Глава 5 книги А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова «Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики» — М.: Физматлит, 2005 (в печати).

5. Метод функционального разделения переменных

5.1. Структура решений с функциональным разделением переменных

Нелинейные уравнения, полученные заменой $w = F(z)$ из линейных уравнений математической физики с разделяющимися переменными для функции $z = z(x, y)$, будут иметь точные решения вида

$$w(x, y) = F(z), \quad \text{где} \quad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\psi_m(y). \tag{1}$$

Многие нелинейные уравнения с частными производными, которые не сводятся к линейным, также имеют точные решения вида (1). Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных*. В общем случае функции $\varphi_m(x)$, $\psi_m(y)$, $F(z)$ в (1) заранее не известны и подлежат определению.

Основная идея: дифференциально-функциональное уравнение, полученное в результате подстановки выражения (1) в рассматриваемое уравнение с частными производными, надо привести к стандартному билинейному функциональному уравнению (21) из разд. 4.2.2 [или к дифференциально-функциональному уравнению вида (21)–(22) из разд. 4.2.2].

Замечание 1. При функциональном разделении переменных поиск решений простейшего вида $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ и $w = F(\varphi(x)\psi(y))$ приводит к одинаковым результатам, поскольку справедливо представление $F(\varphi(x)\psi(y)) = F_1(\varphi_1(x) + \psi_1(y))$, где $F_1(z) = F(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln\varphi(x)$, $\psi_1(y) = \ln\psi(y)$.

Замечание 2. При построении решений с функциональном разделением переменных вида $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ считается, что $\varphi \neq \text{const}$ и $\psi \neq \text{const}$.

Замечание 3. Функция $F(z)$ может описываться как одним обыкновенным дифференциальным уравнением, так и переопределенной системой уравнений (при анализе надо учитывать обе эти возможности).

5.2. Решения с функциональным разделением переменных специального вида

5.2.1. Решения типа обобщенной бегущей волны. Примеры

Для упрощения анализа некоторые функции в (1) можно задавать априорно, а другие определять в процессе решения. Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных специального вида*.

Ниже указаны наиболее простые решения с функциональным разделением переменных специального вида (x и y можно поменять местами):

$w = F(z)$, $z = \psi_1(y)x + \psi_2(y)$ (аргумент z линеен по x);

$w = F(z)$, $z = \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y)$ (аргумент z квадратичен по x);

$w = F(z)$, $z = \psi_1(y)e^{\lambda x} + \psi_2(y)$ (аргумент z содержит экспоненциальную функцию x).

Первое решение будем называть решением типа обобщенной бегущей волны. В последней формуле вместо $e^{\lambda x}$ могут стоять также функции $\operatorname{ch}(ax+b)$, $\operatorname{sh}(ax+b)$, $\sin(ax+b)$.

После подстановки любого из указанных выражений в рассматриваемое уравнение надо исключить x с помощью выражения для z. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами y и z. Его решение в ряде случаев можно получить при помощи методов, описанных в главе 4.

Для наглядности общая схема построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений изображена на рис. 3.

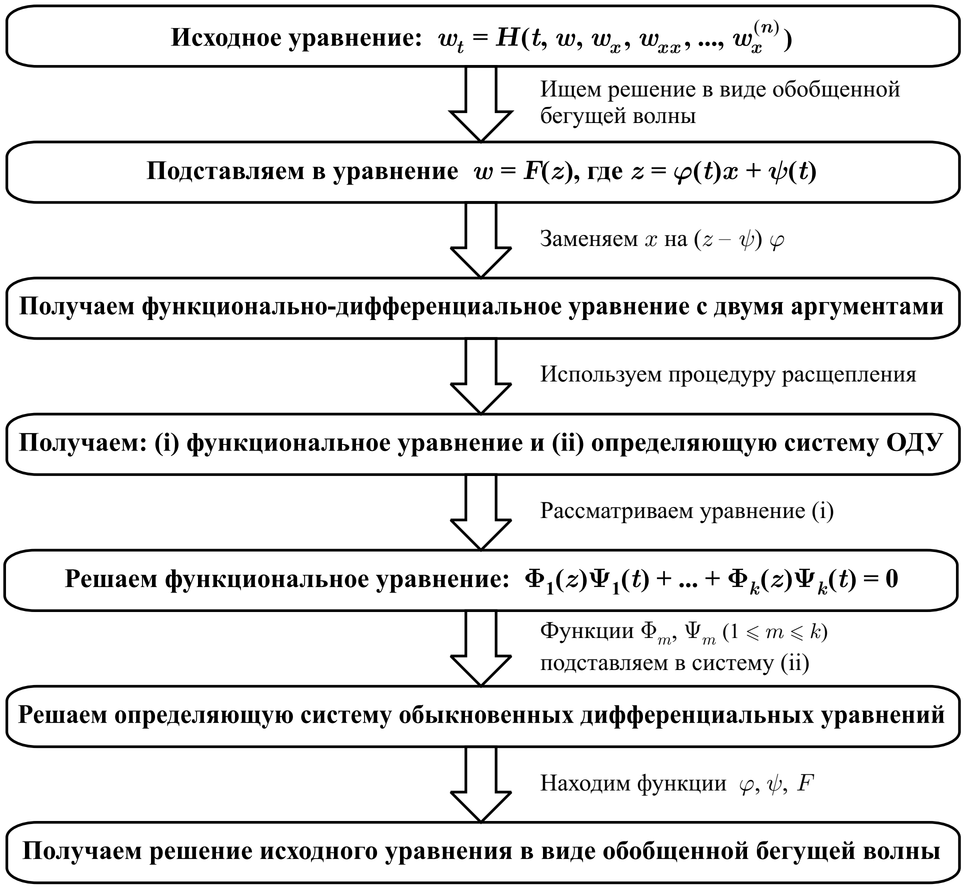

Рис. 3. Алгоритм построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений. Использовано сокращение: ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения.

Замечание 1. Алгоритм, изображенный на рис. 3, может использоваться также для построения точных решений более общего вида* $w=\sigma(t)F(z)+\varphi_1(t)x+\psi_2(t)$, где $z=\varphi_1(t)x+\psi_2(t)$. Пример подобного решения рассмотрен далее в разд. 6.3 (пример 6).

Замечание 2. Решение с обобщенным разделением переменных (см. главу 4) является решением с функциональным разделением переменных частного вида, соответствующим случаю $F(z)=z$.

Рассмотрим примеры нелинейных уравнений, допускающих точные решения с функциональным разделением переменных частного вида, когда сложный аргумент z линеен или квадратичен по одной из независимых переменных.

Пример 1. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником
$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mathcal{F}(w). \tag{2}$$

Ищем точные решения уравнения (2) с функциональным разделением переменных специального вида
$$w=w(z), \quad z=\varphi(t)x+\psi(t). \tag{3}$$
Требуется найти функции $w(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и правую часть уравнения $\mathcal{F}(w)$.

Подставив выражение (3) в (2) и поделив на w'_z, имеем
$$\varphi'_t x+\psi'_t=\varphi^2\frac{w''_{zz}}{w'_z}+\frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}. \tag{4}$$
Выразим в (3) x через z и подставим его в (4). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными t и z:
$$-\psi'_t+\frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t-\frac{\varphi'_t}{\varphi}z+\varphi^2\frac{w''_{zz}}{w'_z}+\frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}=0,$$
которое можно рассматривать как функциональное уравнение (60) из разд. 4.5, где
$$\begin{aligned} &\Phi_1=-\psi'_t+\frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t, && \Phi_2=-\frac{\varphi'_t}{\varphi}, && \Phi_3=\varphi^2, && \Phi_4=1,\\ &\Psi_1=1, && \Psi_2=z, && \Psi_3=\frac{w''_{zz}}{w'_z}, && \Psi_4=\frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}. \end{aligned}$$
Подставляя эти выражения в формулы (61) из разд. 4.5, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\begin{gathered} -\psi'_t+\frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t=A_1\varphi^2+A_2, \quad -\frac{\varphi'_t}{\varphi}=A_3\varphi^2+A_4,\\ \frac{w''_{zz}}{w'_z}=-A_1-A_3z, \quad \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}=-A_2-A_4z, \end{gathered} \tag{5}$$
где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Случай 1. При $A_4\neq 0$ решение системы (5) имеет вид
$$\begin{aligned} \varphi(t)&=\pm\left(C_1e^{2A_4t}-\frac{A_3}{A_4}\right)^{-1/2},\\ \psi(t)&=-\varphi(t)\left[A_1\int\varphi(t)\,dt+A_2\int\frac{dt}{\varphi(t)}+C_2\right],\\ w(z)&=C_3\int\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}A_3z^2-A_1z\bigr)\,dz+C_4,\\ \mathcal{F}(w)&=-C_3(A_4z+A_2)\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}A_3z^2-A_1z\bigr), \end{aligned} \tag{6}$$

* Указанное решение содержит в себе, как частные случаи, все наиболее распространенные решения: решения типа бегущей волны, автомодельные решения, обобщенные автомодельные решения, решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных (а также многие инвариантные решения).

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Зависимость $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ задается двумя последними выражениями в параметрическом виде (z играет роль параметра). При $A_3 \neq 0$ функцию источника $\mathcal{F}(w)$ в (6) можно выразить через элементарные функции и функцию, обратную интегралу вероятностей.

В частном случае $A_3 = C_4 = 0$, $A_1 = -1$, $C_3 = 1$ функцию источника можно представить в явном виде:

$$\mathcal{F}(w) = -w(A_4 \ln w + A_2). \tag{7}$$

Решение уравнения (2) в этом случае можно получить также с помощью группового анализа (В. А. Дородницын, 1982).

Случай 2. При $A_4 = 0$ решения первых двух уравнений (5) имеют вид

$$\varphi(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2A_3t + C_1}}, \qquad \psi(t) = \frac{C_2}{\sqrt{2A_3t + C_1}} - \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{3A_3}(2A_3t + C_1),$$

а решения остальных уравнений описываются двумя последними формулами (6) при $A_4 = 0$.

Пример 2. Рассмотрим более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial w}{\partial x} + c(t)\mathcal{F}(w).$$

содержащее произвольные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$.

Решения ищем в виде (3). В этом случае в системе (5) изменятся только первые два уравнения, а функции $w(z)$ и $\mathcal{F}(w)$ будут описываться двумя последними формулами (6).

Пример 3. Нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{G}(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \mathcal{F}(w)$$

также имеет решения вида (3). Искомые величины описываются системой (5), в которой w''_{zz} надо заменить на $[\mathcal{G}(w)w'_z]'_z$. Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (6). Одна из двух функций $\mathcal{G}(w)$ или $\mathcal{F}(w)$ может быть задана произвольно, а другая находится в процессе решения. В частном случае $\mathcal{F}(w) = \mathrm{const}$ можно получить $\mathcal{G}(w) = C_1e^{2kw} + (C_2w + C_3)e^{kw}$.

Пример 4. Аналогичным образом рассматривается нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + \mathcal{F}(w).$$

Как и ранее, решения ищутся в виде (3). В этом случае в системе (5) величины φ^2 и w''_{zz} надо заменить соответственно на φ^n и $w_z^{(n)}$. В частности, при $A_3 = 0$ помимо уравнения с логарифмической нелинейностью вида (7) получим и другие уравнения.

Пример 5. Для нелинейного уравнения n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + \mathcal{F}(w)\frac{\partial w}{\partial x},$$

поиск точного решения вида (3) приводит к следующей системе уравнений для определения функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $w(z)$, $\mathcal{F}(w)$:

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t = A_1\varphi^n + A_2\varphi, \qquad -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3\varphi^n + A_4\varphi,$$
$$\frac{w_z^{(n)}}{w'_z} = -A_1 - A_3z, \qquad \mathcal{F}(w) = -A_2 - A_4z,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

При $n = 3$, положив $A_3 = 0$ и $A_1 > 0$, в частности получим $\mathcal{F}(w) = -A_2 - A_4\arcsin(kw)$.

Пример 6. Можно искать решения уравнения (2) с квадратичной зависимостью сложного аргумента по x:

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x^2 + \psi(t). \tag{8}$$

Подставим это выражение в (2). В результате приходим к уравнению, которое содержит члены с x^2 (и не содержит членов, линейных по x). Исключив из полученного уравнения x^2 с помощью (8), имеем

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t + 2\varphi - \frac{\varphi'_t}{\varphi}z + 4\varphi z\frac{w''_{zz}}{w'_z} - 4\varphi\psi\frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} = 0.$$

Для решения этого функционально-дифференциального уравнения с двумя аргументами применим метод расщепления, описанный в разд. 4.5. Можно показать, что уравнение (2) с логарифмической нелинейностью (7) имеет решение вида (8).

Пример 7. Рассмотрим нелинейное уравнение m-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^{n-1}\frac{\partial^m w}{\partial y^m},$$

которое в частном случае $f(x)=\mathrm{const}$, $m=3$ описывает пограничный слой степенно́й жидкости на плоской пластине (w — функция тока, x и y — продольная и поперечная координаты, n — реологический параметр; значение $n=1$ соответствует ньютоновской жидкости).

Поиск точного решения вида

$$w=w(z),\qquad z=\varphi(x)y+\psi(x)$$

приводит к равенству $\varphi'_x(w'_z)^2=f(x)\varphi^{2n+m-3}(w''_{zz})^{n-1}w_z^{(m)}$, которое не зависит от функции ψ. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\varphi(x)=\Big[\int f(x)\,dx+C\Big]^{\frac{1}{4-2n-m}},\quad \psi(x)\text{ — произвольна},$$

а функция $w=w(z)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения $(w'_z)^2=(4-2n-m)(w''_{zz})^{n-1}w_z^{(m)}$.

Пример 8. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{n+1}w}{\partial x^n\partial y}=f(w).\tag{9}$$

Ищем решение с функциональным разделением переменных специального вида

$$w=w(z),\quad z=\varphi(y)x+\psi(y).\tag{10}$$

Подставим (10) в (9), а затем исключим x с помощью выражения для z. В результате после деления на $w_z^{(n+1)}$ и перегруппировки членов получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами:

$$\varphi^n\psi'_y-\varphi^{n-1}\psi\varphi'_y+\varphi^{n-1}\varphi'_y\bigg(z+n\frac{w_z^{(n)}}{w_z^{(n+1)}}\bigg)-\frac{f(w)}{w_z^{(n+1)}}=0.\tag{11}$$

Оно сводится к трехчленному билинейному функциональному уравнению, которое имеет два решения (см. разд. 4.5). В соответствии с этим рассмотрим два случая.

1°. В первом случае выражение в круглых скобках и последнюю дробь в (11) приравниваем к константам. В результате после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}(z-C_1)w_z^{(n+1)}+nw_z^{(n)}&=0,\\ C_2w_z^{(n+1)}-f(w)&=0,\\ \varphi^n\psi'_y-\varphi^{n-1}\psi\varphi'_y+C_1\varphi^{n-1}\varphi'_y-C_2&=0,\end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $C_1=0$ (это соответствует сдвигу по z и переобозначению функции ψ) и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned}w&=A\ln|z|+B_{n-1}z^{n-1}+\dots+B_1z+B_0,\\ f(w)&=AC_2n!(-1)^nz^{-n-1},\\ \psi(y)&=C_2\varphi(y)\int\frac{dy}{[\varphi(y)]^{n+1}}+C_3\varphi(y),\end{aligned}\tag{12}$$

где A, B_m, C_3 — произвольные постоянные, $\varphi(y)$ — произвольная функция.

Первые две формулы в (12) дают параметрическое представление для функции $f(w)$. В частном случае при $B_{n-1}=\dots=B_0=0$ после исключения z приходим к экспоненциальной зависимости

$$f(w)=\alpha e^{\beta w},\qquad \alpha=AC_2n!\,(-1)^n,\quad \beta=-(n+1)/A.$$

В силу (12) соответствующее решение уравнения (9) будет иметь функциональный произвол.

2°. Во втором случае (11) распадается на три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi^{n-1}\varphi'_y &= C_1, \\ \varphi^n\psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y &= C_2, \\ (C_1 z + C_2)w_z^{(n+1)} + C_1 n w_z^{(n)} - f(w) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решения двух первых уравнений имеют вид

$$\varphi = (C_1 nt + C_3)^{1/n}, \quad \psi = C_4(C_1 nt + C_3)^{1/n} - \frac{C_2}{C_1}.$$

Эти формулы вместе с последним уравнением (13) дают автомодельное решение вида (10).

Задачи и упражнения к разд. 5.2.1

Ниже функции f, g, h подлежат определению.

1. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейного уравнения первого порядка:

$w_t = f(w)w_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде

a) $w = w(z)$, $z = \varphi(t)x + \psi(t)$,

b) $w = w(z)$, $z = \varphi(x)t + \psi(x)$.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейного уравнения первого порядка:

$w_t = f(w)w_x^2 + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде

a) $w = w(z)$, $z = \varphi(t)x + \psi(t)$,

b) $w = w(z)$, $z = \varphi(t)x^2 + \psi(t)$.

3. Подробно рассмотреть и проделать все необходимые выкладки в примерах 2–5.

4. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейных уравнений:

a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x$,

b) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x + h(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, где $z = \varphi(t)x + \psi(t)$.

5. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности:

$w_t = [f(w)w_x^n]_x + g(w)$.

Указание. Решение искать в виде $w = w(z)$, где $z = \varphi(t)x + \psi(t)$.

6. Найти решения типа обобщенной бегущей волны нелинейных уравнений третьего порядка:

a) $w_t = f(w)w_{xxx} + g(w)$,

b) $w_t = f(w)w_{xxx} + g(w)w_x$,

c) $w_t = [f(w)w_{xx}]_x + g(w)$,

d) $w_t = [f(w)w_{xx}]_x + g(w)w_x$.

7. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,

b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$,

c) $w_t = aw_{xx} + bxw_x + f(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, где $z = \varphi(t)x^2 + \psi(t)$.

Литература к разд. 5.2.1: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998, 2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

5.2.2. Решение путем сведения к уравнениям с квадратичной нелинейностью

В ряде случаев поиск решения в виде (1) удается провести в два этапа. Сначала ищется преобразование, сводящее исходное уравнение к уравнению с квадратичной (иногда степенно́й) нелинейностью. Затем решение полученного уравнения ищется методами, описанными в разд. 4.3–4.6.

Уравнения с квадратичной нелинейностью иногда удается получить с помощью подстановок вида $w = F(z)$. Наиболее распространенные подстановки имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&w = z^\lambda && \text{(для уравнений со степенной нелинейностью)},\\
&w = \lambda \ln z && \text{(для уравнений с экспоненциальной нелинейностью)},\\
&w = e^{\lambda z} && \text{(для уравнений с логарифмической нелинейностью)},
\end{aligned}
$$

где λ — постоянная, подлежащая определению. Указанный подход эквивалентен априорному заданию вида функции $F(z)$ в выражении (1).

Пример 9. Нелинейное уравнение теплопроводности с источником логарифмического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t) w \ln w$$

заменой $w = e^z$ сводится к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + f(t)z,$$

которое допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t),$$

где $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$, а функции $\psi_k(t)$ описываются соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Много нелинейных уравнений различного типа, сводящихся с помощью подходящих преобразований к уравнениям с квадратичной нелинейностью, описано в цитируемой ниже литературе.

Задачи и упражнения к разд. 5.2.2

1. Найти решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности со степенно́й нелинейностью:

a) $w_t = (w^k w_x)_x + aw^{1-k}$,

b) $w_t = (w^k w_x)_x + aw + bw^{1-k}$,

c) $w_t = (w^k w_x)_x + aw^{1+k} + b + cw^{1-k}$.

Указание. Рассматриваемые уравнения заменой $u = w^k$ свести к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности с логарифмической нелинейностью:

a) $w_t = w_{xx} + aw \ln w + b$,

b) $w_t = w_{xx} + aw \ln^2 w$,

c) $w_t = w_{xx} + aw \ln^2 w + bw \ln w + cw$.

Указание. Рассматриваемые уравнения заменой $w = e^u$ свести к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

3. Найти решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности с экспоненциальной нелинейностью:

a) $w_t = (e^{\lambda w} w_x)_x + a$,

b) $w_t = (e^{\lambda w} w_x)_x + a + be^{-\lambda w}$,

c) $w_t = (e^{\lambda w} w_x)_x + ae^{\lambda w} + b + ce^{-\lambda w}$.

Указание. Рассматриваемые уравнения заменой $u = e^{\lambda w}$ свести к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

Литература к разд. 5.2.2: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989, 1994), V. A. Galaktionov (1995), V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov, S. R. Svirshchevskii (1995), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

5.3. Метод дифференцирования

5.3.1. Основные идеи метода. Редукция к уравнению стандартного вида

В общем случае подстановка выражения (1) в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными приводит к функционально-дифференциальному уравнению с тремя аргументами (первые два аргумента — x и y — обычные, а третий аргумент — z — сложный). Во многих случаях полученное уравнение методом дифференцирования удается свести к функционально-дифференциальному уравнению стандартного вида с двумя аргументами (исключается переменная x или y). Для решения уравнения с двумя аргументами используются методы, описанные в разд. 4.3–4.6.

5.3.2. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных

Рассмотрим конкретные примеры использования метода дифференцирования для построения точных решений нелинейных уравнений с функциональным разделением переменных.

Пример 10. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\mathcal{F}(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big]. \tag{14}$$

Ищем точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{15}$$

Подставим (15) в (14). После деления на w'_z получим функционально-дифференциальное уравнение с тремя переменными

$$\psi'_t = \varphi''_{xx}\mathcal{F}(w) + (\varphi'_x)^2 H(z), \tag{16}$$

где

$$H(z) = \mathcal{F}(w)\frac{w''_{zz}}{w'_z} + \mathcal{F}'_z(w), \qquad w = w(z). \tag{17}$$

Дифференцируя (16) по x, имеем

$$\varphi'''_{xxx}\mathcal{F}(w) + \varphi'_x\varphi''_{xx}[\mathcal{F}'_z(w) + 2H(z)] + (\varphi'_x)^3 H'_z = 0. \tag{18}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными можно рассматривать как функциональное уравнение (58) из разд. 4.5, которое имеет два различных решения. Поэтому надо рассмотреть два случая.

Случай 1. Решения функционально-дифференциального уравнения (18) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\mathcal{F}'_z + 2H = 2A_1\mathcal{F}, \quad H'_z = A_2\mathcal{F},\\ \varphi'''_{xxx} + 2A_1\varphi'_x\varphi''_{xx} + A_2(\varphi'_x)^3 = 0,\end{gathered} \tag{19}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Первые два уравнения (19) линейны и не зависят от третьего уравнения. Их общее решение имеет вид

$$\mathcal{F} = \begin{cases} e^{A_1 z}(B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz}) & \text{при } A_1^2 > 2A_2,\\ e^{A_1 z}(B_1 + B_2 z) & \text{при } A_1^2 = 2A_2,\\ e^{A_1 z}[B_1\sin(kz) + B_2\cos(kz)] & \text{при } A_1^2 < 2A_2,\end{cases} \quad H = A_1\mathcal{F} - \tfrac{1}{2}\mathcal{F}'_z, \quad k = \sqrt{|A_1^2 - 2A_2|}. \tag{20}$$

Подставим выражение для H из (20) в (17). Получим дифференциальное уравнение для определения функции $w = w(z)$. В результате интегрирования имеем

$$w = C_1\int e^{A_1 z}|\mathcal{F}(z)|^{-3/2}dz + C_2, \tag{21}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Формула (20) для $\mathcal{F}$ вместе с выражением (21) задают зависимость $\mathcal{F}=\mathcal{F}(w)$ в параметрической форме.

Рассмотрим подробнее случай $A_2=0$ и $A_1\neq 0$ $(k=|A_1|)$. Из формул (20) и (21) получим

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(z)=B_1e^{2A_1z}+B_2, \quad H=A_1B_2,\\ &w(z)=C_3(B_1+B_2e^{-2A_1z})^{-1/2}+C_2 \quad (C_1=A_1B_2C_3).\end{aligned} \tag{22}$$

Исключая z, имеем

$$\mathcal{F}(w)=\frac{B_2C_3^2}{C_3^2-B_1w^2}. \tag{23}$$

Первый интеграл последнего уравнения (19) при $A_2=0$ имеет вид $\varphi''_{xx}+A_1(\varphi'_x)^2=\text{const}$, а его общее решение описывается формулами

$$\begin{aligned}&\varphi(x)=-\frac{1}{2A_1}\ln\left[\frac{D_2}{D_1}\,\frac{1}{\operatorname{sh}^2\bigl(A_1\sqrt{D_2}\,x+D_3\bigr)}\right] &&\text{при}\quad D_1>0,\quad D_2>0;\\ &\varphi(x)=-\frac{1}{2A_1}\ln\left[-\frac{D_2}{D_1}\,\frac{1}{\cos^2\bigl(A_1\sqrt{-D_2}\,x+D_3\bigr)}\right] &&\text{при}\quad D_1>0,\quad D_2<0;\\ &\varphi(x)=-\frac{1}{2A_1}\ln\left[-\frac{D_2}{D_1}\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2\bigl(A_1\sqrt{D_2}\,x+D_3\bigr)}\right] &&\text{при}\quad D_1<0,\quad D_2>0,\end{aligned} \tag{24}$$

где D_1, D_2, D_3 — постоянные интегрирования. Во всех трех случаях выполняются соотношения

$$(\varphi'_x)=D_1e^{-2A_1\varphi}+D_2, \qquad \varphi''_{xx}=-A_1D_1e^{-2A_1\varphi}. \tag{25}$$

Подставим выражения (22) и (25) в исходное функционально-дифференциальное уравнение (16). Учитывая вид переменной z (15), получим уравнение для функции $\psi=\psi(t)$:

$$\psi'_t=-A_1B_1D_1e^{2A_1\psi}+A_1B_2D_2.$$

Интегрируя, находим решение

$$\psi(t)=\frac{1}{2A_1}\ln\frac{B_2D_2}{D_4\exp(-2A_1^2B_2D_2t)+B_1D_1}, \tag{26}$$

где D_4 — произвольная постоянная.

Формулы (15), (22) (для w), (24), (26) определяют три решения нелинейного уравнения (14) с функцией $\mathcal{F}(w)$ вида (23) [напомним, что эти решения соответствуют частному случаю $A_2=0$ в (20) и (21)].

Случай 2. Решения функционально-дифференциального уравнения (18) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\varphi'''_{xxx}=A_1(\varphi'_x)^3, \quad \varphi'_x\varphi''_{xx}=A_2(\varphi'_x)^3,\\ &A_1\mathcal{F}+A_2(\mathcal{F}'_z+2H)+H'_z=0.\end{aligned} \tag{27}$$

Первые два уравнения (27) совместны в двух случаях:

$$\begin{aligned}&A_1=A_2=0 &&\Longrightarrow\quad \varphi(x)=B_1x+B_2,\\ &A_1=2A_2^2 &&\Longrightarrow\quad \varphi(x)=-\frac{1}{A_2}\ln|B_1x+B_2|.\end{aligned} \tag{28}$$

Первое решение в (28) в конечном итоге приводит к решению уравнения (14) типа бегущей волны $w=w(B_1x+B_2t)$, а второе решение — к автомодельному решению вида $w=\widetilde{w}(x^2/t)$. В этих случаях функция $\mathcal{F}(w)$ в уравнении (14) произвольна.

Замечание. Более общее нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{F}(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\mathcal{G}(w)$$

также имеет решение вида (15). Для искомых функций $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ приходим к функционально-дифференциальному уравнению с тремя независимыми переменными

$$\psi'_t=\varphi''_{xx}\mathcal{F}(w)+(\varphi'_x)^2H(z)+\mathcal{G}(w)/w'_z,$$

где функция $H(z)$ определяется по формуле (17). Дифференцируя последнее равенство по x, получим

$$\varphi'''_{xxx}\mathcal{F}(w) + \varphi'_x\varphi''_{xx}[\mathcal{F}'_z(w) + 2H(z)] + (\varphi'_x)^3 H'_z + \varphi'_x[\mathcal{G}(w)/w'_z]'_z = 0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными можно трактовать как билинейное функциональное уравнение (60) из разд. 4.5 с $\Phi_1 = \varphi'''_{xxx}$, $\Phi_2 = \varphi'_x\varphi''_{xx}$, $\Phi_3 = (\varphi'_x)^3$, $\Phi_4 = \varphi'_x$.

Пример 11. Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{F}(w). \tag{29}$$

Ищем точные решения в виде

$$w = w(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{30}$$

Подставив выражение (30) в (29), получим

$$\psi''_{tt} - \varphi''_{xx} + \bigl[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\bigr]\, g(z) = h(z), \tag{31}$$

где

$$g(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad h(z) = \mathcal{F}\bigl(w(z)\bigr)/w'_z. \tag{32}$$

Продифференцировав уравнение (31) сначала по t, а затем по x и разделив на $\psi'_t\varphi'_x$, имеем

$$2(\psi''_{tt} - \varphi''_{xx})\, g'_z + \bigl[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\bigr]\, g''_{zz} = h''_{zz}.$$

Исключая $\psi''_{tt} - \varphi''_{xx}$ из этого уравнения с помощью (31), получим

$$\bigl[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\bigr](g''_{zz} - 2gg'_z) = h''_{zz} - 2g'_z h. \tag{33}$$

Это равенство может выполняться только в двух случаях:

$$\begin{aligned} &1) \quad g''_{zz} - 2gg'_z = 0, \quad h''_{zz} - 2g'_z h = 0;\\ &2) \quad (\psi'_t)^2 = A\psi + B, \quad (\varphi'_x)^2 = -A\varphi + B - C, \quad h''_{zz} - 2g'_z h = (Az + C)(g''_{zz} - 2gg'_z), \end{aligned} \tag{34}$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай 1. Первые два уравнения (34) позволяют найти $g(z)$ и $h(z)$. Интегрируя, из первого уравнения имеем $g'_z = g^2 + \mathrm{const}$. Интегрируя далее, получим

$$g = k, \tag{35a}$$
$$g = -1/(z + C_1), \tag{35b}$$
$$g = -k\,\mathrm{th}(kz + C_1), \tag{35c}$$
$$g = -k\,\mathrm{cth}(kz + C_1), \tag{35d}$$
$$g = k\,\mathrm{tg}(kz + C_1), \tag{35e}$$

где C_1 и k — произвольные постоянные.

Второе уравнение (34) имеет частное решение $h = g(z)$. Поэтому его общее решение определяется по формуле (В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*)

$$h = C_2 g(z) + C_3 g(z) \int \frac{dz}{g^2(z)}, \tag{36}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Из соотношений (32) определяются функции $w(z)$ и $\mathcal{F}(w)$ в виде

$$w(z) = B_1 \int G(z)\, dz + B_2, \quad \mathcal{F}(w) = B_1 h(z) G(z), \quad \text{где} \quad G(z) = \exp\biggl[\int g(z)\, dz\biggr], \tag{37}$$

B_1 и B_2 — произвольные постоянные (функция $\mathcal{F}$ задана в параметрической форме).

Исследуем подробнее случай (35b). Согласно (36) находим

$$h = A_1(z + C_1)^2 + \frac{A_2}{z + C_1}, \tag{38}$$

где $A_1 = -C_3/3$, $A_2 = -C_2$ — любые. Подставляя выражения (35b) и (38) в (37), получим

$$w = B_1 \ln|z + C_1| + B_2, \quad \mathcal{F} = A_1 B_1 (z + C_1) + \frac{A_2 B_1}{(z + C_1)^2}.$$

ТАБЛИЦА 3

Нелинейные уравнения $w_{tt} - w_{xx} = \mathcal{F}(w)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $w = w(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(t)$. Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma = 1$ при $z > 0$, $\sigma = -1$ при $z < 0$

№	Правая часть уравнения $\mathcal{F}(w)$	Решение $w(z)$	Уравнения для $\psi(t)$ и $\varphi(x)$
1	$aw\ln w + bw$	e^z	$(\psi'_t)^2 = C_1e^{-2\psi} + a\psi - \frac{1}{2}a + b + A$, $(\varphi'_x)^2 = C_2e^{-2\varphi} - a\varphi + \frac{1}{2}a + A$
2	$ae^w + be^{-2w}$	$\ln\lvert z\rvert$	$(\psi'_t)^2 = 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2$, $(\varphi'_x)^2 = -2a\varphi^3 + A\varphi^2 - C_1\varphi + C_2 + b$
3	$a\sin w + b\Bigl(\sin w \ln\operatorname{tg}\dfrac{w}{4} + 2\sin\dfrac{w}{4}\Bigr)$	$4\operatorname{arctg} e^z$	$(\psi'_t)^2 = C_1e^{2\psi} + C_2e^{-2\psi} + b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = -C_2e^{2\varphi} - C_1e^{-2\varphi} - b\varphi + A$
4	$a\operatorname{sh} w + b\Bigl(\operatorname{sh} w \ln\operatorname{th}\dfrac{w}{4} + 2\operatorname{sh}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi'_t)^2 = C_1e^{2\psi} + C_2e^{-2\psi} - \sigma b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = C_2e^{2\varphi} + C_1e^{-2\varphi} + \sigma b\varphi + A$
5	$a\operatorname{sh} w + 2b\Bigl(\operatorname{sh} w \operatorname{arctg} e^{w/2} + \operatorname{ch}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi'_t)^2 = C_1\sin 2\psi + C_2\cos 2\psi + \sigma b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = -C_1\sin 2\varphi + C_2\cos 2\varphi - \sigma b\varphi + A$

Исключая из этих соотношений z, находим явный вид правой части уравнения (29):

$$\mathcal{F}(w) = A_1B_1e^u + A_2B_1e^{-2u}, \quad \text{где} \quad u = \frac{w - B_2}{B_1}. \tag{39}$$

Для наглядности далее полагаем $C_1 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 0$ и введем обозначения $A_1 = a$, $A_2 = b$. Таким образом, имеем

$$w(z) = \ln|z|, \quad \mathcal{F}(w) = ae^w + be^{-2w}, \quad g(z) = -1/z, \quad h(z) = az^2 + b/z. \tag{40}$$

Осталось определить функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$. Подставим выражения (40) в функционально-дифференциальное уравнение (31). Учитывая зависимость (30), после элементарных преобразований получим

$$[\psi''_{tt}\psi - (\psi'_t)^2 - a\psi^3 - b] - [\varphi''_{xx}\varphi - (\varphi'_x)^2 + a\varphi^3] + (\psi''_{tt} - 3a\psi^2)\varphi - \psi(\varphi''_{xx} + 3a\varphi^2) = 0. \tag{41}$$

Дифференцируя (41) по t и x, приходим к уравнению с разделяющимися переменными*

$$(\psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t)\varphi'_x - (\varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x)\psi'_t = 0,$$

решение которого описывается автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t = A\psi'_t,$$
$$\varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x = A\varphi'_x,$$

где A — константа разделения. Каждое из этих уравнений можно два раза проинтегрировать:

$$\begin{aligned}(\psi'_t)^2 &= 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2,\\ (\varphi'_x)^2 &= -2a\varphi^3 + A\varphi^2 + C_3\varphi + C_4,\end{aligned} \tag{42}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Исключая с помощью (42) производные из уравнения (41), находим связи между константами: $C_3 = -C_1$, $C_4 = C_2 + b$. Таким образом, функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ описываются автономными уравнениями первого порядка с кубической нелинейностью

$$(\psi'_t)^2 = 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = -2a\varphi^3 + A\varphi^2 - C_1\varphi + C_2 + b.$$

Решения этих уравнений выражаются через эллиптические функции.

Для остальных случаев в (35) исследование проводится аналогичным образом. Результаты анализа для случаев (35a)–(35e) сведены в итоговой табл. 3.

---

* Для решения уравнения (41) проще всего использовать результаты решения функционального уравнения (60) из разд. 4.5 [см. формулы (61)–(62)].

ТАБЛИЦА 4
Нелинейные уравнения $w_{xx} + w_{yy} = \mathcal{F}(w)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $w = w(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$.
Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma = 1$ при $z > 0$, $\sigma = -1$ при $z < 0$

№	Правая часть уравнения $\Phi(w)$	Решение $w(z)$	Уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(y)$
1	$aw \ln w + bw$	e^z	$(\varphi'_x)^2 = C_1 e^{-2\varphi} + a\varphi - \frac{1}{2}a + b + A$, $(\psi'_y)^2 = C_2 e^{-2\psi} + a\psi - \frac{1}{2}a - A$
2	$ae^w + be^{-2w}$	$\ln\lvert z\rvert$	$(\varphi'_x)^2 = 2a\varphi^3 + A\varphi^2 + C_1\varphi + C_2$, $(\psi'_y)^2 = 2a\psi^3 - A\psi^2 + C_1\psi - C_2 - b$
3	$a\sin w + b\Bigl(\sin w \ln \operatorname{tg}\dfrac{w}{4} + 2\sin\dfrac{w}{4}\Bigr)$	$4\operatorname{arctg} e^z$	$(\varphi'_x)^2 = C_1 e^{2\varphi} + C_2 e^{-2\varphi} + b\varphi + a + A$, $(\psi'_y)^2 = C_2 e^{2\psi} + C_1 e^{-2\psi} + b\psi - A$
4	$a \operatorname{sh} w + b\Bigl(\operatorname{sh} w \ln \operatorname{th}\dfrac{w}{4} + 2\operatorname{sh}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\varphi'_x)^2 = C_1 e^{2\varphi} + C_2 e^{-2\varphi} - \sigma b\varphi + a + A$, $(\psi'_y)^2 = -C_2 e^{2\psi} - C_1 e^{-2\psi} - \sigma b\psi - A$
5	$a \operatorname{sh} w + 2b\Bigl(\operatorname{sh} w \operatorname{arctg} e^{w/2} + \operatorname{ch}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\varphi'_x)^2 = C_1 \sin 2\varphi + C_2 \cos 2\varphi + \sigma b\varphi + a + A$, $(\psi'_y)^2 = C_1 \sin 2\psi - C_2 \cos 2\psi + \sigma b\psi - A$

Случай 2. Интегрируя первые два уравнения (34) (для второго случая), имеем два решения:

$$
\begin{aligned}
&\psi = \pm\sqrt{B}\,t + D_1, && \varphi = \pm\sqrt{B-C}\,t + D_2 && \text{при} \quad A = 0;\\
&\psi = \frac{1}{4A}(At + D_1)^2 - \frac{B}{A}, && \varphi = -\frac{1}{4A}(Ax + D_2)^2 + \frac{B-C}{A} && \text{при} \quad A \neq 0;
\end{aligned}
\tag{43}
$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные. В обоих случаях функция $\mathcal{F}(w)$ в уравнении (29) является произвольной. Первое решение (43) соответствует решению типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$, а второе приводит к решению вида $w = w(x^2 - t^2)$.

Пример 12. Нелинейное уравнение теплопроводности (диффузии)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \mathcal{F}(w)$$

исследуется точно так же, как и нелинейное уравнение Клейна — Гордона (см. пример 11). Основные результаты приведены в итоговой табл. 4 [опущены решение типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$ и решение вида $w = w(x^2 + y^2)$, которые имеются для любой $\mathcal{F}(w)$].

Задачи и упражнения к разд. 5.3

1. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:
a) $w_t = f(w)w_x + g(w)$,
b) $w_t = f(w)w_x^2 + g(w)$,
c) $w_t^2 = f(w)w_x^2 + g(w)$.
Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:
a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,
b) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x$.
Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$ (для первого уравнения см. также замечание в конце примера 10).

3. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:
a) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x$,
b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$.
Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

4. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений параболического типа:

a) $w_t = [f(w)w_x^n]_x$,

b) $w_t = [f(w)w_x^n]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

5. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений гиперболического типа:

a) $w_{xy} = f(w)$,

b) $w_{xy} = w_x w_y f(w)$,

c) $w_{xy} = w_x^n f(w)$,

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

Литература к разд. 5.3: A. M. Grundland, E. Infeld (1992), J. Miller (Jr.), L. A. Rubel (1993), R. Z. Zhdanov (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), P. W. Doyle, P. J. Vassiliou (1998), P. G. Estévez, C. Qu, S. Zhang (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

5.4. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению с двумя переменными

5.4.1. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению стандартного вида

Общая процедура построения точных решений с функциональным разделением переменных, основанная на методе расщепления, состоит из нескольких этапов, кратко описанных ниже.

1°. Выражение (1) подставляется в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными. В результате получается функционально-дифференциальное уравнение с тремя аргументами (первые два аргумента — x и y — обычные, а третий аргумент — z — сложный).

2°. Функционально-дифференциальное уравнение с помощью элементарных дифференциальных подстановок (основанных на выделении величин, содержащих искомые функции и их производные одного аргумента) сводится к чисто функциональному уравнению с тремя аргументами x, y, z.

3°. Функциональное уравнение с тремя аргументами методом дифференцирования сводится к функциональному уравнению стандартного вида с двумя аргументами (исключается переменная x или y), которое рассматривалось в разд. 4.2.

4°. Строится решение функционального уравнения с двумя аргументами из п. 3° (используются формулы, приведенные в разд. 4.5).

5°. Полученное в п. 4° решение вместе с использованными в п. 2° дифференциальными подстановками образует систему (обычно переопределенную) обыкновенных дифференциальных уравнений. Строится решение этой системы.

6°. Решение системы из п. 5° подставляется в исходное функционально-дифференциальное уравнение из п. 1°. В результате определяются связи между постоянными интегрирования и находятся все искомые величины.

7°. Отдельно рассматриваются возможные вырожденные случаи (возникающие при нарушении использованных при решении предположений).

Замечание. Наиболее сложной является третья стадия, которую не всегда удается реализовать.

Метод расщепления сводит решение функционально-дифференциального уравнения с тремя аргументами к решению чисто функционального уравнения с тремя аргументами (путем его сведения к стандартному функциональному уравнению с двумя аргументами) и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. исходная задача распадается на несколько более простых задач. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных методом расщепления рассмотрены в разд. 5.5.

5.4.2. Функциональные уравнения с тремя аргументами специального вида

Подстановка выражения

$$w = F(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(y)$$

в нелинейные уравнения с частными производными во многих случаях приводит к функционально-дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x)\Psi_1(y,z) + \Phi_2(x)\Psi_2(y,z) + \cdots + \Phi_k(x)\Psi_k(y,z) + \\ &\qquad + \Psi_{k+1}(y,z) + \Psi_{k+2}(y,z) + \cdots + \Psi_n(y,z) = 0, \end{aligned} \tag{44}$$

где функционалы $\Phi_j(x)$ и $\Psi_j(y,z)$ зависят соответственно от переменных x и y, z:

$$\Phi_j(x) \equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi, \varphi'_x, \varphi''_{xx}\bigr), \quad \Psi_j(y,z) \equiv \Psi_j\bigl(y, \psi, \psi'_y, \psi''_{yy}, F, F'_z, F''_{zz}\bigr). \tag{45}$$

(Данные выражения соответствуют уравнению второго порядка.).

Решение уравнения (44) целесообразно искать методом расщепления. На первом этапе будем рассматривать (44) как чисто функциональное уравнение, без учета зависимостей (45). Предположим, что $\Psi_1 \not\equiv 0$. Поделим уравнение (44) на Ψ_1 и продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов, содержащих функции Φ_m:

$$\Phi_2(x)\Psi_2^{(2)}(y,z) + \cdots + \Phi_k(x)\Psi_k^{(2)}(y,z) + \Psi_{k+1}^{(2)}(y,z) + \cdots + \Psi_n^{(2)}(y,z) = 0, \tag{46}$$

где $\Psi_m^{(2)} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\Psi_m}{\Psi_1}\right) + \psi'_y \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\Psi_m}{\Psi_1}\right)$. Продолжая аналогичную процедуру, в итоге можно получить уравнение, не зависящее явно от x:

$$\Psi_{k+1}^{(k+1)}(y,z) + \cdots + \Psi_n^{(k+1)}(y,z) = 0, \tag{47}$$

где $\Psi_m^{(k+1)} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\Psi_m^{(k)}}{\Psi_k^{(k)}}\right) + \psi'_y \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\Psi_m^{(k)}}{\Psi_k^{(k)}}\right)$.

Уравнение (47) можно рассматривать как уравнение с двумя независимыми переменными y и z. Если $\Psi_m^{(k+1)}(y,z) = Q_m(y)R_m(z)$ для всех $m = k+1, \ldots, n$, то для решения уравнения (47) можно использовать результаты разд. 4.2–4.5.

Литература к разд. 5.4: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

5.5. Решения некоторых нелинейных функциональных уравнений и их приложения в математической физике

В этом разделе исследуются некоторые функциональные уравнения с тремя аргументами, которые чаще всего встречаются при функциональном разделении переменных в нелинейных уравнениях математической физики. Эти результаты использованы для построения точных решений некоторых классов нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн.

5.5.1. Функциональное уравнение $f(x)+g(y)=Q(z)$, где $z=\varphi(x)+\psi(y)$

Здесь одна из двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ задается, а другая ищется; одна из двух функций $g(y)$ и $\psi(y)$ задается, а другая ищется; функция $Q(z)$ ищется*.

Дифференцируя уравнение по x и по y, получим $Q''_{zz}=0$. Поэтому его решение имеет вид

$$f(x)=A\varphi(x)+B,\quad g(y)=A\psi(y)-B+C,\quad Q(z)=Az+C, \tag{48}$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

5.5.2. Функциональное уравнение $f(t)+g(x)+h(x)Q(z)+R(z)=0$, где $z=\varphi(x)+\psi(t)$

Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению с двумя независимыми аргументами

$$g'_x+h'_xQ+h\varphi'_xQ'_z+\varphi'_xR'_z=0. \tag{49}$$

Такие уравнения рассматривались в разд. 4.3–4.6. Поэтому имеют место соотношения [их можно получить после переобозначений из формул (60) и (61), приведенных в разд. 4.5]:

$$\begin{aligned} g'_x&=A_1h\varphi'_x+A_2\varphi'_x,\\ h'_x&=A_3h\varphi'_x+A_4\varphi'_x,\\ Q'_z&=-A_1-A_3Q,\\ R'_z&=-A_2-A_4Q, \end{aligned} \tag{50}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные. Интегрирование системы (50) и подстановка полученных решений в исходное функциональное уравнение дает приведенные ниже результаты.

Случай 1. Решение функционального уравнения, соответствующее значению $A_3=0$ в (50):

$$\begin{aligned} f&=-\tfrac{1}{2}A_1A_4\psi^2+(A_1B_1+A_2+A_4B_3)\psi-B_2-B_1B_3-B_4,\\ g&=\tfrac{1}{2}A_1A_4\varphi^2+(A_1B_1+A_2)\varphi+B_2,\\ h&=A_4\varphi+B_1,\\ Q&=-A_1z+B_3,\\ R&=\tfrac{1}{2}A_1A_4z^2-(A_2+A_4B_3)z+B_4, \end{aligned} \tag{51}$$

где $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(t)$ — произвольные функции, A_k, B_k — произвольные постоянные.

* В подобных уравнениях со сложным аргументом считается, что $\varphi(x)\neq\text{const}$ и $\psi(y)\neq\text{const}$.

Случай 2. Решение функционального уравнения, соответствующее значению $A_3 \neq 0$ в (50):

$$
\begin{aligned}
f &= -B_1 B_3 e^{-A_3\psi} + \Big(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\psi - B_2 - B_4 - \frac{A_1A_4}{A_3^2},\\
g &= \frac{A_1B_1}{A_3} e^{A_3\varphi} + \Big(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\varphi + B_2,\\
h &= B_1 e^{A_3\varphi} - \frac{A_4}{A_3},\\
Q &= B_3 e^{-A_3 z} - \frac{A_1}{A_3},\\
R &= \frac{A_4B_3}{A_3} e^{-A_3 z} + \Big(\frac{A_1A_4}{A_3} - A_2\Big)z + B_4,
\end{aligned}
\tag{52}
$$

где $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, A_k, B_k — произвольные постоянные.

Случай 3. Функциональное уравнение имеет также вырожденное решение

$$f = A_1\psi + B_1, \quad g = A_1\varphi + B_2, \quad h = A_2, \quad R = -A_1 z - A_2 Q - B_1 - B_2, \tag{53a}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $Q = Q(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, и вырожденное решение

$$f = A_1\psi + B_1, \quad g = A_1\varphi + A_2 h + B_2, \quad Q = -A_2, \quad R = -A_1 z - B_1 - B_2, \tag{53b}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $h = h(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Вырожденные решения (53a) и (53b) можно получить из исходного уравнения и его следствия (49) с помощью формул (62) из разд. 4.5.

Пример 13. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathcal{F}(w). \tag{54}$$

Ищем точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{55}$$

Подставим (55) в (54). После деления на w'_z получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w(z))}{w'_z}.$$

Представим его в виде функционального уравнения 5.5.2, где

$$f(t) = -\psi'_t, \quad g(x) = \varphi''_{xx}, \quad h(x) = (\varphi'_x)^2, \quad Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = f(w(z))/w'_z. \tag{56}$$

Используем решения уравнения 5.5.2. Подставив выражения (56) для g и h в (51)–(53), получим переопределенные системы уравнений для определения функции $\varphi = \varphi(x)$.

Случай 1. Система

$$
\begin{aligned}
\varphi''_{xx} &= \tfrac{1}{2} A_1A_4\varphi^2 + (A_1B_1 + A_2)\varphi + B_2,\\
(\varphi'_x)^2 &= A_4\varphi + B_1,
\end{aligned}
$$

полученная из (51) и соответствующая значению $A_3 = 0$ в (50), имеет совместное решение в следующих случаях:

$$
\begin{aligned}
&\varphi = C_1x + C_2 &&\text{при}\quad A_2 = -A_1C_1^2,\ A_4 = B_2 = 0,\ B_1 = C_1^2,\\
&\varphi = \tfrac{1}{4}A_4x^2 + C_1x + C_2 &&\text{при}\quad A_1 = A_2 = 0,\ B_1 = C_1^2 - A_4C_2,\ B_2 = \tfrac{1}{2}A_4,
\end{aligned}
\tag{57}
$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Первое решение (57) при $A_1 \neq 0$ соответствует правой части уравнения (54), которая содержит функцию, обратную к интегралу вероятностей [вид правой части определяется из двух последних соотношений (51) и (56) для Q и R]. Второе решение (57) соответствует правой части уравнения (54) вида $\mathcal{F}(w) = k_1 w \ln w + k_2 w$. В обоих случаях первое соотношение (51) с учетом равенства $f = -\psi'_t$ представляет собой линейное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, решением которого является сумма экспоненциальной функции и константы.

Случай 2. Система

$$\varphi''_{xx} = \frac{A_1 B_1}{A_3} e^{A_3\varphi} + \Big(A_2 - \frac{A_1 A_4}{A_3}\Big)\varphi + B_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = B_1 e^{A_3\varphi} - \frac{A_4}{A_3},$$

полученная из (52) и соответствующая $A_3 \neq 0$ в (50), имеет совместное решение в следующих случаях:

$\varphi = \pm\sqrt{-A_4/A_3}\, x + C_1$ при $A_2 = A_1A_4/A_3,\ B_1 = B_2 = 0,$

$\varphi = -\dfrac{2}{A_3}\ln|x| + C_1$ при $A_1 = \frac12 A_3^2,\ A_2 = A_4 = B_2 = 0,\ B_1 = 4A_3^{-2}e^{-A_3C_1},$

$\varphi = -\dfrac{2}{A_3}\ln\big|\cos\big(\frac12\sqrt{A_3A_4}\,x + C_1\big)\big| + C_2$ при $A_1 = \frac12 A_3^2,\ A_2 = \frac12 A_3A_4,\ B_2 = 0,\ A_3A_4 > 0,$

$\varphi = -\dfrac{2}{A_3}\ln\big|\mathrm{sh}\big(\frac12\sqrt{-A_3A_4}\,x + C_1\big)\big| + C_2$ при $A_1 = \frac12 A_3^2,\ A_2 = \frac12 A_3A_4,\ B_2 = 0,\ A_3A_4 < 0,$

$\varphi = -\dfrac{2}{A_3}\ln\big|\mathrm{ch}\big(\frac12\sqrt{-A_3A_4}\,x + C_1\big)\big| + C_2$ при $A_1 = \frac12 A_3^2,\ A_2 = \frac12 A_3A_4,\ B_2 = 0,\ A_3A_4 < 0,$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Эти решения соответствуют правой части уравнения (54), задаваемой в параметрической форме.

Случай 3. Вырожденным решениям функционального уравнения (53a) и (53b) соответствуют решения нелинейного уравнения теплопроводности (54) типа бегущей волны [функция $\mathcal{F}(w)$ — произвольна] и решения линейного уравнения (54) с источником вида $\mathcal{F}(w) = k_1 w + k_2$.

Замечание. Можно искать более сложные решения уравнения (54) с функциональным разделением вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(\xi) + \psi(t), \quad \xi = x + at.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (54) также приводит к функциональному уравнению 5.5.2, в котором x надо переобозначить на ξ и положить

$$f(t) = -\psi'_t, \quad g(\xi) = \varphi''_{\xi\xi} - a\varphi'_\xi, \quad h(\xi) = (\varphi'_\xi)^2, \quad Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = f(w(z))/w'_z.$$

Дальнейшая процедура построения решения проводится так же, как в примере 13.

Пример 14. Аналогичным образом рассматривается более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \mathcal{F}(w), \tag{58}$$

которое встречается в задачах конвективного тепло- и массообмена ($a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$), в задачах теплопереноса в анизотропных средах ($b = a'_x$), в пространственных задачах теплопроводности с осевой и центральной симметрией ($a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}/x$).

Поиск точных решений уравнения (58) вида (55) приводит к функциональному уравнению 5.5.2, где

$$f(t) = -\psi'_t, \quad g(x) = a(x)\varphi''_{xx} + b(x)\varphi'_x(x),$$
$$h(x) = a(x)(\varphi'_x)^2, \quad Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = f(w(z))/w'_z.$$

Подставляя эти выражения в (51)–(53), получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых величин.

Замечание. В примерах 13–14 построение точных решений различных уравнений математической физики сводилось к одному и тому же функциональному уравнению. Это наглядно демонстрирует полезность выделения и независимого рассмотрения отдельных функциональных уравнений (и целесообразность разработки методов решения функциональных уравнений со сложным аргументом).

5.5.3. Функциональное уравнение $f(t)+g(x)Q(z)+h(x)R(z)=0$, где $z=\varphi(x)+\psi(t)$

Дифференцируем уравнение по x. Получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными x и z:

$$g'_x Q + g\varphi'_x Q'_z + h'_x R + h\varphi'_x R'_z = 0, \tag{59}$$

которое с точностью до очевидных переобозначений совпадает с уравнением (60) из разд. 4.5.

Невырожденный случай. Решение уравнения (59) можно получить с помощью формул (61) из разд. 4.5. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} g'_x &= (A_1 g + A_2 h)\varphi'_x,\\ h'_x &= (A_3 g + A_4 h)\varphi'_x,\\ Q'_z &= -A_1 Q - A_3 R,\\ R'_z &= -A_2 Q - A_4 R, \end{aligned} \tag{60}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Решение системы (60) имеет вид

$$\begin{aligned} g(x) &= A_2 B_1 e^{k_1\varphi} + A_2 B_2 e^{k_2\varphi},\\ h(x) &= (k_1 - A_1) B_1 e^{k_1\varphi} + (k_2 - A_1) B_2 e^{k_2\varphi},\\ Q(z) &= A_3 B_3 e^{-k_1 z} + A_3 B_4 e^{-k_2 z},\\ R(z) &= (k_1 - A_1) B_3 e^{-k_1 z} + (k_2 - A_1) B_4 e^{-k_2 z}, \end{aligned} \tag{61}$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 — произвольные постоянные, а k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$(k - A_1)(k - A_4) - A_2 A_3 = 0. \tag{62}$$

В вырожденном случае при $k_1 = k_2$ члены $e^{k_2\varphi}$ и $e^{-k_2 z}$ в (61) надо заменить соответственно на $\varphi e^{k_1\varphi}$ и $ze^{-k_1 z}$. В случае чисто мнимых или комплексных корней уравнения (62) в решении (61) надо выделить действительную (или мнимую) часть.

Подставив (61) в исходное функциональное уравнение 5.5.3, получим условия, которым должны удовлетворять свободные коэффициенты, и найдем функцию $f(t)$:

$$\begin{aligned} &B_2 = B_4 = 0 \implies f(t) = [A_2A_3 + (k_1 - A_1)^2] B_1 B_3 e^{-k_1\psi},\\ &B_1 = B_3 = 0 \implies f(t) = [A_2A_3 + (k_2 - A_1)^2] B_2 B_4 e^{-k_2\psi},\\ &A_1 = 0 \qquad\;\; \implies f(t) = (A_2A_3 + k_1^2) B_1 B_3 e^{-k_1\psi} + (A_2A_3 + k_2^2) B_2 B_4 e^{-k_2\psi}. \end{aligned} \tag{63}$$

В решения (61), (63) входят произвольные функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$.

Вырожденный случай. Функциональное уравнение 5.5.3 имеет также вырожденное решение

$$f = B_1 B_2 e^{A_1\psi}, \quad g = A_2 B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad h = B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad R = -B_2 e^{A_1 z} - A_2 Q,$$

где $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(t)$, $Q=Q(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, и вырожденное решение

$$f=B_1B_2e^{A_1\psi},\quad h=-B_1e^{-A_1\varphi}-A_2g,\quad Q=A_2B_2e^{A_1z},\quad R=B_2e^{A_1z},$$

где $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(t)$, $g=g(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Вырожденные решения можно получить из исходного уравнения и его следствия (59) с помощью формул (62) из разд. 4.5.

Пример 15. Для нелинейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\mathcal{F}(w)\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\mathcal{G}(x)$$

поиск точных решений вида (55) приводит к функциональному уравнению 5.5.3, где

$$f(t)=-\psi'_t,\;\; g(x)=(\varphi'_x)^2,\;\; h(x)=\mathcal{G}(x),\;\; Q(z)=\mathcal{F}(w)w'_z,\;\; R(z)=1/w'_z,\;\; w=w(z).$$

Пример 16. Для нелинейного уравнения теплопроводности (14) [см. пример 10 из разд. 5.3.2] поиск точных решений вида $w=w(z)$, $z=\varphi(x)+\psi(t)$ приводит к функционально-дифференциальному уравнению (16), которое приводится к функциональному уравнению 5.5.3, если положить

$$f(t)=-\psi'_t,\quad g(x)=\varphi''_{xx},\quad h(x)=(\varphi'_x)^2,\quad Q(z)=\mathcal{F}(w),\quad R(z)=\frac{[\mathcal{F}(w)w'_z]'_z}{w'_z},\quad w=w(z).$$

5.5.4. Функциональное уравнение $f(x)+g(y)+h(x)P(z)+s(y)Q(z)+R(z)=0$, где $z=\varphi(x)+\psi(y)$

Дифференцируем уравнение по y. Полученное выражение делим на $\psi'_yP'_z$ и дифференцируем по y. В результате приходим к уравнению с двумя аргументами y и z, которое рассматривалось в главе 4 [см. уравнение (21) и его решения (57)].

Пример 17. Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[a(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Big]+\frac{\partial}{\partial y}\Big[b(y)\frac{\partial w}{\partial y}\Big]=\mathcal{F}(w). \tag{64}$$

Поиск точных решений уравнения (64) вида $w=w(z)$, где $z=\varphi(x)+\psi(y)$, приводит к функциональному уравнению 5.5.4, где

$$f_1(x)=a(x)\varphi''_{xx}+a'_x(x)\varphi'_x,\quad f_2(y)=b(y)\psi''_{yy}+b'_y(y)\psi'_y,\quad g_1(x)=a(x)(\varphi'_x)^2,$$
$$g_2(y)=b(y)(\psi'_y)^2,\quad P(z)=Q(z)=w''_{zz}/w'_z,\quad R(z)=-\mathcal{F}(w)/w'_z,\quad w=w(z).$$

Не проводя полного анализа уравнения (64), ограничимся здесь изучением решений с обобщенным разделением переменных, которые существуют при произвольной правой части $\mathcal{F}(w)$.

Сделав замену $z=\zeta^2$, ищем решения уравнения (64) вида

$$w=w(\zeta),\quad \zeta^2=\varphi(x)+\psi(y). \tag{65}$$

Учитывая соотношения $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=\dfrac{\varphi'_x}{2\zeta}$ и $\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}=\dfrac{\psi'_y}{2\zeta}$, из (64) получим

$$\big[(a\varphi'_x)'_x+(b\psi'_y)'_y\big]\frac{w'_\zeta}{2\zeta}+\big[a(\varphi'_x)^2+b(\psi'_y)^2\big]\frac{\zeta w''_{\zeta\zeta}-w'_\zeta}{4\zeta^3}=\mathcal{F}(w),\quad \mathcal{F}(w)=\mathcal{F}\big(w(\zeta)\big). \tag{66}$$

Для разрешимости этого функционального уравнения потребуем, чтобы выражения в квадратных скобках были функциями от ζ:

$$(a\varphi'_x)'_x+(b\psi'_y)'_y=M(\zeta),\quad a(\varphi'_x)^2+b(\psi'_y)^2=N(\zeta).$$

Продифференцировав первое из этих равенств по x и по y, приходим к уравнению $(M'_\zeta/\zeta)'_\zeta = 0$, общее решение которого имеет вид $M(\zeta) = C_1\zeta^2 + C_2$. Аналогично находим $N(\zeta) = C_3\zeta^2 + C_4$. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. В итоге получим

$$(a\varphi'_x)'_x + (b\psi'_y)'_y = C_1(\varphi+\psi) + C_2, \quad a(\varphi'_x)^2 + b(\psi'_y)^2 = C_3(\varphi+\psi) + C_4.$$

Разделение переменных приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения функций $\varphi(x)$, $a(x)$, $\psi(y)$, $b(y)$:

$$\begin{aligned} &(a\varphi'_x)'_x - C_1\varphi - C_2 = k_1, \qquad (b\psi'_y)'_y - C_1\psi = -k_1,\\ &a(\varphi'_x)^2 - C_3\varphi - C_4 = k_2, \qquad b(\psi'_y)^2 - C_3\psi = -k_2. \end{aligned}$$

Эта система всегда интегрируется в квадратурах и может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} &(C_3\varphi + C_4 + k_2)\varphi''_{xx} + (C_1\varphi + C_2 + k_1 - C_3)(\varphi'_x)^2 = 0,\\ &(C_3\psi - k_2)\psi''_{yy} + (C_1\psi - k_1 - C_3)(\psi'_y)^2 = 0;\\ &a = (C_3\varphi + C_4 + k_2)(\varphi'_x)^{-2},\\ &b = (C_3\psi - k_2)(\psi'_y)^{-2}, \end{aligned} \qquad (67)$$

где уравнения для функций φ и ψ не зависят от a и b и могут решаться независимо. Не проводя полного исследования системы (67), отметим простой частный случай, когда она интегрируется в явном виде.

При $C_1 = C_2 = C_4 = k_1 = k_2 = 0$, $C_3 = C \neq 0$ имеем

$$a(x) = \alpha e^{\mu x}, \quad b(y) = \beta e^{\nu y}, \quad \varphi(x) = \frac{Ce^{-\mu x}}{\alpha\mu^2}, \quad \psi(y) = \frac{Ce^{-\nu y}}{\beta\nu^2},$$

где α, β, μ, ν — произвольные постоянные. Подставив эти выражения в (66) и учитывая вид переменной ζ (65), получим уравнение для функции $w(\zeta)$:

$$w''_{\zeta\zeta} - \frac{1}{\zeta}w'_\zeta = \frac{4}{C}\mathcal{F}(w).$$

Система (67) имеет также другие решения, приводящие к различным выражениям для функций $a(x)$ и $b(y)$. В табл. 5 указаны случаи, когда эти функции могут быть выражены в явном виде (опущено решение типа бегущей волны, соответствующее $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$). В общем случае решение системы (66) приводит к функциям $a(x)$ и $b(y)$, которые записываются в параметрической форме.

ТАБЛИЦА 5

Решения с обобщенным разделением переменных вида $w = w(\zeta)$, где $\zeta^2 = \varphi(x) + \psi(y)$, для уравнений теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником произвольного вида.

Уравнение теплопроводности	Функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$	Уравнение для $w=w(\zeta)$
$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta y^k\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\frac{Cx^{2-n}}{\alpha(2-n)^2}$, $\psi=\frac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$w''_{\zeta\zeta}+\frac{4-nk}{(2-n)(2-k)}\frac{1}{\zeta}w'_\zeta=\frac{4}{C}\mathcal{F}(w)$
$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha e^{\mu x}\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta e^{\nu y}\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\frac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x}$, $\psi=\frac{C}{\beta\nu^2}e^{-\nu y}$	$w''_{\zeta\zeta}-\frac{1}{\zeta}w'_\zeta=\frac{4}{C}\mathcal{F}(w)$
$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha e^{\mu x}\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta y^k\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\frac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x}$, $\psi=\frac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$w''_{\zeta\zeta}+\frac{k}{2-k}\frac{1}{\zeta}w'_\zeta=\frac{4}{C}\mathcal{F}(w)$
$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha x^2\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta y^2\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\mu\ln\lvert x\rvert$, $\psi=\nu\ln\lvert y\rvert$	Уравнение (66), оба выражения в квадратных скобках — константы
$\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta y^2\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\mu x$, $\psi=\nu\ln\lvert y\rvert$	Уравнение (66), оба выражения в квадратных скобках — константы
Обозначения: C, α, β, μ, ν, n, k — свободные параметры ($C\neq0$, $\mu\neq0$, $\nu\neq0$, $n\neq2$, $k\neq2$)		

Задачи и упражнения к разд. 5.5

1. Решить функциональные уравнения:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y) - af(x)f(y)$,

b) $f(x)g(y) = h(x+y)$,

c) $f(x)g(y) + h(y) = f(x+y)$,

d) $f(x)g(y) = h\big(\varphi(x) + \psi(y)\big)$,

e) $f(x) + g(y) = h\big(\varphi(x)\psi(y)\big)$,

где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — искомые функции.

Указание. Использовать метод дифференцирования и результаты раздела 5.5.

В упражнениях 2–8 функции f и g подлежат определению.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $w_t = f(w)w_x + g(w)$,

b) $w_t = f(w)w_x^n + g(w)$,

c) $w_t^2 = f(w)w_x^n + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z),\ z = \varphi(x) + \psi(t)$.

3. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,

b) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z),\ z = \varphi(x) + \psi(t)$.

4. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = [f(x)w_x]_x + g(w)$,

b) $w_t = aw_{xx} + bx^n w_x + f(w), \quad n = 1,\ 0,\ -1$.

Указание. Эти уравнения являются частными случаями уравнения (58).

5. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x$,

b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z),\ z = \varphi(x) + \psi(t)$.

6. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = [f(w)w_x^n]_x + g(w)$.

b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z),\ z = \varphi(x) + \psi(t)$.

7. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейного волнового уравнения $w_{xt} = f(w)$.

Указание. Решения искать в виде:

$w = w(z),\ z = \varphi(x) + \psi(t)$,

а затем использовать результаты решения функционального уравнения d) из первого упражнения.

8. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейного уравнения третьего порядка:

$w_{xxt} = f(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$. Полученное функционально-дифференциальное уравнение свести к функциональному уравнению 5.5.3.

Литература к разд. 5.5: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996), А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).