I_2 — путем исключения параметра a из одного из соотношений (3.10) и первого соотношения (3.11).

3.4. Анализ конкретных обыкновенных дифференциальных уравнений

Пример 2: Уравнение второго порядка, не зависящее явно от y:

$$y''_{xx} = F(x, y'_x). \tag{3.12}$$

Это уравнение не меняется при произвольном сдвиге по зависимой переменной: $y \Longrightarrow y + a$ (соответствует $y = \overline{y} + a$), где a — свободный параметр. При этом из трех величин x, y, y'_x две остаются неизменными:

$$x, \quad y'_x.$$

Это инварианты уравнения (3.12), т.е. $I_1 = x$, $I_2 = y'_x$. Их выбираем за новые переменные:

$$u = y'_x, \quad z = x, \quad u = u(z).$$

В результате получим уравнение первого порядка: $u'_x = F(x, u)$.

Пример 3: Автономное уравнение второго порядка, не зависящее явно от x:

$$y''_{xx} = F(y, y'_x). \tag{3.13}$$

Это уравнение не меняется при произвольном сдвиге по независимой переменной: $x \Longrightarrow x + a$, где a — свободный параметр. При этом из трех величин x, y, y'_x две остаются неизменными:

$$y, \quad y'_x.$$

Это инварианты уравнения (3.13), т.е. $I_1 = y$, $I_2 = y'_x$. Их выбираем за новые переменные:

$$u = y'_x, \quad z = y, \quad u = u(z).$$

В результате получим уравнение первого порядка: $uu'_y = F(y, u)$.

Пример 4: Нелинейное уравнение второго порядка

$$y''_{xx} = yF\Big(x, \frac{y'_x}{y}\Big) \tag{3.14}$$

не меняется при растяжении зависимой переменной: $y \Longrightarrow ay$. При этом две комбинации из трех величин x, y, y'_x остаются остаются неизменными:

$$x, \quad \frac{y'_x}{y}.$$

Это инварианты уравнения (3.14). Их выбираем за новые переменные:

$$u = \frac{y'_x}{y}, \quad z = x, \quad u = u(z).$$

Дифференцируя u по x, имеем

$$u'_x = \frac{y''_{xx}}{y} - \Big(\frac{y'_x}{y}\Big)^2 = \frac{y''_{xx}}{y} - u^2.$$

Исключая с помощью этого соотношения y''_{xx} в (3.14), приходим к уравнению первого порядка

$$u'_x = F(x, u) - u^2.$$

Замечание: При $F(x,u) = g(x) + f(x)u$ исходное уравнение (3.14) является общим линейным однородным уравнением второго порядка. Указанным преобразованием оно сводится к уравнению первого порядка с квадратичной нелинейностью.

Пример 5: Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$yy''_{xx} - (y'_x)^2 = ky^3 e^{\lambda x}. \tag{3.15}$$

Ищем инвариантное преобразование в виде

$$x = \overline{x} + b, \quad y = a\overline{y}. \tag{3.16}$$

Подставив (3.16) в (3.15), а затем сократив на a, получим

$$\overline{y}\overline{y}''_{\overline{x}\overline{x}} - (\overline{y}'_{\overline{x}})^2 = ae^{\lambda b} k\overline{y}^3 e^{\lambda\overline{x}}.$$

Требуя совпадения с уравнением (3.15), получим соотношение для определения параметра b:

$$ae^{\lambda b} = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{1}{\lambda}\ln a. \tag{3.17}$$

При этом параметр a остается свободным.

Подставим (3.17) в (3.16), а затем из второго соотношения исключим параметр a с помощью первого соотношения. Имеем

$$y = \overline{y}e^{\lambda(\overline{x} - x)} \quad \Longrightarrow \quad ye^{\lambda x} = \overline{y}e^{\lambda\overline{x}}.$$

Таким образом получен первый инвариант преобразования (3.16)–(3.17) в виде

$$I_1 = ye^{\lambda x}. \tag{3.18}$$

Чтобы найти второй инвариант, вычислим производную

$$y'_x = a\bar{y}'_{\bar{x}}.$$

Исключая здесь параметр a с помощью второго соотношения (3.16), получим второй инвариант

$$\frac{y'_x}{y} = \frac{\bar{y}'_{\bar{x}}}{\bar{y}} = I_2. \tag{3.19}$$

Для понижения порядка исходного уравнения надо принять за новые переменные инварианты (3.18)–(3.19):

$$z = e^{\lambda x}y, \quad u = \frac{y'_x}{y}, \quad u = u(z). \tag{3.20}$$

С одной стороны

$$u'_x = \frac{y''_{xx}}{y} - \Big(\frac{y'_x}{y}\Big)^2 = \frac{y''_{xx}}{y} - u^2; \tag{3.21}$$

с другой стороны

$$u'_x = u_z z'_x = (\lambda e^{\lambda x}y + e^{\lambda x}y'_x)u'_z = \Big(\lambda z + e^{\lambda x}y\frac{y'_x}{y}\Big)u'_z = (\lambda z + zu)u'_z. \tag{3.22}$$

Приравнивая (3.21)–(3.22), имеем

$$\frac{y''_{xx}}{y} - u^2 = (\lambda z + zu)u'_z \quad \Longrightarrow \quad \frac{y''_{xx}}{y} = u^2 + (\lambda z + zu)u'_z.$$

Подставив в (3.3), после элементарных преобразований получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$(\lambda + u)u'_z = k.$$

Замечание: Аналогичными свойствами обладает более общее нелинейное уравнение второго порядка

$$y''_{xx} = yF\Big(e^{\lambda x}y, \frac{y'_x}{y}\Big).$$

Преобразование (3.20) приводит его к уравнению первого порядка:

$$u^2 + (\lambda z + zu)u'_z = F(z, u).$$

Пример 6: Рассмотрим теперь нелинейное уравнение первого порядка

$$y'_x = f\Big(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\Big). \tag{3.23}$$

Левая часть этого уравнения не меняется при преобразованиях вида

$$x = a\bar{x} + b, \quad y = a\bar{y} + c, \tag{3.24}$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Подставим (3.24) в аргумент правой части уравнения (3.23):

$$\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2} = \frac{a(\alpha_1\bar{x} + \beta_1\bar{y}) + \alpha_1 b + \beta_1 c + \gamma_1}{a(\alpha_2\bar{x} + \beta_2\bar{y}) + \alpha_2 b + \beta_2 c + \gamma_2}. \tag{3.25}$$

Чтобы уравнение (3.23) было инвариантным относительно преобразования (3.24) в (3.25) надо положить

$$\alpha_1 b + \beta_1 c + \gamma_1 = a\gamma_1, \quad \alpha_2 b + \beta_2 c + \gamma_2 = a\gamma_2. \tag{3.26}$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему двух линейных алгебраических уравнений первого порядка для определения коэффициентов b и c. При этом коэффициент a остается произвольным. Таким образом уравнение (3.23) инвариантно относительно преобразования (3.24), (3.26), а первым инвариантом этого преобразования является аргумент правой части уравнения (3.23). Поэтому в уравнении (3.23) надо сделать замену

$$z = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}, \quad \text{где} \quad z = z(x). \tag{3.27}$$

Разрешим (3.27) относительно y, а затем продифференцируем по x. Заменив затем y'_x на $f(z)$ (это следует из (3.23) и (3.27)), после элементарных преобразований приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)x + \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}{(\beta_2 z - \beta_1)^2} z'_x = f(z) + \frac{\alpha_2 z - \alpha_1}{\beta_2 z - \beta_1}.$$

В таблице 1 представлены некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка путем использования простейших инвариантных преобразований. Для уравнений первого порядка (когда функция $F(u, v, w)$ не зависит от третьего аргумента) уравнения, указанные в таблице 1, решаются путем перехода от y к новой зависимой переменной $z = I_1(x, y)$, где I_1 — первый инвариант.

Приведенные в таблице 1 результаты легко обобщаются на нелинейные уравнения произвольного порядка.

3.5. Краткие выводы

Описанный метод исследования обыкновенных дифференциальных уравнений использует идеи метода группового анализа, но значительно проще последнего. Содержание разд. 3.2 (основанного на результатах [2–5]) на начальном этапе может излагаться как общий эвристический подход, эффективность которого проверяется на конкретных примерах. Для применения данного метода надо уметь решать лишь самые простые алгебраические уравнения (и системы) и уметь дифференцировать, в то время как при использовании метода группового анализа на промежуточных этапах приходится рассматривать уравнения с частными производными (т.е. приходится выходить за рамки стандартного курса по обыкновенным дифференциальных уравнениям). В качестве еще одного достоинства этого простого метода следует отметить, что здесь практически не приходится вводить новых понятий, которыми изобилует метод группового анализа. Данный метод позволяет единообразно описать разрешимых (или допускающих понижение порядка) обыкновенных дифференциальных уравнений значительно больше, чем разобрано в подавляющем большинстве существующих учебников.

Таблица 1

Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка, и их инварианты

Уравнение	Инвариантное преобразование	Первый инвариант	Второй инвариант
$F(x, y'_x, y''_{xx}) = 0$	$y = \bar{y} + a$	$I_1 = x$	$I_2 = y'_x$
$F(y, y'_x, y''_{xx}) = 0$	$x = \bar{x} + a$	$I_1 = y$	$I_2 = y'_x$
$F(\alpha x + \beta y + \gamma, y'_x, y''_{xx}) = 0$	$x = \bar{x} + a\beta$, $y = \bar{y} - a\alpha$	$I_1 = \alpha x + \beta y + \gamma$	$I_2 = y'_x$
$F\left(x, \dfrac{y'_x}{y}, \dfrac{y''_{xx}}{y}\right) = 0$	$y = a\bar{y}$	$I_1 = x$	$I_2 = \dfrac{y'_x}{y}$
$F(y, xy'_x, x^2 y''_{xx}) = 0$	$x = a\bar{x}$	$I_1 = y$	$I_2 = xy'_x$
$F\left(e^{\lambda x} y, \dfrac{y'_x}{y}, \dfrac{y''_{xx}}{y}\right) = 0$	$x = \bar{x} - \dfrac{1}{\lambda}\ln a$, $y = a\bar{y}$	$I_1 = e^{\lambda x} y$	$I_2 = \dfrac{y'_x}{y}$
$F(e^{\lambda x} y, e^{\lambda x} y'_x, e^{\lambda x} y''_{xx}) = 0$	$x = \bar{x} - \dfrac{1}{\lambda}\ln a$, $y = a\bar{y}$	$I_1 = e^{\lambda x} y$	$I_2 = e^{\lambda x} y'_x$
$F(xe^{\lambda y}, xy'_x, x^2 y''_{xx}) = 0$	$x = a\bar{x}$, $y = \bar{y} - \dfrac{1}{\lambda}\ln a$	$I_1 = xe^{\lambda y}$	$I_2 = xy'_x$
$F(x^k y, x^{k+1} y'_x, x^{k+2} y''_{xx}) = 0$	$x = a\bar{x}$, $y = a^{-k}\bar{y}$	$I_1 = x^k y$	$I_2 = x^{k+1} y'_x$
$F\left(x^n y^m, \frac{xy'_x}{y}, \dfrac{x^2 y''_{xx}}{y}\right) = 0$	$x = a^m \bar{x}$, $y = a^{-n}\bar{y}$	$I_1 = x^n y^m$	$I_2 = \dfrac{xy'_x}{y}$

4. Дифференциальные уравнения с частными производными

4.1. Преобразования, сохраняющие вид уравнения, и их инварианты

Будем рассматривать обратимые преобразования

$$x = \varphi(\bar{x}, \bar{t}, \bar{w}), \quad t = \psi(\bar{x}, \bar{t}, \bar{w}), \quad w = \chi(\bar{x}, \bar{t}, \bar{w}). \tag{4.1}$$

Говорят, что уравнение с частными производными

$$F\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dots\Big) = 0 \tag{4.2}$$

инвариантно относительно преобразования (4.1), если в результате подстановки (4.1) в (4.2) получим точно такое же уравнение

$$F\Big(\bar{x}, \bar{t}, \bar{w}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2}, \dots\Big) = 0. \tag{4.3}$$

Функция F в уравнениях (4.2) и (4.3) одинакова.

Величина $I(x,t,w)$ называется *инвариантом преобразования* (4.1), если она сохраняется при этом преобразовании

$$I(x,t,w) = I(\overline{x},\overline{t},\overline{w}).$$

Замечание. Если $I = I(x,t,w)$ — инвариант преобразования (4.1), то $\Psi(I)$, где Ψ — произвольная функция, тоже является инвариантом данного преобразования.

4.2. Процедура построения точных решений

Конкретизируем описанную в разделе 1 общую схему использования инвариантов для анализа математических уравнений применительно к дифференциальным уравнениям с частными производными.

На первом этапе ищется преобразование

$$x = \varphi(\overline{x},\overline{t},\overline{w};C), \quad t = \psi(\overline{x},\overline{t},\overline{w};C), \quad w = \chi(\overline{x},\overline{t},\overline{w};C), \tag{4.4}$$

которое сохраняет вид уравнения (4.2). Преобразование (4.4) обязательно должно зависеть от *одного свободного параметра* $C \in [C_1, C_2]$ (причем само уравнение (4.2) от этого параметра не зависит).

На втором этапе строятся два функционально-независимых инварианта преобразования (4.4):

$$I_1 = I_1(x,y,w), \qquad I_2 = I_2(x,y,w). \tag{4.5}$$

На третьем этапе инварианты (4.5) выбираются в качестве новых переменных и точное решение уравнения (4.2) ищется в виде

$$I_2 = \Phi(I_1), \tag{4.6}$$

где $\Phi(z)$ — функция, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению, которое получается путем подстановки (4.6) в (4.2) (соответствующее решение называется *инвариантным*).

Как и ранее, в качестве преобразований (4.4) будем рассматривать только простейшие преобразования

$$x = \overline{x} + a, \quad t = \overline{t} + b, \quad w = \overline{w} + c \quad (\textit{преобразование сдвига}); \tag{4.7}$$

$$x = a\overline{x}, \quad t = b\overline{t}, \quad w = c\overline{w} \quad (\textit{преобразование масштабирования}) \tag{4.8}$$

и их комбинации.

4.3. Примеры построения точных решений нелинейных уравнений математической физики

Пример 1: Рассмотрим нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big]. \tag{4.9}$$

Это уравнение не меняется при произвольном сдвиге по зависимым переменным

$$t = \bar{t} + Ck, \quad x = \bar{x} + C\lambda, \quad w = \bar{w}, \tag{4.10}$$

где C — свободный параметр, а k и λ — некоторые заданные числа (которые могут выбираться произвольно). Исключая из первых двух соотношений (4.10) параметр C находим один из инвариантов

$$\frac{x - \bar{x}}{\lambda} = \frac{t - \bar{t}}{k} \quad \Longrightarrow \quad kx - \lambda t = k\bar{x} - \lambda\bar{t} = I_1.$$

Вторым инвариантом здесь является $I_2 = w = \bar{w}$. В силу (4.6) уравнение (4.9) допускает решение вида

$$w = \Phi(z), \qquad z = kx - \lambda t. \tag{4.11}$$

Подставив (4.11) в (4.9), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$k^2[f(\Phi)\Phi']' + \lambda\Phi' = 0.$$

Интегрируя дважды, получим его решение в неявном виде

$$k^2 \int \frac{f(\Phi)\,d\Phi}{\lambda\Phi + C_1} = -z + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Замечание 1: Решения вида (4.11) называются решениями типа *бегущей волны* [6, 7].

Замечание 2: Решения типа бегущей волны допускают уравнения общего вида, которые не зависят явно от независимых переменных:

$$F\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dots\Big) = 0. \tag{4.12}$$

Подставляя (4.11) в (4.12), получим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(z)$:

$$F(\Phi,\, k\Phi',\, -\lambda\Phi',\, k^2\Phi'',\, -k\lambda\Phi'',\, \lambda^2\Phi'',\, \dots) = 0.$$

Пример 2: Рассмотрим уравнение нестационарной теплопроводности с нелинейным источником степенного вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta w^n. \tag{4.13}$$

Ищем инвариантное преобразование масштабирования. Подставив (4.8) в (4.13) и умножив все члены на b/c, имеем

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = \frac{b}{a^2}\alpha\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + bc^{n-1}\beta\bar{w}^n.$$

Требуя совпадения с уравнением (4.13), получим два соотношения

$$\frac{b}{a^2} = 1, \qquad bc^{n-1} = 1.$$

Выразим параметры a и c через b:

$$a = \sqrt{b}, \qquad c = b^{\frac{1}{1-n}}.$$

Подставляя эти величины в (4.8), находим инвариантное преобразование

$$x = \sqrt{b}\,\bar{x}, \quad t = b\bar{t}, \quad w = b^{\frac{1}{1-n}}\bar{w}, \tag{4.14}$$

содержащее свободный параметр $C = b$.

Перейдем теперь к определению инвариантов. Из первых двух соотношений (4.14) исключаем b:

$$x = \left(\frac{t}{\bar{t}}\right)^{1/2}\bar{x} \quad \Longrightarrow \quad xt^{-1/2} = \bar{x}\bar{t}^{-1/2} \quad \Longrightarrow \quad I_1 = xt^{-1/2}. \tag{4.15}$$

Из второго и последнего соотношений (4.14) исключаем b:

$$w = \left(\frac{t}{\bar{t}}\right)^{\frac{1}{1-n}}\bar{w} \quad \Longrightarrow \quad wt^{\frac{1}{n-1}} = \bar{w}\bar{t}^{\frac{1}{n-1}} \quad \Longrightarrow \quad I_2 = wt^{\frac{1}{n-1}}. \tag{4.16}$$

Соотношение (4.6) с учетом (4.15)–(4.16) определяет вид автомодельное решения

$$w = t^{\frac{1}{1-n}}\Phi(z), \quad z = xt^{-1/2}. \tag{4.17}$$

Подставив (4.17) в (4.13), после несложных преобразований приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{1-n}\Phi - \frac{1}{2}z\Phi'_z = a\Phi''_{zz} + b\Phi^n.$$

Замечание: Преобразование (4.8) часто удобнее записывать в виде

$$t = C\bar{t}, \quad x = C^k\bar{x}, \quad w = C^m\bar{w} \qquad (C > 0),$$

а затем определять значения постоянных k и m, при которых сохраняется вид исходного уравнения (C — свободный параметр). Соответствующие таким преобразованиям точные решения называются *автомодельными* [6–8].

Примеры некоторых автомодельных решений, указанные в [9–11], приведены в таблице 2 (используется сокращение ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение).

Таблица 2

Некоторые нелинейные уравнения математической физики, которые допускают автомодельные решения

Уравнение	Его название	Вид решения	Итоговое ОДУ
$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$	Нестационарное уравнение теплопроводности	$w=w(z)$, $z=xt^{-1/2}$	$[f(w)w']'+\frac{1}{2}zw'=0$
$\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bw\frac{\partial w}{\partial x}$	Уравнение Бюргерса	$w=t^{-1/2}u(z)$, $z=xt^{-1/2}$	$au''+buu'+$ $+\frac{1}{2}zu'+\frac{1}{2}u=0$
$\frac{\partial w}{\partial t}=f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	Уравнение фильтрации	$w=t^{1/2}u(z)$, $z=xt^{-1/2}$	$2f(u')u''+zu'-u=0$
$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$	Волновое уравнение	$w=w(z)$, $z=x/t$	$(z^2w')'=[f(w)w']'$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=aw^n$	Уравнение теплопроводности с источником	$w=x^{\frac{2}{1-n}}u(z)$, $z=y/x$	$(1+z^2)u''-\frac{2(1+n)}{1-n}zu'+$ $+\frac{2(1+n)}{(1-n)^2}u-au^n=0$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$	Уравнение околозвукового газового потока	$w=x^{-3k-2}u(z)$, $z=x^ky$, k — любое	$\frac{a}{k+1}u'u''+\frac{k^2}{k+1}z^2u''-$ $-5kzu'+3(3k+2)u=0$
$\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+bw\frac{\partial w}{\partial x}$	Уравнение Кортевега – де Фриза	$w=t^{-2/3}u(z)$, $z=xt^{-1/3}$	$au'''+buu'+$ $+\frac{1}{3}zu'+\frac{2}{3}u=0$
$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-$ $-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$	Уравнение пограничного слоя	$w=x^{\lambda+1}u(z)$, $z=x^\lambda y$, λ — любое	$(2\lambda+1)(u')^2-$ $-(\lambda+1)uu''=au'''$

Аналогичный подход с успехом может использоваться для построения точных решений систем уравнений с частными производными.

Пример 3: Рассмотрим систему уравнений стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине:

$$\begin{gathered} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Сделаем в (4.18) растяжение независимых и зависимых переменных по правилу

$$x=C\bar{x},\quad y=C^k\bar{y},\quad u=C^m\bar{u},\quad v=C^n\bar{v}. \tag{4.19}$$

Умножив полученные уравнения на подходящие постоянные множители, имеем

$$\begin{gathered} \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+C^{n-m-k+1}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=C^{-m-2k+1}\nu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2},\\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+C^{n-m-k+1}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=0. \end{gathered} \tag{4.20}$$

Потребуем, чтобы вид уравнений преобразованной системы (4.20) совпал с видом уравнений исходной системы (4.18). Это условие дает два линейных алгебраических уравнения: $n-m-k+1=0$, $-2k-m+1=0$. Разрешив их относительно m и n, получим
$$m = 1-2k, \qquad n=-k, \tag{4.21}$$
где показатель k может быть выбран произвольно. Подставим (4.21) в (4.19):
$$x = C\bar{x}, \qquad y = C^k\bar{y}, \qquad u = C^{1-2k}\bar{u}, \qquad v = C^{-k}\bar{v}.$$

Находим отсюда инварианты путем исключения параметра C:
$$\begin{aligned}
y &= \Big(\frac{x}{\bar{x}}\Big)^k\bar{y} &&\Longrightarrow\quad yx^{-k} = \bar{y}\bar{x}^{-k} = I_1 = \zeta;\\
u &= \Big(\frac{x}{\bar{x}}\Big)^{1-2k}\bar{u} &&\Longrightarrow\quad ux^{2k-1} = \bar{u}\bar{x}^{2k-1} = I_2;\\
v &= \Big(\frac{x}{\bar{x}}\Big)^k\bar{v} &&\Longrightarrow\quad vx^k = \bar{v}\bar{x}^k = I_3.
\end{aligned}$$

Решение ищется в виде $I_2 = U(I_1)$, $I_3 = V(I_1)$, т.е.
$$ux^{2k-1} = U(\zeta), \quad vx^k = V(\zeta)$$
или
$$u(x,y) = x^{1-2k}U(\zeta), \qquad v(x,y) = x^{-k}V(\zeta), \qquad \zeta = yx^{-k}, \tag{4.22}$$
где k — произвольная постоянная. Подставив (4.22) в исходную систему (4.18), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $U = U(\zeta)$, $V = V(\zeta)$:
$$\begin{aligned}
&U\big[(1-2k)U - k\zeta U'_\zeta\big] + VU'_\zeta = \nu U''_{\zeta\zeta},\\
&(1-2k)U - k\zeta U'_\zeta + V'_\zeta = 0.
\end{aligned}$$

Пример 4: Рассмотрим уравнение Клейна–Гордона с нелинейностью экспоненциального вида
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\lambda w}. \tag{4.23}$$

Ищем инвариантное преобразование в виде комбинации преобразований сдвига и масштабирования:
$$x = a\bar{x}, \quad t = b\bar{t}, \quad w = \bar{w} + c. \tag{4.24}$$
Подставив (4.24) в (4.23) и умножив на b^2, получим
$$\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{t}^2} = \frac{b^2}{a^2}\alpha\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2} + b^2e^{\lambda c}\beta e^{\lambda\bar{w}}.$$

Чтобы это уравнение совпало с (4.23), надо положить
$$\frac{b^2}{a^2} = 1, \qquad b^2e^{\lambda c} = 1.$$

Отсюда имеем
$$a = b, \quad c = -\frac{2}{\lambda}\ln b$$

и преобразование (4.24) принимает вид

$$x = b\bar{x}, \quad t = b\bar{t}, \quad w = \bar{w} - \frac{2}{\lambda}\ln b, \tag{4.25}$$

где $b > 0$ — произвольная постоянная.

Исключая из соотношений (4.24) параметр b, находим инварианты

$$I_1 = \frac{x}{t} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}}, \qquad I_2 = w + \frac{2}{\lambda}\ln t = \bar{w} + \frac{2}{\lambda}\ln\bar{t}. \tag{4.26}$$

Соотношение (4.6) с учетом (4.26) определяет вид автомодельного решения

$$w = \Phi(z) - \frac{2}{\lambda}\ln t, \qquad z = \frac{x}{t}. \tag{4.27}$$

Подставляя (4.27) в (4.23), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(z^2\Phi_z')_z' + \frac{2}{\lambda} = \alpha\Phi_{zz}'' + \beta e^{\lambda\Phi}.$$

Замечание: Точно таким же образом ищется точное решение стационарного уравнения теории горения с экспоненциальным тепловыделением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \beta e^{\lambda w}.$$

Пример 5: Рассмотрим нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\frac{\partial}{\partial x}\Big(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big). \tag{4.28}$$

Ищем инвариантное преобразование в виде комбинации преобразований сдвига и масштабирования:

$$x = a\bar{x}, \quad t = \bar{t} + b, \quad w = c\bar{w}. \tag{4.29}$$

Подставив (4.29) в (4.28) и поделив на c, получим

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}} = \frac{c^n}{a^2}\alpha\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\Big(\bar{w}^n\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\Big).$$

Требование совпадения с уравнением (4.28) дает одно условие

$$\frac{c^n}{a^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad a = c^{n/2},$$

где c — произвольная постоянная. При этом другой параметр b также остается произвольным, т.е. полученное инвариантное преобразование

$$x = c^{n/2}\bar{x}, \quad t = \bar{t} + b, \quad w = c\bar{w} \tag{4.30}$$

является двухпараметрическим.

Поскольку для применимости используемого метода требуется однопараметрическое инвариантное преобразование положим

$$b = f(c), \tag{4.31}$$

где вид функции f будет определяться далее. Исключая параметр c из двух последних соотношений (4.30) с учетом (4.31), имеем

$$t = \bar{t} + f\Bigl(\frac{w}{\bar{w}}\Bigr). \tag{4.32}$$

Это равенство будет определять инвариант $I(t, w) = I(\bar{t}, \bar{w})$, если выполняется соотношение

$$f\Bigl(\frac{w}{\bar{w}}\Bigr) = \varphi(w) - \varphi(\bar{w}), \tag{4.33}$$

которое можно рассматривать как функциональное уравнение. Нетрудно проверить, что уравнение (4.33) имеет решение

$$f(c) = A \ln c, \tag{4.34}$$

где A — произвольная постоянная. Подставив (4.31) в (4.30) с учетом (4.34), получим

$$x = c^{n/2}\bar{x}, \quad t = \bar{t} + A \ln c, \quad w = c\bar{w}. \tag{4.35}$$

При $A \neq 0$ выразим из второго соотношения (4.35) параметр c через t и подставим в оставшиеся соотношения. В результате находим инварианты

$$I_1 = xe^{knt} = \bar{x}e^{kn\bar{t}}, \quad I_2 = we^{2kt} = \bar{w}e^{2k\bar{t}}, \quad \text{где} \quad k = -\frac{1}{2A}.$$

Используя теперь формулу (4.6), определяем вид точного решения уравнения (4.28):

$$w = e^{-2kt}\Phi(z), \qquad z = xe^{knt}. \tag{4.36}$$

Подставив (4.36) в (4.28), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\Phi(z)$:

$$-2k\Phi + knz\Phi'_z = \alpha(w^n w'_z)'_z.$$

Замечание: Преобразование (4.30) при $b = c$ сохраняет вид уравнения (4.28), но не имеет инвариантов. Отсюда следует, что не каждое преобразование, сохраняющее вид уравнения, имеет инварианты.

4.4. Краткие выводы

Описанный метод исследования нелинейных уравнений с частными производными является естественным обобщением метода подобия [6, 8] и использует идеи метода группового анализа, но значительно проще последнего. Содержание разд. 4.2 (основанного на результатах [7, 10–14]) на начальном этапе может излагаться как общий эвристический подход, эффективность которого проверяется на конкретных примерах. Для успешного использования данного метода надо уметь решать лишь простейшие алгебраические уравнения и уметь дифференцировать (и не требуется понимать и использовать сложную терминологию группового анализа дифференциальных уравнений).

Таблица 3

Инвариантные решения, которые могут быть получены путем использования комбинаций преобразований сдвига и масштабирования, сохраняющих вид уравнений (C — произвольная постоянная, $C>0$)

№	Инвариантные преобразования	Вид инвариантных решений	Примеры уравнений
1	$t=\bar t+Ck$, $x=\bar x+C\lambda$	$w=U(z),\quad z=kx-\lambda t$	$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$
2	$t=C\bar t$, $x=C^k\bar x$, $w=C^m\bar w$	$w=t^mU(z),\quad z=xt^{-k}$	Уравнения см. в таблице 2
3	$t=\bar t+\ln C$, $x=C^k\bar x$, $w=C^m\bar w$	$w=e^{mt}U(z),\quad z=xe^{-kt}$	$\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ ($k=\frac{1}{2}mn$, m — любое)
4	$t=C\bar t$, $x=\bar x+k\ln C$, $w=C^m\bar w$	$w=t^mU(z),\quad z=x-k\ln t$	$\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ ($m=-1/n$, k — любое)
5	$t=C\bar t$, $x=C^\beta\bar x$, $w=\bar w+\alpha\ln C$	$w=U(z)+\alpha\ln t,\quad z=xt^{-\beta}$	$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^w\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ ($\alpha=2\beta-1$, β — любое)
6	$t=C\bar t$, $x=\bar x+\beta\ln C$, $w=\bar w+\alpha\ln C$	$w=U(z)+\alpha\ln t,\ z=x-\beta\ln t$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$ (α, β — любые)
7	$t=\bar t+C$, $x=\bar x+C\lambda$, $w=\bar w+Ck$	$w=U(z)+kt,\quad z=x-\lambda t$	$\frac{\partial w}{\partial t}=f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ (k, λ — любые)
8	$t=\bar t+\ln C$, $x=\bar x+k\ln C$, $w=C^m\bar w$	$w=e^{mt}U(z),\quad z=x-kt$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$ (k, m — любые)

5. Общие выводы и замечания

Описанный метод с успехом может использоваться для решения самых различных типов математических уравнений. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики данный метод намного проще для понимания, чем классический метод группового анализа [3–5, 7, 10–14], и может трактоваться как его частный случай. При использовании описанного простого метода надо уметь решать лишь самые простые алгебраические уравнения (и системы) и уметь дифференцировать. Важно отметить, что эффективность используемого в статье метода для обыкновенных дифференциальных уравнений практически не уступает классическому методу группового анализа [4, 5], а для нелинейных уравнений математической физики позволяет находить все наиболее распространенные решения (которые по самым грубым оценкам составляют не менее половины решений, которые можно найти с помощью метода группового анализа; эту оценку можно получить путем исследования представленных в [9–11] результатов). Указанные обстоятельства говорят о целесообразности введения данного метода в стандартные курсы лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики, которые читаются студентам, специализирующимся в области прикладной математики, физики и механики (этот метод с успехом можно включать также в соответствующие специальные курсы, читаемые в некоторых технических и педагогических вузах). Кроме того, этот простой метод полезно излагать на предварительном этапе (в качестве введения) до чтения основного материала в существенно более сложных для восприятия спецкурсах по методам группового анализа дифференциальных уравнений.

Изложенный в данной статье материал представляет собой замкнутый цикл лекций, который является первой частью специального курса по нелинейным уравнениям математической физики и механики, читаемого студентам кафедры "Прикладная математика" Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.

Литература

[1] Болтянский, В.Г. Симметрия в алгебре. / В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин. 2-е изд. – М.: Наука, 2002. – 240 с.

[2] Кудряшов, Н.А. Симметрия алгебраических и дифференциальных уравнений / Н.А. Кудряшов // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – № 9. – С. 104–110.

[3] Ибрагимов, Н.Х. Азбука группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Знание, 1989. – 48 с.

[4] Ибрагимов, Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Знание, 1991. – 48 с.

[5] Polyanin, A.D. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003. – 816 p.

[6] Баренблатт, Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика / Г.И. Баренблатт. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 218 с.

[7] Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

[8] Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. М.: Наука, 1972.

[9] Полянин, А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: Физматлит. 2002. – 432 с.

[10] Ibragimov, N.H. CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws / N.H. Ibragimov (Editor). – Boca Raton: CRC Press, 1994. – 432 p.

[11] Polyanin, A.D. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004. – 840 p.

[12] Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 399 с.

[13] Дородницын, В.А. Симметрия в решениях уравнений математической физики / В.А. Дородницын, Г.Г. Еленин. – М.: Знание, 1984. – 64 с.

[14] Polyanin, A.D. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists / A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007. – 1544 p.

Поступила в редакцию 16/*VIII*/2008;
в окончательном варианте — 16/*VIII*/2008.

ELEMENTARY THEORY OF USING INVARIANTS FOR SOLVING MATHEMATICAL EQUATIONS

© 2008 A.D. Polyanin[2]

The paper describes a general scheme for studying mathematical equations. The scheme is based on the use of invariants and permits one to simplify algebraic equations and systems, reduce the order of (or integrate) ordinary differential equations, and also obtain exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics. The invariants are constructed by a search for transformations preserving the form of the equations in question. (The notions and complicated techniques of group analysis are not used here.) Numerous examples of solution of specific algebraic and differential equations are given. It is important to note that the application of the simplest scaling and translation transformations permits one to give a unified description of a substantially larger number of solvable ordinary differential equations (or equations admitting order reduction) than in classical and special textbooks. To use the method, one should only be able to solve the simplest algebraic equations and compute derivatives. This shows that it is advisable to include the method not only in standard lecture courses on ordinary differential equations and equations of mathematical physics for students specializing in applied mathematics, physics, and mechanics but also in special courses read in some technical and pedagogical higher education institutions.

Keywords and phrases: *invariant, algebraic equation, differential equation, group analysis.*

Paper received 16/*VIII*/2008.
Paper accepted 16/*VIII*/2008.

[2]Polyanin Andrey Dmitrievich (polyanin@ipmnet.ru), Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia.