Теоретические методы математической физики, механики и инженерных наук

© 2004 г. А. Д. Полянин

Предварительные замечания. Дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и многочисленных приложениях.

Будем рассматривать методы решения задач, которые допускают математическую формулировку в виде дифференциальных уравнений и некоторых дополнительных условий (начальных и граничных). Основные теоретические методы условно можно разделить на четыре класса*:

- ***точные методы***,
- ***асимптотические методы (методы возмущений)***,
- ***численные методы***,
- ***приближенные аналитические методы.***

Данная классификация весьма удобна, она основана на использовании ряда характерных черт и отличительных признаков каждого класса. Важно отметить, что большинство специалистов обычно хорошо владеют только методами одного класса (это обстоятельство нередко приводит к недооценке возможностей других методов и ошибочным высказываниям на тему «какие методы важнее»). Ниже приведено краткое описание методов каждого класса, указаны их основные достоинства и недостатки.

Замечание 1. При решении конкретных задач нередко приходится использовать сочетание нескольких методов различных классов (см. далее разд. 5).

Замечание 2. Некоторые методы в зависимости от их конкретной реализации при решении различных задач можно отнести как численным, так и к приближенным аналитическим методам (например, различные модификации метода Галеркина).

1. Точные методы

► **Отличительные признаки.**

1. Позволяют получать точные решения.
2. В процессе решения не допускаются упрощения.

► **Основные достоинства точных решений.**

1. Формируют физические представления о рассматриваемых явлениях и процессах.
2. Наглядно демонстрируют и позволяют разобраться в механизме сложных нелинейных эффектов.
3. Широко используются в учебных курсах университетов для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений.

---

* Здесь не будут рассматриваться качественные методы, которые сравнительно редко используются в приложениях.

4. Широко используются в качестве тестовых задач для всех других методов.

5. Позволяют планировать эксперименты для определения эмпирических параметров.

► Возможности проверки публикуемых результатов читателями.

Точные решения обычно нетрудно проверить путем подстановки их в рассматриваемые уравнения (при этом нет необходимости знать метод получения решений).

► Основные недостатки точных методов.

1. Имеют ограниченную область применимости (часто не позволяют получить искомый результат).

2. Иногда приводят к решениям сложного вида, которые неудобно использовать на практике.

► Более подробная информация.

Под точными методами здесь понимаются математические методы, при использовании которых *в процессе решения не допускаются какие-либо упрощения рассматриваемых задач*. Эти методы позволяют получать точные решения в виде аналитических формул, интегралов или рядов (более строгое определение точного решения дается в разд. 6).

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют разобраться в механизме таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др.

Простые решения широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более широких классов решений, соответствующих другим начальным и граничным условиям. Указанное свойство позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных явлений и процессов.

Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения.

Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы MATHEMATICA, MAPLE, CONVODE и др.)

Важно отметить, что многие уравнения прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперимент для определения этих параметров или функций путем искусственного создания подходящих (граничных и начальных) условий.

Точные методы чаще всего применяют:

• для решения линейных задач, описываемых уравнениями с частными производными в областях с простой геометрией (наибольшую пользу они приносят при исследовании линейных уравнений с постоянными коэффициентами);

• для решения задач, описываемых линейными и нелинейными уравнениями с частными производными первого порядка.

Наиболее распространенными методами, используемыми для решения линейных задач математической физики, являются *метод разделения переменных, метод интегральных преобразований* (Лапласа, Фурье, Меллина и др.), *метод, основанный на функциях Грина*, и *метод характеристик*. Для решения задач, описываемых уравнениями с частными производными первого порядка, обычно используются *метод характеристик* и *метод разделения переменных*.

Простейшим методом решения нелинейных задач математической физики и механики является метод подобия, позволяющий ввести автомодельные переменные, которые дают возможность перейти от сложных уравнений с частными производными к обыкновенным дифференциальным уравнениям. О других методах решения нелинейных уравнений будет подробно рассказано далее в разд. 6.

Для подавляющего большинства задач, описываемых уравнениями с частными производными, не удается найти точное аналитическое решение (сказанное справедливо и для существенно более простых алгебраических и трансцендентных уравнений). Основные причины, затрудняющие получение точных решений, обусловлены, как правило, нелинейностью уравнений или граничных условий, зависимостью коэффициентов уравнений от координат, сложной формой границ и др. Поэтому для получения необходимой информации об исследуемом явлении или процессе приходится прибегать к разного рода упрощениям в математической формулировке соответствующей задачи, к различным приближениям и аппроксимациям, численным методам или к тем и другим одновременно.

2. Асимптотические методы (методы возмущений)

► Отличительные признаки.

1. Один параметр задачи считается малым (большим).
2. Решение ищется в виде одного или нескольких асимптотических разложений по этому параметру.

► Основные достоинства асимптотических методов.

1. Позволяют регулярным образом находить члены разложения и получать приближенные формулы.
2. Позволяют установить качественные особенности явлений/процессов и приближенные законы подобия.
3. Позволяют исследовать задачи, в которых существуют узкие пространственно-временные области с быстрым изменением решения.

4. Результаты используются как тестовые задачи для численных и приближенных аналитических методов

5. Являются основой для разработки численных методов в задачах с малым параметром.

6. Являются основой для разработки комбинированных методов.

► **Возможности проверки публикуемых результатов читателями.**

Асимптотические решения нередко можно проверить прямой подстановкой в рассматриваемые уравнения и граничные/начальные условия путем анализа порядков членов полученных разложений.

► **Основные недостатки асимптотических методов.**

1. Не позволяют получить результат для промежуточных (конечных) значений характерного параметра.

2. Нередко отсутствует строгое математическое обоснование.

► **Более подробная информация.**

Рассматриваемые задачи часто настолько сложны, что возникает необходимость построения упрощенных (модельных) уравнений, которые дают возможность лучше понять физический смысл рассматриваемого явления или процесса и дать его наглядную интерпретацию. Характерным и очень важным примером построения приближенных уравнений такого рода являются уравнения пограничного слоя. Упрощение исходных полных уравнений позволило получить более простые уравнения пограничного слоя (например, в гидро- и аэродинамике и теории конвективного тепло- и массопереноса) и сформулировать соответствующие законы подобия. Авторы ранних работ при выводе приближенных уравнений обычно руководствовались интуицией и правдоподобными рассуждениями, но постепенно выяснилось, что надежнее и лучше пользоваться асимптотическими методами (методами возмущений), совершая предельный переход по одному или нескольким малым (или большим) параметрам.

В простейшем случае, когда неизвестная величина w зависит от одной независимой переменной x и малого параметра ε, асимптотические разложение ищется в виде

$$w = \sum_{k=1}^{n} a_n \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_n(\varepsilon)), \qquad a_n = a_n(x),$$

где $\delta_n(\varepsilon)$ — асимптотическая последовательность, т. е. $\delta_{k+1}(\varepsilon)/\delta_k(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Асимптотические методы позволяют формализованным образом получать первое и последующие члены разложения. Эти методы помимо наиболее простого и хорошо известного *метода регулярных разложений* включают также более сложные методы *усреднения, сращиваемых асимптотических разложений, двух- и многомасштабных разложений* и др.

Асимптотические решения представляются в виде одного или нескольких рядов, каждый член которых удовлетворяет более простому, чем исходное, дифференциальному уравнению. Возникающие при решении неизвестные постоянные и структура асимптотического разложения (т. е. зависимость членов асимптотической последовательности δ_n от малого или большого параметра) определяются последовательно в процессе анализа, например, с помощью процедуры сращивания. Чтобы выявить качественные черты изучаемой задачи и дать хорошее численное приближение к искомому решению, как правило, достаточно знать лишь несколько первых членов разложения.

Важно подчеркнуть, что наличие малого или большого параметра во многих случаях обусловлено физической реальностью. Например, практически во всех задачах о конвективной диффузии в жидкостях имеется большой безразмерный параметр — число Шмидта $\mathrm{Sc} = \nu/D$, где ν — кинематическая вязкость жидкости, D — коэффициент диффузии (для воды — $\mathrm{Sc} = 0.5 \times 10^3$, для вязких жидкостей типа глицерина — $\mathrm{Sc} = 10^6$); указанное обстоятельство приводит к появлению диффузионного пограничного слоя и диффузионного следа за реагирующей частицей. В сингулярно-возмущенных задачах такого рода существуют узкие пространственно-временные области, в которых решение быстро меняется. Структура, протяженность и число этих областей, как правило, заранее неизвестны. Это сильно затрудняет непосредственное использование конечно-разностных численных методов, которые обычно основаны на априорном представлении о качественном поведении решения.

Строгое математическое обоснование асимптотических методов для решения сложных нелинейных задач в настоящее время обычно отсутствует. Однако непротиворечивость полученных результатов и огромный опыт успешного практического применения этих методов дают основание считать их весьма мощным инструментом прикладной математики и механики.

Получающиеся при использовании методов возмущений асимптотические ряды часто расходятся или очень медленно сходятся. Кроме того, как правило, удается вычислить лишь несколько (обычно не более двух или трех) первых членов возмущенного разложения. Указанные обстоятельства не позволяют оценить поведение решения при промежуточных (конечных) значениях параметра или переменной и накладывают существенные ограничения на использовании асимптотических формул для расчетов в инженерной практике. Это — наиболее существенный недостаток методов возмущений.

Для улучшения асимптотических рядов применяли различные преобразования и приемы (преобразования Эйлера и Шенкса, приближения рациональными дробями и др.), которые несмотря на их полезность не обладают общностью. Обычно их приходится использовать интуитивно, без понимания соответствующего механизма.

Несмотря на указанные недостатки, в настоящее время — время быстрого развития вычислительной техники — методы возмущений отнюдь не утрачивают своего значения. Они служат для выяснения принципиально важных закономерностей и качественных особенностей сложных линейных и нелинейных задач, для построения «тестовых решений», а в ряде случаев являются также основой для разработки вычислительных методов. Следует отметить, что в тех задачах, где асимптотические методы весьма эффективны, численные методы, как правило, становятся малопригодными.

3. Численные методы

► Отличительные признаки.

1. Независимые переменные и искомые величины рассматриваются на дискретном множестве точек.

2. Основаны на различных аппроксимациях и использовании компьютеров.

► **Основные достоинства численных методов.**

1. Обладают большой универсальностью и имеют широкий диапазон применимости.
2. Анимация результатов дает наглядное представление о рассматриваемых явлениях и процессах.
3. Использование стандартных подпрограмм позволяет сравнительно просто и быстро решать многие задачи.
4. Позволяют исследовать сложные задачи с большим числом неизвестных при промежуточных значениях характерных параметров.
5. Являются незаменимым аппаратом для расчета, проектирования, управления и оптимизации элементов конструкций, аппаратов и технологических процессов.
6. Использование стандартных подпрограмм часто не требуют от исследователя глубокого понимания применяемых методов.*

► **Возможности проверки публикуемых результатов читателями.**

Публикуемые численные результаты обычно трудно проверить (фактически для этого нужно заново численно решить задачу).

► **Недостатки численных методов.**

1. Нередко отсутствует строгое математическое обоснование.
2. Необходимость тестирования получаемых решений.
3. Наличие в задаче большого числа параметров и широкий диапазон их изменения часто делают численные результаты ненаглядными и неудобными для анализа.
4. Необходимость прибегать к дополнительному аналитическому исследованию для задач с сингулярными особенностями.
5. Таблицы и графики часто менее удобны, чем простые формулы.

► **Более подробная информация.**

Неудобство прямого использования результатов асимптотического анализа в инженерной практике в значительной мере может быть преодолено путем применения численных методов (*конечно-разностных, проекционных, конечных элементов, итерационных* и др.) с использованием компьютеров. Конечно-разностные методы основаны на замене любых дифференциальных соотношений соответствующими конечно-разностными аппроксимациями, что позволяет для решения уравнений с частными производными использовать различные численные алгоритмы, содержащие большое число алгебраических и логических операций. Точность и скорость вычислительного процесса зависит от способа аппроксимации дифференциальных величин; от геометрии и плотности системы дискретных точек, в которых вычисляются искомые величины и их производные; от способа организации численного алгоритма, управляющего алгебраическими и логическими операциями.

Численные методы, в совокупности, обладают большой универсальностью и позволяют эффективно получать решения различного рода задач для промежуточных значений параметра и координаты, т. е. в той области, где не

* Естественно здесь речь идет о сравнительно простых задачах.

могут быть использованы асимптотические методы. Стремительное вторжение ЭВМ в разные области человеческой деятельности привело к довольно распространенному мнению о всесильности численных методов. Это, в свою очередь способствует тому, что многие исследователи все чаще предпочитают обращаться к ним, пренебрегая другими теоретическими методами.

Несмотря на очевидную полезность и общность численных методов, их порой необоснованно переоценивают. Отметим некоторые недостатки численных методов.

• Таблицы и графики, являющиеся результатом численных расчетов, часто менее удобны чем приближенные аналитические формулы. Наличие в задаче большого числа характерных параметров (а иногда и произвольных функций) и широкий диапазон их изменения, как правило, делают результаты численных расчетов ненаглядными и неудобными для интерпретации и анализа.*

• Необходимость прибегать к дополнительному аналитическому исследованию при наличии различного типа сингулярностей и особых точек в коэффициентах дифференциальных уравнений (подобное исследование обычно нельзя осуществить в рамках численных методов).

• Необходимость дополнительного привлечения асимптотических методов при исследовании задач с малым параметром и при получении решения в областях с большими градиентами решения** или в областях с неоднородной микроструктурой.

• Необходимость тестирования результатов численного решения путем сопоставления с известными точными решениями или решениями модельных задач.

Один из наиболее существенных недостатков, которым часто просто пренебрегают (ввиду малой информированности, а также из-за неправильного понимания и неудачного употребления термина «точный метод» применительно к численным методам), состоит в том, что для гарантированной уверенности в адекватности и точности результатов численного решения сложных задач при отсутствии тестовых решений вычисления следует проводить сразу по нескольким принципиально различным схемам. Такое дублирование необходимо даже тогда, когда первое из полученных численных решений приводит к внешне разумным и хорошо интерпретируемым результатам.

Указанная ситуация обусловлена тем, что для подавляющего большинства сложных нелинейных задач отсутствует строгое обоснование той или иной

---

* При математическом моделировании систем с большим числом варьируемых параметров до проведения массированных численных расчетов полезно сделать оценку времени, которое потребуется для исследования. Поясним сказанное на модельном примере. Пусть имеется достаточно сложная задача с 9 варьируемыми параметрами (подобные задачи возникают, например, при оптимизации технологических процессов, при оптимизации формы поверхности, при определении границ устойчивости и др.). Будем считать, что нужно численно проанализировать десять значений для каждого из параметров, поэтому всего надо рассмотреть 10^9 вариантов. Пусть решение тестового варианта задачи для одного набора параметров занимает одну секунду, что дает решения 86400 ($60 \times 60 \times 24$) вариантов в сутки. Чтобы проанализировать все 10^9 вариантов потребуется более 30 лет непрерывной работы компьютера. Это очень долго, поэтому в данном случае исследователю надо либо упрощать рассматриваемую модель, либо использовать другие численные методы, либо покупать существенно более мощный компьютер и т. д.

** Создание и использование адаптивных сеток с автоматическим выбором шага и направления в пространстве обычно требуют много времени и больших усилий группы людей.

вычислительной процедуры. Практика показывает, что расхождение публикуемых в печати данных разных авторов, исследовавших одну и ту же задачу различными (а иногда и идентичными) численными методами, как правило, составляет 5–15%. Известны случаи, когда это отличие было значительно больше и приводило даже к качественно различным результатам (например, для внутренней задачи массопереноса при больших числах Пекле).

Рассмотрим простой модельный пример, поясняющий одну из возможных причин возникновения опасности плохих вычислений. Будем считать, что искомая величина выражается в виде определенного интеграла, а подынтегральное выражение хотя и непрерывно дифференцируемо, но его вторая или третья производная имеет особенность (неограничена) в какой-либо точке. Использование стандартных подпрограмм, основанных на формулах Симпсона, может привести к значительной ошибке (поскольку погрешность этих формул оценивается четвертой производной, которая в рассматриваемом случае может быть неограниченной).

Важно отметить, что публикуемые численные результаты во многом остаются лишь на совести авторов — их практически невозможно проверить даже опытному рецензенту (с аналогичными трудностями приходится сталкиваться также при анализе экспериментальных работ); во многих случаях эти результаты сложно использовать «посторонним» людям, незнакомым с автором.

Несмотря на указанные недостатки, численные методы в настоящее время играют определяющую роль в развитии научно-технического прогресса, являясь основным аппаратом исследования инженерно-технических и экономических задач, связанных, в первую очередь, с расчетом, проектированием, управлением и оптимизацией конструкций, аппаратов и технологических процессов. Численные методы широко используются для математического моделирования природных явлений.

4. Приближенные аналитические методы

► **Отличительные признаки.**

1. Основаны на интуитивных соображениях и нестрогих рассуждениях.
2. При решении задач используются различные упрощения.

► **Основные достоинства приближенных методов.**

1. Позволяют получать простые формулы, удобные для практических расчетов.
2. Дают возможность сравнительно быстро получать приближенные оценки.
3. Эффективны в задачах, характерные параметры которых заданы с невысокой точностью.
4. Являются основой для разработки комбинированных методов.
5. Не требуют от исследователя обширных математических знаний.

► **Возможности проверки публикуемых результатов читателями.**

Публикуемые результаты невозможно проверить при отсутствии описания способа их получения.

► **Недостатки приближенных методов.**

1. Полное отсутствие строго математического обоснования.

2. Не могут быть использованы при необходимости получения большой точности.

► **Более подробная информация.**

До сих пор сохраняют свое значение разнообразные и во многом опирающиеся на интуитивные соображения (о свойствах и структуре решения) приближенные инженерные методы, к которым относятся, например, однопараметрические *интегральные методы* в теории ламинарного и турбулентного пограничного слоя, *метод равнодоступной поверхности* в задачах массопереноса с поверхностными реакциями, различные модификации *методов линеаризации* уравнений или граничных условий и др. Использования этих простых методов во многих случаях оказывается вполне достаточно для практических целей. К сожалению, мода на численные методы за последние несколько десятилетий привела к тому, что приближенные методы часто недооцениваются и редко используются.

Многие приближенные методы основаны на глубоком и неформальном понимании физической сущности явления. Конкретные представления о механизме рассматриваемого явления или процесса, которые черпаются непосредственно из повседневной практической деятельности или эксперимента и неявно заложены в приближенный метод, нередко позволяют получать искомые зависимости, успешно конкурирующие с результатами соответствующего численного анализа. Более того, в ряде случаев приближенные формулы значительно более удобны для проведения практических расчетов, чем любые вычисления с привлечением ЭВМ. Это обычно происходит тогда, когда одна и та же формула, полученная тем или иным разумным приближенным методом, дает возможность учесть сразу много факторов.

Поясним сказанное на примере. Известны простые общие формулы позволяющие приближенно вычислять средние числа Шервуда для любой кинетики объемной или поверхностной химической реакции, произвольного типа течения и формы частиц (в этих случаях исходная постановка задачи помимо обычных безразмерных параметров дополнительно содержит произвольные функции). Подобные результаты принципиально не могут быть получены численными методами: можно посчитать лишь много различных частных случаев (с фиксированной кинетикой, геометрией течения и формой частиц) и для каждого из них определить искомые зависимости в виде таблиц и графиков. При этом представляется маловероятным дать какие-либо рекомендации общего характера (например, для произвольной кинетики химической реакции). Из сказанного ясно, что актуальная проблема получения любых достаточно общих приближенных соотношений не может быть исчерпана применением численных методов.

Важно подчеркнуть, что имеющиеся в настоящее время опытные данные для численных значений многих физико-химических постоянных (например, константы скорости, порядок и энергии активации объемных и поверхностных химических реакций) имеют очень невысокую («порядковую») точность. Это дополнительно говорит в пользу того, что в такого рода задачах уместно использовать апробированные приближенные методы, точность которых выше точности определения исходных констант, входящих в уравнение.

Приближенные методы очень удобны для получения достаточно грубых оценок на предварительном этапе любого исследования, а также тогда, когда результат должен быть получен сравнительно быстро. Приближенные методы нередко играют большую роль в формировании качественного понимания того или иного явления или процесса.

Общие и хронические недостатки всех приближенных методов инженерного типа — их сравнительно невысокая точность и отсутствие математической обоснованности. Оценка точности используемых приближенных методов обычно проводится на примере частных случаев, для которых уже имеются необходимые для проверки точные, численные или асимптотические результаты. При этом обычно считают, что если на типичных «тестовых» задачах определенного класса данный метод работает достаточно хорошо, то его можно использовать и для других задач рассматриваемого класса. Принципиальное ограничение приближенных методов — они не могут быть использованы при необходимости получения большой точности.

5. Комбинирование теоретических методов

Из сказанного выше следует, что ***все перечисленные классы теоретических методов имеют свои характерные достоинства и недостатки***. При этом важно, что все теоретические методы полностью не перекрывают друг друга. Поэтому при решении конкретных задач часто приходится прибегать к сочетанию нескольких методов различных классов. Приведем несколько конкретных примеров.

Введение автомодельных переменных (что соответствует использованию точных методов для анализа уравнений с частными производными и существенно упрощает исходную задачу) нередко приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решение которых нельзя получить в замкнутом виде. Поэтому на втором этапе исследования это дифференциальное уравнение решают либо численными, либо приближенными методами. Типичным примером такого рода является гидродинамический пограничный слой на плоской пластине (интересно отметить, что исходные уравнения пограничного слоя, в свою очередь, являются результатом применения асимптотических методов); см. пояснения ниже.

Пример (пограничный слой на плоской пластине):

- $\boxed{\text{Полные уравнения Навье–Стокса}}$

$\Big\Downarrow$ Асимптитический метод ($\mathrm{Re} \to \infty$)

- $\boxed{\text{Уравнения пограничного слоя, УрЧП}}$

$\Big\Downarrow$ Точный метод (введение автомодельных переменных)

- $\boxed{\text{Обыкновенное дифференциальное уравнение}}$

$\Big\Downarrow$ Численный метод

- $\boxed{\text{Решение}}$

Наличие сингулярностей в коэффициентах дифференциальных уравнений, точное решение которых отсутствует, вынуждает исследователя сначала «раскрывать» все особенности аналитически, а затем применять численные методы. Нередко приходится использовать сочетание асимптотических и численных методов (гидродинамический и тепловой пограничный слой).

Весьма перспективными оказываются комбинированные методы, основанные на сочетании асимптотических и приближенных методов (*методы асимптотических аналогий, асимптотической коррекции* и др.). Это позволяет, с одной стороны, получить окончательные результаты в простом аналитическом виде, а с другой — устранить наиболее существенные недостатки приближенных формул, связанные с их неточным поведением в некоторых предельных случаях. При этом, как правило, существенно повышается точность приближенных формул и нередко возрастает их информативность, что позволяет для расчета сходных задач использовать одну и ту же формулу.

Замечание. Из сказанного следует, что ошибочно противопоставлять друг другу различные классы теоретических методов (каждые из которых имеют свои характерные достоинства и недостатки). Гораздо вернее считать, что ***все теоретические методы (точные, асимптотические, численные, приближенные) взаимно дополняют друг друга***.

6. Точные решения и точные методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики

Общее решение нелинейных уравнений математической физики и механики удается получить очень редко (в исключительных случаях). Поэтому обычно приходится ограничиться поиском и анализом частных решений, которые принято называть *точными решениями*.

Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики понимаются следующие решения:

1. Решения, которые выражаются через элементарные функции.

2. Решения, которые выражаются в виде квадратур*.

3. Решения, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (системами обыкновенных дифференциальных уравнений).

4. Решения, которые выражаются через решения линейных уравнений с частными производными (линейных интегральных уравнений).

Под точными методами решения нелинейных уравнений математической физики понимаются методы, позволяющие получать точные решения.

В таблице указаны основные точные методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.

* Интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме — это представление решений дифференциальных уравнений аналитическими формулами, при записи которых используется указанный априори запас допустимых функций и перечисленный заранее набор математических операций. Решение выражается в виде квадратур, если в качестве допустимых функций используются элементарные функции и функции, входящие в уравнение, а под операциями понимается конечное множество арифметических операций, операций суперпозиции (образования сложной функции) и операций взятия неопределенного интеграла.

ТАБЛИЦА
Основные точные методы

№	Название метода	Характерные особенности
1	Классический метод поиска симметрий (метод группового анализа)	Основан на поиске преобразований, которые оставляют инвариантным вид уравнений. Позволяет получать инвариантные решения
2	Неклассический метод поиска симметрий	Важная модификация метода группового анализа (но более сложная для практического применения). Позволяет описать более широкий класс решений
3	Прямой метод Кларксона — Крускала	Задается общая структура решения, куда входят произвольные функции. Эти функции неравноправны, для их определения используют специальные приемы
4	Метод обобщенного разделения переменных	Задается общий вид решения характерный для линейных уравнений. Для определения искомых функций используют разные методы
5	Метод функционального разделения переменных	Задается общий вид решения с функциональным произволом. Для определения искомых функций используют методы дифференцирования и расщепления
6	Метод дифференциальных связей	Основан на совместном исследовании данных уравнений и вспомогательных (более простых) уравнений, называемых дифференциальными связями
7	Метод обратной задачи рассеяния	Основан на специальном представлении уравнения (с помощью пары линейных операторов) или на условии совместности двух линейных уравнений
8	Тест Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики	Основан на поиске решений в виде разложений, имеющих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается произвольной функцией

Замечание 1. В таблице указаны только методы, обладающие широким диапазоном применимости и пригодные для поиска точных решений уравнений различных типов (параболических, гиперболических, эллиптических, смешанных) и разных порядков. Метод Монжа, метод Хироты и другие точные методы, имеющие существенно более узкую область применимости, здесь не рассматриваются.

Замечание 2. Методы группового анализа и обратной задачи рассеяния являются наиболее популярными методами (данные основаны на поиске ключевых слов в Интернете).

Замечание 3. В теории тепло- и массопереноса и гидродинамике* эффективно работают только первые шесть методов, указанных в таблице.

Замечание 4. Указанная классификация не является единственной. Иногда объединяют методы группового анализа и неклассический метод поиска симметрий, а также методы обобщенного и функционального разделения переменных.

* Здесь имеется ввиду поиск точных решений уравнений Навье — Стокса и уравнений гидродинамического пограничного слоя.