Глава 4 книги А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова «Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики» — М.: Физматлит, 2005 (в печати).

4. Метод обобщенного разделения переменных

4.1. Введение

4.1.1. Решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных

Метод разделения переменных является самым распространенным методом решения линейных уравнений математической физики. Для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией w этот метод базируется на поиске точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{1}$$

Интегрирование отдельных классов нелинейных уравнений с частными производными первого порядка основано на поиске точных решений в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t). \tag{2}$$

Некоторые нелинейные уравнения математической физики второго и более высоких порядков также имеют точные решения вида (1) или (2). Подобные решения будем называть соответственно *решениями с мультипликативным* и *аддитивным разделением переменных*.

Литература к разд. 4.1.1: Э. Камке (1966), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), А. П. Маркеев (1990), А. Д. Полянин (2001 *а*), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003).

4.1.2. Простейшие случаи разделения переменных в нелинейных уравнениях

В отдельных случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях проводится по той же схеме, что и в линейных уравнениях. Точное решение ищется в виде произведения или суммы функций разных аргументов. Подставив (1) или (2) в рассматриваемое уравнение и делая элементарные алгебраические операции, приходят к равенству двух выражений (для уравнений с двумя переменными), зависящих от разных аргументов. Такая ситуация возможна только в том случае, когда каждое из указанных выражений равно одной и той же постоянной величине. В результате получают обыкновенные дифференциальные уравнения для искомых величин.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

Пример 1. Уравнение теплопроводности со степенно́й нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^k\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{3}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов. Подставив (1) в уравнение (3), приходим к выражению

$$\varphi\psi'_t = a\psi^{k+1}(\varphi^k\varphi'_x)'_x.$$

Разделяя переменные путем деления обеих частей на $\varphi\psi^{k+1}$, получим

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от переменной t, а правая — только от x. Это возможно лишь при выполнении условий

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = C, \quad \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi} = C, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная. Решив обыкновенные дифференциальные уравнения (4), получим решение вида (1) уравнения (3).

Процедура построения решения с разделяющимися переменными вида (1) нелинейного уравнения (3) полностью аналогична процедуре, используемой для решения линейных уравнений, в частности, для уравнения (3) при $k = 0$. Случаи решений с подобным разделением переменных будем называть *простейшими*.

Пример 2. Волновое уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{5}$$

имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов. Подставим выражение (2) в уравнение (5). После деления обеих частей на $e^{\lambda\psi}$ приходим к равенству

$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x,$$

левая часть которого зависит только от переменной t, а правая — только от x. Это возможно лишь при выполнении условий

$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = C, \quad a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x = C, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная. Решив обыкновенные дифференциальные уравнения (6), получим решение уравнения (5) вида (2).

Пример 3. Уравнение теплопроводности в анизотропной среде с источником логарифмического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = aw\ln w \tag{7}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$w = \varphi(x)\psi(y). \tag{8}$$

Подставим выражение (8) в уравнение (7). После деления на $\varphi\psi$ и переноса отдельных слагаемых в разные части полученного равенства, получим

$$\frac{1}{\varphi}[f(x)\varphi'_x]'_x - a\ln\varphi = -\frac{1}{\psi}[g(y)\psi'_y]'_y + a\ln\psi.$$

Левая часть этого выражения зависит только от переменной x, а правая — только от y. Приравнивая их постоянной величине, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

➻ *Задачи и упражнения к разд. 4.1.2*

1. Найти решения с аддитивным разделением переменных следующих уравнений:

a) $f(x)w_x^2 + g(y)w_y^2 = h_1(x) + h_2(y)$,
b) $f(x)w_x^n + g(y)w_y^m = aw$,
c) $[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = 0$,
d) $[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = aw$,
e) $w_t = aw_{xx} + b(w_x)^2 + c$,
f) $w_t = [f(x)w_x]_x + a(w_x)^2 + bw$,
g) $w_t = a(e^{\lambda w}w_x)_x + be^{\lambda w}$,
h) $w_t = a(w_{xx})^k$,
i) $w_{tt} = a(e^{\lambda w}w_x)_x + b$,
j) $w_{tt} + aw_t = b(e^{\lambda w}w_x)_x$,
k) $w_{xt} = a(e^{\lambda w}w_x)_x + be^{\lambda w}$,
l) $w_{tt} = w_{xxx} + f(w_x) + aw$.

2. Найти решения с мультипликативным разделением переменных следующих уравнений:
a) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
c) $w_t = a(w^n w_x)_x + bw$,
d) $w_t = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1} + cw$,
e) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x$,
f) $w_{tt} = a(ww_x)_x + bw$,
g) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1}$,
h) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1} + cw$.
i) $w_{xt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1}$.

Литература к разд. 4.1.2: Л. В. Овсянников (1959), D. Zwillinger (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002).

4.1.3. Примеры нетривиального разделения переменных в нелинейных уравнениях

Во многих случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях происходит иначе, чем в линейных уравнениях. Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

Пример 4. Рассмотрим уравнение с кубической нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - aw^3, \tag{9}$$

где $f(t)$ — произвольная функция.

Ищем точные решения в виде произведения функций разных аргументов. Подставим (1) в (9) и поделим обе части полученного равенства на $f(t)\varphi(x)\psi(t)$. В результате имеем

$$\frac{\psi'_t}{f\psi} = \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} + \frac{\psi^2}{f}[(\varphi'_x)^2 - a\varphi^2]. \tag{10}$$

В общем случае данное выражение нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. Это, однако, не означает, что уравнение (9) не имеет решений вида (1).

1°. Прямой проверкой можно убедиться, что функционально-дифференциальное уравнение (10) при $a > 0$ имеет решение

$$\varphi(x) = C\exp\bigl(\pm x\sqrt{a}\,\bigr), \quad \psi(t) = \exp\Bigl[a\int f(t)\,dt\Bigr], \tag{11}$$

где C — произвольная постоянная. Решение (11) для φ обращает в нуль выражение в квадратных скобках в (10), что позволяет разделить переменные.

2°. Имеется более общее решение функционально-дифференциального уравнения (10) при $a > 0$:

$$\varphi(x) = C_1\exp\bigl(x\sqrt{a}\,\bigr) + C_2\exp\bigl(-x\sqrt{a}\,\bigr),$$
$$\psi(t) = e^F\Bigl(C_3 + 8aC_1C_2\int e^{2F}\,dt\Bigr)^{-1/2}, \quad F = a\int f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Функция $\varphi = \varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (10), которые зависят от x, одновременно будут равны некоторым постоянным:

$$\varphi''_{xx}/\varphi = \text{const}, \quad (\varphi'_x)^2 - a\varphi^2 = \text{const}\,.$$

Это обстоятельство и позволяет разделить переменные. Отметим, что функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли $\psi'_t = af(t)\psi - 4aC_1C_2\psi^3$.

3°. Имеется другое решение функционально-дифференциального уравнения (10) при $a < 0$:

$$\varphi(x) = C_1\sin\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr) + C_2\cos\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr),$$
$$\psi(t) = e^F\Bigl[C_3 + 2a(C_1^2 + C_2^2)\int e^{2F}\,dt\Bigr]^{-1/2}, \quad F = a\int f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Функция $\varphi = \varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (10), зависящие от x, будут равны константам. Отметим, что функция $\psi = \psi(t)$ описывается уравнением Бернулли $\psi'_t = af(t)\psi - a(C_1^2 + C_2^2)\psi^3$.

Пример 5. Рассмотрим уравнение третьего порядка с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = b\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + c\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \tag{12}$$

Будем искать точные решения уравнения (12) с разделяющимися переменными в виде суммы функций разных аргументов

$$w = f(x) + g(y). \tag{13}$$

Подставив (13) в (12), имеем

$$g'_y f''_{xx} + af'_x g''_{yy} = bf'''_{xxx} + cg'''_{yyy}. \tag{14}$$

Данное выражение нельзя представить в виде суммы двух функций разных аргументов.

Нетрудно догадаться, что функционально-дифференциальному уравнению (14) можно удовлетворить:

$$\begin{aligned}
&\text{если } g'_y = C_1 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = C_1 y + C_2, \quad f(x) = C_3\exp(C_1 x/b) + C_4 x \quad \text{(первый случай)},\\
&\text{если } f'_x = C_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = C_1 x + C_2, \quad g(y) = C_3\exp(aC_1 y/c) + C_4 y \quad \text{(второй случай)},
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. В указанных случаях два члена из четырех в (14) обращаются в нуль, что позволяет разделить переменные.

Уравнение (12) имеет также более сложное точное решение вида (13):

$$w = C_1 e^{-a\lambda x} + \frac{c\lambda}{a}x + C_2 e^{\lambda y} - ab\lambda y + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные. Механизм разделения здесь иной: оба нелинейных члена в левой части (14) содержат одинаковые по абсолютной величине, но разные по знаку слагаемые, которые нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. При сложении нелинейных членов указанные слагаемые сокращаются, что в итоге и приводит к разделению переменных:

$$\begin{array}{rcl}
+\begin{array}{c} g'_y f''_{xx} \\ af'_x g''_{yy} \end{array} & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{l} C_1C_2a^2\lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} - C_1 b(a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} \\ -C_1C_2a^2\lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} + C_2 c\lambda^3 e^{\lambda y} \end{array} \\
\hline
g'_y f''_{xx} + af'_x g''_{yy} & = & -C_1 b(a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} + C_2 c\lambda^3 e^{\lambda y} = bf'''_{xxx} + cg'''_{yyy}
\end{array}$$

Пример 6. Рассмотрим уравнение второго порядка с кубической нелинейностью

$$(1+w^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - 2w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 2w\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = aw(1-w^2). \tag{15}$$

Ищем точное решение уравнения (15) с разделяющимися переменными в виде произведения функций разных аргументов

$$w = f(x)g(y). \tag{16}$$

Подставив (16) в (15), получим соотношение

$$(1+f^2g^2)(gf''_{xx} + fg''_{yy}) - 2fg[g^2(f'_x)^2 + f^2(g'_y)^2] = afg(1-f^2g^2), \tag{17}$$

которое нельзя представить в виде суммы двух функций разных аргументов. Тем не менее уравнение (15) имеет решения вида (16). Прямой проверкой можно убедиться, что функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$, удовлетворяющие нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
(f'_x)^2 &= Af^4 + Bf^2 + C,\\
(g'_y)^2 &= Cg^4 + (a-B)g^2 + A,
\end{aligned} \tag{18}$$

где A, B, C — произвольные постоянные, обращают функционально-дифференциальное уравнение (17) в тождество [надо использовать следствия уравнений (18): $f''_{xx} = 2Af^3 + Bf$, $g''_{yy} = 2Cg^3 + (a-B)g$].

Замечание. Уравнение (15) заменой $u = 4\operatorname{arctg} w$ сводится к нелинейному уравнению теплопроводности с источником синусоидального вида $\Delta u = a \sin u$.

Рассмотренные примеры иллюстрируют некоторые особенности решений с разделением переменных. В разд. 4.2–4.4 будут описаны достаточно общие методы построения таких и более сложных решений нелинейных уравнений с частными производными.

Литература к разд. 4.1.3: R. Steuerwald (1936), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002).

4.2. Структура решений с обобщенным разделением переменных

4.2.1. Общий вид решений. Рассматриваемые классы нелинейных уравнений

Для простоты изложения ограничимся здесь описанием случая уравнений математической физики с двумя независимыми переменными x, y и зависимой переменной w (одна из независимых переменных может играть роль времени).

Линейные уравнения математической физики с разделяющимися переменными допускают точные решения в виде суммы

$$w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(y), \tag{19}$$

где $w_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ — соответствующие частные решения. При этом функции $\varphi_i(x)$, как и функции $\psi_i(y)$, при разных значениях i не связаны друг с другом.

Многие нелинейные уравнения с частными производными с квадратичными и степенны́ми нелинейностями вида

$$f_1(x)g_1(y)\Pi_1[w] + f_2(x)g_2(y)\Pi_2[w] + \cdots + f_m(x)g_m(y)\Pi_m[w] = 0, \tag{20}$$

где $\Pi_i[w]$ — дифференциальные формы, представляющие собой произведения целых неотрицательных степеней функции w и ее частных производных $\partial_x w$, $\partial_y w$, $\partial_{xx} w$, $\partial_{xy} w$, $\partial_{yy} w$, $\partial_{xxx} w$, $\ldots$, также имеют точные решения вида (19). Такие решения будем называть *решениями с обобщенным разделением переменных*. Для нелинейных уравнений, в отличие от линейных, функции $\varphi_i(x)$ при различных значениях i обычно связаны друг с другом [и с функциями $\psi_j(y)$]. В общем случае функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_j(y)$ заранее не известны и подлежат определению в ходе исследования. Примеры точных решений нелинейных уравнений вида (19) для наиболее простых случаев $n = 1$ и $n = 2$ (при $\psi_1 = \varphi_2 = 1$) рассмотрены в разд. 4.1.2 и 4.1.3.

Отметим, что наиболее часто встречается решение с обобщенным разделением переменных специального вида

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$$

(в правой части независимые переменные можно поменять местами). В частном случае $\chi(x) = 0$ это решение переходит в решение с мультипликативным разделением переменных, а в случае $\varphi(x) = 1$ — в решение с аддитивным разделением переменных.

Замечание 1. Выражения вида (19) часто используются в прикладной и вычислительной математике для построения приближенных решений дифференциальных уравнений методом Галеркина (и его различными модификациями).

Замечание 2. Решения вида (19) могут допускать также уравнения, имеющие отличные от (20) нелинейности (см. пример 15 из разд. 4.5).

4.2.2. Общий вид функционально-дифференциальных уравнений

В общем случае после подстановки выражения (19) в дифференциальное уравнение (20) для определения функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(y)$ получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \cdots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0, \qquad (21)$$

где функционалы $\Phi_j(X)$ и $\Psi_j(Y)$ зависят соответственно от переменных x и y:

$$\begin{aligned} \Phi_j(X) &\equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\bigr), \\ \Psi_j(Y) &\equiv \Psi_j\bigl(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \ldots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\bigr). \end{aligned} \qquad (22)$$

Здесь для наглядности формулы выписаны для случая уравнения второго порядка (20); для уравнений старших порядков в правые части формул (22) войдут соответствующие старшие производные функций φ_i и ψ_j.

Далее в разд. 4.4, 4.5 будут описаны два общих метода решения функционально-дифференциальных уравнений вида (21), (22). Кроме того, в разд. 4.3, 4.6 будут рассмотрены два специальных метода, не обладающих общностью (при использовании этих методов меньше объем вычислений).

Замечание. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в уравнение (21)–(22) входят несколько функций (и их производных), зависящих от разных аргументов.

Литература к разд. 4.2: С. С. Титов (1988), В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989, 1994), V. A. Galaktionov (1995), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002).

4.3. Упрощенная схема построения точных решений, основанная на априорном задании одной системы координатных функций

4.3.1. Описание упрощенной схемы построения точных решений

Для построения точных решений уравнений вида (20) с квадратичной или степенно́й нелинейностью, которые не зависят явно от x (т. е. все $f_i = \mathrm{const}$), можно использовать следующий упрощенный подход. Решения ищем в виде конечных сумм (19). Предположим, что система координатных функций $\varphi_i(x)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Наиболее распространенные решения таких уравнений имеют вид

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad \varphi_i(x) = e^{\lambda_i x}, \quad \varphi_i(x) = \sin(\alpha_i x), \quad \varphi_i(x) = \cos(\beta_i x). \qquad (23)$$

Конечные наборы этих функций (в различных комбинациях) можно использовать для поиска точных решений с обобщенным разделением переменных вида (19), где λ_i, α_i, β_i рассматриваются как свободные параметры. Вторая система функций $g_i(y)$ определяется путем решения соответствующих нелинейных уравнений, получаемых подстановкой выражения (19) в рассматриваемое уравнение.

Указанный подход не имеет той общности, которой обладают методы, описанные далее в разд. 4.4 и 4.5. Однако явное задание одной системы координатных функций $\varphi_i(x)$ резко упрощает процедуру построения точных решений [при этом отдельные решения вида (19) могут быть потеряны].

Важно отметить, что известные к настоящему времени точные решения (с обобщенным разделением переменных) уравнений с частными производными с квадратичной нелинейностью в подавляющем большинстве задаются координатными функциями вида (23) (обычно при $n = 2$).

4.3.2. Примеры построения решений нелинейных уравнений старших порядков

Рассмотрим конкретные примеры использования упрощенной схемы построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений старших порядков.

Пример 7. Уравнения ламинарного пограничного слоя на плоской пластине сводятся к одному нелинейному уравнению третьего порядка для функции тока (Л. Г. Лойцянский 1973, Г. Шлихтинг 1974):

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \tag{24}$$

Ищем точное решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x, y) = x\psi(y) + \theta(y), \tag{25}$$

которое отвечает простейшим функциям $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1$ при $n = 2$ в формуле (19). Подставив (25) в (24), после перегруппировки членов имеем

$$x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy}] + [\psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy}] = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому равенству при любых значениях x, надо приравнять нулю оба выражения в квадратных скобках. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\psi = \psi(y)$ и $\theta = \theta(y)$:

$$\begin{aligned} (\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy} &= 0, \\ \psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy} &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет, например, точное решение

$$\psi = \frac{6\nu}{y + C_1}, \quad \theta = \frac{C_2}{y + C_1} + \frac{C_3}{(y + C_1)^2} + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Пример 8. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}, \tag{26}$$

где $f(x)$ — произвольная функция. В частном случае $n = 3$, $f(x) = \nu = \text{const}$ оно совпадает с уравнением пограничного слоя (24).

Ищем точное решение уравнения (26) с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x, y) = \varphi(x)e^{\lambda y} + \theta(x), \tag{27}$$

которое отвечает функциям $\psi_1(y) = e^{\lambda y}$, $\psi_2(y) = 1$ в формуле (19). Подставив (27) в (26), после элементарных алгебраических действий получим

$$\lambda^2 e^{\lambda y}\varphi[\theta'_x + \lambda^{n-2} f(x)] = 0.$$

Этому равенству можно удовлетворить при

$$\theta(x) = -\lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C, \quad \varphi(x) \text{ — произвольная функция}, \tag{28}$$

где C — произвольная постоянная. (Другой случай, когда $\varphi = 0$, ψ — любое, малоинтересен.) Формулы (27)–(28) описывают точное решение уравнения (26):

$$w(x, y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C, \tag{29}$$

содержащее произвольную функцию $\varphi(x)$ и две произвольные постоянные C и λ.

Пример 9. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\frac{\partial^n w}{\partial x^n}, \tag{30}$$

где $f(t)$ — произвольная функция. В частном случае $n = 3$ и $f(t) = \mathrm{const}$ оно встречается в гидродинамике (см., например, А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, 2002).

Ищем точное решение уравнения (30) вида

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t). \tag{31}$$

Подставив (31) в (30), имеем

$$\varphi'_t - \lambda\varphi\psi = \lambda^{n-1}f(t)\varphi.$$

Выразим отсюда ψ и подставим в (31). В результате получим решение уравнения (30):

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} - \lambda^{n-2}f(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная.

Задачи и упражнения к разд. 4.3

1. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения первого порядка:

$w_x = yF(x, w_y) + G(x, w_y)$.

Указание. Решение искать в виде $w = \varphi(x)y + \psi(x)$.

2. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения первого порядка:

$w_x = w_y^2 - aw^2 + f(x)w$.

Указание. Решение искать в виде $w = \varphi(x) + \psi(x)e^{\lambda y}$.

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = a(ww_x)_x$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + b$,
c) $w_t = a(ww_x)_x + bw$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)x + g(t)$ и $w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

4. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений конвективной теплопроводности:

a) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x + cw + k$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)x + g(t)$ и $w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности (значение $n = 1$ соответствует решению с осевой симметрией, а $n = 2$ — решению с центральной симметрией):

a) $w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x$,
b) $w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x + b$,
c) $w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x + bw$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)x^2 + g(t)$.

6. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения

$w_t = aw_{xx} + bw_x^2 + cw + s$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

7. Найти решения с обобщенным разделением переменных линейного уравнения

$w_t + f(t)x^{-1}w_x = aw_{xx}$.

Указание. Решения искать в виде

a) $w = x^2 + \varphi(t)$,
b) $w = x^4 + \varphi(t)x^2 + \psi(t)$,
c) $w = x^{2n} + \varphi_{2n-2}(t)x^{2n-2} + \dots + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_0(t)$.

8. При каком значении параметра a нелинейное уравнение

$w_t = ww_{xx} + aw_x^2 + b$

имеет решение с обобщенным разделением переменных вида $w = f(t)x^3 + g(t)x^2 + h(t)x + p(t)$?

9. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения
$w_t = w_{xx} + w_x^2 + aw^2$.
Указание. Решения искать в виде
a) $w = f(t) + g(t)e^{\lambda x}$,
b) $w = f(t) + g(t)\,\mathrm{sh}(\lambda x)$,
c) $w = f(t) + g(t)\,\mathrm{ch}(\lambda x)$,
d) $w = f(t) + g(t)\sin(\lambda x + C)$.

10. Найти решения с обобщенным разделением переменных неоднородного уравнения Монжа — Ампера:
$w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + f(x)$.
Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)y + \psi(x)$ и $w = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x)$.

11. Найти решения с обобщенным разделением переменных неоднородного уравнения Монжа — Ампера:
$w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + f(x)y^k$.
Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)y^m + \psi(x)$.

12. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения стационарного трансзвукового газового потока:
$aw_xw_{xx} + w_{yy} = 0$.
Указание. Решения искать в виде
a) $w = f(y)x^m + g(y)$,
b) $w = f(y) + g(y)x^{3/2} + h(y)x^3$,
c) $w = f(y) + g(y)x + h(y)x^2 + p(y)x^3$.

13. Найти решение с обобщенным разделением переменных уравнения стационарного пограничного слоя с градиентом давления:
$w_yw_{xy} - w_xw_{yy} = \nu w_{yyy} + ae^{\beta x}$.
Указание. Решение искать в виде $w = f(x)e^{\lambda y} + g(x)e^{-\lambda y} + Ax + By + C$.

14. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения движения вязкой жидкости (следствие уравнений Навье — Стокса, w — функция тока):
$w_y(\Delta w)_x - w_x(\Delta w)_y = \nu\Delta\Delta w$, где $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$.
Указание. Решения искать в виде
a) $w = f(x)y + g(x)$,
b) $w = f(x)e^{\lambda y} + g(x)$
(в этих формулах независимые переменные x и y можно поменять местами).

Литература к разд. 4.3: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), А. Д. Полянин (2001 *b, c*), А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin (2002), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

4.4. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования

4.4.1. Описание метода дифференцирования

Процедура решения функционально-дифференциальных уравнений вида (21)–(22) состоит из трех последовательных этапов.

1°. Предположим, что $\Psi_k \not\equiv 0$. Поделим уравнение (21) на Ψ_k и продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов:

$$\widetilde{\Phi}_1(X)\widetilde{\Psi}_1(Y) + \widetilde{\Phi}_2(X)\widetilde{\Psi}_2(Y) + \cdots + \widetilde{\Phi}_{k-1}(X)\widetilde{\Psi}_{k-1}(Y) = 0,$$
$$\widetilde{\Phi}_j(X) = \Phi_j(X), \quad \widetilde{\Psi}_j(Y) = [\Psi_j(Y)/\Psi_k(Y)]'_y.$$

Повторим аналогичную процедуру еще $(k-3)$ раза. В итоге приходим к двучленному уравнению с разделяющимися переменными

$$\widehat{\Phi}_1(X)\widehat{\Psi}_1(Y)+\widehat{\Phi}_2(X)\widehat{\Psi}_2(Y)=0. \tag{32}$$

Теперь надо рассмотреть две ситуации.

Невырожденный случай: $|\widehat{\Phi}_1(X)|+|\widehat{\Phi}_2(X)|\not\equiv 0$, $|\widehat{\Psi}_1(Y)|+|\widehat{\Psi}_2(Y)|\not\equiv 0$. Тогда решения уравнения (32) определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\widehat{\Phi}_1(X)+C\widehat{\Phi}_2(X)=0,\quad C\widehat{\Psi}_1(Y)-\widehat{\Psi}_2(Y)=0,$$

где C — произвольная постоянная. Предельному случаю $C=\infty$ соответствуют уравнения $\widehat{\Phi}_2=0$, $\widehat{\Psi}_1=0$.

Два вырожденных случая:

$$\begin{aligned}&\widehat{\Phi}_1(X)\equiv 0,\quad \widehat{\Phi}_2(X)\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad \widehat{\Psi}_{1,2}(Y)\text{ — любые};\\ &\widehat{\Psi}_1(Y)\equiv 0,\quad \widehat{\Psi}_2(Y)\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad \widehat{\Phi}_{1,2}(X)\text{ — любые}.\end{aligned}$$

2°. Полученные решения двучленного уравнения (32) надо подставить в исходное функционально-дифференциальное уравнение (21)–(22), чтобы убрать «лишние» постоянные интегрирования [они появляются из-за того, что уравнение (32) получено из (21) путем дифференцирования].

3°. Случай $\Psi_k\equiv 0$ надо рассмотреть отдельно (поскольку уравнение на первом этапе делилось на Ψ_k). Аналогично следует исследовать все другие случаи тождественного обращения в нуль функционалов, на которые делились промежуточные функционально-дифференциальные уравнения.

Замечание 1. Функционально-дифференциальное уравнение (21)–(22) может не иметь решений.

Замечание 2. На каждом этапе число членов рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения можно понижать путем дифференцирования как по переменной y, так и по переменной x. На первом этапе, например, можно предположить, что $\Phi_k\not\equiv 0$. Поделив уравнение (21) на Φ_k и продифференцировав по x, получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов.

4.4.2. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных

Ниже даны конкретные примеры использования описанного метода для построения точных решений нелинейных уравнений с обобщенным разделением переменных.

Пример 10. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}, \tag{33}$$

где $f(x)$ — произвольная функция. В частном случае $n=3$, $f(x)=\text{const}$ оно совпадает с уравнением стационарного пограничного слоя на плоской пластине для функции тока.

Ищем точное решение уравнения (33) с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y)+\chi(x). \tag{34}$$

Подставив (34) в (33) и сократив на φ, получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\varphi'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - \chi'_x\psi''_{yy} = f(x)\psi_y^{(n)}. \tag{35}$$

Поделим обе части уравнения (35) на $f = f(x)$, затем продифференцируем по x. В результате имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - (\chi'_x/f)'_x\psi''_{yy} = 0. \tag{36}$$

Невырожденный случай. Разделяя в (36) переменные, получим

$$(\chi'_x/f)'_x = C_1(\varphi'_x/f)'_x,$$
$$(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - C_1\psi''_{yy} = 0.$$

Интегрируя, приходим к следующим выражениям:

$$\psi(y) = C_4e^{\lambda y} - C_1, \quad \varphi(x) \text{ — любая}, \quad \chi(x) = C_1\varphi(x) + C_2\int f(x)\,dx + C_3, \tag{37}$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, \lambda$ — постоянные интегрирования. Подставив (37) в (35), находим связь между константами: $C_2 = -\lambda^{n-2}$. Учитывая сказанное, а также формулы (34) и (37), в итоге имеем решение уравнения (33) вида (34):

$$w(x, y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C, λ — произвольные постоянные ($C = C_3$, $C_4 = 1$).

Вырожденный случай. Из уравнения (36) имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x = 0, \quad (\chi'_x/f)'_x = 0, \quad \psi(y) \text{ — любая}. \tag{38}$$

Интегрируя дважды первые два уравнения (38), получим

$$\varphi(x) = C_1\int f(x)\,dx + C_2, \quad \chi(x) = C_3\int f(x)\,dx + C_4, \tag{39}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Подставив выражения (39) в (35), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $\psi = \psi(y)$:

$$C_1(\psi'_y)^2 - (C_1\psi + C_3)\psi''_{yy} = \psi_y^{(n)}. \tag{40}$$

Формулы (34), (39) и уравнение (40) описывают точное решение уравнения (33).

Пример 11. Двумерные стационарные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости сводятся к одному нелинейному уравнению четвертого порядка для функции тока (Л. Г. Лойцянский, 1973):

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{41}$$

Будем искать точные решения уравнения (41) с разделяющимися переменными вида

$$w = \varphi(x) + \psi(y). \tag{42}$$

Подставив (42) в (41), имеем

$$\psi'_y\varphi'''_{xxx} - \varphi'_x\psi'''_{yyy} = \nu\varphi''''_{xxxx} + \nu\psi''''_{yyyy}. \tag{43}$$

Продифференцируем обе части (43) по x и y. В результате получим

$$\psi''_{yy}\varphi''''_{xxxx} - \varphi''_{xx}\psi''''_{yyyy} = 0. \tag{44}$$

Невырожденный случай. При $\varphi''_{xx} \not\equiv 0$ и $\psi''_{yy} \not\equiv 0$, разделяя в (44) переменные, приходим к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\varphi''''_{xxxx} = C\varphi''_{xx}, \tag{45}$$
$$\psi''''_{yyyy} = C\psi''_{yy}, \tag{46}$$

которые имеют решения различного вида в зависимости от величины константы интегрирования C.

1°. Решение уравнений (45), (46) при $C=0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=A_1+A_2x+A_3x^2+A_4x^3,\\ \psi(y)&=B_1+B_2y+B_3y^2+B_4y^3,\end{aligned}\tag{47}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные ($k=1,2,3,4$). Подставив (47) в (43), находим значения постоянных:

$$\begin{array}{lll}A_4=B_4=0, & A_n, B_n \text{— любые} & (n=1,2,3);\\ A_k=0, & B_k \text{— любые} & (k=1,2,3,4);\\ B_k=0, & A_k \text{— любые} & (k=1,2,3,4).\end{array}$$

Первые два набора постоянных определяют два известных полиномиальных решения уравнения (41) второй и третьей степени относительно независимых переменных (Л. Г. Лойцянский, 1973):

$$\begin{aligned}w&=C_1x^2+C_2x+C_3y^2+C_4y+C_5,\\ w&=C_1y^3+C_2y^2+C_3y+C_4,\end{aligned}$$

где $C_1,\ldots,C_5$ — произвольные постоянные.

2°. Решение уравнений (45), (46) при $C=\lambda^2>0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=A_1+A_2x+A_3e^{\lambda x}+A_4e^{-\lambda x},\\ \psi(y)&=B_1+B_2y+B_3e^{\lambda y}+B_4e^{-\lambda y}.\end{aligned}\tag{48}$$

Подставим (48) в (43). После сокращения на λ^3 и приведения подобных членов получим

$$A_3(\nu\lambda-B_2)e^{\lambda x}+A_4(\nu\lambda+B_2)e^{-\lambda x}+B_3(\nu\lambda+A_2)e^{\lambda y}+B_4(\nu\lambda-A_2)e^{-\lambda y}=0.$$

Приравнивая коэффициенты при экспонентах нулю, находим значения постоянных:

$$\begin{array}{ll}A_3=A_4=B_3=0,\ A_2=\nu\lambda & \text{(случай 1)},\\ A_3=B_3=0,\ A_2=\nu\lambda,\ B_2=-\nu\lambda & \text{(случай 2)},\\ A_3=B_4=0,\ A_2=-\nu\lambda,\ B_2=-\nu\lambda & \text{(случай 3)}.\end{array}$$

(Остальные постоянные могут принимать произвольные значения.) Указанные наборы постоянных определяют три решения уравнения (41) вида (42):

$$\begin{aligned}w&=C_1e^{-\lambda y}+C_2y+C_3+\nu\lambda x,\\ w&=C_1e^{-\lambda x}+\nu\lambda x+C_2e^{-\lambda y}-\nu\lambda y+C_3,\\ w&=C_1e^{-\lambda x}-\nu\lambda x+C_2e^{\lambda y}-\nu\lambda y+C_3,\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные.

3°. Решение уравнений (45), (46) при $C=-\lambda^2<0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=A_1+A_2x+A_3\cos(\lambda x)+A_4\sin(\lambda x),\\ \psi(y)&=B_1+B_2y+B_3\cos(\lambda y)+B_4\sin(\lambda y).\end{aligned}\tag{49}$$

Подстановка выражений (49) в (43) не дает новых действительных решений.

Вырожденные случаи. В случаях $\varphi''_{xx}\equiv 0$ и $\psi''_{yy}\equiv 0$ уравнение (44) обращается в тождество соответственно для любой функции $\psi=\psi(y)$ и любой функции $\varphi=\varphi(x)$. Эти случаи надо рассматривать отдельно. Например, при $\varphi''_{xx}\equiv 0$ имеем $\varphi(x)=Ax+B$, где A, B — любые. Подставив эту функцию в (43), приходим к уравнению $-A\psi'''_{yyy}=\nu\psi''''_{yyyy}$. Его общее решение описывается формулой $\psi(y)=C_1\exp(-Ay/\nu)+C_2y^2+C_3y+C_4$. В итоге имеем еще одно решение уравнения (41) вида (42):

$$w=C_1e^{-\lambda y}+C_2y^2+C_3y+C_4+\nu\lambda x\qquad (A=\nu\lambda,\ B=0),$$

которое с помощью группового анализа было получено В. В. Пухначевым (1960).

Пример 12. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t}=aw\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+c.\tag{50}$$

Ищем точные решения уравнения (50) с разделяющимися переменными вида

$$w=\varphi(t)+\psi(t)\theta(x).\tag{51}$$

Подставив (51) в (50), после элементарных преобразований имеем

$$\varphi_t' - c + \psi_t'\theta = a\varphi\psi\theta_{xx}'' + \psi^2[a\theta\theta_{xx}'' + b(\theta_x')^2]. \tag{52}$$

Поделим обе части этого выражения на ψ^2, а затем продифференцируем по t и x. В результате получим

$$(\psi_t'/\psi^2)_t'\theta_x' = a(\varphi/\psi)_t'\theta_{xxx}'''.$$

Разделяя переменные, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям (K — произвольная постоянная)

$$\theta_{xxx}''' = K\theta_x', \tag{53}$$

$$(\psi_t'/\psi^2)_t' = aK(\varphi/\psi)_t'. \tag{54}$$

Общее решение уравнения (53) дается формулами

$$\theta = \begin{cases} A_1x^2 + A_2x + A_3 & \text{при } K = 0, \\ A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x} + A_3 & \text{при } K = \lambda^2 > 0, \\ A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x) + A_3 & \text{при } K = -\lambda^2 < 0, \end{cases} \tag{55}$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные. Интегрируя уравнение (54), находим (B — произвольная постоянная):

$$\begin{aligned} &\varphi(t) \text{ — любая}, \quad \psi = \frac{B}{t + C_1} && \text{при } K = 0, \\ &\psi(t) \text{ — любая}, \quad \varphi = B\psi + \frac{1}{aK}\frac{\psi_t'}{\psi} && \text{при } K \neq 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Подставив решения (55) и (56) в (52), можно «убрать» лишние константы и определить функции φ и ψ. В итоге получим:

1°. Решение при $a \neq -b$, $a \neq -2b$:

$$w = \frac{c(a + 2b)}{2(a + b)}(t + C_1) + C_2(t + C_1)^{-\frac{a}{a+2b}} - \frac{(x + C_3)^2}{2(a + 2b)(t + C_1)} \qquad (\text{для } K = 0),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Решение при $b = -a$:

$$w = \frac{1}{a\lambda^2}\frac{\psi_t'}{\psi} + \psi(A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x}) \qquad (\text{для } K = \lambda^2 > 0),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z_{tt}'' = ac\lambda^2 + 4a^2\lambda^4A_1A_2e^{2Z}, \qquad \psi = e^Z,$$

решение которого можно представить в неявной форме. В частных случаях $A_1 = 0$ или $A_2 = 0$ имеем $\psi = C_1\exp\bigl(\frac{1}{2}ac\lambda^2t^2 + C_2t\bigr)$.

3°. Решение при $b = -a$:

$$w = -\frac{1}{a\lambda^2}\frac{\psi_t'}{\psi} + \psi[A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x)] \qquad (\text{для } K = -\lambda^2 < 0).$$

где функция $\psi = \psi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z_{tt}'' = -ac\lambda^2 + a^2\lambda^4(A_1^2 + A_2^2)e^{2Z}, \qquad \psi = e^Z,$$

решение которого можно представить в неявной форме.

Замечание. Структуру решений уравнения (50) другим методом описал V. A. Galaktionov (1995).

Задачи и упражнения к разд. 4.4

1. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $w_x = aw_y^2 + bww_y + f(x)$,

b) $w_x = aw_y^n + f(x)w$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x) + \psi(x)\theta(y)$.

2. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = a(ww_x)_x$,

b) $w_t = a(ww_x)_x + b$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

3. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения конвективной теплопроводности:

$w_t = a(ww_x)_x + bw_x$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

4. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного волнового уравнения:

$w_{tt} = a(ww_x)_x$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения пограничного слоя с градиентом давления:

$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = \nu w_{yyy} + f(x)$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$.

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений третьего порядка:

a) $w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = f(t)w_{xxx}$,

b) $w_t + aww_x + bw_{xtt} = 0$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t)$.

7. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = a\exp(\lambda w_{xx})$,

b) $w_{tt} = a\exp(\lambda w_{xx})$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(x)\theta(t) + g(x)$ (обе части уравнений надо прологарифмировать).

Литература к разд. 4.4: А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

4.5. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления

4.5.1. Предварительные замечания. Описание метода расщепления

При уменьшении числа членов функционально-дифференциального уравнения (21)–(22) с помощью дифференцирования возникают «лишние» постоянные интегрирования, которые надо убирать на заключительном этапе. Кроме того, порядок полученного уравнения может быть выше порядка исходного. Чтобы избежать этих трудностей, решение функционально-дифференциального уравнения удобно свести к последовательному решению билинейного функционального уравнения стандартного вида и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. исходная задача расщепляется на две более простые задачи). Ниже дано краткое описание основных этапов этого метода.

1°. На первом этапе рассмотрим уравнение (21) как билинейное функциональное уравнение, зависящее от двух переменных X и Y, где $\Phi_n = \Phi_n(X)$ и $\Psi_n = \Psi_n(Y)$ — искомые величины ($n = 1, \ldots, k$).

Можно доказать (например, путем дифференцирования по схеме, описанной в разд. 4.4, совместно с индукцией), что билинейному функциональному уравнению (21) можно удовлетворить только в случае, когда величины $\Phi_n = \Phi_n(X)$ ($n = 1, \ldots, k$) связаны линейными зависимостями. Учитывая это обстоятельство, нетрудно показать, что билинейное функциональное уравнение (21) имеет $(k-1)$ различных решений:

$$\begin{aligned}
&\Phi_i(X) = C_{i,1}\Phi_{m+1}(X) + C_{i,2}\Phi_{m+2}(X) + \dots + C_{i,k-m}\Phi_k(X),\\
&\Psi_{m+j}(Y) = -C_{1,j}\Psi_1(Y) - C_{2,j}\Psi_2(Y) - \dots - C_{m,j}\Psi_m(Y),\\
&i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, k-m; \quad m = 1, 2, \ldots, k-1;
\end{aligned} \tag{57}$$

где $C_{i,j}$ — произвольные постоянные. Функции $\Phi_{m+1}(X)$, ..., $\Phi_k(X)$, $\Psi_1(Y)$, ..., $\Psi_m(Y)$, стоящие в правых частях равенств (57), задаются произвольно. Видно, что при фиксированном m решение (57) содержит $m(k-m)$ произвольных постоянных.

2°. На втором этапе последовательно подставляем функционалы $\Phi_i(X)$ и $\Psi_j(Y)$ из (22) во все решения (57). В результате получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений* для определения искомых функций $\varphi_p(x)$ и $\psi_q(y)$. Решая эти системы, находим решения с обобщенным разделением переменных вида (19).

Замечание 1. Важно подчеркнуть, что используемое в методе расщепления билинейное функциональное уравнение (21) при фиксированном k является одним и тем же для разных классов исходных нелинейных уравнений математической физики.

Замечание 2. При фиксированном m решение (57) содержит $m(k-m)$ произвольных постоянных $C_{i,j}$. При заданном k наибольшее число произвольных постоянных имеют следующие решения:

Номер решения	*Число произвольных постоянных*	*Условия на k*
$m = \frac{1}{2}k$	$\frac{1}{4}k^2$	k — четное число,
$m = \frac{1}{2}(k \pm 1)$	$\frac{1}{4}(k^2-1)$	k — нечетное число.

Именно эти решения билинейного функционального уравнения чаще всего приводят к нетривиальным решениям с обобщенным разделением переменных в нелинейных уравнениях с частными производными.

Замечание 3. Билинейное функциональное уравнение (21) и его решения (57) играют важную роль в методе функционального разделения переменных (см. главу 5).

Для наглядности на рис. 2 изображены основные этапы построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления.

4.5.2. Решения простейших функциональных уравнений и их применение

Приведем решения нескольких простейших функциональных уравнений вида (21), которые понадобятся далее для решения конкретных нелинейных уравнений с частными производными.

1°. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 = 0 \tag{58}$$

* Обычно эти системы являются переопределенными.

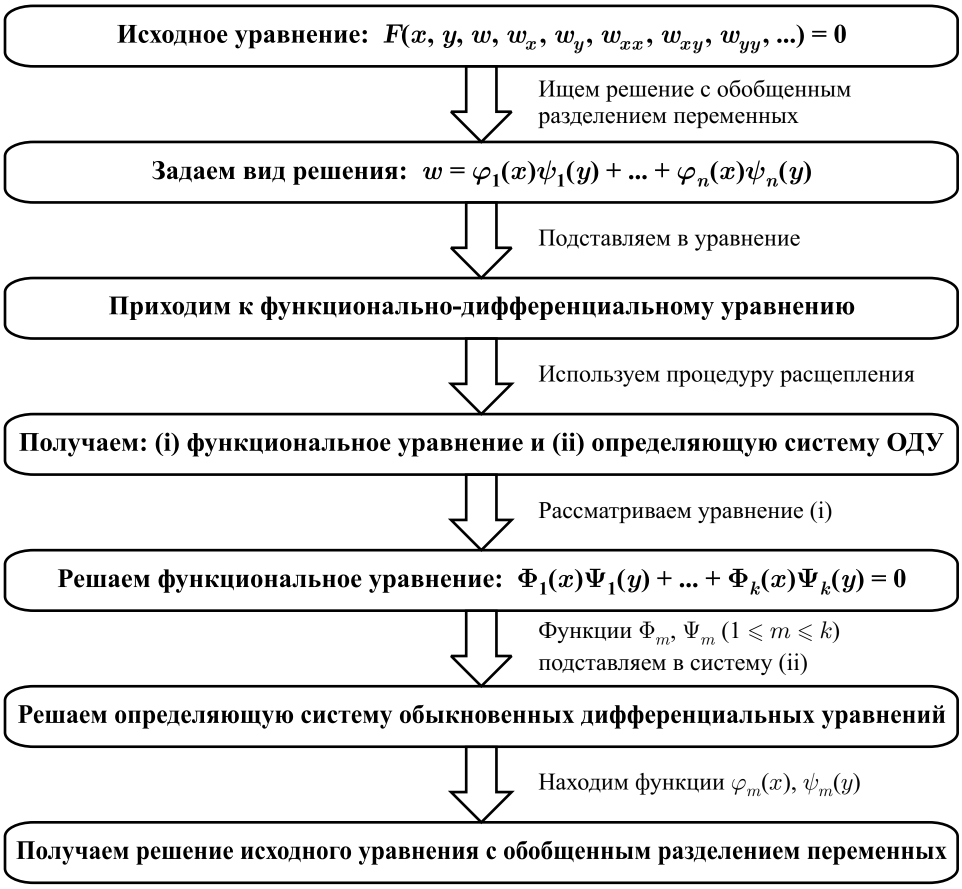

Рис. 2. Общая схема построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления. Использовано сокращение: ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения.

где все Φ_i — функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i — функции другого аргумента, имеет два решения:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_3, \quad \Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2; \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_3, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_3, \quad \Phi_3 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2, \end{aligned} \tag{59}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные. Функции в правых частях равенств (59) считаются произвольными. В первом решении сделаны переобозначения: $A_1 = C_{1,1}$, $A_2 = C_{2,1}$, а во втором решении — переобозначения: $A_1 = -1/C_{1,2}$, $A_2 = C_{1,1}/C_{1,2}$ [сравни с решениями (57) при $k = 3$].

2°. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{60}$$

где все Φ_i — функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i — функции другого аргумента, имеет решение

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, \qquad \Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4, \\ &\Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, \quad \Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2, \end{aligned} \tag{61}$$

зависящее от четырех произвольных постоянных A_m [см. решение (57) при $k=4$, $m=2$, $C_{1,1}=A_1$, $C_{1,2}=A_2$, $C_{2,1}=A_3$, $C_{2,2}=A_4$]. Функции в правых частях равенств (61) считаются произвольными.

Уравнение (60) имеет также два других решения, зависящих от трех произвольных постоянных:

$$\begin{aligned}&\Phi_1=A_1\Phi_4,\quad \Phi_2=A_2\Phi_4,\quad \Phi_3=A_3\Phi_4,\quad \Psi_4=-A_1\Psi_1-A_2\Psi_2-A_3\Psi_3;\\&\Psi_1=A_1\Psi_4,\quad \Psi_2=A_2\Psi_4,\quad \Psi_3=A_3\Psi_4,\quad \Phi_4=-A_1\Phi_1-A_2\Phi_2-A_3\Phi_3.\end{aligned}\tag{62}$$

В первом решении сделаны переобозначения: $A_1=C_{1,1}$, $A_2=C_{2,1}$, $A_3=C_{3,1}$, а во втором решении — переобозначения: $A_1=-1/C_{1,3}$, $A_2=C_{1,1}/C_{1,3}$, $A_3=C_{1,2}/C_{1,3}$.

3°. Решения функционального уравнения

$$\Phi_1\Psi_1+\Phi_2\Psi_2+\Phi_3\Psi_3+\Phi_4\Psi_4+\Phi_5\Psi_5=0,\tag{63}$$

можно найти по формулам (57) при $k=5$. Покажем простой способ получения решений, который удобно использовать на практике, исходя непосредственно из уравнения (63). Будем считать, что функциональные коэффициенты Φ_1, Φ_2, Φ_3 являются линейными комбинациями коэффициентов Φ_4 и Φ_5:

$$\Phi_1=A_1\Phi_4+B_1\Phi_5,\qquad \Phi_2=A_2\Phi_4+B_2\Phi_5,\qquad \Phi_3=A_3\Phi_4+B_3\Phi_5,\tag{64}$$

где A_n, B_n — произвольные постоянные. Подставим выражения (64) в (63) и соберем члены, пропорциональные Φ_4 и Φ_5:

$$(A_1\Psi_1+A_2\Psi_2+A_3\Psi_3+\Psi_4)\Phi_4+(B_1\Psi_1+B_2\Psi_2+B_3\Psi_3+\Psi_5)\Phi_5=0.$$

Приравнивая выражения в скобках нулю, получим

$$\begin{aligned}\Psi_4&=-A_1\Psi_1-A_2\Psi_2-A_3\Psi_3,\\ \Psi_5&=-B_1\Psi_1-B_2\Psi_2-B_3\Psi_3.\end{aligned}\tag{65}$$

Формулы (64), (65) дают одно из решений уравнения (63). Аналогичным образом находятся и другие решения.

Пример 13. Рассмотрим нелинейное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right)+f(t)w+g(t),\tag{66}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции.

Ищем решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t)=\varphi(x)\psi(t)+\chi(t).\tag{67}$$

Подставив (67) в (66), после элементарных операций получим

$$a\psi^2(\varphi\varphi'_x)'_x+a\psi\chi\varphi''_{xx}+(f\psi-\psi''_{tt})\varphi+f\chi+g-\chi''_{tt}=0.$$

Это уравнение можно представить в виде функционального уравнения (60), где

$$\begin{aligned}&\Phi_1=(\varphi\varphi'_x)'_x,\quad \Phi_2=\varphi''_{xx},\quad \Phi_3=\varphi,\quad \Phi_4=1,\\&\Psi_1=a\psi^2,\quad \Psi_2=a\psi\chi,\quad \Psi_3=f\psi-\psi''_{tt},\quad \Psi_4=f\chi+g-\chi''_{tt}.\end{aligned}\tag{68}$$

Подставив в решение (61) выражения (68), получим переопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(t)$, $\chi=\chi(t)$:

$$\begin{aligned}&(\varphi\varphi'_x)'_x=A_1\varphi+A_2,\qquad \varphi''_{xx}=A_3\varphi+A_4,\\&f\psi-\psi''_{tt}=-A_1a\psi^2-A_3a\psi\chi,\quad f\chi+g-\chi''_{tt}=-A_2a\psi^2-A_4a\psi\chi.\end{aligned}\tag{69}$$

Первые два уравнения (69) совместны только при

$$A_1 = 6B_2, \quad A_2 = B_1^2 - 4B_0B_2, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 2B_2, \tag{70}$$

где B_0, B_1, B_2 — произвольные постоянные, и имеют в этом случае решение

$$\varphi(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0. \tag{71}$$

Подставив выражения для коэффициентов (70) в два последних уравнения (69), получим систему для определения функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$:

$$\begin{aligned} \psi''_{tt} &= 6aB_2\psi^2 + f(t)\psi, \\ \chi''_{tt} &= [2aB_2\psi + f(t)]\chi + a(B_1^2 - 4B_0B_2)\psi^2 + g(t). \end{aligned} \tag{72}$$

Формулы (67), (71) и система (72) определяют точное решение уравнения (66) с обобщенным разделением переменных. Первое уравнение (72) решается независимо; оно линейно в случае $B_2 = 0$ и интегрируется в квадратурах при $f(t) = \mathrm{const}$. Второе уравнение (72) линейно относительно χ (при известном ψ).

При $\varphi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$, $\chi \not\equiv 0$ и произвольных f и g уравнение (66) не имеет других решений вида (67).

Замечание. Можно показать (V. A. Galaktionov, 1995), что уравнение (66) имеет более общее решение вида

$$w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t), \qquad \varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = x, \tag{73}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи обозначают производные по t)

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= 6a\psi_1^2 + f(t)\psi_1, \\ \psi_2'' &= [6a\psi_1 + f(t)]\psi_2, \\ \psi_3'' &= [2a\psi_1 + f(t)]\psi_3 + a\psi_2^2 + g(t). \end{aligned} \tag{74}$$

Второе уравнение (74) имеет частное решение $\psi_2 = \psi_1$. Поэтому его общее решение можно записать в виде (В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*)

$$\psi_2 = C_1\psi_1 + C_2\psi_1 \int \frac{dt}{\psi_1^2}.$$

Частному случаю $C_2 = 0$ отвечает решение, полученное в примере 4.

Пример 14. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \tag{75}$$

которое встречается в гидродинамике.

Ищем точные решения уравнения (75) вида

$$w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{76}$$

Подставив (76) в (75), имеем

$$\varphi'_t\theta'_x - \varphi\psi\theta''_{xx} + \varphi^2\left[(\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx}\right] - \nu\varphi\theta'''_{xxx} = 0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно свести к функциональному уравнению (60), положив

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = \varphi'_t, \quad \Phi_2 = \varphi\psi, \qquad \Phi_3 = \varphi^2, \qquad\qquad \Phi_4 = \nu\varphi, \\ &\Psi_1 = \theta'_x, \quad \Psi_2 = -\theta''_{xx}, \quad \Psi_3 = (\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx}, \quad \Psi_4 = -\theta'''_{xxx}. \end{aligned} \tag{77}$$

Подставив эти выражения в (61), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi'_t = A_1\varphi^2 + A_2\nu\varphi, &&\varphi\psi = A_3\varphi^2 + A_4\nu\varphi, \\ &(\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx} = -A_1\theta'_x + A_3\theta''_{xx}, &&\theta'''_{xxx} = A_2\theta'_x - A_4\theta''_{xx}. \end{aligned} \tag{78}$$

Можно показать, что два последних уравнения (78) имеют совместные решения только при линейной связи между функцией θ и ее производной:

$$\theta'_x = B_1\theta + B_2. \tag{79}$$

Шесть постоянных B_1, B_2, A_1, A_2, A_3, A_4 должны удовлетворять трем условиям:

$$\begin{aligned} B_1(A_1+B_2-A_3B_1)&=0,\\ B_2(A_1+B_2-A_3B_1)&=0,\\ B_1^2+A_4B_1-A_2&=0. \end{aligned} \tag{80}$$

Интегрируя уравнение (79), получим

$$\theta=\begin{cases} B_3\exp(B_1x)-\dfrac{B_2}{B_1} & \text{при } B_1\neq 0,\\ B_2x+B_3 & \text{при } B_1=0, \end{cases} \tag{81}$$

где B_3 — произвольная постоянная.

Из первых двух уравнений (78) находим функции φ и ψ:

$$\varphi=\begin{cases} \dfrac{A_2\nu}{C\exp(-A_2\nu t)-A_1} & \text{при } A_2\neq 0,\\ -\dfrac{1}{A_1t+C} & \text{при } A_2=0, \end{cases}\qquad \psi=A_3\varphi+A_4\nu, \tag{82}$$

где C — произвольная постоянная.

Формулы (81), (82) и соотношения (80) позволяют найти следующие решения уравнения (75) вида (76):

$$\begin{aligned} &w=\frac{x+C_1}{t+C_2}+C_3 && \text{при}\quad A_2=B_1=0,\ B_2=-A_1;\\ &w=\frac{C_1e^{-\lambda x}+1}{\lambda t+C_2}+\nu\lambda && \text{при}\quad A_2=0,\ B_1=-A_4,\ B_2=-A_1-A_3A_4;\\ &w=C_1e^{-\lambda(x+\beta\nu t)}+\nu(\lambda+\beta) && \text{при}\quad A_1=A_3=B_2=0,\ A_2=B_1^2+A_4B_1;\\ &w=\frac{\nu\beta+C_1e^{-\lambda x}}{1+C_2e^{-\nu\lambda\beta t}}+\nu(\lambda-\beta) && \text{при}\quad A_1=A_3B_1-B_2,\ A_2=B_1^2+A_4B_1, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, β, λ — произвольные постоянные (их можно выразить через A_k, B_k).

Исследование второго вырожденного решения (62) функционального уравнения (60) с учетом (77) приводит к двум решениям дифференциального уравнения (75):

$$\begin{aligned} w&=\frac{x}{t+C}+\psi(t),\\ w&=\varphi(t)e^{-\lambda x}-\frac{\varphi_t'(t)}{\lambda\varphi(t)}+\nu\lambda, \end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, C, λ — произвольные постоянные.

Пример 15. Рассмотрим уравнение с экспоненциальной нелинейностью по старшей производной:

$$w_t=f(x)\exp(aw_{xx}). \tag{83}$$

Ищем точные решения вида

$$w=\varphi(x)+\psi(x)\theta(t). \tag{84}$$

Подставим (84) в (83), поделим обе части полученного выражения на $f(x)$, а затем прологарифмируем. Считая $\psi/f>0$, после элементарных преобразований имеем

$$a\varphi_{xx}''-\ln(\psi/f)+a\theta\psi_{xx}''-\ln\theta_t'=0. \tag{85}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно записать в виде (58), положив

$$\Phi_1=a\varphi_{xx}''-\ln(\psi/f),\quad \Phi_2=\psi_{xx}'',\quad \Phi_3=1,\quad \Psi_1=1,\quad \Psi_2=a\theta,\quad \Psi_3=-\ln\theta_t'.$$

Подставив эти выражения в первое решение (59), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\Phi_1=a\varphi_{xx}''-\ln(\psi/f)=A_1,\quad \psi_{xx}''=A_2,\quad \ln\theta_t'=A_1+A_2a\theta.$$

Интегрируя, имеем

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{2a}A_1x^2 + C_3x + C_4 + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)\ln\frac{\psi(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi,\\
\psi(x) &= \frac{1}{2}A_2x^2 + C_1x + C_2, \\
\theta(t) &= -\frac{1}{A_2a}\ln\bigl(C_5 - A_2ae^{A_1}t\bigr).
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Формулы (84), (86) описывают точное решение уравнения (83).

Задачи и упражнения к разд. 4.5

1. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений тепло- и массопереноса:

a) $w_t = a(ww_x)_x$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + b$,
c) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
d) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
e) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

2. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных волновых уравнений:

a) $w_{tt} = a(ww_x)_x$,
b) $w_{tt} = a(ww_x)_x + b$,
c) $w_{tt} = a(ww_x)_x + bw$,
d) $w_{tt} = a(ww_x)_x + bw^2$,
e) $w_{tt} + aw_t = b(ww_x)_x$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения третьего порядка:

$w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = f(t)w_{xxx}$,

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t)$.

4. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнений пограничного слоя степенной жидкости:

a) $w_yw_{xy} - w_xw_{yy} = a(w_{yy})^n w_{yyy}$,
b) $w_yw_{xy} - w_xw_{yy} = a(w_{yy})^n w_{yyy} + f(x)$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$.

5. Найти решения с аддитивным разделением переменных нелинейных уравнений четвертого порядка, которые встречаются в гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости:

a) $w_y(\Delta w)_x - w_x(\Delta w)_y = \nu\Delta\Delta w$,
b) $w_y(\Delta w)_x - w_x(\Delta w)_y = \nu\Delta\Delta w + f(y)$,

где $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$.

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = a\exp[f(x)w_{xx}]$,
b) $w_t = a\exp[f(t)w_{xx}]$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)\theta(t) + \psi(x)$ (обе части уравнений надо прологарифмировать).

Литература к разд. 4.5: Е. Р. Розендорн (1984), А. Д. Полянин (2001 *c*), А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

4.6. Метод Титова—Галактионова

4.6.1. Описание метода. Подпространства, инвариантные относительно нелинейного оператора

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F[w], \tag{87}$$

где $F[w]$ — нелинейный дифференциальный оператор вида

$$F[w] \equiv F\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big). \tag{88}$$

Определение. Конечномерное линейное подпространство

$$\mathscr{L}_k = \big\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\big\}, \tag{89}$$

элементами которого являются всевозможные линейные комбинации линейно-независимых функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$, называется инвариантным относительно оператора F, если $F[\mathscr{L}_k] \subseteq \mathscr{L}_k$. Это означает, что существуют функции $f_1, \ldots, f_k$, такие что

$$F\left[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} f_i(C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x) \tag{90}$$

для произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_k$.

Пусть линейное подпространство (89) инвариантно относительно оператора F. Тогда уравнение (87) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(t)\varphi_i(x), \tag{91}$$

где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_i' = f_i(\psi_1, \ldots, \psi_k), \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{92}$$

Здесь штрих обозначает производную по t.

Следующий пример иллюстрирует описанный метод построения решений с обобщенным разделением переменных.

Пример 16. Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + kw^2 + bw + c. \tag{93}$$

Покажем, что при $k > 0$ дифференциальный оператор $F[w] = aw_{xx} + (w_x)^2 + kw^2 + bw + c$ (определяющий правую часть уравнения) имеет двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_2 = \big\{1, \cos(x\sqrt{k}\,)\big\}$. Действительно, для произвольных C_1 и C_2 справедливо равенство

$$F\big[C_1 + C_2\cos(x\sqrt{k}\,)\big] = k(C_1^2 + C_2^2) + bC_1 + c + C_2(2kC_1 - ak + b)\cos(x\sqrt{k}\,).$$

Поэтому уравнение (93) допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(x\sqrt{k}\,), \tag{94}$$

где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_1' &= k(\psi_1^2 + \psi_2^2) + b\psi_1 + c, \\ \psi_2' &= \psi_2(2k\psi_1 - ak + b). \end{aligned} \tag{95}$$

Замечание 1. При $k>0$ дифференциальный оператор $F[w]$ имеет трехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, \sin(x\sqrt{k}\,), \cos(x\sqrt{k}\,)\}$.

Замечание 2. При $k<0$ дифференциальный оператор $F[w]$ имеет трехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(x\sqrt{k}\,), \operatorname{ch}(x\sqrt{k}\,)\}$.

Замечание 3. Более общее уравнение (93), где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ — произвольные функции и $k = \mathrm{const} < 0$, также имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (94), где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (95).

4.6.2. Некоторые обобщения

Аналогичным образом рассматривается более общее уравнение вида

$$L_1[w] = L_2[U], \qquad U = F[w], \tag{96}$$

где $L_1[w]$ и $L_2[U]$ — линейные дифференциальные операторы по переменной t вида

$$L_1[w] \equiv \sum_{i=0}^{m_1} a_i(t)\,\frac{\partial^i w}{\partial t^i}, \qquad L_2[U] \equiv \sum_{j=0}^{m_2} b_j(t)\,\frac{\partial^j U}{\partial t^j}, \tag{97}$$

а $F[w]$ — нелинейный дифференциальный оператор по переменной x

$$F[w] \equiv F\left(t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right), \tag{98}$$

который может зависеть параметрическим образом от t.

Пусть линейное подпространство (89) инвариантно относительно оператора F, т. е. для произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_k$ имеет место равенство

$$F\left[\sum_{i=1}^{k} C_i \varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} f_i(t, C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x). \tag{99}$$

Тогда уравнение (96) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида (91), где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_1\bigl[\psi_i(t)\bigr] = L_2\bigl[f_i(t, \psi_1, \ldots, \psi_k)\bigr], \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{100}$$

Пример 17. Рассмотрим уравнение

$$a_2(t)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1(t)\,\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{101}$$

которое при $a_2(t) = k_2$, $a_1(t) = k_1/t$ используется для описания трансзвуковых газовых течений (t играет роль пространственной переменной).

Уравнение (101) является частным случаем уравнения (96), где $L_1[w] = a_2(t)w_{tt} + a_1(t)w_t$, $L_2[U] = U$, $F[w] = w_x w_{xx}$. Можно показать, что нелинейный дифференциальный оператор $F[w]$ допускает трехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x^{3/2}, x^3\}$. Поэтому уравнение (101) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x^{3/2} + \psi_3(t)x^3,$$

где функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
a_2(t)\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' &= \tfrac{9}{8}\psi_2^2,\\
a_2(t)\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' &= \tfrac{45}{4}\psi_2\psi_3,\\
a_2(t)\psi_3'' + a_1(t)\psi_3' &= 18\psi_3^2.
\end{aligned}$$

Замечание. Оператор $F[w]$ допускает также четырехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$, которому соответствует решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2 + \psi_4(t)x^3.$$

См. также пример 18 при $a_0(t) = 0$, $k = 1$, $n = 2$.

Пример 18. Рассмотрим более общее уравнение n-го порядка

$$a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial w}{\partial t} + a_0(t)w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k \frac{\partial^n w}{\partial x^n}. \tag{102}$$

Нелинейный оператор $F[w] = (w_x)^k w_x^{(n)}$ допускает двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$, где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $(\varphi'_x)^k \varphi_x^{(n)} = \varphi$. Поэтому уравнение (102) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\varphi(x),$$

где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются двумя независимыми обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a_2(t)\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' + a_0(t)\psi_1 = 0,$$
$$a_2(t)\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' + a_0(t)\psi_2 = \psi_2^{k+1}.$$

Много других примеров подобного рода, а также некоторые детализации и обобщения описываемого метода, можно найти в цитируемой ниже литературе. Основные трудности, возникающие при использовании метода Титова — Галактионова для построения точных решений конкретных уравнений, состоят в отыскании линейных подпространств, инвариантных относительно заданного нелинейного оператора. Кроме того, исходное уравнение может отличаться от уравнений рассматриваемого типа (не всегда можно выделить подходящий нелинейный оператор $F[w]$).

Задачи и упражнения к разд. 4.6

1. Показать, что нелинейный дифференциальный оператор

$$F[w] = (a_1 w_x + a_2 w + a_3)w_{xx} + a_4 w_x^2 + a_5 w_x + a_6 w + a_7$$

допускает трехмерное линейное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$. Используя это обстоятельство, найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = aww_{xx}$,
b) $w_t = aww_{xx} + b$,
c) $w_t = aww_{xx} + bw$,
d) $w_t = aww_{xx} + bw_x$,
e) $w_t = a(ww_x)_x$,
f) $w_t = a(ww_x)_x + b$,
g) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
h) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x$,
i) $w_{tt} = aww_{xx}$,
j) $w_{tt} = a(ww_x)_x$,
k) $w_{tt} = aww_{xx} + b$,
l) $w_{tt} = a(ww_x)_x + b$.

2. При каких условиях нелинейный дифференциальный оператор

$$F[w] = (a_1 w_x + a_2 w + a_3)w_{xx} + a_4 w_x^2 + a_5 w_x + a_6 w^2 + a_7 w + a_8$$

допускает инвариантные линейные подпространства

a) $\mathscr{L}_2 = \{1, e^{\lambda x}\}$,
b) $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$,
c) $\mathscr{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$?

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = w_{xx} + aw_x^2 + bw^2$,

b) $w_t = ww_{xx} + bw^2 + c$,

c) $w_t = ww_{xx} + bw_x^2 + c$,

d) $w_t = (ww_x)_x + aw^2 + b$.

Указание. Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи.

4. При каких условиях нелинейный дифференциальный оператор

$F[w] = a_1 w_{xx}^2 + a_2 w_x w_{xx} + a_3 ww_{xx} + a_4 w_x^2 + a_5 ww_x + a_6 w^2 + a_7 w_x + a_8 w + a_9$

допускает инвариантные линейные подпространства

a) $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$,

b) $\mathscr{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$,

c) $\mathscr{L}_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$,

d) $\mathscr{L}_2 = \{1, e^{\lambda x}\}$,

e) $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$,

f) $\mathscr{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$,

g) $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{ch}(\lambda x), \operatorname{ch}(2\lambda x)\}$,

h) $\mathscr{L}_3 = \{1, \cos(\lambda x), \cos(2\lambda x)\}$,

i) $\mathscr{L}_2 = \{1, f(x)\}$?

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = aw_{xx}^2$,

b) $w_{tt} = aw_{xx}^2 + b$,

c) $w_t = w_{xx}^2 + w^2$,

d) $w_t = ww_{xx} - \frac{3}{4}w_x^2 + \frac{4}{3}w^2$.

Указание. Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи из пунктов c), d), f) и h).

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнений с кубической нелинейностью:

a) $w_t = 2w^2 w_{xx} - ww_x^2$,

b) $w_{tt} = 2w^2 w_{xx} - ww_x^2 + a$.

Указание. Показать, что нелинейный оператор $F[w] = 2w^2 w_{xx} - ww_x^2$ допускает трехмерное линейное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$.

Литература к разд. 4.6: С. С. Титов (1988), В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1994), V. A. Galaktionov (1995), V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov, S. R. Svirshchevskii (1995), S. R. Svirshchevskii (1995, 1996), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).