Глава 2 книги А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова «Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики» — М.: Физматлит, 2005 (в печати).

2. Преобразования уравнений математической физики

2.1. Точечные преобразования

Пусть x, y — независимые переменные, а $w = w(x, y)$ — функция этих переменных. В общем случае точечное преобразование задается формулами

$$x = X(\xi, \eta, u), \quad y = Y(\xi, \eta, u), \quad w = W(\xi, \eta, u), \tag{1}$$

где ξ, η — новые независимые переменные, $u = u(\xi, \eta)$ — новая зависимая переменная, X, Y, W — некоторые (заданные или искомые) функции.

Точечные преобразования не только сохраняют порядок уравнения, к которому они применяются, но и не изменяют радикально структуру уравнения, так как старшие производные новых переменных линейно зависят от старших производных исходных переменных.

Преобразование (1) обратимо, если

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial X}{\partial w} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \dfrac{\partial Y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial W}{\partial x} & \dfrac{\partial W}{\partial y} & \dfrac{\partial W}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0 \tag{2}$$

с помощью обратимого точечного преобразования (1) приводится к виду

$$G\Big(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Big) = 0. \tag{3}$$

Если $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (3), то формулы (1) определяют соответствующее решение уравнения (2) в параметрическом виде.

Простейшие преобразования независимых переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} &\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0 \quad &&\text{(преобразование сдвига)}, \\ &\xi = k_1 x, \qquad \eta = k_2 y &&\text{(преобразование масштабирования)}. \end{aligned}$$

Первое преобразование соответствует переносу начала координат в точку (x_0, y_0), а второе — изменению масштабов (сжатию или растяжению) вдоль осей x и y.

Точечные преобразования используются для упрощения уравнений и приведения их к известным. Иногда они позволяют свести нелинейные уравнения к линейным.

Пример 1. Нелинейное уравнение
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + \bigl[xf(t)+g(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w$$
с помощью точечного преобразования
$$w(x,t) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^2(t)H^m(t)\,dt,$$
где функции F и H определяются формулами
$$F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr], \quad H(t) = \exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],$$
приводится к более простому уравнению
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Bigr).$$

Пример 2. Нелинейное уравнение
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + f(x,t)$$
заменой $u = \exp(aw)$ приводится к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + af(x,t)u.$$

Задачи и упражнения к разд. 2.1

1. Найти преобразование, приводящее уравнение теплопроводности с нелинейным источником $w_t = aw_{xx} + bw^n$ к каноническому виду $u_\tau = u_{xx} + u^n$.

2. Найти преобразование, приводящее уравнение Бюргерса $w_t + aww_x = bw_{xx}$ к каноническому виду $u_\tau + uu_z = u_{zz}$.

3. Найти преобразование, приводящее уравнение Буссинеска $w_{tt} + a(ww_x)_x + bw_{xxxx} = 0$ к каноническому виду $u_{\tau\tau} + (u_z)_z + u_{zzzz} = 0$.

4. Найти точечные преобразования, приводящее нелинейные уравнения
a) $w_t = w_{xx} + aw_x^2$,
b) $w_t = w_{xx} + aww_x^2$,
c) $w_t = w_{xx} + f(w)w_x^2$
к линейному уравнению теплопроводности $u_t = u_{xx}$.

Указание. Преобразования ищутся в виде $u = F(w)$.

5. Найти точечное преобразование, приводящее уравнение $w_t = w_{xx} + aw\ln w + f(t)$ к более простому уравнению $u_t = u_{xx} + au\ln u$.

Указание. Преобразование ищется в виде $w = \varphi(t)u$, где $u = u(x,t)$.

6. Найти точечное преобразование, приводящее уравнение $w_t = w_{xx} + a(w_x)^2 + f(t)$ к более простому уравнению $u_t = u_{xx} + a(u_x)^2$.

Указание. Преобразование ищется в виде $w = \varphi(t) + u$, где $u = u(x,t)$.

7. Найти точечное преобразование, приводящее уравнение $w_t = w_{xx} + a(w_x)^n + bw + f(t)$ к более простому уравнению $u_t = u_{xx} + a(u_x)^n + bu$.

Указание. Преобразование ищется в виде $w = \varphi(t) + u$, где $u = u(x,t)$.

8. Показать, что уравнение Монжа — Ампера $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy}$ инвариантно относительно преобразования
$$\bar{x} = a_1x + b_1y + c_1, \quad \bar{y} = a_2x + b_2y + c_2, \quad \bar{w} = kw + a_3x + b_3y + c_3$$
(т. е. приводится к уравнению такого же вида).

9. Найти преобразование вида
$$\tilde{t} = f(t), \quad \tilde{x} = g(t)x, \quad \tilde{w} = h(t)w + p(t)x,$$
связывающее цилиндрическое уравнение Кортевега — де Фриза
$$\tilde{w}_{\tilde{t}} = \tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + 6\tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{x}} - \frac{\tilde{w}}{2\tilde{t}}$$
и обычное уравнение Кортевега — де Фриза
$$w_t = w_{xxx} + 6ww_x.$$

Литература к разд. 2.1: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

2.2. Преобразование годографа

Для упрощения нелинейных уравнений и систем уравнений с частными производными иногда используется преобразование годографа.

2.2.1. Случай, когда одна из независимых переменных принимается за искомую величину

Для уравнения с двумя независимыми переменными x, t и искомой функцией $w = w(x,t)$ преобразование годографа заключается в том, что решение ищется в неявном виде (x и t можно поменять местами):

$$x = x(t, w), \tag{4}$$

т. е. t и w принимаются за независимые переменные, а x — за зависимую переменную. Преобразование годографа (4) не меняет порядок уравнения и является частным случаем точечного преобразования (его можно записать в эквивалентном виде: $x = \widetilde{w}$, $t = \widetilde{t}$, $w = \widetilde{x}$).

Пример 3. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{5}$$

Ищем решение в неявном виде. Дифференцируя выражение (4) по обеим переменным как неявную функцию с учетом зависимости $w = w(x,t)$, получим:

$$\begin{aligned}
&1 = x_w w_x && \text{(дифференцирование по } x\text{)},\\
&0 = x_w w_t + x_t && \text{(дифференцирование по } t\text{)},\\
&0 = x_{ww} w_x^2 + x_w w_{xx} && \text{(дифференцирование по } x \text{ дважды)},
\end{aligned}$$

где индексы снизу обозначают соответствующие частные производные. Из этих соотношений выразим «старые» производные через «новые»:

$$w_x = \frac{1}{x_w}, \quad w_t = -\frac{x_t}{x_w}, \quad w_{xx} = -\frac{w_x^2 x_{ww}}{x_w} = -\frac{x_{ww}}{x_w^3}.$$

Подставив эти выражения в (5), приходим к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}.$$

2.2.2. Использование эквивалентной системы уравнений

Для системы двух уравнений с двумя независимыми переменными x, y и зависимыми переменными $w = w(x,y)$, $v = v(x,y)$ преобразование годографа заключается в том, что w и v принимаются за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные, т. е. ищутся функции

$$x = x(w, v), \qquad y = y(w, v). \tag{6}$$

Преобразование годографа применяется в газовой динамике и в теории струй для линеаризации соответствующих уравнений и решения некоторых краевых задач.

Для исследования отдельных уравнений иногда бывает полезно перейти к эквивалентной системе уравнений, а затем сделать преобразование годографа. Проиллюстрируем сказанное на примерах конкретных нелинейных уравнений.

Пример 4. Стационарное уравнение Хохлова — Заболоцкой (встречается в акустике и в нелинейной механике)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \tag{7}$$

представим в виде системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -aw\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{8}$$

Используем преобразование годографа (6): примем w, v за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные. Дифференцируя каждое выражение (6) по x и по y (как сложные функции) и исключая из полученных соотношений частные производные x_w, x_v, y_w, y_v, имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{где} \quad J = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9}$$

Исключая из (8) с помощью (9) производные w_x, w_y, v_x, v_y, приходим к системе

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad -aw\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w}. \tag{10}$$

Почленно продифференцируем первое уравнение по w, а второе — по v, и исключим смешанную производную y_{wv}. В результате для функции $x = x(w, v)$ получим линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + aw\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \tag{11}$$

Аналогичным образом из системы (10) для функции $y = y(w, v)$ имеем другое линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{aw}\frac{\partial y}{\partial w}\right) = 0. \tag{12}$$

Взяв некоторое частное решение $x = x(w, v)$ уравнения (11) и подставив его в систему (10), простым интегрированием можно найти $y = y(w, v)$. Исключив из равенств (8) переменную v, получим точное решение $w = w(x, y)$ нелинейного уравнения (7).

Замечание. Уравнение (11) при произвольном a имеет простое частное решение

$$x = C_1 wv + C_2 w + C_3 v + C_4, \tag{13}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Подставив его в систему (10), получим

$$\frac{\partial y}{\partial v} = C_1 v + C_2, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -a(C_1 w + C_3)w. \tag{14}$$

Интегрируя первое уравнение (14), находим $y = \frac{1}{2}C_1 v^2 + C_2 v + \varphi(w)$. Подставив это решение во второе уравнение (14), определяем функцию $\varphi(w)$. В результате получим

$$y = \tfrac{1}{2}C_1 v^2 + C_2 v - \tfrac{1}{3}aC_1 w^3 - \tfrac{1}{2}aC_3 w^2 + C_5. \tag{15}$$

Формулы (13) и (15) определяют точное решение уравнения (7) в параметрической форме (v — параметр).

Аналогичным образом можно построить и другие точные решения уравнения (7).

Пример 5. Рассмотрим уравнение Борна — Инфельда

$$\left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{16}$$

которое используется в нелинейной электродинамике (в теории поля).

Путем введения новых переменных

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t, \quad u = \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

уравнение (16) можно записать в виде эквивалентной системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} &= 0, \\ v^2\frac{\partial u}{\partial \xi} - (1 + 2uv)\frac{\partial u}{\partial \eta} + u^2\frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned}$$

Преобразование годографа (u, v принимаются за независимые переменные, а ξ, η — за зависимые переменные) приводит к линейной системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial u} &= 0, \\ v^2 \frac{\partial \eta}{\partial v} + (1+2uv)\frac{\partial \xi}{\partial v} + u^2 \frac{\partial \xi}{\partial u} &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

а после исключения η — к линейному уравнению второго порядка

$$u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + (1+2uv)\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + 2u \frac{\partial \xi}{\partial u} + 2v \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0.$$

Считая, что искомые решения находятся в гиперболической области, запишем уравнение характеристик (см. главу 1):

$$u^2\, dv^2 - (1+2uv)\, du\, dv + v^2\, du^2 = 0.$$

Интегралы этого уравнения имеют вид $r = C_1$, $s = C_2$, где

$$r = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2v}, \qquad s = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2u}. \tag{18}$$

Переходя в (17) к новым переменным (18), получим

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} + s^2 \frac{\partial \eta}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Исключив переменную η, приходим к простейшему уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial s} = 0,$$

общим решением которого является сумма двух произвольных функций разных аргументов. Функция η определяется из системы (19).

Задачи и упражнения к разд. 2.2

1. Используя преобразование годографа, найти общие решения модельных уравнений газовой динамики:

a) $w_t + aww_x = 0$,

b) $w_t + f(w)w_x = 0$.

Указание. Использовать преобразование годографа, описанное в примере 3.

2. Преобразовать нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = f(t,w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

в линейное уравнение.

Указание. Использовать преобразование годографа, описанное в примере 3.

3. Найти вид функции $f(u)$, для которой преобразование годографа оставляет инвариантным уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

4. Преобразовать нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование годографа из примера 4, в котором надо сделать переобозначения $x \to t$, $y \to x$.

5. Преобразовать нелинейное уравнение теплопроводности в анизотропной среде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0$$

к линейному уравнению.

Указание. Перейти к системе уравнений, а затем использовать преобразование годографа, как в примере 4.

6. Преобразовать нелинейную систему уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + p(\rho))}{\partial x} = 0,$$

описывающую одномерные адиабатические течения идеального газа, к линейной системе. Здесь v и ρ — неизвестные величины, а $p = p(\rho)$ — заданная функция (для идеального политропического газа $p = A\rho^\gamma$).

Указание. Принять v и ρ за независимые переменные, а x и t — за зависимые переменные.

7. Преобразовать нелинейную систему газодинамического типа

$$f_1(w,v)\frac{\partial w}{\partial x} + f_2(w,v)\frac{\partial w}{\partial y} + f_3(w,v)\frac{\partial v}{\partial x} + f_4(w,v)\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$g_1(w,v)\frac{\partial w}{\partial x} + g_2(w,v)\frac{\partial w}{\partial y} + g_3(w,v)\frac{\partial v}{\partial x} + g_4(w,v)\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

в линейную систему.

Указание. Приняв w и v за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные, использовать формулы (9).

8. Используя преобразование годографа (см. пример 3), найти общее решение нелинейного уравнения $w_x w_{xt} - w_t w_{xx} = 0$.

Литература к разд. 2.2: Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе (1963), Дж. Уизем (1977, стр. 588–590), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 33–34), Г. Г. Черный (1988, стр. 253–269), Р. Курант (1964, стр. 426), D. Zwillinger (1989), P. A. Clarkson, A. S. Fokas, M. J. Ablowitz (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

2.3. Контактные преобразования. Преобразования Лежандра и Эйлера

2.3.1. Общий вид контактных преобразований

Будем рассматривать функции двух переменных $w = w(x,y)$. Общим свойством контактных преобразований является зависимость исходных переменных от новых переменных и их первых производных:

$$x = X\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big),\quad y = Y\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big),\quad w = W\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big). \tag{20}$$

Функции X, Y, W не являются произвольными: они выбираются так, чтобы первые производные исходных переменных также зависели только от преобразованных переменных и их производных не выше первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = U\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big),\qquad \frac{\partial w}{\partial y} = V\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big). \tag{21}$$

Контактные преобразования (20)–(21) не повышают порядка уравнений, к которым они применяются.

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0 \tag{22}$$

с помощью контактного преобразования (20)–(21) приводится к виду

$$G\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Big) = 0. \tag{23}$$

Иногда уравнение (23) бывает проще, чем уравнение (22). Если $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (23), то формулы (20) определяют соответствующее решение уравнения (22) в параметрическом виде.

Покажем, как найти функции U и V в (21) и соотношения, которым должны удовлетворять функции X, Y, W в (20). Продифференцируем по правилу дифференцирования неявных функций первое и второе выражения (20) по x и y, учитывая, что $u = u(\xi, \eta)$. В результате получим четыре соотношения:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u}p + \frac{\partial X}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u}q + \frac{\partial X}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1,\\
&\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u}p + \frac{\partial Y}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u}q + \frac{\partial Y}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,\\
&\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u}p + \frac{\partial X}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u}q + \frac{\partial X}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,\\
&\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u}p + \frac{\partial Y}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u}q + \frac{\partial Y}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где использованы краткие обозначения $p = \frac{\partial u}{\partial \xi}$, $q = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ $(p_\eta = q_\xi)$; индексы ξ и η соответствуют частным производным. Первая пара равенств (24) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, вторая — относительно $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$. Решив эти системы, можно найти производные $\frac{\partial \xi}{\partial x} = A$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = B$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = C$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = D$, а затем, продифференцировав третье соотношение (20) по x и y, можно выразить величины $U = \frac{\partial w}{\partial x}$, $V = \frac{\partial w}{\partial y}$ через новые переменные:

$$
\begin{aligned}
U &= A\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial u}p + \frac{\partial W}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}p_\eta\right) + B\left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial u}q + \frac{\partial W}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}q_\eta\right),\\
V &= C\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial u}p + \frac{\partial W}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}p_\eta\right) + D\left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial u}q + \frac{\partial W}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}q_\eta\right).
\end{aligned}
$$

При этом следующие из (21) условия — отсутствие зависимости от вторых производных

$$
\frac{\partial U}{\partial p_\xi} = \frac{\partial V}{\partial p_\xi} = \frac{\partial U}{\partial p_\eta} = \frac{\partial V}{\partial p_\eta} = \frac{\partial U}{\partial q_\eta} = \frac{\partial V}{\partial q_\eta} = 0 \quad (p_\eta \equiv q_\xi)
$$

— задают дополнительные соотношения между функциями X, Y, W.

Замечание. Важно отметить, что контактные преобразования определяются независимо от вида конкретных уравнений.

2.3.2. Преобразование Лежандра

Важным частным случаем контактных преобразований является преобразование Лежандра, которое определяется соотношениями

$$
w(x, y) + u(\xi, \eta) = x\xi + y\eta, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{25}
$$

где u — новая зависимая переменная, а ξ и η — новые независимые переменные.

Из формул (25) получим первые производные (используются два следствия первого равенства, полученные путем его дифференцирования по x и y, с учетом двух других соотношений):

$$
\frac{\partial w}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \eta. \tag{26}
$$

С помощью формул (25)–(26) находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = J\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

где

$$J = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2, \quad \frac{1}{J} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2.$$

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (27)$$

с помощью преобразования Лежандра (25) (при $J \neq 0$) приводится к виду

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} - u, \xi, \eta, J\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, -J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) = 0. \qquad (28)$$

Иногда уравнение (28) бывает проще, чем уравнение (27).

Пусть $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (28). Тогда формулы

$$w = \xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} - u(\xi, \eta), \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

определяют соответствующее решение уравнения (27) в параметрическом виде.

Замечание. Использование преобразования Лежандра может привести к потере решений, удовлетворяющих условию $J = 0$.

Пример 6. Уравнение стационарного трансзвукового газового потока

$$a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

преобразованием Лежандра (25) сводится к линейному уравнению с переменными коэффициентами

$$a\xi\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

2.3.3. Преобразование Эйлера

Преобразование Эйлера является частным случаем контактных преобразований. Оно определяется соотношениями

$$w(x, y) + u(\xi, \eta) = x\xi, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \eta. \qquad (29)$$

Из формул (29) (используются два следствия первого равенства, полученные путем его дифференцирования по x и y, с учетом других соотношений) можно получить:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \eta}. \qquad (30)$$

Дифференцируя эти выражения по x и y, находим вторые производные

$$w_{xx} = \frac{1}{u_{\xi\xi}}, \quad w_{xy} = -\frac{u_{\xi\eta}}{u_{\xi\xi}}, \quad w_{yy} = \frac{u_{\xi\eta}^2 - u_{\xi\xi}u_{\eta\eta}}{u_{\xi\xi}}. \qquad (31)$$

Нижние индексы обозначают соответствующие частные производные.

Преобразование Эйлера (29)–(31) используется для решения (линеаризации) некоторых нелинейных уравнений с частными производными.

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0 \tag{32}$$

с помощью преобразования Эйлера (29) приводится к виду

$$F\Big(u_\xi, \eta, \xi u_\xi - u, \xi, -u_\eta, \frac{1}{u_{\xi\xi}}, -\frac{u_{\xi\eta}}{u_{\xi\xi}}, \frac{u_{\xi\eta}^2 - u_{\xi\xi}u_{\eta\eta}}{u_{\xi\xi}}\Big) = 0. \tag{33}$$

Иногда уравнение (33) бывает проще, чем уравнение (32).

Пусть $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (33). Тогда формулы (29) определяют соответствующее решение уравнения (32) в параметрическом виде.

Пример 7. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a = 0$$

преобразованием Эйлера (29)–(31) приводится к линейному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Пример 8. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{34}$$

также линеаризуется преобразованием Эйлера (29)–(31):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = a\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Интегрируя, находим общее решение последнего уравнения

$$u = f(\xi) + g(\eta)e^{a\xi}, \tag{35}$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — произвольные функции.

Используя формулы (29) и (35), получим общее решение исходного уравнения (34) в параметрическом виде:

$$w = x\xi - f(\xi) - g(y)e^{a\xi},$$
$$x = f'_\xi(\xi) + ag(y)e^{a\xi}.$$

Задачи и упражнения к разд. 2.3

1. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Лежандра.

2. Уравнение минимальных поверхностей (описывающее, например, форму мыльной пленки, ограниченной заданным контуром)

$$\Big[1 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \Big[1 + \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Лежандра.

3. Уравнение Борна — Инфельда

$$\left[1-\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\left[1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Лежандра.

4. Нелинейное уравнение

$$f\left(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g\left(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+h\left(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Лежандра.

5. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f\left(y,\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Эйлера.

6. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=f\left(y,\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Эйлера.

7. Для функций многих переменных $w=w(x_1,\ldots,x_n)$ преобразование Лежандра задается соотношениями:

$$\begin{gathered}x_1=X_1,\quad\ldots,\quad x_{k-1}=X_{k-1},\\ x_k=\frac{\partial W}{\partial X_k},\quad\ldots,\quad x_n=\frac{\partial W}{\partial X_n},\\ w(\mathbf{x})=\sum_{i=k}^{n}X_i\frac{\partial W}{\partial X_i}-W(\mathbf{X}),\end{gathered}$$

где $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$ и $\mathbf{X}=\{X_1,\ldots,X_n\}$. Найти обратное преобразование и частные производные функции w по x_m при $m=1,\ldots,k-1$.

Литература к разд. 2.3: М. Г. Куренский (1934), Э. Камке (1966), Н. Х. Ибрагимов (1983), N. H. Ibragimov (1994), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

2.4. Преобразования Беклунда

2.4.1. Преобразования Беклунда для уравнений второго порядка

Пусть $w=w(x,y)$ — решение уравнения

$$F_1\left(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0,\tag{36}$$

а $u=u(\xi,\eta)$ — решение уравнения

$$F_2\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0.\tag{37}$$

Говорят, что уравнения (36) и (37) связаны преобразованием Беклунда

$$\begin{gathered}\Phi_1\left(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\\ \Phi_2\left(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\end{gathered}\tag{38}$$

если из совместности пары (36) и (38) следует уравнение (37), а из совместности пары (37) и (38) следует (36). Если для некоторого конкретного решения $u = u(\xi,\eta)$ уравнения (37) удается разрешить уравнения (38) относительно $w = w(x,y)$, то функция $w = w(x,y)$ будет решением уравнения (36). Соотношения (38) называют также дифференциальными связями.

Преобразования Беклунда могут сохранять инвариантным вид уравнения* (это дает возможность «размножать» решения) или связывать решения разных уравнений (это позволяет из решений одного уравнения получать решения другого).

Пример 9. Покажем, что уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{39}$$

связано с линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{40}$$

преобразованием Беклунда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}uw = 0,\\ &\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial(uw)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Действительно, исключая из (41) w, приходим к уравнению (40).

Обратно: пусть $u(x,t)$ — ненулевое решение уравнения теплопроводности (40). Разделив (40) на u и вычислив частные производные по x от обеих частей полученного выражения, с учетом равенства $(u_t/u)_x = (u_x/u)_t$ имеем

$$\left(\frac{u_x}{u}\right)_t = \left(\frac{u_{xx}}{u}\right)_x.$$

Подставим сюда следствия первого соотношения (41) (см. первую и последнюю формулы в цепочке равенств):

$$\frac{u_x}{u} = \frac{w}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{u_{xx}}{u} - \left(\frac{u_x}{u}\right)^2 = \frac{w_x}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{u_{xx}}{u} = \frac{w_x}{2} + \frac{1}{4}w^2.$$

В результате приходим к уравнению Бюргерса (39).

Пример 10. Покажем, что уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = e^{\lambda w} \tag{42}$$

связано с линейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0 \tag{43}$$

преобразованием Беклунда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{2k}{\lambda}\exp\Big[\frac{1}{2}\lambda(w+u)\Big],\\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{1}{k}\exp\Big[\frac{1}{2}\lambda(w-u)\Big], \end{aligned} \tag{44}$$

где $k \neq 0$ — произвольная постоянная.

Продифференцируем первое соотношение (44) по y, а второе — по x. Учитывая равенства $u_{yx} = u_{xy}$ и $w_{yx} = w_{xy}$ и исключая комбинации первых производных с помощью (44), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} &= k\exp\Big[\frac{1}{2}\lambda(w+u)\Big]\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = -\exp(\lambda w),\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} &= \frac{\lambda}{2k}\exp\Big[\frac{1}{2}\lambda(w-u)\Big]\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\Big) = \exp(\lambda w). \end{aligned} \tag{45}$$

* В таких случаях их называют автопреобразованиями Беклунда.

Складывая равенства (45), получим линейное уравнение (43). Вычитая из первого равенства второе, приходим к нелинейному уравнению (42).

Замечание 1. Важно отметить, что, в отличие от контактных преобразований преобразования Беклунда определяются видом конкретных уравнений (преобразование Беклунда существует не всегда).

Замечание 2. Для двух эволюционных уравнений n-го порядка вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F_1\Big(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_2\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big)$$

преобразование Беклунда часто ищут в форме дифференциальной связи

$$\Phi\Big(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^m w}{\partial x^m}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big) = 0,$$

содержащей производные только по одной переменной x (вторая переменная t входит неявно через функции w, u). Эта связь может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно одной из зависимых переменных.

2.4.2. Преобразования Беклунда, основанные на законах сохранения

Будем считать, что дифференциальное уравнение может быть записано в форме закона сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[F\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[G\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots\Big)\Big] = 0. \qquad (46)$$

Преобразование Беклунда (преобразование по решению)

$$dz = F(w, w_x, w_y, \ldots)\, dy - G(w, w_x, w_y, \ldots)\, dx, \quad d\eta = dy \qquad (47)$$
$$\Big(dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -G, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F\Big)$$

определяет переход от x и y к новым независимым переменным z и η по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x} = -G\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} + F\frac{\partial}{\partial z}.$$

Здесь использована краткая запись функций F и G из (46). Преобразование (47) сохраняет порядок рассматриваемого уравнения.

Замечание. Нередко встречаются преобразования по решению (47), дополненные преобразованием искомой величины вида $u = \varphi(w)$.

Пример 11. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big], \qquad (48)$$

которое является частным случаем уравнения (46) при $y = t$, $F = f(w)w_x$, $G = -w$.

Преобразование по решению (47) в данном случае имеет вид

$$dz = w\, dx + [f(w)w_x]\, dt, \quad d\eta = dt. \qquad (49)$$

Оно определяет переход от x, y к новым независимым переменным z, η по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x} = w\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} + [f(w)w_x]\frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя преобразование (49) к уравнению (48), получим

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = w^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right]. \tag{50}$$

Подстановка $w = 1/u$ приводит (50) к уравнению вида (48):

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{u^2} f\Big(\frac{1}{u}\Big)\frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

В частном случае $f(w) = aw^{-2}$ нелинейное уравнение (48) преобразованием (49) переводится в линейное уравнение $u_\eta = au_{zz}$.

Задачи и упражнения к разд. 2.4

1. Показать, что нелинейное уравнение теплопроводности с экспоненциальным источником

$$w_{xx} + w_{yy} = ae^{\beta w}$$

связано с уравнением Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(линейное уравнение) преобразованием Беклунда

$$u_x + \tfrac{1}{2}\beta w_y = \left(\tfrac{1}{2}a\beta\right)^{1/2}\exp\left(\tfrac{1}{2}\beta w\right)\sin u,$$
$$u_y - \tfrac{1}{2}\beta w_x = \left(\tfrac{1}{2}a\beta\right)^{1/2}\exp\left(\tfrac{1}{2}\beta w\right)\cos u.$$

Указание. Использовать условия $u_{xy} = u_{yx}$ и $w_{xy} = w_{yx}$.

2. Показать, что два уравнения синус-Гордона:

$$w_{xy} = \sin w \quad \text{и} \quad u_{xy} = \sin u$$

связаны автопреобразованием Беклунда

$$u_x = w_x + 2k\sin\left[\tfrac{1}{2}(w+u)\right],$$
$$u_y = -w_y - 2k^{-1}\sin\left[\tfrac{1}{2}(w-u)\right],$$

где $k \neq 0$ — произвольная постоянная.

Указание. Использовать условия $u_{xy} = u_{yx}$ и $w_{xy} = w_{yx}$.

3. Показать, что уравнения

$$w_{xx} + w_{yy} = \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w,$$
$$u_{xx} + u_{yy} = \sin u \cos u$$

связаны преобразованием Беклунда

$$u_x + w_y = \sin u \operatorname{ch} w,$$
$$u_y - w_x = \cos u \operatorname{sh} w.$$

Указание. Использовать условия $u_{xy} = u_{yx}$ и $w_{xy} = w_{yx}$.

4. Показать, что уравнение Кортевега — де Фриза

$$w_t + 6ww_x + w_{xxx} = 0$$

и модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

связаны преобразованием Беклунда

$$u_x = \varepsilon(w + u^2), \quad \varepsilon = \pm 1,$$
$$u_t = \varepsilon w_{xx} - 2(uw)_x.$$

5. Показать, что нелинейное уравнение Шредингера

$$iw_t + w_{xx} + |w|^2 w = 0,$$

где w — комплексная функция действительных переменных x и t ($i^2 = -1$), инвариантно относительно преобразования Беклунда

$$w_x - \widetilde{w}_x = iaf_1 - \tfrac{1}{2}if_2g_1,$$
$$w_t - \widetilde{w}_t = \tfrac{1}{2}g_1\left(w_x + \widetilde{w}_x\right) - ag_2 + \tfrac{1}{4}if_1\left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right).$$

Здесь приняты обозначения

$$f_1 = w - \widetilde{w}, \quad f_2 = w + \widetilde{w}, \quad g_1 = i\varepsilon\left(b - 2|f_1|^2\right)^{1/2}, \quad g_2 = i\left(af_1 - \tfrac{1}{2}f_2g_1\right),$$

где a и b — произвольные действительные постоянные, $\varepsilon = \pm 1$.

6. Свести уравнение Калоджеро

$$w_{xt} = ww_{xx} + f(w_x)$$

к обыкновенному дифференциальному уравнению; найти общее решение исходного уравнения для $f(w_x) = a$.

Указание. Использовать преобразование по решению, исходя из закона сохранения

$$D_t[\Phi(w_x)] + D_x[-w\Phi(w_x)] = 0,$$

где $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\Phi(u) = \exp\Big[\int \dfrac{u\,du}{f(u)}\Big]$.

7. Свести нелинейное уравнение третьего порядка

$$w_t = [f(w)w_x]_{xx}$$

к уравнению аналогичного вида и определить, для какой функции $f(w)$ полученное уравнение будет линейным.

Указание. Использовать преобразование по решению

$$dz = w\,dx + [f(w)w_x]_x\,dt, \qquad d\eta = dt$$

с последующей заменой $w = 1/u$.

8. Показать, что нелинейное уравнение

$$w_{tt} + w_t = a(w^{-2}w_x)_x$$

преобразованием по решению

$$\tau = t + \ln|w|, \quad dz = aw^{-2}w_x dt + (w + w_t)dx, \quad u = 1/w \qquad (dz = z_t\,dt + z_x\,dx)$$

приводится к линейному телеграфному уравнению

$$u_{\tau\tau} + u_\tau = au_{zz}.$$

Литература к разд. 2.4: G. L. Lamb (1974), R. M. Miura (1976), A. S. Fokas, R. L. Anderson (1979), A. S. Fokas, B. Fuchssteiner (1981), C. Rogers, W. F. Shadwick (1982), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983, стр. 24–28), Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 151–154), C. Rogers, T. Ruggeri (1985), J. Weiss (1986), М. Абловиц, Х. Сигур (1987, стр. 179–181), C. Rogers, W. F. Ames (1989), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

2.5. Дифференциальные подстановки

Помимо преобразований Беклунда, в математической физике используются также дифференциальные подстановки. Для уравнений второго порядка дифференциальные подстановки обычно имеют вид

$$w = \Psi\Big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big).$$

Дифференциальная подстановка повышает порядок уравнения (если она подставляется в уравнение для w) и позволяет с помощью решений одного уравнения получать решения другого. Связь между решениями этих уравнений, вообще говоря, необратима и носит односторонний характер. Дифференциальные подстановки могут быть следствием преобразования Беклунда (хотя это и необязательно). Дифференциальная подстановка может понижать порядок уравнения (когда в качестве исходного принимается уравнение для u).

В общем случае дифференциальные подстановки определяются формулами (20), где функции X, Y, W могут задаваться произвольно.

Пример 12. Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{51}$$

Первое соотношение (41) можно записать как дифференциальную подстановку (преобразование Хопфа — Коула)

$$w = \frac{2u_x}{u}. \tag{52}$$

Подставляя (52) в (51), получим уравнение

$$\frac{2u_{tx}}{u} - \frac{2u_t u_x}{u^2} = \frac{2u_{xxx}}{u} - \frac{2u_x u_{xx}}{u^2},$$

которое можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right] = 0.$$

Таким образом, всякое решение линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

формулой (52) переводится в решение уравнения Бюргерса (51). Обратное неверно: решение уравнения (51) порождает, вообще говоря, решение более общего уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)u,$$

где $f(t)$ — некоторая функция t.

Пример 13. Уравнение стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \tag{53}$$

где w — функция тока, x и y — соответственно продольная и поперечная координаты, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Преобразование Мизеса (дифференциальная подстановка)

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad u(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y), \tag{54}$$

понижает порядок уравнения (53) и приводит его к более простому нелинейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \nu\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{55}$$

При выводе уравнения (55) использовались формулы для вычисления производных:

$$\frac{\partial}{\partial y} = u\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = u\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Задачи и упражнения к разд. 2.5

1. Показать, что преобразование Миуры (дифференциальная подстановка) переводит любое решение модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза

$$w_t - 6w^2 w_x + w_{xxx} = 0$$

в решение уравнения Кортевега — де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Указание. Надо доказать тождество $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = (\partial_x + 2w)(w_t - 6w^2 w_x + w_{xxx})$.

2. Найти общее решение уравнения

$$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = f(x).$$

Указание. Использовать преобразование Мизеса (54).

3. Определить вид нелинейного уравнения второго порядка, к которому приводится уравнение гидродинамического пограничного слоя (53) с помощью преобразования Крокко:

$$\xi = x, \quad \zeta = w_y, \quad \Psi(\xi, \zeta) = w_{yy}, \qquad \text{где} \quad w = w(x, y).$$

Литература к разд. 2.5: R. M. Miura (1976), Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 522–523), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).