Глава 3 книги А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова «Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики» — М.: Физматлит, 2005 (в печати).

3. Решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Метод подобия

3.1. Предварительные замечания

Для построения точных решений нелинейных уравнений математической физики разработан ряд методов, основанных на переходе к новым переменным (зависимым и независимым). При этом обычно ставится цель: найти новые переменные, число которых меньше, чем число исходных переменных. Переход к таким переменным приводит к более простым уравнениям. В частности, поиск точных решений уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными сводится к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений (или систем таких уравнений). Естественно, при указанной редукции решения обыкновенных дифференциальных уравнений дают не все решения исходного уравнения с частными производными, а лишь класс решений, обладающих некоторыми специальными свойствами.

Наиболее простыми классами точных решений, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, являются решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Существование этих решений обычно (но не всегда) обусловлено инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований сдвига и растяжения-сжатия.

Решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто встречаются в различных приложениях. Ниже рассмотрены характерные особенности этих решений. Считается, что искомая величина w зависит от двух переменных: x и t, где t играет роль времени, а x — роль пространственной координаты.

3.2. Решения типа бегущей волны

3.2.1. Общий вид решений типа бегущей волны

Решениями типа бегущей волны называются решения вида

$$w(x,t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t, \tag{1}$$

где величина λ/k играет роль скорости распространения волны (λ может быть любого знака, значение $\lambda = 0$ отвечает стационарному решению, а значение $k = 0$ — пространственно-однородному решению). Решения типа бегущей волны характеризуются тем, что профили этих решений в разные моменты времени* получаются друг из друга преобразованием сдвига и можно ввести движущуюся с постоянной скоростью декартову систему координат, в которой профиль искомой величины будет стационарным. При $k > 0$, $\lambda > 0$ волна (1) движется вдоль оси x вправо (в сторону увеличения значений x).

* Термин *решение типа бегущей волны* используется также в случаях, когда переменная t играет роль пространственной координаты.

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой выражения (1) в исходное уравнение с учетом равенств $w_x = kW'$, $w_t = -\lambda W'$ и т. д. (штрих обозначает производную по z).

Решения типа бегущей волны допускают уравнения, которые не зависят явно от независимых переменных:

$$F\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dots\Big) = 0. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $W(z)$:

$$F(W, kW', -\lambda W', k^2 W'', -k\lambda W'', \lambda^2 W'', \dots) = 0,$$

где k и λ — произвольные постоянные.

Пример 1. Нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] \qquad (3)$$

допускает решение типа бегущей волны. Подставив (1) в (3), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$k^2[f(W)W']' + \lambda W' = 0.$$

Интегрируя дважды, получим его решение в неявном виде

$$k^2 \int \frac{f(W)\,dW}{\lambda W + C_1} = -z + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2. Рассмотрим однородное уравнение Монжа — Ампера

$$\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\Big)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \qquad (4)$$

Подставив в него выражение (1), получим тождество. Поэтому уравнение (4) имеет решение

$$w = W(kx - \lambda t),$$

где $W(z)$ — произвольная функция, k, λ — произвольные постоянные.

Пример 3. Система нелинейных уравнений массо- и теплопереноса при наличии объемных химических реакций

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, w),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(u, w)$$

допускает точное решение типа бегущей волны

$$u = u(z), \quad w = w(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функции $u(z)$ и $w(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ak^2 u''_{zz} + \lambda u'_z + f(u, w) = 0,$$
$$bk^2 w''_{zz} + \lambda w'_z + g(u, w) = 0.$$

3.2.2. Инвариантность уравнений относительно преобразований сдвига

Важно отметить, что уравнения вида (2) инвариантны (т. е. сохраняют вид) относительно преобразований сдвига по независимым переменным:

$$x = \bar{x} + C_1, \quad t = \bar{t} + C_2, \qquad (5)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Свойство инвариантности конкретных уравнений относительно преобразований сдвига (5) неразрывно связано с существованием у этих уравнений решений типа бегущей волны (из первого следует второе).

Решения типа бегущей волны являются простейшими *инвариантными решениями*, т. е. решениями, которые обусловлены способностью уравнений быть инвариантными относительно некоторых преобразований (содержащих произвольные постоянные).

Замечание. Условие инвариантности уравнения относительно преобразований (5) не является необходимым условием для существования решений типа бегущий волны. Прямой проверкой можно убедиться, что уравнение второго порядка

$$F\big(w, w_x, w_t, xw_x + tw_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, xw_{xx} + tw_{xt},\\ xw_{xt} + tw_{tt}, x^2 w_{xx} + 2xtw_{xt} + t^2 w_{tt}, xw_t w_{xx} + tw_x w_{tt}\big) = 0$$

не допускает преобразований вида (5), но имеет точное решение типа бегущей волны (1), которое описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(W, kW', -\lambda W', zW', k^2 W'', -k\lambda W'', \lambda^2 W'', kzW'', -\lambda zW'', z^2 W'', -k\lambda zW'') = 0.$$

3.2.3. Функциональное уравнение, задающее решения типа бегущей волны

Покажем, что решения типа бегущей волны можно определить как решения функционального уравнения

$$w(x,t) = w(x + C\lambda, t + Ck), \tag{6}$$

где k и λ — некоторые постоянные, C — произвольная постоянная. Уравнение (6) означает, что искомая функция не меняется при одновременном увеличении обоих аргументов на пропорциональные величины (C — коэффициент пропорциональности).

Действительно, дифференцируя уравнение (6) по C, а затем полагая $C = 0$, приходим к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка

$$\lambda \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Общее решение этого уравнения строится методом характеристик и имеет вид (1), что и требовалось доказать.

●◆ *Задачи и упражнения к разд. 3.2*

1. Найти решение типа бегущей волны уравнения Бюргерса: $w_t + ww_x = aw_{xx}$.

2. Найти решения типа бегущей волны нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = (ww_x)_x$,

b) $w_t + aw_x = (ww_x)_x$,

c) $w_t = (ww_x)_x + a$.

3. Найти общее решение линейного уравнения $w_{tt} = w_{xx}$ путем построения точных решений типа бегущей волны.

Указание. Использовать принцип суперпозиции решений для линейных уравнений.

4. Найти решения типа бегущей волны нелинейных волновых уравнений:
a) $w_{tt} = (ww_x)_x$,
b) $w_{tt} = [f(w)w_x]_x$.

5. Найти решения типа бегущей волны нелинейных уравнений:
a) $w_t = [f(w_x)]_x$,
b) $w_{tt} = [f(w_x)]_x$.

6. Показать, что следующие уравнения не имеют решений типа бегущей волны:
a) $w_t = (ww_x)_x + x$,
b) $w_{tt} = (ww_x)_x + t^2$.

7. Найти решение задачи для нелинейного уравнения теплопроводности $w_t = a(w^n w_x)_x$ с начальным и граничным условиями

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (x > 0), \qquad w = kt^{1/n} \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (t > 0).$$

Указание. Решение ищется в виде

$$w(x,t) = \begin{cases} b(\lambda t - x)^m & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \lambda t, \\ 0 & \text{при } x > \lambda t. \end{cases}$$

8. Найти точные решения типа бегущей волны уравнения Борна — Инфельда

$$\bigl(1 - w_t^2\bigr)w_{xx} + 2w_x w_t w_{xt} - \bigl(1 + w_x^2\bigr)w_{tt} = 0.$$

Замечание. Это уравнение используется в нелинейной электродинамике (в теории поля).

9. Показать, что уравнение Кортевега — де Фриза $w_t + w_{xxx} - 6ww_x = 0$ имеет следующее решение типа бегущей волны:

$$w = -\frac{\lambda}{2\,\mathrm{ch}^2\bigl[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}(z - z_0)\bigr]}, \qquad z = x - \lambda t,$$

где z_0 и $\lambda > 0$ — произвольные постоянные.

10. Найти решение типа бегущей волны уравнения Буссинеска: $w_{tt} + a(ww_x)_x + bw_{xxxx} = 0$.

3.3. Автомодельные решения. Метод подобия

3.3.1. Общий вид автомодельных решений. Метод подобия

Автомодельными называются решения вида

$$w(x,t) = t^\alpha U(\zeta), \qquad \zeta = xt^\beta. \tag{7}$$

Профили этих решений в разные моменты времени получаются друг из друга *преобразованиями подобия* (преобразованиями типа растяжения или сжатия).

Автомодельные решения существуют, если растяжение независимых и зависимой переменных по правилу

$$\begin{aligned} &t = C\bar{t}, \qquad x = C^k\bar{x}, \qquad w = C^m\bar{w}, \\ &C > 0 \text{ — произвольная постоянная,} \end{aligned} \tag{8}$$

при соответствующем выборе k и m эквивалентно тождественному преобразованию, т. е. исходное уравнение

$$F(x, t, w, w_x, w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, \ldots) = 0 \tag{9}$$

в результате преобразования (8) переходит в точно такое же уравнение

$$F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{w}, \bar{w}_{\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{t}\bar{t}}, \ldots) = 0. \tag{10}$$

Здесь функция F та же самая, что и в уравнении (9); при этом уравнение (9) не зависит от параметра C.

Найдем связь между параметрами α, β в решении (7) и параметрами k, m в преобразовании растяжения-сжатия (8). Пусть

$$w = \Phi(x,t) \tag{11}$$

— решение уравнения (9). Тогда функция

$$\bar{w} = \Phi(\bar{x},\bar{t}) \tag{12}$$

будет решением уравнения (10).

Учитывая явный вид решения (7), из (12) получим

$$\bar{w} = \bar{t}^{\alpha} U(\bar{x}\bar{t}^{\beta}). \tag{13}$$

Возвращаясь в (13) к исходным переменным с помощью (8), имеем

$$w = C^{m-\alpha} t^{\alpha} U\big(C^{-k-\beta} x t^{\beta}\big). \tag{14}$$

Эта функция, по построению, удовлетворяет уравнению (9), т. е. является его решением. Потребуем, чтобы решение (14) совпало с (7) (считается выполненным условие единственности решения для любых значений параметра $C \neq 0$). Для этого надо положить

$$\alpha = m, \qquad \beta = -k. \tag{15}$$

На практике поиск автомодельных решений проводится по полученному выше критерию существования: если k и m в (8) найдены, то автомодельные переменные имеют вид (7) с параметрами (15).

Метод построения автомодельных решений, основанный на использовании преобразований растяжения-сжатия типа (8), носит название *метода подобия*. Важно отметить, что эти преобразования содержат свободный (произвольный) параметр C.

Для наглядности на рис. 1 изображены основные этапы построения автомодельных решений.

3.3.2. Примеры автомодельных решений уравнений математической физики и механики

Пример 4. Рассмотрим уравнение теплопроводности с нелинейным источником степенного типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^n. \tag{16}$$

Растяжение переменных по формулам (8) преобразует уравнение (16) к следующему виду:

$$C^{m-1}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = aC^{m-2k}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + bC^{mn}\bar{w}^n.$$

Приравнивание степеней C дает систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных k и m:

$$m-1 = m-2k = mn,$$

которая имеет единственное решение: $k=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{1-n}$. Учитывая эти равенства и используя формулы (7) и (15), находим автомодельные переменные

$$w = t^{1/(1-n)}U(\zeta), \qquad \zeta = xt^{-1/2}.$$

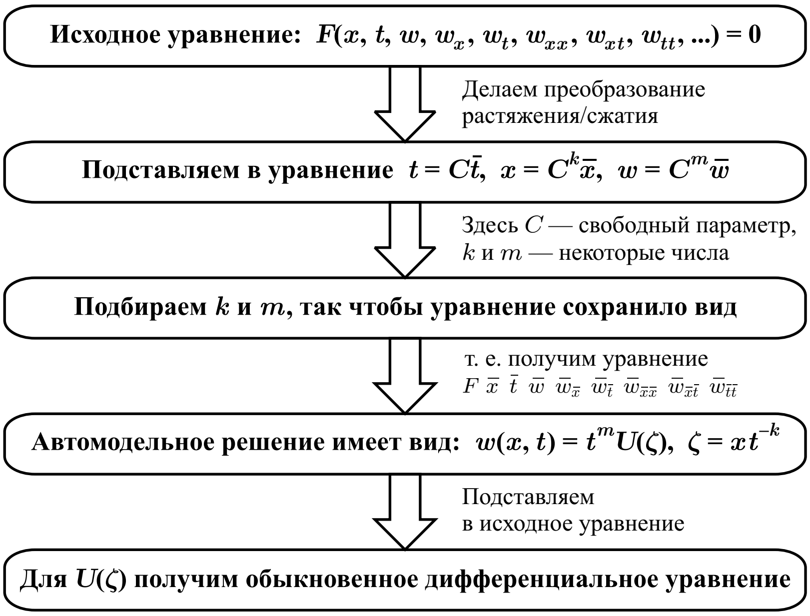

Рис. 1. Простейшая схема построения автомодельных решений, которая часто используется на практике.

Подставляя их в (16), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $U(\zeta)$:

$$aU''_{\zeta\zeta} + \frac{1}{2}\zeta U'_\zeta + \frac{1}{n-1}U + bU^n = 0.$$

Пример 5. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n \frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{17}$$

которое встречается в задачах волновой и газовой динамики.

Подставив (8) в (17), получим

$$C^{m-2}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = aC^{mn+m-2k}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{w}^n \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right).$$

Приравнивание степеней C дает одно линейное уравнение: $m - 2 = mn + m - 2k$. Отсюда имеем: $k = \frac{1}{2}mn + 1$, где m может быть выбрано произвольно. Используя далее формулы (7) и (15), находим автомодельные переменные:

$$w = t^m U(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{1}{2}mn-1}, \quad m\text{ — любое.}$$

Подставив их в (17), можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $U(\zeta)$.

В табл. 1 приведены другие примеры автомодельных решений нелинейных уравнений математической физики.

Описанный метод построения автомодельных решений применим также к системам уравнений с частными производными. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 6. Рассмотрим систему уравнений стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине:

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

ТАБЛИЦА 1
Некоторые нелинейные уравнения математической физики, допускающие автомодельные решения

Уравнение	Название уравнения	Вид решения	Определяющее уравнение
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$	Нестационарное уравнение теплопроводности	$w=w(z),\ z=xt^{-1/2}$	$[f(w)w']'+\frac{1}{2}zw'=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+bw^k$	Уравнение теплопроводности с источником	$w=t^pu(z),\ z=xt^q,$ $p=\frac{1}{1-k},\ q=\frac{k-n-1}{2(1-k)}$	$a(u^nu')'-qzu'+$ $+bu^k-pu=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bw\dfrac{\partial w}{\partial x}$	Уравнение Бюргерса	$w=t^{-1/2}u(z),$ $z=xt^{-1/2}$	$au''+buu'+\frac{1}{2}zu'+\frac{1}{2}u=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2$	Потенциальное уравнение Бюргерса	$w=w(z),\ z=xt^{-1/2}$	$aw''+b(w')^2+\frac{1}{2}zw'=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	Уравнение нелинейной фильтрации	$w=t^pu(z),\ z=xt^q,$ $p=-\frac{(k+2)q+1}{k},$ q — любое	$a(u')^ku''=qzu'+pu$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=f\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	Уравнение нелинейной фильтрации	$w=t^{1/2}u(z),$ $z=xt^{-1/2}$	$2f(u')u''+zu'-u=0$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$	Волновое уравнение	$w=w(z),\ z=x/t$	$(z^2w')'=[f(w)w']'$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=aw^n$	Уравнение теплопроводности с источником	$w=x^{\frac{2}{1-n}}u(z),$ $z=y/x$	$(1+z^2)u''-\frac{2(1+n)}{1-n}zu'+$ $+\frac{2(1+n)}{(1-n)^2}u-au^n=0$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$	Уравнение трансзвукового течения газа	$w=x^{-3k-2}u(z),$ $z=x^ky,\ k$ — любое	$\frac{a}{k+1}u'u''+\frac{k^2}{k+1}z^2u''-$ $-5kzu'+3(3k+2)u=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+bw\dfrac{\partial w}{\partial x}$	Уравнение Кортевега — де Фриза	$w=t^{-2/3}u(z),$ $z=xt^{-1/3}$	$au'''+buu'+\frac{1}{3}zu'+\frac{2}{3}u=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}$	Уравнение пограничного слоя	$w=x^{\lambda+1}u(z),$ $z=x^\lambda y,$ λ — любое	$(2\lambda+1)(u')^2-(\lambda+1)uu''$ $=au'''$

Сделаем в (18) растяжение независимых и зависимых переменных по правилу

$$x=C\bar{x},\quad y=C^k\bar{y},\quad u=C^m\bar{u},\quad v=C^n\bar{v}. \tag{19}$$

Умножив полученные уравнения на подходящие постоянные множители, имеем

$$\begin{aligned}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+C^{n-m-k+1}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}&=C^{-m-2k+1}\nu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2},\\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+C^{n-m-k+1}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}&=0.\end{aligned} \tag{20}$$

Потребуем, чтобы вид уравнений преобразованной системы (20) совпал с видом уравнений исходной системы (18). Это условие дает два линейных алгебраических уравнения: $n-m-k+1=0,\ -2k-m+1=0$. Разрешив их относительно m и n, получим

$$m=1-2k,\qquad n=-k, \tag{21}$$

где показатель k может быть выбран произвольно. Для построения автомодельного решения используем схему на рис. 1, в которой для определения вида функций u и v надо соответственно переобозначить $x\to y$, $t\to x$, $w\to u$ (для компоненты u) и $x\to y$, $t\to x$, $w\to v$, $m\to n$ (для компоненты v). В результате имеем

$$u(x,y) = x^{1-2k}U(\zeta), \quad v(x,y) = x^{-k}V(\zeta), \quad \zeta = yx^{-k}, \tag{22}$$

где k — произвольная постоянная. Подставив (22) в исходную систему (18), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $U = U(\zeta)$, $V = V(\zeta)$:

$$U\big[(1-2k)U - k\zeta U'_\zeta\big] + VU'_\zeta = \nu U''_{\zeta\zeta},$$
$$(1-2k)U - k\zeta U'_\zeta + V'_\zeta = 0.$$

3.3.3. Более общий подход, основанный на решении функционального уравнения

Алгоритм построения автомодельного решения, описанный в разд. 3.3.1, был основан на явном представлении этого решения в виде (7). Однако существует более общий подход, позволяющий вывести зависимость (7) непосредственно из условия инвариантности уравнения (9) относительно преобразования (8).

Действительно, будем считать, что уравнение (9) в результате преобразования (8) переходит в точно такое же уравнение (10). Пусть (11) — решение уравнения (9). Тогда функция (12) будет решением уравнения (10). Возвращаясь в (12) к исходным переменным (8), имеем

$$w = C^m \Phi\big(C^{-k}x, C^{-1}t\big). \tag{23}$$

Эта функция, по построению, удовлетворяет уравнению (9), т. е. является его решением. Потребуем, чтобы решение (23) совпало с (11) (считается выполненным условие единственности решения для любых значений параметра $C \neq 0$). В результате приходим к функциональному уравнению

$$\Phi(x,t) = C^m \Phi\big(C^{-k}x, C^{-1}t\big). \tag{24}$$

При $C = 1$ уравнение (24) обращается в тождество. Разложим (24) в ряд по параметру C в окрестности $C = 1$, затем поделим полученное выражение на $(C-1)$ и перейдем к пределу при $C \to 1$. В результате получим линейное уравнение с частными производными первого порядка для функции Φ:

$$kx\frac{\partial \Phi}{\partial x} + t\frac{\partial \Phi}{\partial t} - m\Phi = 0. \tag{25}$$

Запишем соответствующую характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см. разд. 14.1.1):

$$\frac{dx}{kx} = \frac{dt}{t} = -\frac{d\Phi}{m\Phi}.$$

Находим ее первые интегралы:

$$xt^{-k} = A_1, \qquad t^m\Phi = A_2,$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения с частными производными (25) ищется в виде $A_2 = U(A_1)$, где $U(A)$ — произвольная функция (см. разд. 14.1.1). В результате получим решение функционального уравнения (24):

$$\Phi(x,t) = t^m U(\zeta), \qquad \zeta = xt^{-k}, \tag{26}$$

Подставив (26) в (11), приходим к автомодельному решению (7) с параметрами (15).

3.3.4. Некоторые замечания

Замечание 1. При $\alpha = 0$ автомодельные решения (7) встречаются в задачах с простейшими начальными и граничными условиями:

$$w = w_1 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (x > 0), \qquad w = w_2 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (t > 0),$$

где w_1 и w_2 — некоторые константы.

Замечание 2. Условие существования преобразования (8), сохраняющего вид рассматриваемого уравнения, является достаточным для существования автомодельного решения. Однако это условие не является необходимым: существуют уравнения, которые не допускают преобразований вида (8), но имеют автомодельные решения.

Например, уравнение

$$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (bx^2 + at^2)f(w)$$

имеет автомодельное решение

$$w = w(z), \quad z = xt \quad \Longrightarrow \quad w'' - f(w) = 0,$$

но не допускает преобразований вида (8). В указанном уравнении a и b могут быть произвольными функциями аргументов x, t, w, w_x, w_t, w_{xx}, ...

Более широкий класс уравнений

$$F\left(w, \frac{a_1 w_x^n + b_1 w_t^m}{a_1 t^n + b_1 x^m}, \frac{a_2 w_{xx}^p + b_2 w_{tt}^q}{a_2 t^{2p} + b_2 x^{2q}}, \frac{a_3 w_{xx} + b_3 w_{tt}}{a_3 w_x^2 + b_3 w_t^2}\right) = 0,$$

где a_k и b_k — произвольные функции аргументов x, t, w, w_x, ..., также не допускает преобразований вида (8), но имеет автомодельные решения вида $w = w(z)$, $z = xt$.

Замечание 3. Решения типа бегущей волны тесно связаны с автомодельными решениями. Действительно, положив в (1)

$$t = \ln \tau, \quad x = \ln y,$$

получим представление бегущей волны в автомодельном виде

$$w = W\bigl(k \ln(y\tau^{-\lambda/k})\bigr) = U(y\tau^{-\lambda/k}),$$

где $U(z) = W(k \ln z)$.

Задачи и упражнения к разд. 3.3

1. Найти автомодельные решения нелинейных уравнений теплопроводности:
  a) $w_t = a(ww_x)_x$,
  b) $w_t = a(w^n w_x)_x$,
  c) $w_t = a(e^w w_x)_x$.

2. Найти автомодельные решения нелинейных уравнений теплопроводности с источником:
  a) $w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x + b$,
  b) $w_t = ax^{-n}(x^n w^k w_x)_x + bw^m$,
  c) $w_t = a(x^n w_x)_x + bw^k$,
  d) $w_t = a(w^n w_x)_x + bx^k$.

3. Найти автомодельное решение задачи о диффузионном пограничном слое на плоской пластине, которая описывается уравнением

$4ayx^{-1/2}w_x + ay^2x^{-3/2}w_y = w_{yy}$

и граничными условиями

$w = w_1$ при $x = 0$, $w = w_2$ при $y = 0$, $w \to w_1$ при $y \to +\infty$.

4. Найти автомодельное решение обобщенного уравнения теплового пограничного слоя (в частности, оно описывает теплообмен плоской пластины с обтекающей ее жидкостью)

$$f\Big(\frac{y}{\sqrt{x}}\Big)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{x}}g\Big(\frac{y}{\sqrt{x}}\Big)\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

удовлетворяющее граничным условиям из предыдущего примера.

5. Найти решение нелинейного уравнения теплопроводности

$w_t = a(w^n w_x)_x$,

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

a) $w = 2$ при $t = 0$ $(x > 0)$, $w = 1$ при $x = 0$ $(t > 0)$;
b) $w = 0$ при $t = 0$ $(x > 0)$, $w = t$ при $x = 0$ $(t > 0)$;
c) $w = 0$ при $t = 0$ $(x > 0)$, $w = bt^k$ при $x = 0$ $(t > 0)$.

6. Найти решение задачи о тепловом взрыве, которая описывается нелинейным уравнением теплопроводности $w_t = a(w^n w_x)_x$, начальным и граничным условиями

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (x > 0), \qquad w \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad (t > 0),$$

а также условием сохранения энергии

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)\,dx = E_0 > 0.$$

7. Найти автомодельное решение обобщенного уравнения Бюргерса:

$w_t + aw^n w_x = bw_{xx}$.

8. Найти автомодельные решения нелинейных волновых уравнений:

a) $w_{tt} = a(ww_x)_x + b$,
b) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^k$,
c) $w_{tt} = a(e^{\lambda w} w_x)_x$.

9. Найти автомодельные решения нелинейных уравнений:

a) $w_t = f(w_{xx})$,
b) $w_{tt} = [f(w_x)]_x$,
c) $w_{tt} = f(w_{xx})$.

10. Найти автомодельные решения однородного и неоднородных уравнений Монжа — Ампера:

a) $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy}$,
b) $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + ax^n$,
c) $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + ayx^n$.

11. Найти автомодельные решения уравнений типа Кортевега — де Фриза:

a) $w_t + w_{xxx} + aww_x + bt^{-1}w = 0$,
b) $w_t + w_{xxx} + aw^n w_x = 0$,
c) $w_t + w_{xxx} + a(w_x)^n = 0$.

12. Найти автомодельное решение уравнения Буссинеска:

$w_{tt} + a(ww_x)_x + bw_{xxxx} = 0$.

13. Свести систему уравнений гидродинамического пограничного слоя (18) к одному уравнению путем введения функции тока w по формулам $u = \frac{\partial w}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial w}{\partial x}$, а затем построить автомодельное решение полученного уравнения.

14. Найти автомодельное решение уравнений гидродинамического пограничного слоя (18) с граничными условиями

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u = U_0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u \to U_0 \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Указание. Достаточно свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями.

15. Найти автомодельное решение задачи о ламинарном течении струи, которая описывается уравнениями гидродинамического пограничного слоя (18), граничными условиями

$$u_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

и интегральным условием

$$\int_0^\infty u^2\,dy = A, \qquad A = \text{const}\,.$$

16. Определить, при каких значениях параметров n, m, k, p реакционно-диффузионная система уравнений

$$\begin{aligned} u_t - a_1 u_{xx} &= b_1 u^n w^m, \\ w_t - a_2 w_{xx} &= b_2 u^k w^p \end{aligned}$$

допускает автомодельное решение.

17. Найти общий вид правой части уравнений
a) $w_t - w_{xx} = F(x,t,w)$,
b) $w_t - w_{xx} = F(w,w_x)$,
c) $w_t - (ww_x)_x = F(x,t,w)$,
d) $w_{tt} - w_{xx} = F(x,t,w)$,
e) $w_{tt} - w_{xx} = F(w,w_x)$,
которые допускают автомодельные решения.

Указание. Используя преобразования вида (8), получить функциональное уравнение для определения функции F. Решить это уравнение с помощью метода дифференцирования аналогично тому, как это делалось в разд. 3.3.3.

18. Найти общий вид правых частей реакционно-диффузионной системы уравнений

$$\begin{aligned} u_t - au_{xx} &= f(u,w), \\ w_t - bw_{xx} &= g(u,w), \end{aligned}$$

которая допускает автомодельные решения.

3.4. Уравнения, инвариантные относительно комбинаций преобразований сдвига и растяжения, и их решения

3.4.1. Экспоненциально-автомодельные (предельные) решения

Экспоненциально-автомодельными решениями называются решения вида

$$w(x,t) = e^{\alpha t} V(\xi), \qquad \xi = xe^{\beta t}. \tag{27}$$

Экспоненциально-автомодельные решения существуют, если рассматриваемое уравнение (9) инвариантно относительно преобразования

$$t = \bar{t} + \ln C, \quad x = C^k \bar{x}, \quad w = C^m \bar{w}, \tag{28}$$

где $C > 0$ — произвольная постоянная, при некоторых k и m. Преобразование (28) представляет собой комбинацию преобразования сдвига по t с преобразованиями типа растяжения-сжатия по x и w. Важно подчеркнуть, что эти преобразования содержат произвольный параметр C, а рассматриваемое уравнение не зависит от параметра C.

Найдем связь между параметрами α, β в решении (27) и параметрами k, m в преобразовании сдвига-растяжения (28). Пусть $w = \Phi(x,t)$ — решение уравнения (9). Тогда функция $\bar{w} = \Phi(\bar{x},\bar{t})$ будет решением уравнения (10). Учитывая явный вид решения (27), получим

$$\bar{w} = e^{\alpha \bar{t}} V(\bar{x} e^{\beta \bar{t}}).$$

ТАБЛИЦА 2

Инвариантные решения, поиск которых основан на использовании комбинаций преобразований сдвига и растяжения (C, C_1, C_2 — произвольные постоянные)

№	Вид решений	Инвариантные преобразования	Связь между коэффициентами
1	$w=U(z),\ z=\alpha x+\beta y$	$t=\bar{t}+C_1,\ x=\bar{x}+C_2$	α и β — произвольные постоянные
2	$w=t^\alpha U(z),\ z=xt^\beta$	$t=C\bar{t},\ x=C^k\bar{x},\ w=C^m\bar{w}$	$\alpha=m,\ \beta=-k$
3	$w=e^{\alpha t}U(z),\ z=xe^{\beta t}$	$t=\bar{t}+\ln C,\ x=C^k\bar{x},\ w=C^m\bar{w}$	$\alpha=m,\ \beta=-k$
4	$w=t^\alpha U(z),\ z=x+\beta\ln t$	$t=C\bar{t},\ x=\bar{x}+k\ln C,\ w=C^m\bar{w}$	$\alpha=m,\ \beta=-k$

Возвращаясь к исходным переменным с помощью (28), имеем

$$w = C^{m-\alpha}e^{\alpha t}V\big(C^{-k-\beta}xe^{\beta t}\big).$$

Потребуем, чтобы данное решение совпало с (27) (считается выполненным условие единственности решения для любых значений параметра $C \neq 0$). Для этого надо положить

$$\alpha = m, \qquad \beta = -k. \tag{29}$$

На практике поиск экспоненциально-автомодельных решений проводится по полученному выше критерию существования: если k и m в (28) найдены, то новые переменные имеют вид (27) с параметрами (29).

Замечание. Решения вида (27) иногда называют также *предельными автомодельными решениями*.

Пример 7. Покажем, что нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big) \tag{30}$$

допускает экспоненциально-автомодельное решение. Подставив (28) в (30), получаем

$$C^m\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = aC^{mn+m-2k}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\Big(\bar{w}^n\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\Big).$$

Приравнивание степеней C дает одно линейное уравнение: $m = mn + m - 2k$. Отсюда имеем: $k = \frac{1}{2}mn$, где m — любое число. Используя далее формулы (27) и (29) и полагая без ограничения общности $m = 2$ (это эквивалентно операции масштабирования по времени t), находим новые переменные

$$w = e^{2t}V(\xi), \qquad \zeta = xe^{-nt}. \tag{31}$$

Подставляя их в (30), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $V(\xi)$:

$$a(V^nV'_\xi)'_\xi + n\xi V'_\xi - 2V = 0.$$

Пример 8. Используя описанный метод, можно показать, что уравнение (17) также имеет экспоненциально-автомодельное решение вида (31).

3.4.2. Инвариантные решения

Для наглядности в табл. 2 собраны инвариантные решения, поиск которых основан на использовании комбинаций преобразований сдвига и растяжения по независимым переменным и преобразований растяжения по зависимой переменной. Помимо решений типа бегущей волны, автомодельных решений и экспоненциально-автомодельных решений, рассмотренных ранее, в последней строке описано еще одно инвариантное решение. Проиллюстрируем способ его построения на конкретном примере.

Пример 9. Покажем, что нелинейное уравнение теплопроводности (30) допускает решение, указанное в четвертой строке в табл. 2. Для этого сделаем преобразование

$$t = C\bar{t}, \quad x = \bar{x} + k\ln C, \quad w = C^m\bar{w}.$$

В результате получим

$$C^{m-1}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}} = aC^{mn+m}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\bar{w}^n\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\right).$$

Приравнивание степеней C дает одно линейное уравнение: $m-1 = mn+m$. Отсюда находим: $m=-1/n$, а k — любое число. Поэтому (см. четвертую строку в табл. 2) уравнение (30) имеет инвариантное решение вида

$$w = t^{-1/n}U(z), \quad z = x + \beta\ln t, \qquad \text{где } \beta \text{ — любое.} \tag{32}$$

Подставляя (32) в (30), приходим к автономному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a(U^nU'_z)'_z - \beta U'_z + \frac{1}{n}U = 0.$$

Частному значению $\beta=0$ соответствует решение с разделяющимися переменными в виде суммы функций разных аргументов.

Рассмотренные в разд. 3.2–3.4 конкретные примеры наглядно показывают, что построение точных решений путем понижения размерности уравнений с частными производными достигается, когда рассматриваемые уравнения инвариантны относительно некоторых преобразований (содержащих один или несколько произвольных параметров) или, другими словами, обладают определенной симметрией. Далее в главе 7 будет описан общий метод исследования симметрий дифференциальных уравнений (метод группового анализа), который позволяет регулярным образом получать подобные и более сложные инвариантные решения.

Задачи и упражнения к разд. 3.4

1. Найти предельное автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности
$w_t = (w^nw_x)_x$,
удовлетворяющее условиям
$w\to 0$ при $t\to-\infty$ $(x>0)$, $w = ae^{\beta t}$ при $x=0$ $(t>-\infty)$.

2. Найти предельное автомодельное решение нелинейного уравнения $w_t = aw_x^nw_{xx}$.

3. Найти предельные автомодельные решения нелинейных волновых уравнений:
a) $w_{tt} = (ww_x)_x$,
b) $w_{tt} = a(w^nw_x)_x$.

4. Найти предельное автомодельное решение уравнения Монжа — Ампера: $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy}$.

5. Свести систему уравнений гидродинамического пограничного слоя (18) к одному уравнению путем введения функции тока w по формулам $u = \frac{\partial w}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial w}{\partial x}$, а затем построить предельное автомодельное решение полученного уравнения.

6. Найти предельное автомодельное решение уравнений гидродинамического пограничного слоя (18).

7. Показать, что экспоненциально-автомодельные решения можно определить как решения, удовлетворяющие функциональному уравнению:

$$w(x,t) = C^mw(C^{-k}x, t-\ln C),$$

где константы C, k, m те же самые, что и в преобразовании (28).

8. Решить функциональное уравнение, приведенное в предыдущем примере.

Указание. Продифференцировать функциональное уравнение по C, а затем положить $C=1$. Полученное уравнение с частными производными решить методом характеристик.

9. Определить, какому функциональному уравнению должно удовлетворять последнее инвариантное решение из табл. 2. Решить это функциональное уравнение.

10. Найти общий вид функций $f(w, w_x)$, для которых уравнения

a) $w_t = f(w, w_x)w_{xx}$,

b) $w_{tt} = f(w, w_x)w_{xx}$,

допускают предельные автомодельные решения.

3.5. Обобщенно-автомодельные решения

Обобщенно-автомодельные решения имеют вид

$$w(x,t) = \varphi(t)u(z), \qquad z = \psi(t)x. \tag{33}$$

Формула (33) включает в себя, как частные случаи, рассмотренные ранее автомодельные и экспоненциально-автомодельные решения (7) и (27).

Процедура поиска обобщенно-автомодельных решений состоит в следующем: после подстановки выражения (33) в рассматриваемое уравнение функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ выбираются таким образом, чтобы функция $u(z)$ удовлетворяла одному обыкновенному дифференциальному уравнению.

Пример 10. Ищем решение нелинейного уравнения теплопроводности (30) в виде (33). Используя (33) и учитывая связь $x = z/\psi(t)$, находим производные:

$$w_t = \varphi_t' u + \varphi\psi_t' x u_z' = \varphi_t' u + \frac{\varphi\psi_t'}{\psi} z u_z', \quad w_x = \varphi\psi u_z', \quad (w^n w_x)_x = \psi^2\varphi^{n+1}(u^n u_z')_z'.$$

Подставив их в (30), после деления на φ_t' получим

$$u + \frac{\varphi\psi_t'}{\varphi_t'\psi} z u_z' = \frac{\psi^2\varphi^{n+1}}{\varphi_t'}(u^n u_z')_z'. \tag{34}$$

Чтобы это соотношение представляло собой обыкновенное дифференциальное уравнение для $u(z)$, надо приравнять функциональные коэффициенты при zu_z' и $(u^n u_z')_z'$ постоянным величинам:

$$\frac{\varphi\psi_t'}{\varphi_t'\psi} = a, \qquad \frac{\psi^2\varphi^{n+1}}{\varphi_t'} = b. \tag{35}$$

При этом функция $u(z)$ будет описываться уравнением

$$u + azu_z' = b(u^n u_z')_z'.$$

Из первого уравнения (35) находим

$$\psi = C_1\varphi^a, \tag{36}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Подставляя полученное выражение во второе уравнение (35) и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{C_1^2}{b}t + C_2 = -\frac{1}{2a+n}\varphi^{-2a-n} && \text{при} \quad a \neq -\frac{n}{2}, \\ &\frac{C_1^2}{b}t + C_2 = \ln|\varphi|, && \text{при} \quad a = -\frac{n}{2}, \end{aligned} \tag{37}$$

где C_2 — произвольная постоянная. Из (36)–(37), в частности, имеем

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = t^{-\frac{1}{2a+n}}, \quad \psi(t) = t^{-\frac{a}{2a+n}} \quad \text{при} \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad b = -\frac{1}{2a+n}; \\ &\varphi(t) = e^{2t}, \qquad \psi(t) = e^{-nt} \qquad \text{при} \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad b = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Здесь первая пара функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответствует автомодельному решению ($a \neq -n/2$ — любое), а вторая пара — экспоненциально-автомодельному решению.

Задачи и упражнения к разд. 3.5

1. Найти обобщенно-автомодельное решение уравнения диффузионного пограничного слоя (описывает массообмен капель и пузырей с потоком):

$$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Указание. Решение ищется в виде $w = w(z)$, $z = y\varphi(x)$.

2. Найти обобщенно-автомодельное решение уравнения диффузионного пограничного слоя (описывает массообмен твердых частиц с потоком):

$$f(x)y^{n-1}\frac{\partial w}{\partial x} + g(x)y^n\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Указание. Решение ищется в виде $w = w(z)$, $z = y\varphi(x)$.

Литература к главе 3: Г. И. Баренблатт (1952, 1978), Л. И. Седов (1972), W. F. Ames (1972), Л. Г. Лойцянский (1973), Г. Шлихтинг (1974), G. W. Bluman, J. D. Cole (1974), L. Dresner (1983), В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987), D. Zwillinger (1989), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), А. Д. Полянин (2004).