Глава 7 книги А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова «Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики» — М.: Физматлит, 2005 (в печати).

7. Классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений

Предварительные замечания. Классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений* с помощью регулярной процедуры позволяет найти:

(i) преобразования, относительно которых уравнение инвариантно (при таких преобразованиях данное уравнение переходит в точно такое же уравнение),

(ii) новые переменные (как независимые, так и зависимые), при переходе к которым уравнение существенно упрощается.

Указанные в пункте (i) преобразования переводят решение уравнения в то же самое или другое решение этого же уравнения. В первом случае мы имеем инвариантное решение, которое можно найти, редуцируя исходное уравнение к новым переменным, число которых меньше, чем исходных. Во втором — неинвариантные решения могут быть «размножены» до семейства решений.

Замечание 1. В определенном смысле классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений можно рассматривать как существенное обобщение метода подобия, описанного в главе 3.

Замечание 2. В разд. 7.1–7.3 дано описание классического метода в нетрадиционном изложении с минимальным использованием специальной («групповой») терминологии. Такой подход облегчает работу с материалом и поэтому предпочтительнее при начальном ознакомлении с предметом. В разд. 7.4 будет дано объяснение происхождения распространенного термина «групповой анализ».

7.1. Однопараметрические преобразования и их локальные свойства

7.1.1. Однопараметрические преобразования. Инфинитезимальный оператор

Будем рассматривать обратимые преобразования вида

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \varphi_1(x,y,w,\varepsilon), & \bar{x}|_{\varepsilon=0} &= x, \\ \bar{y} &= \varphi_2(x,y,w,\varepsilon), & \bar{y}|_{\varepsilon=0} &= y, \\ \bar{w} &= \psi(x,y,w,\varepsilon), & \bar{w}|_{\varepsilon=0} &= w, \end{aligned} \qquad (1)$$

где φ_1, φ_2, ψ — достаточно гладкие функции своих аргументов, ε — вещественный параметр. Считается, что преобразования (1) обладают групповым свойством:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= \varphi_1(\bar{x},\bar{y},\bar{w},\bar{\varepsilon}) = \varphi_1(x,y,w,\varepsilon+\bar{\varepsilon}), \\ \bar{\bar{y}} &= \varphi_2(\bar{x},\bar{y},\bar{w},\bar{\varepsilon}) = \varphi_2(x,y,w,\varepsilon+\bar{\varepsilon}), \\ \bar{\bar{w}} &= \psi(\bar{x},\bar{y},\bar{w},\bar{\varepsilon}) = \psi(x,y,w,\varepsilon+\bar{\varepsilon}), \end{aligned}$$

* Другое название этого метода — классический метод группового анализа дифференциальных уравнений.

т. е. последовательное применение двух преобразований вида (1) с параметрами ε и $\bar{\varepsilon}$ эквивалентно одному преобразованию того же вида с параметром $\varepsilon+\bar{\varepsilon}$.

В частном случае преобразований на плоскости функции φ_1 и φ_2 в (1) не зависят от w и $\psi = w$ (т. е. $\bar{w} = w$).

Разложение соотношений (1) для $\bar{x}$ и $\bar{w}$ в ряд Тейлора по параметру ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$ дает

$$\bar{x} \simeq x + \varepsilon\xi(x,y,w), \quad \bar{y} \simeq y + \varepsilon\eta(x,y,w), \quad \bar{w} \simeq w + \varepsilon\zeta(x,y,w), \tag{2}$$

где

$$\xi(x,y,w) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}, \quad \eta(x,y,w) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}, \quad \zeta(x,y,w) = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Вектор (ξ,η,ζ) является касательным вектором в точке (x,y,w) к кривой, описываемой соотношениями (1).

Линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathrm{X} = \xi(x,y,w)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y,w)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x,y,w)\frac{\partial}{\partial w}, \tag{3}$$

соответствующий бесконечно малому преобразованию (2), называется инфинитезимальным оператором.

Теорема Ли. Пусть известны координаты $\xi(x,y,w)$, $\eta(x,y,w)$, $\zeta(x,y,z)$ инфинитезимального оператора (3). Тогда преобразование (1) можно полностью восстановить путем решения уравнений Ли

$$\frac{d\varphi_1}{d\varepsilon} = \xi(\varphi_1,\varphi_2,\psi), \quad \frac{d\varphi_2}{d\varepsilon} = \eta(\varphi_1,\varphi_2,\psi), \quad \frac{d\psi}{d\varepsilon} = \zeta(\varphi_1,\varphi_2,\psi)$$

с начальными условиями

$$\varphi_1|_{\varepsilon=0} = x, \quad \varphi_2|_{\varepsilon=0} = y, \quad \psi|_{\varepsilon=0} = w.$$

7.1.2. Инвариант оператора. Преобразования на плоскости

Инвариантом преобразования (1) называется функция $I(x,y,w)$, удовлетворяющая условию

$$I(\bar{x},\bar{y},\bar{w}) = I(x,y,w).$$

Разложив по малому параметру ε, разделим полученное выражение на ε, а затем перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате имеем линейное уравнение с частными производными для I:

$$\mathrm{X}I = \xi(x,y,w)\frac{\partial I}{\partial x} + \eta(x,y,w)\frac{\partial I}{\partial y} + \zeta(x,y,w)\frac{\partial I}{\partial w} = 0. \tag{4}$$

Инвариантом оператора (3) называется функция $I(x,y,w)$, удовлетворяющая уравнению (4).

Запишем соответствующую уравнению с частными производными (4) характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см. разд. 14.1.3):

$$\frac{dx}{\xi(x,y,w)} = \frac{dy}{\eta(x,y,w)} = \frac{dw}{\zeta(x,y,w)}. \tag{5}$$

ТАБЛИЦА 6
Однопараметрические преобразования на плоскости

Название	Преобразование	Оператор	Инвариант
Перенос по оси x	$\bar{x}=x+\varepsilon,\ \bar{y}=y$	$\mathrm{X}=\frac{\partial}{\partial x}$	$I_1=y$
Перенос вдоль прямой $ax+by=0$	$\bar{x}=x+b\varepsilon,\ \bar{y}=y-a\varepsilon$	$\mathrm{X}=b\frac{\partial}{\partial x}-a\frac{\partial}{\partial y}$	$I_1=ax+by$
Вращение	$\bar{x}=x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon,$ $\bar{y}=y\cos\varepsilon-x\sin\varepsilon$	$\mathrm{X}=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$	$I_1=x^2+y^2$
Преобразование Лоренца	$\bar{x}=x\,\mathrm{ch}\,\varepsilon+y\,\mathrm{sh}\,\varepsilon,$ $\bar{y}=y\,\mathrm{ch}\,\varepsilon+x\,\mathrm{sh}\,\varepsilon$	$\mathrm{X}=y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$	$I_1=y^2-x^2$
Преобразование Галилея	$\bar{x}=x+\varepsilon y,\ \bar{y}=y$	$\mathrm{X}=y\frac{\partial}{\partial x}$	$I_1=y$
Однородное растяжение	$\bar{x}=xe^{\varepsilon},\ \bar{y}=ye^{\varepsilon}$	$\mathrm{X}=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	$I_1=y/x$
Неоднородное растяжение	$\bar{x}=xe^{a\varepsilon},\ \bar{y}=ye^{b\varepsilon}$	$\mathrm{X}=ax\frac{\partial}{\partial x}+by\frac{\partial}{\partial y}$	$I_1=\lvert y\rvert^a\lvert x\rvert^{-b}$

Пусть функционально независимые интегралы этой системы имеют вид

$$I_1(x,y,w)=C_1, \qquad I_2(x,y,w)=C_2, \tag{6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда общее решение уравнения (4) описывается формулой

$$I=\Psi(I_1,I_2), \tag{7}$$

где $\Psi(I_1,I_2)$ — произвольная функция двух аргументов, $I_1=I_1(x,y,w)$ и $I_2=I_2(x,y,w)$.

Сказанное означает, что оператор (3) имеет два функционально независимых инварианта I_1 и I_2 и любая функция $\Xi(x,y,w)$, инвариантная относительно оператора (3), может быть записана в виде функции этих инвариантов.

В табл. 6 указаны наиболее распространенные преобразования на плоскости и соответствующие им операторы (3) и инварианты (указывается только один инвариант, так как второй инвариант везде один и тот же: $I_2=w$).

7.1.3. Формулы для вычисления производных. Координаты первого и второго продолжений

Первые производные при переходе к новым переменным (1) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\simeq\frac{\partial w}{\partial x}+\varepsilon\zeta_1, \quad \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\simeq\frac{\partial w}{\partial y}+\varepsilon\zeta_2. \tag{8}$$

Здесь координаты первого продолжения ζ_1 и ζ_2 определяются по формулам

$$\begin{aligned}\zeta_1&=D_x(\zeta)-w_xD_x(\xi)-w_yD_x(\eta)=\zeta_x+(\zeta_w-\xi_x)w_x-\eta_xw_y-\xi_ww_x^2-\eta_ww_xw_y,\\ \zeta_2&=D_y(\zeta)-w_xD_y(\xi)-w_yD_y(\eta)=\zeta_y-\xi_yw_x+(\zeta_w-\eta_y)w_y-\xi_ww_xw_y-\eta_ww_y^2,\end{aligned} \tag{9}$$

где D_x и D_y — операторы полного дифференцирования по переменным x и y:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + w_x \frac{\partial}{\partial w} + w_{xx} \frac{\partial}{\partial w_x} + w_{xy} \frac{\partial}{\partial w_y} + \cdots, \\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + w_y \frac{\partial}{\partial w} + w_{xy} \frac{\partial}{\partial w_y} + w_{yy} \frac{\partial}{\partial w_y} + \cdots. \end{aligned} \tag{10}$$

Покажем справедливость первой формулы (8). Очевидно, что

$$\bar{w}_x = \bar{w}_{\bar{x}} \bar{x}_x + \bar{w}_{\bar{y}} \bar{y}_x, \quad \bar{w}_y = \bar{w}_{\bar{x}} \bar{x}_y + \bar{w}_{\bar{y}} \bar{y}_y. \tag{11}$$

Дифференцируя выражения (2) по x и y и отбрасывая члены второго и более высоких порядков по ε, имеем

$$\begin{aligned} &\bar{x}_x = 1 + \varepsilon D_x \xi, && \bar{x}_y = \varepsilon D_y \xi, \\ &\bar{y}_x = \varepsilon D_x \eta, && \bar{y}_y = 1 + \varepsilon D_y \eta, \\ &\bar{w}_x = w_x + \varepsilon D_x \zeta, && \bar{w}_y = w_y + \varepsilon D_y \zeta. \end{aligned} \tag{12}$$

Для вычисления $\bar{w}_{\bar{x}}$ исключим $\bar{w}_{\bar{y}}$ из равенств (11), а затем заменим производные $\bar{x}_x$, $\bar{x}_y$, $\bar{y}_x$, $\bar{y}_y$, $\bar{w}_x$, $\bar{w}_y$ соответствующими выражениями из (12). В результате получим

$$\bar{w}_{\bar{x}} = \frac{w_x + \varepsilon(D_x\zeta + w_x D_y \eta - w_y D_x \eta) + \varepsilon^2 (D_x \zeta D_y \eta - D_x \eta D_y \zeta)}{1 + \varepsilon(D_x \xi + D_y \eta) + \varepsilon^2 (D_x \xi D_y \eta - D_x \eta D_y \xi)}.$$

Разлагая в ряд по ε, имеем

$$\bar{w}_{\bar{x}} \simeq w_x + \varepsilon \zeta_1, \quad \zeta_1 = D_x \zeta - w_x D_x \xi - w_y D_x \eta,$$

что и требовалось доказать. Аналогичным образом вычисляется ζ_2.

Вторые производные при переходе к новым переменным (1) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \simeq \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon \zeta_{11}, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \simeq \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \varepsilon \zeta_{12}, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \simeq \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon \zeta_{22}. \tag{13}$$

Здесь координаты вторых продолжений ζ_{ij} находятся по формулам

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= D_x(\zeta_1) - w_{xx} D_x(\xi) - w_{xy} D_x(\eta), \\ \zeta_{12} &= D_y(\zeta_1) - w_{xx} D_y(\xi) - w_{xy} D_y(\eta), \\ \zeta_{22} &= D_y(\zeta_2) - w_{xy} D_y(\xi) - w_{yy} D_y(\eta). \end{aligned}$$

которые в развернутом виде записываются так:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \zeta_{xx} + (2\zeta_{wx} - \xi_{xx}) w_x - \eta_{xx} w_y + (\zeta_{ww} - 2\xi_{wx}) w_x^2 - 2\eta_{wx} w_x w_y - \\ &\quad - \xi_{ww} w_x^3 - \eta_{ww} w_x^2 w_y + (\zeta_w - 2\xi_x - 3\xi_w w_x - \eta_w w_y) w_{xx} - 2(\eta_x + \eta_w w_x) w_{xy}, \\ \zeta_{12} &= \zeta_{xy} + (\zeta_{wy} - \xi_{xy}) w_x + (\zeta_{wx} - \eta_{xy}) w_y - \xi_{wy} w_x^2 - \\ &\quad - (\zeta_{ww} - \xi_{wx} - \eta_{wy}) w_x w_y - \eta_{wx} w_y^2 - \xi_{ww} w_x^2 w_y - \eta_{ww} w_x w_y^2 - \\ &\quad - (\xi_y + \xi_w w_y) w_{xx} + (\zeta_w - \xi_x - \eta_y - 2\xi_w w_x - 2\eta_w w_y) w_{xy} - (\eta_x + \eta_w w_x) w_{yy}, \\ \zeta_{22} &= \zeta_{yy} - \xi_{yy} w_x + (2\zeta_{wy} - \eta_{yy}) w_y - 2\xi_{wy} w_x w_y + (\zeta_{ww} - 2\eta_{wy}) w_y^2 - \\ &\quad - \xi_{ww} w_x w_y^2 - \eta_{ww} w_y^3 - 2(\xi_y + \xi_w w_y) w_{xy} + (\zeta_w - 2\eta_y - \xi_w w_x - 3\eta_w w_y) w_{yy}. \end{aligned} \tag{14}$$

Формулы для координат первого и второго продолжений (9) и (14) понадобятся далее для анализа дифференциальных уравнений.

7.2. Симметрии нелинейных уравнений второго порядка. Условие инвариантности

7.2.1. Условие инвариантности. Процедура расщепления по производным

Будем рассматривать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0. \tag{15}$$

Процедура поиска симметрий* уравнения (15) проводится в несколько этапов. На первом этапе потребуем, чтобы уравнение (15) было инвариантным (т. е. сохраняло вид) относительно преобразований (1), т. е.

$$F\Big(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}\Big) = 0. \tag{16}$$

Разложим это выражение в ряд при $\varepsilon \to 0$ с учетом равенства нулю главного члена разложения (15). Используя формулы (2), (8), (13) и удерживая члены первого порядка малости по ε, получим

$$\underset{2}{\mathrm{X}} F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\bigg|_{F=0} = 0. \tag{17}$$

Здесь введено краткое обозначение:

$$\underset{2}{\mathrm{X}} F = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial w} + \zeta_1 \frac{\partial F}{\partial w_x} + \zeta_2 \frac{\partial F}{\partial w_y} + \\ + \zeta_{11} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \zeta_{12} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \zeta_{22} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}}, \tag{18}$$

где координаты первого и второго продолжений ζ_i и ζ_{ij} определяются по формулам (9) и (14). Соотношение (17) называется условием инвариантности, а оператор $\underset{2}{\mathrm{X}}$ — вторым продолжением оператора (3).

На втором этапе в (17) исключается производная $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ (или $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$) с помощью уравнения (15). После этого левая часть полученного равенства записывается как полином по «независимым переменным» — всевозможным произведениям производных (в данном случае произведения содержит разные степени w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}):

$$\sum A_{k_1 k_2 k_3 k_4} (w_x)^{k_1} (w_y)^{k_2} (w_{xx})^{k_3} (w_{xy})^{k_4} = 0, \tag{19}$$

где функциональные коэффициенты $A_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ зависят только от $x, y, w, \xi, \eta, \zeta$ и производных функций ξ, η, ζ, и не зависят от производных w. Равенство (19) будет выполняться, если все $A_{k_1 k_2 k_3 k_4} = 0$. Таким образом, условие инвариантности расщепляется до переопределенной определяющей системы, которая получается приравниванием нулю функциональных коэффициентов при различных произведениях степеней оставшихся производных (напомним, что искомые функции ξ, η, ζ не зависят от производных w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}).

На третьем этапе решается определяющая система и находятся допустимые координаты ξ, η, ζ оператора (3).

---

* Симметрии уравнения — преобразования, сохраняющие его вид.

Замечание 1. Важно отметить, что и функциональные коэффициенты $A_{k_1 k_2 k_3 k_4}$, и определяющая система линейны относительно искомых величин ξ, η, ζ.

Замечание 2. Инвариант I, являющийся решением уравнения (4), удовлетворяет также уравнению $\underset{2}{\mathrm{X}} I = 0$.

Проиллюстрируем процедуру поиска симметрий дифференциальных уравнений на конкретных примерах.

7.2.2. Примеры поиска симметрий нелинейных уравнений математической физики

Пример 1. Рассмотрим двумерное стационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w), \tag{20}$$

которое соответствует левой части $F = w_{xx} + w_{yy} - f(w)$ уравнения (15).

Допускаемый инфинитезимальный оператор X будем искать в виде (4), где координаты $\xi = \xi(x, y, w)$, $\eta = \eta(x, y, w)$, $\zeta = \zeta(x, y, w)$ пока неизвестны и подлежат определению в ходе последующего анализа. Условие инвариантности (17)–(18) с учетом зависимости $F = w_{xx} + w_{yy} - f(w)$ записывается так:

$$\zeta_{22} + \zeta_{11} - \zeta f'(w) = 0.$$

Подставив сюда выражения для координат второго продолжения (14) и заменив затем w_{yy} на $f(w) - w_{xx}$ [следствие уравнения (20)], имеем

$$\begin{aligned}
&-2\xi_w w_x w_{xx} + 2\eta_w w_y w_{xx} - 2\eta_w w_x w_{xy} - 2\xi_w w_y w_{xy} - 2(\xi_x - \eta_y) w_{xx} - 2(\xi_y + \eta_x) w_{xy} - \\
&\quad - \xi_{ww} w_x^3 - \eta_{ww} w_x^2 w_y - \xi_{ww} w_x w_y^2 - \eta_{ww} w_y^3 + (\zeta_{ww} - 2\xi_{xw}) w_x^2 - 2(\xi_{yw} + \eta_{xw}) w_x w_y + \\
&\quad + (\zeta_{ww} - 2\eta_{yw}) w_y^2 + (2\zeta_{xw} - \xi_{xx} - \xi_{yy} - f\xi_w) w_x + (2\zeta_{yw} - \eta_{xx} - \eta_{yy} - 3f\eta_w) w_y + \\
&\quad + \zeta_{xx} + \zeta_{yy} + f(\zeta_w - 2\eta_y) - \zeta f' = 0,
\end{aligned}$$

где $f = f(w)$ и $f' = df/dw$. Приравняем нулю коэффициенты при всех комбинациях производных. Получим следующую систему:

$$\begin{array}{ll}
w_x w_{xx}: & \xi_w = 0, \\
w_y w_{xx}: & \eta_w = 0, \\
w_{xx}: & \xi_x - \eta_y = 0, \\
w_{xy}: & \xi_y + \eta_x = 0, \\
w_x^2: & \zeta_{ww} - 2\xi_{wx} = 0, \\
w_x w_y: & \eta_{wx} + \xi_{wy} = 0, \\
w_x: & 2\zeta_{wx} - \xi_{xx} - \xi_{yy} - \xi_w f(w) = 0, \\
w_y^2: & \zeta_{ww} - 2\eta_{wy} = 0, \\
w_y: & 2\zeta_{wy} - \eta_{xx} - \eta_{yy} - 3\eta_w f(w) = 0, \\
1: & \zeta_{xx} + \zeta_{yy} - f'(w)\zeta + f(w)(\zeta_w - 2\eta_y) = 0.
\end{array} \tag{21}$$

Здесь в первом столбце указаны комбинации производных, во втором — соответствующие коэффициенты; при $w_y w_{xy}, w_x w_{xy}, w_x^3, w_x^2 w_y, w_x w_y^2, w_y^3$ эти коэффициенты дублируют приведенные в системе уравнения или их дифференциальные следствия, и потому опущены. Учитывая следствия первого, второго и пятого уравнений (21), имеем

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \zeta = a(x, y)w + b(x, y). \tag{22}$$

Из четвертого и пятого уравнения системы (21) получим

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0. \tag{23}$$

Подставим выражения (22) в седьмое и девятое уравнения (21), а затем используем равенства (23). Имеем $a_x = a_y = 0$, откуда следует

$$a(x, y) = a = \mathrm{const}\,. \tag{24}$$

Система (21) с учетом соотношений (22), (24) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\xi_x - \eta_y = 0,\\ &\xi_y + \eta_x = 0,\\ &b_{xx} + b_{yy} - awf'(w) - bf'(w) + f(w)(a - 2\eta_y) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Для произвольной функции f, очевидно, $a = b = \eta_y = 0$, тогда $\xi = C_1 y + C_2$, $\eta = -C_1 x + C_3$, $\zeta = 0$. Полагая последовательно одну из констант равной единице, а остальные — нулю, находим, что исходное уравнение допускает три различных оператора:

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_1 = \partial_x \qquad && (C_2 = 1,\ C_1 = C_3 = 0);\\ &\mathrm{X}_2 = \partial_y && (C_3 = 1,\ C_1 = C_2 = 0);\\ &\mathrm{X}_3 = y\partial_x - x\partial_y && (C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = 0). \end{aligned} \tag{26}$$

Первые два оператора соответствуют переносам вдоль осей x и y, третий — вращению.

Рассмотрим подробнее третье уравнение системы (25). Если выполняется равенство

$$(aw + b)f'(w) - f(w)(a - 2\eta_y) = 0, \tag{27}$$

то могут существовать другие решения системы (25), приводящие к операторам, отличным от (26). Надо исследовать два случая: $a \neq 0$ и $a = 0$.

Случай 1. Решая уравнение (27) при $a \neq 0$, получим

$$f(w) = C(aw + b)^{1 - \frac{2\gamma}{a}},$$

где $\gamma = \eta_y = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$. Поэтому при $f(w) = w^k$ уравнение (20) допускает дополнительный оператор

$$\mathrm{X}_4 = x\partial_x + y\partial_y + \frac{2}{1-k}w\partial_w,$$

задающий неравномерное растяжение.

Случай 2. При $a = 0$ решение имеет вид

$$f(w) = Ce^{\lambda w},$$

где $\lambda = \mathrm{const}$. Тогда $b = -2\eta_y/\lambda$, а функции ξ и η удовлетворяют двум первым уравнениям (25), которые совпадают с условиями Коши — Римана для аналитических функций. Этим условиям удовлетворяют действительная и мнимая части любой аналитической функции $\Phi(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ комплексной переменной $z = x + iy$. В частности, при $b = \mathrm{const}$ и $f(w) = e^w$ допускается дополнительный оператор

$$\mathrm{X}_4 = x\partial_x + y\partial_y - 2\partial_w,$$

который соответствует растяжению по x и y с одновременным сдвигом по w.

Пример 2. Рассмотрим нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big]. \tag{28}$$

В данном случае в условии инвариантности (17)–(18) надо положить

$$y = t, \quad F = w_t - f(w)w_{xx} - f'(w)w_x^2, \quad \zeta_{12} = \zeta_{22} = 0$$

и использовать выражения (9) и (14) для координат первого и второго продолжений ζ_1, ζ_2 и ζ_{11} при $y = t$. Заменив затем в полученном выражении w_t на правую часть уравнения (28), приравняем нулю коэффициенты при разных комбинациях оставшихся производных. В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} &w_x w_{xx}: && 2f(w)[\eta_{wx} f(w) + \xi_w] + f'(w)\eta_x = 0,\\ &w_{xx}: && \zeta f'(w) - f^2(w)\eta_{xx} - f(w)(2\xi_x - \eta_t) = 0,\\ &w_x w_{xt}: && f(w)\eta_w = 0,\\ &w_{xt}: && f(w)\eta_x = 0,\\ &w_x^4: && f'(w)\eta_w + f(w)\eta_{ww} = 0,\\ &w_x^3: && 2[f'(w)]^2\eta_x + f(w)\xi_{ww} + f'(w)\xi_w + 2f(w)f'(w)\eta_{wx} = 0,\\ &w_x^2: && f(w)\zeta_{ww} + f''(w)\zeta - 2f(w)\xi_{wx} - f'(w)(2\xi_x - \eta_t) + f'(w)\zeta_w - f(w)f'(w)\eta_{ww} = 0,\\ &w_x: && 2f(w)\zeta_{wx} + 2f'(w)\zeta_x - f(w)\xi_{xx} + \xi_t = 0,\\ &1: && \zeta_t - f(w)\zeta_{xx} = 0. \end{aligned}$$

Здесь в первом столбце указаны комбинации производных, во втором столбце — соответствующие уравнения (приводятся с точностью до постоянного множителя); опущены тождественные выражения и дифференциальные следствия. Так как $f(w) \not\equiv 0$, то из третьего и четвертого уравнений системы следует, что $\eta = \eta(t)$. Тогда из первого и второго уравнения имеем

$$\xi = \xi(x,t), \quad \zeta = \frac{f(w)(2\xi_x - \eta_t)}{f'(w)}.$$

С учетом найденных соотношений систему можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&[ff'f''' - f(f'')^2 + (f')^2 f''](2\xi_x - \eta_t) = 0,\\
&f[4ff'' - 7(f')^2]\xi_{xx} - (f')^2\xi_t = 0,\\
&2f\xi_{xxx} - 2\xi_{xt} + \eta_{tt} = 0
\end{aligned}$$

(уравнения сокращены на общие множители, заведомо не равные нулю). В общем случае, при произвольной функции f, из первого уравнения следует $2\xi_x - \eta_t = 0$, из второго — $\xi_t = 0$. Из третьего уравнения получим $\xi = C_1 + C_2 x$, тогда $\eta = 2C_2 t + C_3$. Поэтому при произвольной функции f уравнение (28) допускает три оператора:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X}_1 = \partial_x && (C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = 0);\\
&\mathrm{X}_2 = \partial_t && (C_3 = 1,\ C_1 = C_2 = 0);\\
&\mathrm{X}_3 = 2t\partial_t + x\partial_x && (C_2 = 1,\ C_1 = C_3 = 0).
\end{aligned}$$

Действуя аналогично, можно показать, что для следующих специальных видов функций f появляются дополнительные операторы:

1. $f = e^w$: $\mathrm{X}_4 = x\partial_x + 2\partial_w$.
2. $f = w^k$, $k \neq 0, -4/3$: $\mathrm{X}_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$.
3. $f = w^{-4/3}$: $\mathrm{X}_4 = 2x\partial_x - 3w\partial_w$, $\quad \mathrm{X}_5 = x^2\partial_x - 3xw\partial_w$.

Пример 3. Рассмотрим теперь нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big]. \tag{29}$$

В условии инвариантности (17)–(18) надо положить

$$y = t, \quad F = w_{tt} - f(w)w_{xx} - f'(w)w_x^2, \quad \zeta_2 = \zeta_{12} = 0$$

и использовать выражения (9) и (14) для координат первого и второго продолжений ζ_1 и ζ_{11}, ζ_{22} при $y = t$. Заменив в полученном выражении w_{tt} на правую часть уравнения (29), приравняем нулю коэффициенты при разных комбинациях оставшихся производных. Приходим к системе уравнений (опущены тождественные выражения и дифференциальные следствия):

$$\begin{aligned}
&w_x w_{xx}: && f(w)\xi_w = 0,\\
&w_t w_{xx}: && f(w)\eta_w = 0,\\
&w_{xx}: && f'(w)\zeta + 2f(w)(\eta_t - \xi_x) = 0,\\
&w_{xt}: && f(w)\eta_x - \xi_t = 0,\\
&w_x^3: && f'(w)\xi_w + f(w)\xi_{ww} = 0,\\
&w_x^2 w_t: && f(w)\eta_{ww} - f'(w)\eta_w = 0,\\
&w_x^2: && f(w)\zeta_{ww} + f'(w)\zeta_w + f''(w)\zeta - 2f(w)\xi_{wx} - 2f'(w)(\xi_x - \eta_t) = 0,\\
&w_x w_t: && 2f'(w)\eta_x + 2f(w)\eta_{wx} - 2\xi_{wt} = 0,\\
&w_x: && 2f'(w)\zeta_x - f(w)\xi_{xx} + 2f(w)\zeta_{wx} + \xi_{tt} = 0,\\
&w_t^2: && \zeta_{ww} - 2\eta_{wt} = 0,\\
&w_t: && f(w)\eta_{xx} + 2\zeta_{wt} - \eta_{tt} = 0,\\
&1: && \zeta_{tt} - f(w)\zeta_{xx} = 0.
\end{aligned}$$

Так как $f(w) \neq \mathrm{const}$, то из первых двух уравнений находим $\xi = \xi(x,t)$, $\eta = \eta(x,t)$. Поэтому десятое уравнение системы принимает вид $\zeta_{ww} = 0$ и приводит к выражению

$\zeta = a(x,t)w + b(x,t)$. В результате от системы остаются уравнения

$$\begin{aligned}
&wf'(w)a(x,y) + f'(w)b(x,y) + 2f(w)(\eta_t - \xi_x) = 0,\\
&f'(w)a(x,y) + wf''(w)a(x,y) + f''(w)b(x,y) - 2f'(w)(\xi_x - \eta_t) = 0,\\
&2f'(w)(a_x w + b_x) - f(w)\xi_{xx} + 2f(w)a_x = 0,\\
&2a_t - \eta_{tt} = 0,\\
&a_{tt}w + b_{tt} - f(w)(a_{xx}w + b_{xx}) = 0.
\end{aligned}$$

В случае произвольной функции $f(w)$ получим $a = b = 0$, $\eta_{tt} = 0$, $\xi_x - \eta_t = 0$. Интегрирование дает три оператора:

$$\mathrm{X}_1 = \partial_x, \quad \mathrm{X}_2 = \partial_t, \quad \mathrm{X}_3 = x\partial_x + t\partial_t.$$

Действуя аналогично, можно показать, что для следующих специальных видов функций f появляются дополнительные операторы:

1. $f = e^w$: $\mathrm{X}_4 = x\partial_x + 2\partial_w$.
2. $f = w^k$, $k \neq 0, -4/3, -4$: $\mathrm{X}_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$.
3. $f = w^{-4/3}$: $\mathrm{X}_4 = 2x\partial_x - 3w\partial_w$, $\quad \mathrm{X}_5 = x^2\partial_x - 3xw\partial_w$.
4. $f = w^{-4}$: $\mathrm{X}_4 = 2x\partial_x - w\partial_w$, $\quad \mathrm{X}_5 = t^2\partial_t + tw\partial_w$.

Найденные с помощью указанной процедуры симметрии дифференциальных уравнений позволяют получать их точные решения (см. следующий раздел).

Задачи и упражнения к разд. 7.2

1. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения Бюргерса и потенциального уравнения Бюргерса:

a) $w_t + ww_x = aw_{xx}$,
b) $w_t + aw_x^2 = bw_{xx}$.

2. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты обобщенного уравнения Бюргерса:

$w_t + f(w)w_x = aw_{xx}$.

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(w)$.

3. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нестационарных уравнений теплопроводности с нелинейным источником:

a) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
c) $w_t = aw_{xx} + f(w)$.

Провести классификацию симметрий последнего уравнения для всех $f(w)$.

4. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейных уравнений:

a) $w_t = w_{xx} + a(w_x)^2$,
b) $w_t = w_{xx} + aw(w_x)^2$.

5. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного волнового уравнения:

$w_{xt} = f(w)$.

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(w)$.

6. Показать, что уравнение околозвукового течения газа

$$w_x w_{xx} + w_{yy} = 0$$

допускает операторы

$$\mathrm{X}_1 = \partial_x, \quad \mathrm{X}_2 = \partial_y, \quad \mathrm{X}_3 = \partial_w, \quad \mathrm{X}_4 = y\partial_w, \quad \mathrm{X}_5 = x\partial_x + 3w\partial_w, \quad \mathrm{X}_6 = y\partial_y - 2w\partial_w,$$

и найти соответствующие инварианты.

7. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения движения нелинейной вязко-пластической среды:

$w_t = f(w_x)w_{xx}$.

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(u)$.

8. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного уравнения теории фильтрации:

$w_t = [f(w_x)w_x]_x.$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(u)$.

9. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного телеграфного уравнения:

$w_{tt} + f(w)w_t = aw_{xx}.$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(w)$.

10. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения нелинейного уравнения теплопроводности в анизотропных средах:

$[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = h(w).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(x)$ и $g(y)$ при произвольной $h(w)$.

Указание. Координаты допустимого оператора искать в виде $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, $\zeta = 0$.

11. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения Калоджеро:

$w_{xt} = ww_{xx} + f(w_x).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(u)$.

12. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного уравнения:

$w_{tt} = f(w_{xx}).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(u)$.

13. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения минимальных поверхностей:

$(1 + w_y^2)w_{xx} - 2w_xw_yw_{xy} + (1 + w_x^2)w_{yy} = 0.$

14. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения Борна — Инфельда:

$(1 - w_t^2)w_{xx} + 2w_xw_tw_{xt} - (1 + w_x^2)w_{tt} = 0.$

15. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты неоднородных уравнений Монжа — Ампера:

a) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = f(x),$

b) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = yf(x),$

c) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = y^2 f(x),$

d) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = e^y f(x).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(x)$.

7.3. Использование симметрий уравнения для поиска точных решений. Инвариантные решения

7.3.1. Использование симметрий уравнения для построения однопараметрических решений

Пусть известно частное решение

$$w = g(x, y) \tag{30}$$

исследуемого уравнения. Покажем, что любая симметрия уравнения, задаваемая преобразованием вида (1), порождает однопараметрическое семейство решений (за исключением случаев, когда решение под действием этого преобразования переходит само в себя, см. разд. 7.3.2).

Действительно, поскольку уравнение (15) после перехода к новым переменным (1) принимает такой же вид (16), то преобразованное уравнение (16) имеет решение

$$\bar{w} = g(\bar{x}, \bar{y}). \tag{31}$$

Возвращаясь в (31) к старым переменным по формулам (1), получим однопараметрическое решение исходного уравнения (15).

Пример 4. Двумерное уравнение теплопроводности с экспоненциальным источником

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^w \tag{32}$$

допускает одномерное решение

$$w = \ln \frac{2}{x^2}. \tag{33}$$

Уравнение (32) допускает оператор $X_3 = y\partial_x - x\partial_y$ (см. пример 1), который задает вращение на плоскости. Соответствующие преобразование приведено в табл. 6. Заменяя x в (33) на $\bar{x}$ (из табл. 6), получим однопараметрическое решение уравнения (32):

$$w = \ln \frac{2}{(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)^2},$$

где ε — свободный параметр.

7.3.2. Процедура построения инвариантных решений

Решение (30) уравнения (15) называется инвариантным относительно преобразования (1), если оно совпадает с решением (31), в котором надо вернуться к старым переменным по формулам (1). Сказанное означает, что инвариантное решение под действием данного преобразования переходит само в себя. Основные этапы построения инвариантных решений описаны ниже.

Инвариантные решения уравнения (15) ищем в неявном виде

$$I(x, y, w) = 0,$$

поэтому $I(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}) = 0$. Находим однопараметрическое преобразование с оператором (3), координаты которого определяются из условия инвариантности (17) с помощью процедуры, описанной в разд. 7.2. Находим два функционально-независимых интеграла (6) характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5). Общее решение уравнения с частными производными (4) определяем по формуле (7). Затем полагаем в этой формуле $I = 0$ и разрешаем полученное равенство относительно инварианта I_2. В результате имеем

$$I_2 = \Phi(I_1), \tag{34}$$

где функции $I_1 = I_1(x, y, w)$ и $I_2 = I_2(x, y, w)$ известны,* а функция Φ подлежит определению. Соотношение (34) является основой для построения инвариантного решения: разрешая (34) относительно w и подставляя полученную зависимость в (15), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции Φ.

Пример 5. Хорошо известным и очень важным частным случаем инвариантных решений являются автомодельные решения (см. разд. 3.3), которые основаны на преобразованиях растяжения. Соответствующий инфинитезимальный оператор и его инварианты имеют вид:

$$X = ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y} + cw\frac{\partial}{\partial w}; \qquad I_1 = |y|^a |x|^{-b}, \quad I_2 = |w|^a |x|^{-c}.$$

Подставляя инварианты в формулу (34), имеем $|w|^a|x|^{-c} = \Phi\big(|y|^a|x|^{-b}\big)$. Разрешив это равенство относительно w, получим вид искомого решения

$$w = |x|^{c/a}\Psi\big(y|x|^{-b/a}\big),$$

где $\Psi(z)$ — искомая функция.

---

* Обычно в качестве I_1 выбирают инвариант, который не зависит от w.

Для наглядности общая схема построения инвариантных решений для эволюционных уравнений второго порядка изображена на рис. 4. На рисунке опущено уравнение первого порядка с частными производными (4) для определения инвариантов инфинитезимального оператора (поскольку можно сразу перейти к соответствующей характеристической системе обыкновенных дифференциальных уравнений).

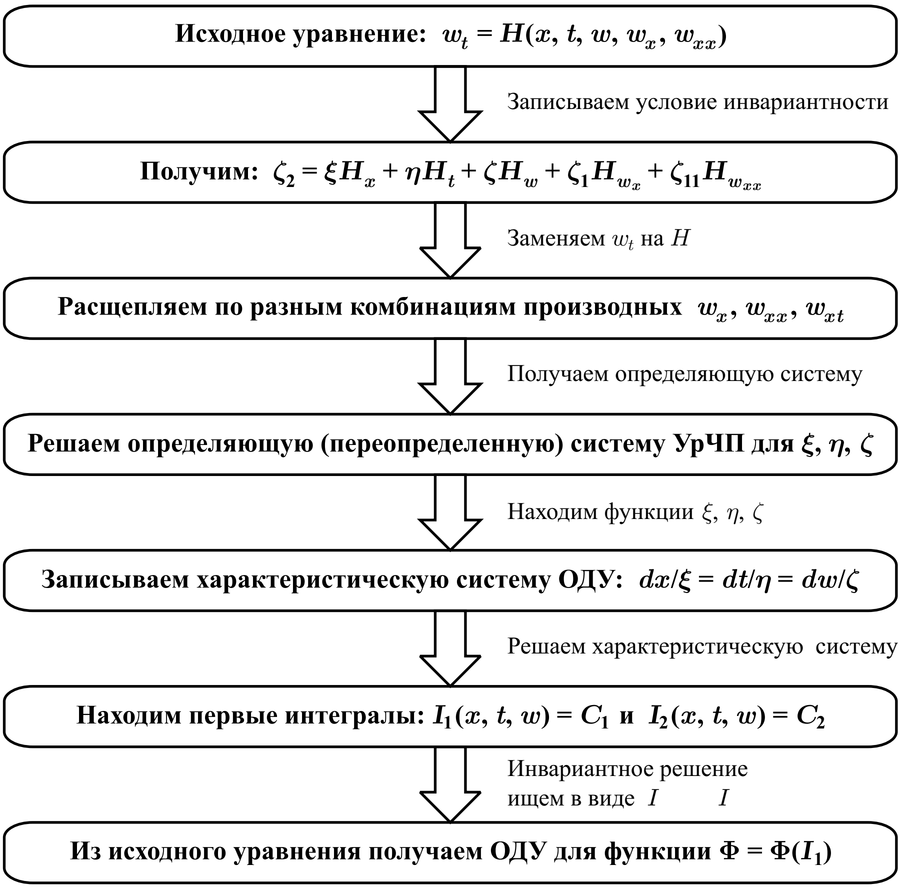

Рис. 4. Алгоритм построения инвариантных решений для эволюционных уравнений второго порядка. Использованы краткие обозначения: ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения, УрЧП — уравнения с частными производными; $\xi = \xi(x, t, w)$, $\eta = \eta(x, t, w)$, $\zeta = \zeta(x, t, w)$; ζ_1, ζ_2, ζ_{11} — координаты продолженного оператора, которые определяются по формулам (9) и (14) при $y = t$.

7.3.3. Примеры построения инвариантных решений нелинейных уравнений

Пример 6. Рассмотрим опять стационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w).$$

1°. Исследуем случай $f = w^k$, когда уравнение допускает дополнительный оператор (см. пример 1):

$$\mathrm{X}_4 = x\partial_x + y\partial_y + \frac{2}{1-k} w\partial_w.$$

Чтобы найти инварианты этого оператора, надо рассмотреть линейное уравнение в частных производных первого порядка $\mathrm{X}_4 I = 0$, которое в развернутой форме записывается так:

$$x\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{2}{1-k}w\frac{\partial I}{\partial w} = 0.$$

Соответствующая ему характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{1-k}{2}\frac{dw}{w}$$

имеет первые интегралы

$$y/x = C_1, \quad x^{2/(k-1)}w = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поэтому инвариантами оператора X_4 являются функции $I_1 = y/x$ и $I_2 = x^{2/(k-1)}w$.

Полагая $I_2 = \Phi(I_1)$ и выражая w, находим вид инвариантного (автомодельного) решения

$$w = x^{-2/(k-1)}\Phi(y/x), \tag{35}$$

где функция $\Phi(z)$ подлежит определению в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (35) в исходное уравнение (20), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, определяющее двухпараметрическое семейство решений

$$(k-1)^2(z^2+1)\Phi''_{zz} + 2(k^2-1)z\Phi'_z + 2(k+1)\Phi - (k-1)^2\Phi^k = 0,$$

где $z = y/x$. Его общее решение может быть найдено в квадратурах (в параметрической форме):

$$\begin{cases} z = \operatorname{tg} Q, \\ \Phi = \tau(\operatorname{tg}^2 Q + 1)^{1/(1-k)}, \end{cases} \quad \text{где} \quad Q = (k^2-1)\int \frac{d\tau}{\sqrt{2(k-1)^2\tau^{k+1} - 4(k+1)\tau^2 + A_1}} + A_2,$$

A_1, A_2 — произвольные постоянные, τ — параметр.

2°. Инвариантами оператора X_3 для рассматриваемого нелинейного уравнения теплопроводности являются $u = x^2 + y^2$ и w. Подстановка $w = w(u)$, $u = x^2 + y^2$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, описывающему решения исходного уравнения, инвариантные относительно вращения

$$uw''_{uu} + w'_u = \tfrac{1}{4}f(w).$$

Замечание. В приложениях обычно в качестве инварианта вместо $u = x^2 + y^2$ используют полярный радиус $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример 7. Рассмотрим нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности (28).

1°. При произвольной функции $f(w)$ уравнение допускает оператор (см. пример 2)

$$\mathrm{X}_3 = 2t\partial_t + x\partial_x.$$

Инварианты находятся из линейного уравнения в частных производных первого порядка $\mathrm{X}_3 I = 0$, которое в развернутой форме записывается так:

$$2t\frac{\partial I}{\partial t} + x\frac{\partial I}{\partial x} + 0\frac{\partial I}{\partial w} = 0.$$

Соответствующая ему характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = \frac{dw}{0}$$

имеет первые интегралы

$$xt^{-1/2} = C_1, \quad w = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поэтому инвариантами оператора X_3 являются функции $I_1 = xt^{-1/2}$ и $I_2 = w$.

Полагая $I_2 = \Phi(I_1)$, получим

$$w = \Phi(z), \quad z = xt^{-1/2}, \tag{36}$$

где функция $\Phi(z)$ подлежит определению в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (36) в исходное уравнение (28), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$2a[f(\Phi)\Phi'_z]'_z + z\Phi'_z = 0,$$

которое описывает инвариантное (автомодельное) решение.

ТАБЛИЦА 7
Допустимые операторы, инварианты и структура решений
нелинейного уравнения нестационарной теплопроводности (28)

Функция $f(w)$	Операторы	Инварианты	Вид решения
Произвольная	$X_1=\partial_x$, $X_2=\partial_t$, $X_3=2t\partial_t+x\partial_x$	$I_1=t,\ I_2=w$, $I_1=x,\ I_2=w$, $I_1=x^2/t,\ I_2=w$	$w=w(t)=\text{const}$, $w=w(x)$, $w=w(z),\ z=x^2/t$
e^w	$X_4=x\partial_x+2\partial_w$	$I_1=t,\ I_2=w-2\ln\lvert x\rvert$	$w=2\ln\lvert x\rvert+\theta(t)$
$w^k\ (k\neq 0,-\frac{4}{3})$	$X_4=kx\partial_x+2w\partial_w$	$I_1=t,\ I_2=w\lvert x\rvert^{-k/2}$	$w=\lvert x\rvert^{k/2}\theta(t)$
$w^{-4/3}$	$X_4=2x\partial_x-3w\partial_w$, $X_5=x^2\partial_x-3xw\partial_w$	$I_1=t,\ I_2=wx^{2/3}$, $I_1=t,\ I_2=wx^3$	$w=x^{-2/3}\theta(t)$, $w=x^{-3}\theta(t)$

2°. Исследуем случай $f(w)=w^k$, когда уравнение допускает оператор

$$X_4=kx\partial_x+2w\partial_w.$$

Инварианты описываются линейным уравнением в частных производных первого порядка $X_4I=0$, которое в развернутой форме записывается так:

$$0\frac{\partial I}{\partial t}+kx\frac{\partial I}{\partial x}+2w\frac{\partial I}{\partial w}=0.$$

Соответствующая ему характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{0}=\frac{dx}{kx}=\frac{dw}{2w}$$

имеет первые интегралы

$$t=C_1,\qquad x^{-2/k}w=C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поэтому инвариантами оператора X_4 являются функции $I_1=t$ и $I_2=x^{-2/k}w$.

Полагая $I_2=\theta(I_1)$ и разрешая это равенство относительно w, находим:

$$w=x^{2/k}\theta(t), \tag{37}$$

где функция $\theta(t)$ подлежит определению в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (37) в исходное уравнение (28), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$2k\theta'_t=2a(k+2)\theta^{k+1}.$$

Интегрируя, получим

$$\theta(t)=\Big[A-\frac{2a(k+2)}{k}t\Big]^{-1/k},$$

где A — произвольная постоянная. Таким образом, инвариантное относительно растяжения решение уравнения (28) при $f(w)=w^k$ имеет вид

$$w(x,t)=x^{2/k}\Big[A-\frac{2a(k+2)}{k}t\Big]^{-1/k}.$$

В табл. 7 приведена итоговая классификация симметрий уравнения (28) (см. примеры 2 и 7).

Пример 8. Рассмотрим нелинейное волновое уравнение (29).

Это уравнение при произвольной функции $f(w)$ допускает оператор (см. пример 3):

$$X_3=t\partial_t+x\partial_x.$$

Инварианты находятся из линейного уравнения в частных производных первого порядка $X_3I_1=0$, которое в развернутой форме записывается так:

$$t\frac{\partial I}{\partial t}+x\frac{\partial I}{\partial x}+0\frac{\partial I}{\partial w}=0.$$

ТАБЛИЦА 8
Допустимые операторы, инварианты и структура решений нелинейного волнового уравнения (29)

Функция $f(w)$	Операторы	Инварианты	Вид решения
Произвольная	$X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_t$, $X_3 = t\partial_t + x\partial_x$	$I_1 = t,\ I_2 = w$, $I_1 = x,\ I_2 = w$, $I_1 = x/t,\ I_2 = w$	$w = w(t)$, $w = w(x)$, $w = w(z),\ z = x/t$
e^w	$X_4 = x\partial_x + 2\partial_w$	$I_1 = t,\ I_2 = w - 2\ln\lvert x\rvert$	$w = 2\ln\lvert x\rvert + \theta(t)$
$w^k\ (k \neq 0, -\frac{4}{3}, -4)$	$X_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$	$I_1 = t,\ I_2 = w\lvert x\rvert^{-k/2}$	$w = \lvert x\rvert^{k/2}\theta(t)$
$w^{-4/3}$	$X_4 = 2x\partial_x - 3w\partial_w$, $X_5 = x^2\partial_x - 3xw\partial_w$	$I_1 = t,\ I_2 = wx^{2/3}$, $I_1 = t,\ I_2 = wx^3$	$w = x^{-2/3}\theta(t)$, $w = x^{-3}\theta(t)$
w^{-4}	$X_4 = 2x\partial_x - w\partial_w$, $X_5 = t^2\partial_t + tw\partial_w$	$I_1 = t,\ I_2 = w\lvert x\rvert^{1/2}$, $I_1 = x,\ I_2 = w/t$	$w = \lvert x\rvert^{-1/2}\theta(t)$, $w = t\theta(x)$

Соответствующая ему характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} = \frac{dw}{0}$$

допускает первые интегралы

$$xt^{-1} = C_1, \quad w = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поэтому инвариантами оператора X_3 являются функции $I_1 = xt^{-1}$ и $I_2 = w$.

Полагая $I_2 = \Phi(I_1)$, имеем

$$w = \Phi(y), \quad y = xt^{-1}. \tag{38}$$

Функцию $\Phi(y)$ найдем, подставляя (38) в исходное уравнение (29). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[f(\Phi)\Phi'_y]'_y = (y\Phi'_y)'_y,$$

определяющее инвариантное (автомодельное) решение. Последнее уравнение имеет очевидный первый интеграл: $f(\Phi)\Phi'_y = y\Phi'_y + C$.

В табл. 8 приведена итоговая классификация симметрий уравнения (29) (см. примеры 3 и 8).

7.3.4. Решения, порождаемые линейными комбинациями допускаемых операторов

Если исследуемое уравнение допускает N операторов, то мы получаем, соответственно, N различных инвариантных решений. Однако, рассматривая операторы в отдельности, можно «потерять» решения, инвариантные относительно их линейной суперпозиции, которые могут иметь существенно иной вид. Чтобы найти все типы инвариантных решений, надо исследовать все возможные линейные комбинации допускаемых операторов.

Пример 9. Рассмотрим опять нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности (28).

1°. Это уравнение для произвольной $f(w)$ допускает три оператора (см. табл. 7):

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x.$$

Соответствующие им инвариантные решения имеют вид:

$$w = F(x), \quad w = F(t), \quad w = F(x^2/t).$$

Однако перебор возможных линейных комбинаций дает еще оператор

$$X_{1,2} = X_1 + aX_2 = \partial_t + a\partial_x, \tag{39}$$

где $a \neq 0$ — произвольная постоянная. Инвариантное относительно этого оператора решение записывается так:

$$w = F(x - at). \tag{40}$$

Видно, что решение такого типа (бегущая волна) не содержится в инвариантных решениях, соответствующих «чистым» операторам X_1, X_2, X_3.

2°. Если $f(w) = e^w$, то к указанным выше трем операторам добавляется четвертый оператор $X_4 = x\partial_x + 2\partial_w$ (см. табл. 7). В этом случае линейная комбинация

$$X_{3,4} = X_3 + aX_4 = 2t\partial_t + (a+1)x\partial_x + 2a\partial_w$$

дает инвариантное решение

$$w = F(\xi) + a\ln t, \quad \xi = xt^{-\frac{a+1}{2}},$$

где функция $F = F(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(e^F F'_\xi)'_\xi + \tfrac{1}{2}(a+1)\xi F'_\xi = a.$$

3°. Если $f(w) = w^k$ $(k \neq 0, -4/3)$, то к указанным в п. 1° трем операторам добавляется четвертый оператор $X_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$, и линейная комбинация

$$X_{3,4} = X_3 + aX_4 = 2t\partial_t + (ak+1)x\partial_x + 2aw\partial_w$$

порождает инвариантное (автомодельное) решение

$$w = t^a F(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{ak+1}{2}},$$

где функция $F = F(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(F^k F'_\zeta)'_\zeta + \tfrac{1}{2}(ak+1)\zeta F'_\zeta = aF.$$

Приведенные в пп. 1°–3° инвариантные решения не содержатся в табл. 7. Это наглядно демонстрирует необходимость рассмотрения решений, порождаемых линейными комбинациями допускаемых операторов.

Пример 10. Рассмотрим теперь нелинейное волновое уравнение (29).

1°. Это уравнение для произвольной $f(w)$ допускает три оператора (см. табл. 8):

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_t + x\partial_x,$$

а соответствующие им инвариантные решения имеют вид

$$w = F(x), \quad w = F(t), \quad w = F(x/t).$$

Перебор возможных линейных комбинаций дает еще оператор (39). Инвариантное относительно этого оператора решение типа бегущей волны имеет вид (40) и не содержится в инвариантных решениях, соответствующих «чистым» операторам X_1, X_2, X_3.

2°. Если $f(w) = e^w$, то к указанным выше трем операторам добавляется четвертый оператор $X_4 = x\partial_x + 2\partial_w$ (см. табл. 8). В этом случае линейная комбинация

$$X_{3,4} = X_3 + aX_4 = t\partial_t + (a+1)x\partial_x + 2a\partial_w$$

($a \neq 0$ — произвольная постоянная) дает инвариантное решение

$$w = F(\xi) + 2a\ln t, \quad \xi = xt^{-a-1},$$

где функция $F = F(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(e^F F'_\xi)'_\xi = (a+1)^2\xi^2 F''_{\xi\xi} + (a+1)(a+2)\xi F'_\xi - 2a.$$

3°. Если $f(w) = w^k$ $(k \neq 0, -4/3, -4)$, то появляется четвертый оператор $X_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$, и линейная комбинация

$$X_{3,4} = X_3 + aX_4 = t\partial_t + (ak+1)x\partial_x + 2aw\partial_w$$

дает инвариантное (автомодельное) решение

$$w = t^{2a} F(\zeta), \quad \zeta = xt^{-ak-1},$$

где функция $F = F(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(F^k F'_\zeta)'_\zeta = (ak+1)^2\zeta^2 F''_{\zeta\zeta} + (ak+1)(ak+2-4a)\zeta F'_\zeta + 2a(2a-1)F.$$

Задачи и упражнения к разд. 7.3

1. Найти инвариантные решения уравнений параболического типа (эволюционных уравнений):
a) $w_t + ww_x = aw_{xx}$,
b) $w_t = w_{xx} + a(w_x)^2$,
c) $w_t = w_{xx} + aw(w_x)^2$,
d) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
e) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
f) $w_t + f(w)w_x = aw_{xx}$,
g) $w_t = aw_{xx} + f(w)$,
h) $w_t = f(w_x)w_{xx}$,
i) $w_t = [f(w_x)w_x]_x$.

Указание. Воспользоваться результатами предшествующего анализа симметрий указанных уравнений (см. задачи и упражнения к разд. 7.2).

2. Найти инвариантные решения уравнений:
a) $xw_x + yw_y = aw_{xx} + f(w)$,
b) $xw_x + yw_y = w_{xx} + w_{yy} + f(w)$.

Показать, что уравнение b) имеет неинвариантное решение типа бегущей волны $w = w(z)$, где $z = k_1x + k_2y$, k_1 и k_2 — произвольные постоянные (существование такого решения проверяется непосредственной подстановкой его в уравнение).

3. Найти инвариантные решения следующих уравнений:
a) $w_xw_{xx} + w_{yy} = 0$,
b) $w_{tt} + f(w)w_t = aw_{xx}$,
c) $w_{xt} = f(w)$,
d) $w_{xt} = ww_{xx} + f(w_x)$,
e) $w_{tt} = f(w_{xx})$,
f) $(1 + w_y^2)w_{xx} - 2w_xw_yw_{xy} + (1 + w_x^2)w_{yy} = 0$,
g) $(1 - w_t^2)w_{xx} + 2w_xw_tw_{xt} - (1 + w_x^2)w_{tt} = 0$,
h) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = f(x)$.

Указание. Воспользоваться результатами предшествующего анализа симметрий указанных уравнений (см. задачи и упражнения к разделу 7.2).

7.4. Некоторые обобщения. Уравнения старших порядков

7.4.1. Однопараметрические группы Ли точечных преобразований. Генератор группы

В этом разделе будем рассматривать функции, зависящие от $n+1$ переменных: $x_1, \ldots, x_n, w$. Введем краткое обозначение: $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Множество обратимых преобразований вида

$$\mathrm{T}_\varepsilon = \begin{cases} \bar{x}_i = \varphi_i(x, w, \varepsilon), & \bar{x}_i|_{\varepsilon=0} = x_i, \\ \bar{w} = \psi(x, w, \varepsilon), & \bar{w}|_{\varepsilon=0} = w, \end{cases} \qquad (41)$$

где φ_i, ψ — достаточно гладкие функции своих аргументов ($i = 1, \ldots, n$), а ε — вещественный параметр, называется однопараметрической непрерывной точечной группой преобразований G, если для любых ε_1 и ε_2 выполняется соотношение $\mathrm{T}_{\varepsilon_1} \circ \mathrm{T}_{\varepsilon_2} = \mathrm{T}_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, т. е. последовательное применение двух преобразований вида (1) с параметрами ε_1 и ε_2 эквивалентно одному преобразованию того же вида с параметром $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Далее будут рассматриваться локальные однопараметрические непрерывные группы Ли точечных преобразований (кратко — точечные группы), соответствующие бесконечно малому преобразованию (41) при $\varepsilon \to 0$. Разложение соотношений (41) для $\bar{x}_i$ и $\bar{w}$ в ряд Тейлора по параметру ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$ дает

$$\bar{x}_i \simeq x_i + \varepsilon\xi_i(x,w), \quad \bar{w} \simeq w + \varepsilon\zeta(x,w), \tag{42}$$

где

$$\xi_i(x,w) = \frac{\partial\varphi_i(x,w,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}, \quad \zeta(x,w) = \frac{\partial\psi(x,w,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathrm{X} = \xi_i(x,w)\frac{\partial}{\partial x_i} + \zeta(x,w)\frac{\partial}{\partial w}, \tag{43}$$

соответствующий бесконечно малому преобразованию (42), называется генератором группы (или инфинитезимальным оператором, или оператором группы). В формуле (43) по индексу i ведется суммирование.

Теорема Ли. Пусть известны координаты $\xi_i(x,w)$, $\zeta(x,w)$ генератора группы (43). Тогда однопараметрическую группу преобразований (41) можно полностью восстановить путем решения уравнений Ли

$$\frac{d\varphi_i}{d\varepsilon} = \xi_i(\varphi,\psi), \quad \frac{d\psi}{d\varepsilon} = \zeta(\varphi,\psi)$$

с начальными условиями

$$\varphi_i|_{\varepsilon=0} = x_i, \quad \psi|_{\varepsilon=0} = w.$$

При записи уравнений Ли использовано краткое обозначение: $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Замечание. Использование понятия локальной однопараметрической группы точечных преобразований послужило основой для введения и широкого распространения терминов «групповой анализ дифференциальных уравнений», «групповые методы» и др. (вместо используемого в данной книге термина «метод исследования симметрий дифференциальных уравнений»).

7.4.2. Инварианты группы. Локальные преобразования производных

Универсальным инвариантом (кратко — инвариантом) группы (41) и оператора (43) называется функция $I(x,w)$, удовлетворяющая условию $I(\bar{x},\bar{w}) = I(x,w)$. Разложение по малому параметру ε приводит к линейному уравнению с частными производными для I:

$$\mathrm{X}I = \xi_i(x,w)\frac{\partial I}{\partial x_i} + \zeta(x,w)\frac{\partial I}{\partial w} = 0. \tag{44}$$

Из теории уравнений с частными производными первого порядка следует, что группа (41) и оператор (43) имеют n функционально независимых универсальных инвариантов. Это, в свою очередь, означает, что всякая функция $F(x,w)$, инвариантная относительно группы (41), может быть записана в виде функции n инвариантов.

Производные при переходе к новым переменным (41) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}_i} \simeq \frac{\partial w}{\partial x_i} + \varepsilon\zeta_i, \quad \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}_i\partial\bar{x}_j} \simeq \frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j} + \varepsilon\zeta_{ij}, \quad \frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}_i\partial\bar{x}_j\partial\bar{x}_k} \simeq \frac{\partial^3 w}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} + \varepsilon\zeta_{ijk}, \quad \ldots \tag{45}$$

Здесь координаты первых трех продолжений ζ_i, ζ_{ij}, ζ_{ijk} определяются по формулам

$$\begin{aligned} \zeta_i &= D_i(\zeta) - p_s D_i(\xi_s), \\ \zeta_{ij} &= D_j(\zeta_i) - q_{is} D_j(\xi_s), \\ \zeta_{ijk} &= D_k(\zeta_{ij}) - r_{ijs} D_k(\xi_s), \end{aligned} \tag{46}$$

где по индексу s ведется суммирование и использованы краткие обозначения для частных производных

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad q_{ij} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \quad r_{ijk} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \\ D_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial w} + q_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} + r_{ijk} \frac{\partial}{\partial q_{jk}} + \ldots, \end{aligned}$$

D_i — оператор полного дифференцирования по переменной x_i.

7.4.3. Условие инвариантности. Процедура расщепления. Инвариантные решения

Будем рассматривать дифференциальные уравнения в частных производных порядка m с n независимыми переменными

$$F\Big(x, w, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \ldots\Big) = 0, \tag{47}$$

где $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Групповой анализ уравнения (47) проводится в несколько этапов. На первом этапе потребуем, чтобы уравнение (47) было инвариантным (сохраняло вид) относительно преобразований (41), т. е.

$$F\Big(\bar{x}, \bar{w}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}_i}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_i \partial \bar{x}_j}, \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x_i \partial \bar{x}_j \partial \bar{x}_k}, \ldots\Big) = 0. \tag{48}$$

Разложим это выражение в ряд при $\varepsilon \to 0$ с учетом равенства нулю главного члена разложения (47). Используя формулы (41), (45) и удерживая члены первого порядка малости по ε, получим

$$\underset{m}{\mathrm{X}} F\Big(x, w, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \ldots\Big)\Big|_{F=0} = 0. \tag{49}$$

Здесь введено краткое обозначение:

$$\underset{m}{\mathrm{X}} F = \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \zeta \frac{\partial F}{\partial w} + \zeta_i \frac{\partial F}{\partial w_{x_i}} + \zeta_{ij} \frac{\partial F}{\partial w_{x_i x_j}} + \zeta_{ijk} \frac{\partial F}{\partial w_{x_i x_j x_k}} + \cdots, \tag{50}$$

где координаты первых трех продолжений ζ_i, ζ_{ij}, ζ_{ijk} определяются по формулам (45), а по повторяющимся индексам ведется суммирование. Соотношение (49) называется условием инвариантности, а оператор $\underset{m}{\mathrm{X}}$ — m раз продолженным генератором группы; в формулу (50) последними входят частные производные от F по всем производным порядка m от w.

На втором этапе в (49) исключается одна из старших производных порядка m с помощью уравнения (47). После этого полученное равенство записывается как полином по «независимым переменным» — всевозможным комбинациям оставшихся производных, представляющим собой произведения различных степеней величин w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, ... После этого все коэффициенты полинома (они зависят только от x, w, ξ_i, ζ и не зависят от производных w) приравнивают нулю. В результате условие инвариантности расщепляется до переопределенной линейной определяющей системы.

На третьем этапе решается определяющая система и находятся допустимые координаты ξ_i, ζ генератора группы (42).

Для уравнений m-го порядка с двумя независимыми переменными инвариантные решения вводятся таким же образом, что и для уравнений второго порядка. В этом случае процедура построения инвариантых решений (при известных координатах генератора группы) полностью совпадает с процедурой, подробно описанной в разд. 7.3.

Задачи и упражнения к разд. 7.4

1. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения Кортевега — де Фриза:

$w_t + w_{xxx} - 6ww_x = 0.$

2. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза:

$w_t + w_{xxx} - 6w^2w_x = 0.$

3. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнений типа Кортевега — де Фриза:

a) $w_t + w_{xxx} + aww_x + bt^{-1}w = 0,$
b) $w_t + w_{xxx} + aw_x^2 = 0,$
c) $w_t + w_{xxx} + aw_x^3 = 0.$

4. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения обобщенного уравнения Кортевега — де Фриза:

$w_t + w_{xxx} + f(w)w_x = 0.$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(w)$.

5. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения, которое встречается в гидродинамике вязкой жидкости:

$w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = \nu w_{xxx}.$

6. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения, которое встречается в гидродинамике вязкой жидкости:

$w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = \nu w_{xxx} + f(t).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(t)$.

7. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения стационарного безградиентного гидродинамического пограничного слоя:

$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = w_{yyy}.$

8. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения стационарного градиентного гидродинамического пограничного слоя:

$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = w_{yyy} + f(x).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(x)$.

7.5. Симметрии систем уравнений математической физики

7.5.1. Основные соотношения, используемые при анализе симметрий систем уравнений

Анализ симметрий (групповой анализ) систем уравнений с частными производными отличается от анализа одиночных уравнений только тем, что в операторе (3) и его продолжениях необходимо учесть все зависимые и независимые переменные. Ниже приведены полезные формулы, которые наиболее часто используются на практике при анализе симметрий систем уравнений.

Для систем, состоящих из двух уравнений с двумя независимыми переменными x, y и искомыми величинами $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, допустимый оператор ищется в виде

$$\mathrm{X} = \xi(x,y,u,v)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y,u,v)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x,y,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \chi(x,y,u,v)\frac{\partial}{\partial v}. \quad (51)$$

В общем случае второе продолжение оператора (51) на «независимые переменные» u_x, u_y, v_x, v_y и u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy} записывается так:

$$\begin{aligned}\underset{2}{\mathrm{X}} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial u} + \chi\frac{\partial}{\partial v} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_y} + \chi_1\frac{\partial}{\partial v_x} + \chi_2\frac{\partial}{\partial v_y} + \\ + \zeta_{11}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{12}\frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \zeta_{22}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \chi_{11}\frac{\partial}{\partial v_{xx}} + \chi_{12}\frac{\partial}{\partial v_{xy}} + \chi_{22}\frac{\partial}{\partial v_{yy}}.\end{aligned} \quad (52)$$

Координаты первого продолжения вычисляются по формулам, аналогичным формулам (9) из разд. 7.1.2:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= D_x(\zeta) - u_x D_x(\xi) - u_y D_x(\eta), & \chi_1 &= D_x(\chi) - v_x D_x(\xi) - v_y D_x(\eta),\\ \zeta_2 &= D_y(\zeta) - u_x D_y(\xi) - u_y D_y(\eta), & \chi_2 &= D_y(\chi) - v_x D_y(\xi) - v_y D_y(\eta),\end{aligned} \quad (53)$$

а координаты второго продолжения — по формулам

$$\begin{aligned}\zeta_{11} &= D_x(\zeta_1) - u_{xx}D_x(\xi) - u_{xy}D_x(\eta), & \chi_{11} &= D_x(\chi_1) - v_{xx}D_x(\xi) - v_{xy}D_x(\eta),\\ \zeta_{12} &= D_y(\zeta_1) - u_{xx}D_y(\xi) - u_{xy}D_y(\eta), & \chi_{12} &= D_y(\chi_1) - v_{xx}D_y(\xi) - v_{xy}D_y(\eta),\\ \zeta_{22} &= D_y(\zeta_2) - u_{xy}D_y(\xi) - u_{yy}D_y(\eta), & \chi_{22} &= D_y(\chi_2) - v_{xy}D_y(\xi) - v_{yy}D_y(\eta),\end{aligned} \quad (54)$$

где D_x и D_y — операторы полного дифференцирования по независимым переменным:

$$\begin{aligned}D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + v_x\frac{\partial}{\partial v} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy}\frac{\partial}{\partial u_y} + v_{xx}\frac{\partial}{\partial v_x} + v_{xy}\frac{\partial}{\partial v_y} + \cdots,\\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y\frac{\partial}{\partial u} + v_y\frac{\partial}{\partial v} + u_{xy}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yy}\frac{\partial}{\partial u_y} + v_{xy}\frac{\partial}{\partial v_x} + v_{yy}\frac{\partial}{\partial v_y} + \cdots.\end{aligned}$$

При анализе симметрий систем уравнений с частными производными требуется, чтобы каждое уравнение рассматриваемой системы удовлетворяло условию инвариантности, которое задается продолженным оператором (52).

7.5.2. Симметрии уравнений стационарного гидродинамического пограничного слоя

Проиллюстрируем технику анализа симметрий нелинейных систем уравнений с частными производными с помощью формул (51)–(54) на конкретном примере.

Пример 11. Рассмотрим систему уравнений стационарного гидродинамического пограничного слоя

$$\begin{aligned}uu_x + vu_y + f(x) &= u_{yy},\\ u_x + v_y &= 0.\end{aligned} \quad (55)$$

Определяющие соотношения для координат допустимого оператора. Будем искать оператор, допускаемый системой (55), в виде (51). Второе продолжение оператора (51) описывается формулой (52), в которой следует положить

$$\chi_1 = 0, \quad \zeta_{11} = \zeta_{12} = 0, \quad \chi_{11} = \chi_{12} = \chi_{22} = 0. \quad (56а)$$

(Здесь учтено, что в исследуемую систему входят только производные u_x, u_y, v_y и u_{yy}.) Ненулевые координаты продолженного оператора (52) вычисляются по формулам (53) и (54):

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \zeta_x+\zeta_u u_x+\zeta_v v_x-u_x(\xi_x+\xi_u u_x+\xi_v v_x)-u_y(\eta_x+\eta_u u_x+\eta_v v_x),\\
\zeta_2 &= \zeta_y+\zeta_u u_y+\zeta_v v_y-u_x(\xi_y+\xi_u u_y+\xi_v v_y)-u_y(\eta_y+\eta_u u_y+\eta_v v_y),\\
\chi_2 &= \chi_y+\chi_u u_y+\chi_v v_y-v_x(\xi_y+\xi_u u_y+\xi_v v_y)-v_y(\eta_y+\eta_u u_y+\eta_v v_y),\\
\zeta_{22} &= \zeta_{yy}+2\zeta_{vy}v_y+\zeta_{vv}(v_y)^2+[2\zeta_{uy}-\eta_{yy}+2(\zeta_{uv}-\eta_{vy})v_y-\eta_{vv}(v_y)^2]u_y-\\
&\quad -[\xi_{yy}+2(\xi_{uy}+\xi_{uv}v_y)u_y+2\xi_{vy}v_y+\xi_{uu}(u_y)^2+\xi_{vv}(v_y)^2]u_x+\\
&\quad -(\zeta_{uu}-2\eta_{uy}-2\eta_{uv}v_y)(u_y)^2-\eta_{uu}(u_y)^3-2(\xi_y+\xi_u u_y+\xi_v v_y)u_{xy}-\\
&\quad -[2\eta_y-\zeta_u-\zeta_v+(\xi_u+\xi_v)u_x+(3\eta_u+\eta_v)u_y+2\eta_v v_y]u_{yy}.
\end{aligned} \tag{56b}$$

Подействуем продолженным оператором (52) с учетом (56a), (56b) на систему (55). Исключение в полученных выражениях производных u_{yy} и v_y с помощью соответственно первого и второго уравнений системы (55) дает два условия инвариантности. После приведения подобных членов и перегруппировки слагаемых приходим к определяющим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&[-3\xi_v u_x+(2\xi_u-\eta_v)u_y+2\xi_y+\zeta_v]u_{xy}+\xi_{vv}u_x^3-(2\xi_{uv}-\eta_{vv})u_x^2u_y+\\
&\quad +(\xi_{uu}-2\eta_{uv})u_xu_y^2+\eta_{uu}u_y^3+(v\xi_v-2u\eta_v-\zeta_{vv}-2\xi_{yv})u_x^2+\\
&\quad +(2\zeta_{uv}+2u\eta_u-2\eta_{yv}-v\eta_v+2\xi_{yu})u_xu_y+(2v\eta_u+2\eta_{yu}-\zeta_{uu})u_y^2-\\
&\quad -u\xi_v u_x v_x-u\eta_v u_y v_x+(-v\xi_y-v\zeta_v-u\xi_x-2f\eta_v+2u\eta_y+f\xi_u+\\
&\quad +\zeta+2\zeta_{yv}+\xi_{yy})u_x+(v\eta_y-u\eta_x+3f\eta_u-2\zeta_{yu}+\chi+\eta_{yy})u_y+\\
&\quad +u\zeta_v v_x+f'_x\xi-\zeta_{yy}+u\zeta_x+v\zeta_y-f\zeta_u+2f\eta_y=0 \qquad (\textit{первое уравнение}),\\
&-(\xi_u+\eta_v)u_x^2+(\zeta_u-\chi_v+\eta_y-\xi_x)u_x-(\eta_v+\xi_u)u_yv_x+\zeta_v v_x+\\
&\quad +(\chi_u-\eta_x-\xi_y)u_y+\zeta_x+\chi_y=0 \qquad (\textit{второе уравнение}).
\end{aligned}$$

Расщепление этих уравнений по «независимым переменным» приводит к двум переопределенным системам, которые приведены ниже и должны выполняться одновременно.

Первая система:

$$\begin{aligned}
u_xu_{xy}&: \quad 3\xi_v=0,\\
u_yu_{xy}&: \quad 2\xi_u-\eta_v=0,\\
u_{xy}&: \quad 2\xi_y+\zeta_v=0,\\
u_x^3&: \quad \xi_{vv}=0,\\
u_x^2u_y&: \quad 2\xi_{uv}-\eta_{vv}=0,\\
u_xu_y^2&: \quad \xi_{uu}-2\eta_{uv}=0,\\
u_y^3&: \quad \eta_{uu}=0,\\
u_x^2&: \quad v\xi_v-2u\eta_v-\zeta_{vv}-2\xi_{yv}=0,\\
u_xu_y&: \quad 2\zeta_{uv}+2u\eta_u-2\eta_{yv}-v\eta_v+2\xi_{yu}=0,\\
u_y^2&: \quad 2v\eta_u+2\eta_{yu}-\zeta_{uu}=0,\\
u_xv_x&: \quad u\xi_v=0,\\
u_yv_x&: \quad u\eta_v=0,\\
u_x&: \quad \xi_{yy}-v\xi_y-v\zeta_v-u\xi_x-2f\eta_v+2u\eta_y+f\xi_u+\zeta+2\zeta_{yv}=0,\\
u_y&: \quad \eta_{yy}+v\eta_y-u\eta_x+3f\eta_u-2\zeta_{yu}+\chi=0,\\
v_x&: \quad u\zeta_v=0,\\
1&: \quad f'_x\xi-\zeta_{yy}+u\zeta_x+v\zeta_y-f\zeta_u+2f\eta_y=0.
\end{aligned}$$

Вторая система:

$$\begin{aligned}
u_x^2&: \quad \xi_u+\eta_v=0,\\
u_yv_x&: \quad \eta_v+\xi_u=0,\\
u_x&: \quad \zeta_u-\chi_v+\eta_y-\xi_x=0,\\
u_y&: \quad \chi_u-\eta_x-\xi_y=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &v_x: && \zeta_v = 0, \\ &1: && \zeta_x + \chi_y = 0. \end{aligned}$$

В первой системе из 11-го и 12-го уравнений следует, что $\xi = \xi(x,y,u)$, $\eta = \eta(x,y,u)$, откуда с учетом второго уравнения имеем $\xi = \xi(x,y)$. Далее, из 15-го уравнения следует, что $\zeta = \zeta(x,y,u)$, что с учетом третьего уравнения дает $\xi = \xi(x)$. При этом уравнения 1, 4–6 удовлетворяются тождественно. Наконец, из 9-го уравнения следует $\eta_u = 0$, поэтому $\eta = \eta(x,y)$ (7-е уравнение при этом удовлетворяется тождественно). Таким образом, имеем

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(x,y), \quad \zeta = \zeta(x,y,u), \tag{57}$$

и оставшиеся уравнения первой системы записываются так:

$$\begin{aligned} &u_y^2: && \zeta_{uu} = 0, \\ &u_x: && -u\xi'_x + 2u\eta_y + \zeta = 0, \\ &u_y: && \eta_{yy} + v\eta_y - u\eta_x - 2\zeta_{yu} + \chi = 0, \\ &1: && f'_x\xi - \zeta_{yy} + u\zeta_x + v\zeta_y - f\zeta_u + 2f\eta_y = 0. \end{aligned} \tag{58}$$

Во второй системе в силу (57) тождественно выполняются уравнения 1, 2, 5, а остальные принимают вид:

$$\begin{aligned} &u_x: && \zeta_u - \chi_v + \eta_y - \xi_x = 0, \\ &u_y: && \chi_u - \eta_x = 0, \\ &1: && \zeta_x + \chi_y = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Из первого уравнения (58) следует, что $\zeta = \zeta_1(x,y)u + \zeta_0(x,y)$. Подстановка этого выражения во второе уравнение (58) и расщепление по переменной u дает $\zeta_0 \equiv 0$. Аналогичная процедура с четвертым уравнением (58) позволяет найти $\zeta_1 = C_1 = \text{const}$, т. е.

$$\zeta = C_1 u. \tag{60}$$

Учитывая эту зависимость, из второго уравнения (58) и последнего уравнения (59) имеем

$$\eta = \tfrac{1}{2}(\xi_x - C_1)y + h(x), \qquad \chi = \chi(x,u,v), \tag{61}$$

где $h = h(x)$ — произвольная функция. Подстановка выражений (60), (61) в третье и четвертое уравнения системы (58) и второе уравнение системы (59) приводит к следующей системе из трех уравнений:

$$\begin{aligned} &\chi = \tfrac{1}{2}\xi''_{xx}yu + h'_x u - \tfrac{1}{2}(\xi'_x - C_1)v, \\ &f'_x\xi + f(\xi'_x - 2C_1) = 0, \\ &\chi_u - \eta_x = 0. \end{aligned} \tag{62}$$

(Первое уравнение (59) совпадает с первым уравнением (62), продифференцированным по v.)

Так как χ не зависит от y, то из первого уравнения (62) имеем $\xi''_{xx} = 0$, т. е.

$$\xi = C_2 x + C_3.$$

Подставим это выражение в первое и последнее уравнения системы (62) и учтем зависимости (60) и (61). Переобозначив константы, находим координаты оператора (51):

$$\xi = C_1 + (C_2 + 2C_3)x, \quad \eta = C_3 y + h(x), \quad \zeta = C_2 u, \quad \chi = -C_3 v + h'(x)u. \tag{63}$$

К этим формулам надо добавить условие

$$\bigl[C_1 + (C_2 + 2C_3)x\bigr]f'(x) = (C_2 - 2C_3)f(x), \tag{64}$$

которое является следствием второго уравнения (62) и содержит функцию $f(x)$ и постоянные интегрирования C_n.

Симметрии уравнений гидродинамического пограничного слоя. Используя (64), проведем классификацию симметрий системы уравнений пограничного слоя (55) для всех $f(x)$.

1°. Чтобы удовлетворить условию (64) при произвольной функции $f(x)$, надо положить $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Подставляя эти значения в (63), находим координаты $\xi = \zeta = 0$, $\eta = h(x)$, $\chi = h'(x)u$, которые определяют допустимый оператор:

$$X_0 = h(x)\partial_y + h'(x)u\partial_v. \tag{65}$$

ТАБЛИЦА 9

Симметрии системы уравнений гидродинамического пограничного слоя (55), $a = \mathrm{const}$

Функция $f(x)$	Оператор	Инвариант 1	Инвариант 2	Инвариант 3
Произвольная	$X_0 = h(x)\partial_y + h'(x)u\partial_v$	x	u	$v-(\ln h)'_x yu$
0	$X_1 = \partial_x$ $X_2 = x\partial_x + u\partial_u$ $X_3 = 2x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v$	y y $yx^{-1/2}$	u u/x u	v v $x^{1/2}v$
a	$X_1 = \partial_x$ $X_2 = 4x\partial_x + y\partial_y + 2u\partial_u - v\partial_v$	y $yx^{-1/4}$	u $ux^{-1/2}$	v $x^{1/4}v$
ae^x	$X_1 = 2x\partial_x - y\partial_y + 2u\partial_u - v\partial_v$	$yx^{1/2}$	u/x	$x^{1/2}v$
ax^n, $n \neq 0$	$X_1 = 4x\partial_x - (n-1)y\partial_y +$ $+2(n+1)u\partial_u + (n-1)v\partial_v$	$yx^{\frac{n-1}{4}}$	$x^{-\frac{n+1}{2}}u$	$x^{\frac{1-n}{4}}v$

2°. При $f(x) = 0$ условие (64) выполняется тождественно при любых C_n и с учетом (63) дает три оператора:

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x && (C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = 0,\ h = 0);\\ &X_2 = x\partial_x + u\partial_u && (C_2 = 1,\ C_1 = C_3 = 0,\ h = 0);\\ &X_3 = 2x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v && (C_3 = 1,\ C_1 = C_2 = 0,\ h = 0), \end{aligned} \tag{66}$$

к которым надо добавить оператор (65) (этот оператор добавляется и во всех других случаях).

3°. При $f(x) \equiv 1$ из условия (64) получим $C_2 = 2C_3$. В этом случае, помимо оператора (65), допускаются два оператора: X_1, $2X_2 + X_3$, где X_n определяются формулами (66).

4°. При $f(x) = \pm e^x$ из условия (64) находим $C_1 = -4C_3$, $C_2 = -2C_3$, что соответствует одному оператору $4X_1 + 2X_2 - X_3$.

5°. При $f(x) = \pm x^n$ $(n \neq 0)$ имеем $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{2(1+n)}{(1-n)}$, что дает один оператор $2(n+1)X_2 - (n-1)X_3$.

Итоговые результаты классификации симметрий системы уравнений пограничного слоя (55) и соответствующие инварианты представлены в табл. 9. Инварианты I_n определяются первыми интегралами характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{du}{\zeta} = \frac{dv}{\chi},$$

соответствующей линейному уравнению с частными производными первого порядка $XI = 0$.

Замечание 1. Первый инвариант выбирался линейным по переменной y (когда это можно было сделать). Это упрощает выкладки, поскольку в уравнения входит старшая производная по y, а порядок производных по x меньше. Напомним, что вместо инвариантов I_n можно использовать $F_n(I_n)$, где функции F_n выбираются из соображений удобства.

Замечание 2. Симметрия X_0 соответствует инвариантности системы уравнений (55) по отношению к преобразованию

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y} + h(x), \quad u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} - h'_x u,$$

где $h = h(x)$ — произвольная функция.

Точные решения уравнений гидродинамического пограничного слоя. Точные решения ищутся в виде

$$I_2 = \Phi(I_1), \quad I_3 = \Psi(I_1), \tag{67}$$

где I_n — инварианты, а функции Φ и Ψ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается в результате подстановки выражений (67) в исходную систему уравнений (55).

1°. Для произвольной функции $f(x)$ точное решение ищем в виде (см. первую строку в табл. 9)

$$u = \Phi(x), \quad v = (\ln h)'_x yu + \Psi(x). \tag{68}$$

Подставив выражения (68) в (55), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая легко интегрируется. Имеем

$$\Phi(x) = \pm\Big[C_1 - 2\int f(x)\,dx\Big]^{1/2}, \quad h(x) = \frac{C_1}{\Phi(x)}, \quad \Psi(x)\text{ — произвольная функция,} \tag{69}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Решение (68)–(69) соответствует невязкому течению жидкости, поскольку $u_{yy} = 0$.

2°. При $f(x) = 0$ инварианты первого оператора в табл. 9 дают одномерное решение, которое не зависит от координаты x. Подставив $u = u(y)$, $v = v(y)$ в систему (55) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} &u = C_2 \exp(C_1 y) + C_3, && v = C_1, && \text{если } C_1 \neq 0;\\ &u = C_2 y + C_3, && v = 0, && \text{если } C_1 = 0. \end{aligned}$$

При $f(x) = 0$ инварианты второго оператора в табл. 9 соответствуют решению вида

$$u = x\varphi(y), \quad v = \psi(y), \tag{70}$$

где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \psi\varphi'_y &= \varphi''_{yy},\\ \varphi + \psi'_y &= 0, \end{aligned}$$

которая возникает в результате подстановки выражений (70) в исходную систему (55).

При $f(x) = 0$ инварианты третьего оператора (см. табл. 9) приводят к автомодельному решению

$$u = U(\theta), \quad v = x^{-1/2}V(\theta), \quad \theta = yx^{-1/2},$$

где функции $U(\theta)$ и $V(\theta)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\theta U U'_\theta + V U'_\theta &= U''_{\theta\theta},\\ -\tfrac{1}{2}\theta U'_\theta + V'_\theta &= 0. \end{aligned}$$

3°. Аналогичным образом строятся точные решения и для других функций $f(x)$, которые приведены в табл. 9.

Задачи и упражнения к разд. 7.5

1. Найти инвариантные решения системы уравнений стационарного гидродинамического пограничного слоя (55) в случаях:

a) $f(x) = a$,
b) $f(x) = ae^x$,
c) $f(x) = ax^n$.

Указание. Воспользоваться результатами классификации симметрий данной системы, которые приведены в табл. 9.

2. Найти допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений установившегося околозвукового течения газа

$u_y = v_x, \quad v_y = -uu_x.$

3. Найти допустимые операторы и инвариантные решения нелинейной системы уравнений одномерных длинноволновых колебаний упругого стержня

$u_t - v_x = 0, \quad v_t = -f(u)u_x.$

Провести классификацию симметрий системы уравнений для всех $f(u)$.

4. Найти допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений одномерного изэнтропического движения идеального газа

$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + f(\rho)\rho_x = 0.$

Провести классификацию симметрий системы уравнений для всех $f(\rho)$.

5. Найти допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений двумерного установившегося течения идеальной несжимаемой жидкости

$uu_x + vu_y = -p_x, \quad uv_x + vv_y = -p_y, \quad u_x + v_y = 0.$

Замечание. Рассматриваемая система может быть сведена к системе из двух уравнений путем исключения давления p. Если затем ввести функцию тока ψ по формулам $u=\psi_y$, $v=-\psi_x$, то полученная система приводится к одному уравнению.

6. Найти допустимые операторы и инвариантные решения систем уравнений:

a) $u_t = u_{xx} + u^k f(u/w), \ w_t = u^m g(u/w)$;

b) $u_t = u_{xx} + u^k f(u/w), \ w_t + aw_x = u^m g(u/w)$.

Провести классификацию симметрий систем для всех $f(z)$, $g(z)$.

7. Найти допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений массо- и тепло-переноса с объемными химическими реакциями:

$u_t = au_{xx} + u^k f(u^n w^m), \quad w_t = bw_{xx} + u^p g(u^n w^m)$

Провести классификацию симметрий системы уравнений для всех $f(z)$, $g(z)$.

Литература к главе 7: Л. В. Овсянников (1959, 1962, 1978), Ю. Н. Павловский (1961), G. W. Bluman, J. D. Cole (1974), J. M. Hill (1982, 1992), Н. Х. Ибрагимов (1983), Б. Д. Аннин, В. О. Бытеев, С. И. Сенашов (1985), D. H. Sattinger, O. L. Weaver (1986), П. Олвер (1989), В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов (1989), G. W. Bluman, S. Kumei (1989), H. Stephani (1989), N. H. Ibragimov (1994, 1995), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), G. Gaeta (1994), А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (1997), G. Baumann (2000), П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно (2001), D. M. Klimov, V. Ph. Zhuravlev (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004), А. Д. Полянин (2004), В. И. Лагно, С. В. Спичак, В. И. Стогний (2004).