Глава 9 книги А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. И. Журова «Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики» — М.: Физматлит, 2005 (в печати).

9. Метод дифференциальных связей

9.1. Описание метода

9.1.1. Предварительные замечания. Простейший пример

В разд. 4.1.2 и 4.4.2 рассматривались примеры точных решений нелинейных уравнений с аддитивным разделением переменных вида

$$w(x,y)=\varphi(x)+\psi(y). \tag{1}$$

На начальной стадии функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ считаются произвольными; они подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Дифференцируя выражение (1) по y, получим

$$\frac{\partial w}{\partial y}=f(y) \qquad (f=\psi'_y). \tag{2}$$

Обратно, из (2) следует представление решения в виде (1).

Дифференцируя далее (2) по x, имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0. \tag{3}$$

Обратно, из (3) следует представление решения в виде (1).

Таким образом задачу о поиске точных решений вида (1) для конкретного дифференциального уравнения с частными производными можно заменить эквивалентной задачей о поиске точных решений данного уравнения, удовлетворяющих дополнительному условию (2) или (3). Подобные дополнительные условия, записанные в виде одного или нескольких дифференциальных уравнений, будем называть *дифференциальными связями*. Порядок дифференциальной связи определяется порядком старшей производной: например, порядок дифференциальной связи (2) равен единице, а порядок дифференциальной связи (3) — двум.

Прежде чем перейти к общему описанию метода дифференциальных связей, продемонстрируем его характерные особенности на простом примере.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=b\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \tag{4}$$

которое при $a=-1$ встречается в теории гидродинамического пограничного слоя.

Будем искать решения уравнения (4), удовлетворяющие линейной дифференциальной связи первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\varphi(y). \tag{5}$$

Здесь функция $\varphi(y)$, вообще говоря, не может быть произвольной, она должна удовлетворять условию совместности уравнений (4) и (5). Условие совместности представляет собой дифференциальное уравнение для определения $\varphi(y)$ и является следствием уравнений (4) и (5) и их дифференциальных следствий.

Последовательно дифференцируя (5) по разным переменным, вычислим производные

$$w_{xx}=0,\quad w_{xy}=\varphi'_y,\quad w_{xxy}=0,\quad w_{xyy}=\varphi''_{yy},\quad w_{xyyy}=\varphi'''_{yyy}. \tag{6}$$

Дифференцируя (4) по x, имеем

$$w_{xy}^2+w_yw_{xxy}+aw_{xx}w_{yy}+aw_xw_{xyy}=bw_{xyyy}. \tag{7}$$

Подставляя в (7) производные функции w из (5) и (6), получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для φ:

$$(\varphi'_y)^2+a\varphi\varphi''_{yy}=b\varphi'''_{yyy}, \tag{8}$$

которое представляет собой условие совместности уравнений (4) и (5).

Для построения точного решения проинтегрируем уравнение (5). Имеем

$$w=\varphi(y)x+\psi(y). \tag{9}$$

Функцию $\psi(y)$ найдем, подставив (9) в (4) с учетом соотношения (8). В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\varphi'_y\psi'_y+a\varphi\psi''_{yy}=b\psi'''_{yyy}. \tag{10}$$

В итоге имеем точное решение вида (9), где функции φ и ψ описываются уравнениями (8) и (10).

Замечание 1. Данное решение проще получить прямой подстановкой выражения (9) в исходное уравнение (4).

Замечание 2. Полученные результаты распространяются на более общий случай, когда в уравнение (4) входят произвольные функции $a=a(y)$ и $b=b(y)$.

9.1.2. Общее описание метода дифференциальных связей

Процедура построения точных решений нелинейных уравнений математической физики методом дифференциальных связей состоит из нескольких последовательных этапов, кратко описанных ниже.

1°. В общем случае выделение частных решений уравнения

$$F\Big(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ldots\Big)=0 \tag{11}$$

осуществляется путем присоединения к нему дополнительной дифференциальной связи

$$G\Big(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ldots\Big)=0. \tag{12}$$

Вид дифференциальной связи (12) может задаваться:

• из априорных соображений (она, например, может представлять собой разрешимое уравнение);

• исходя из некоторых свойств рассматриваемого уравнения (например, его симметрий или законов сохранения).

2°. Полученная таким образом переопределенная система (11)–(12) в общем случае нуждается в исследовании на совместность. При задании дифференциальной связи (12) из априорных соображений она должна иметь достаточный функциональный произвол (т. е. включать в себя произвольные определяющие функции). В результате анализа системы (11)–(12) на совместность должны быть получены условия, конкретизирующие вид определяющих функций. Эти условия (*условия совместности*) записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (или системы уравнений с частными производными).

В простейших случаях* исследование на совместность проводится путем дифференцирования уравнений (11) и (12) по x и y (надлежащее число раз) и исключения из полученных таким образом дифференциальных следствий и уравнений (11)–(12) старших производных (см. примеры 1 и 3). В результате приходят к уравнению, которое содержит степени младших производных. Приравнивание нулю коэффициентов при всех степенях производных и дает условия совместности, которые связывают функциональные коэффициенты уравнений (11) и (12).

3°. Решается полученная в п. 2° система дифференциальных уравнений для определяющих функций. Затем эти функции подставляются в дифференциальную связь (12). В результате приходят к уравнению

$$g\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dots\Big) = 0. \qquad (13)$$

Дифференциальную связь (13), которая совместна с рассматриваемым уравнением (11), называют *инвариантным многообразием* для уравнения (11).

4°. Надо найти общее решение: (i) уравнения (13) или (ii) какого-либо следствия уравнений (11) и (13). Полученное решение будет включать в себя некоторые произвольные функции $\{\varphi_m\}$ (эти функции могут зависеть как от x, y, так и от w). Отметим, что в ряде случаев вместо общего решения можно использовать частные решения уравнения (13) или его следствий.

5°. Решение, полученное в п. 4°, надо подставить в исходное уравнение (11). В результате приходят к функционально-дифференциальному уравнению, из которого надо найти функции $\{\varphi_m\}$. После определения $\{\varphi_m\}$ их надо подставить в решение из п. 4°. В итоге получим точное решение исходного уравнения (11).

Замечание 1. При неудачном выборе дифференциальной связи уравнения (11) и (12) могут оказаться несовместными (не имеющими общих решений).

Замечание 2. Вместо одной могут быть несколько дифференциальных связей вида (12).

Замечание 3. На последних трех этапах метода дифференциальных связей приходится решать различные уравнения (системы уравнений). Если хотя бы на одном из этих этапов решение получить не удается, то не удается построить и точное решение исходного уравнения.

Для большей наглядности общая схема применения метода дифференциальных связей изображена на рис. 6.

Задачи и упражнения к разд. 9.1

1. Найти дифференциальные связи первого и второго порядков, эквивалентные заданию решения в явном виде (функции φ и ψ считаются произвольными):

a) $w = \varphi(x)y + \psi(x)$,

b) $w = \varphi(x)y + \psi(y)$,

---

* В общем случае надо использовать методы исследования переопределенных систем, основанные: (i) на алгоритме Картана или (ii) на алгоритме Жане — Спенсера — Кураниши (Janet — Spenser — Kuranishi). Описание этих алгоритмов и другие сведения по теории переопределенных систем можно найти, например, в работах M. Kuranishi (1967), J. F. Pommaret (1978), А. Ф. Сидорова, В. П. Шапеева, Н. Н. Яненко (1984).

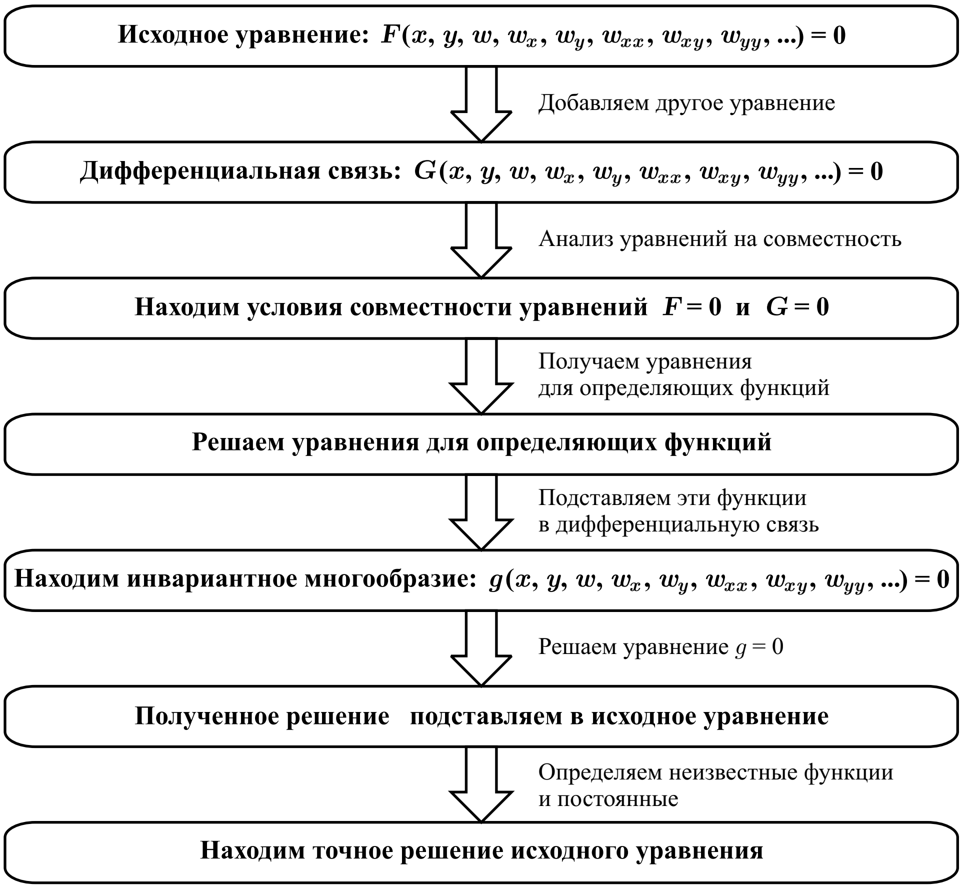

Рис. 6. Алгоритм построения точных решений методом дифференциальных связей.

c) $w = \varphi(y)x^2 + \psi(y)$,
d) $w = \varphi(x)y^n + \psi(x)$,
e) $w = x\varphi(y) + y\psi(x)$,
f) $w = \varphi(x) + \psi(x + y)$,
g) $w = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$,
h) $w = \varphi(x + y) + \psi(x + ay)$.

Указание. Надо исключить одну или две функции φ и ψ из исходного выражения и его дифференциальных следствий.

2. Найти дифференциальные связи второго порядка, эквивалентные заданию решения в неявном виде:

a) $\int \varphi(w)\,dw = \psi(x) + ay$,

b) $\int f(w)\,dw = \varphi(x) + \psi(y)$.

Литература к разд. 9.1: Н. Н. Яненко (1964), А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко (1984), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

* Это решение обычно содержит некоторые произвольные функции и постоянные.

9.2. Дифференциальные связи первого порядка

9.2.1. Эволюционные уравнения второго порядка

Рассмотрим общее эволюционное уравнение второго порядка в разрешенном относительно старшей производной виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{F}\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}\Big). \tag{14}$$

Дополним его дифференциальной связью первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{G}\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big). \tag{15}$$

Условие совместности этих уравнений определяется путем однократного дифференцирования (14) по t и двукратного дифференцирования (15) по x с последующим приравниванием полученных третьих производных w_{xxt}:

$$\mathrm{D}_t \mathcal{F} = \mathrm{D}_x^2 \mathcal{G}. \tag{16}$$

Здесь D_t и D_x — операторы полного дифференцирования по t и x:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + w_t \frac{\partial}{\partial w} + w_{xt} \frac{\partial}{\partial w_x} + w_{tt} \frac{\partial}{\partial w_t}, \\ \mathrm{D}_x &= \frac{\partial}{\partial x} + w_x \frac{\partial}{\partial w} + w_{xx} \frac{\partial}{\partial w_x} + w_{xt} \frac{\partial}{\partial w_t}. \end{aligned} \tag{17}$$

Частные производные w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt} в (17) должны быть выражены через x, t, w, w_x с помощью (14) и (15) и их дифференциальных следствий. В результате имеем

$$\begin{aligned} &w_t = \mathcal{G}, \quad w_{xx} = \mathcal{F}, \quad w_{xt} = \mathrm{D}_x \mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + w_x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x}, \\ &w_{tt} = \mathrm{D}_t \mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + w_{xt} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + \Big(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + w_x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x}\Big) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x}. \end{aligned} \tag{18}$$

В выражении для $\mathcal{F}$ в силу (15) производную w_t надо заменить на $\mathcal{G}$.

Пример 2. Выделим из класса нелинейных уравнений теплопроводности с источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w) \frac{\partial w}{\partial x}\Big] + g(w) \tag{19}$$

уравнения, которые обладают инвариантными многообразиями простейшего вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varphi(w). \tag{20}$$

Уравнения (19) и (20) являются частными случаями (14) и (15) при

$$\mathcal{F} = \frac{w_t - f'(w) w_x^2 - g(w)}{f(w)} = \frac{\varphi(w) - g(w) - f'(w) w_x^2}{f(w)}, \quad \mathcal{G} = \varphi(w).$$

Функции $f(w)$, $g(w)$, $\varphi(w)$ заранее не известны и подлежат определению в процессе анализа.

По формулам (18) и (17) найдем частные производные и операторы полного дифференцирования:

$$\begin{aligned} &w_t = \varphi, \quad w_{xx} = \mathcal{F}, \quad w_{xt} = \varphi' w_x, \quad w_{tt} = \varphi\varphi', \\ &\mathrm{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial w} + \varphi' w_x \frac{\partial}{\partial w_x} + \varphi\varphi' \frac{\partial}{\partial w_t}, \quad \mathrm{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + w_x \frac{\partial}{\partial w} + \mathcal{F} \frac{\partial}{\partial w_x} + \varphi' w_x \frac{\partial}{\partial w_t}. \end{aligned}$$

Подставим выражения для D_x и D_t в условие совместности (16). После некоторых вычислений получим

$$f\left[\frac{(f\varphi)'}{f}\right]' w_x^2 + \frac{\varphi - g}{f}\varphi' - \varphi\left(\frac{\varphi - g}{f}\right)' = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому равенству для любых w_x, надо положить

$$\left[\frac{(f\varphi)'}{f}\right]' = 0, \qquad \frac{\varphi - g}{f}\varphi' - \varphi\left(\frac{\varphi - g}{f}\right)' = 0. \tag{21}$$

Невырожденный случай. Считая функцию $f = f(w)$ заданной, получим трехпараметрическое решение уравнений (21) относительно функций $g = g(w)$ и $\varphi(w)$:

$$g(w) = \frac{a + cf}{f}\left(\int f\,dw + b\right), \qquad \varphi(w) = \frac{a}{f}\left(\int f\,dw + b\right), \tag{22}$$

где a, b, c — произвольные постоянные.

Подставим $\varphi(w)$ из (22) в уравнение (20). Интегрируя, получим

$$\int f\,dw = \theta(x)e^{at} - b. \tag{23}$$

Дифференцируя (23) по x и t, имеем $w_t = ae^{at}\theta/f$, $w_x = e^{at}\theta'_x/f$. Подставив эти выражения в (19) с учетом (22), приходим к уравнению $\theta''_{xx} + c\theta = 0$, общее решение которого имеет вид

$$\theta = \begin{cases} C_1 \sin\bigl(x\sqrt{c}\bigr) + C_2 \cos\bigl(x\sqrt{c}\bigr) & \text{при} \ \ c > 0, \\ C_1 \operatorname{sh}\bigl(x\sqrt{-c}\bigr) + C_2 \operatorname{ch}\bigl(x\sqrt{-c}\bigr) & \text{при} \ \ c < 0, \\ C_1 x + C_2 & \text{при} \ \ c = 0, \end{cases} \tag{24}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Формулы (23)–(24) описывают точные решения (в неявной форме) уравнения (19) для произвольной функции $f(w)$ и функции $g(w)$, заданной формулой (22).

Вырожденный случай. Имеется также двухпараметрическое решение уравнений (21) относительно функций $g = g(w)$ и $\varphi(w)$ (как и ранее, f считается произвольной):

$$g(w) = \frac{b}{f} + c, \qquad \varphi(w) = \frac{b}{f},$$

где b и c — произвольные постоянные. Его можно получить из (22), переобозначив $b \to b/a$, $c \to ac/b$ и устремив a к нулю. После несложных вычислений получим соответствующее решение уравнения (19) в неявной форме

$$\int f\,dw = bt - \frac{1}{2}cx^2 + C_1 x + C_2.$$

Продемонстрируем на конкретных примерах, как можно проводить вычисления, не прибегая к общим формулам (16)–(18).

Пример 3. Рассмотрим задачу отыскания нелинейных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + f_0(w), \tag{25}$$

обладающих инвариантными многообразиями первого порядка вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = g_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + g_0(w). \tag{26}$$

Уравнения (25) и (26) являются частными случаями (14) и (15) при $\mathcal{F} = w_t - f_1(w)w_x - f_0(w)$ и $\mathcal{G} = g_1(w)w_x + g_0(w)$. Функции $f_1(w)$, $f_0(w)$, $g_1(w)$, $g_0(w)$ заранее не известны и подлежат определению в процессе анализа.

Сначала вычислим производные. Приравнивая правые части (25) и (26), имеем

$$w_{xx} = h_1 w_x + h_0, \qquad \text{где} \quad h_1 = g_1 - f_1, \quad h_0 = g_0 - f_0. \tag{27}$$

Здесь и далее опускается аргумент функций f_1, f_0, g_1, g_0, h_1, h_0. Дифференцируя (26) два раза по x и используя выражение (27) для w_{xx}, находим смешанные производные

$$w_{xt} = g_1 w_{xx} + g_1' w_x^2 + g_0' w_x = g_1' w_x^2 + (g_1 h_1 + g_0')w_x + g_1 h_0,$$
$$w_{xxt} = g_1'' w_x^3 + (g_1 h_1' + 3g_1' h_1 + g_0'')w_x^2 + (g_1 h_0' + 3g_1' h_0 + g_1 h_1^2 + g_0' h_1)w_x + (g_1 h_1 + g_0')h_0, \tag{28}$$

где штрих обозначает производную по w. Дифференцируя (27) по t и используя выражения (26) и (28) для w_t и w_{xt}, имеем

$$\begin{aligned} w_{xxt} &= h_1 w_{xt} + h_1' w_x w_t + h_0' w_t = \\ &= (g_1 h_1' + g_1' h_1)w_x^2 + (g_1 h_1^2 + g_0' h_1 + g_0 h_1' + g_1 h_0')w_x + g_1 h_0 h_1 + g_0 h_0'. \end{aligned} \tag{29}$$

Приравняем теперь третьи производные w_{xxt} из (28) и (29) и «соберем» члены при одинаковых степенях w_x. В результате получим условие инвариантности в виде

$$g_1'' w_x^3 + (2g_1' h_1 + g_0'')w_x^2 + (3g_1' h_0 - g_0 h_1')w_x + g_0' h_0 - g_0 h_0' = 0. \tag{30}$$

Условие (30) будет выполняться, если приравнять нулю коэффициенты при всех степенях w_x:

$$g_1'' = 0, \quad 2g_1' h_1 + g_0'' = 0, \quad 3g_1' h_0 - g_0 h_1' = 0, \quad g_0' h_0 - g_0 h_0' = 0.$$

Решение этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений описывается формулами:

$$\begin{aligned} &g_1 = C_1 w + C_2, \quad g_0 = -C_1^2 C_3 w^3 - C_1 C_4 w^2 + C_5 w + C_6, \\ &h_1 = 3C_1 C_3 w + C_4, \quad h_0 = C_3 g_0, \end{aligned} \tag{31}$$

где C_1, $\ldots$, C_6 — произвольные постоянные. Используя равенства (27) для h_1, h_0 и (31), определяем искомые функции, входящие в уравнения (25) и (26):

$$\begin{aligned} &f_1(w) = C_1(1 - 3C_3)w + C_2 - C_4, \\ &f_0(w) = (-C_1^2 C_3 w^3 - C_1 C_4 w^2 + C_5 w + C_6)(1 - C_3), \\ &g_1(w) = C_1 w + C_2, \quad g_0(w) = -C_1^2 C_3 w^3 - C_1 C_4 w^2 + C_5 w + C_6. \end{aligned} \tag{32}$$

Рассмотрим подробнее один частный случай. Положим в (32):

$$C_1 = -k, \quad C_2 = C_4 = 0, \quad C_3 = -1/k, \quad C_5 = ak, \quad C_6 = bk,$$

где a, b, k — произвольные постоянные ($k \neq 0$). Соответствующее уравнение (25) и инвариантное многообразие (26) имеют вид

$$w_t = w_{xx} - (k+3)w w_x + (k+1)(w^3 + aw + b), \tag{33}$$
$$w_t = -k w w_x + k(w^3 + aw + b). \tag{34}$$

Общее решение квазилинейного уравнения первого порядка (34) записывается в неявной форме и содержит интеграл $I(w) = \int w(w^3 + aw + b)^{-1}\,dw$ и его обращение. Столь сложный вид делает его неудобным для построения точных решений уравнения (33).

В данном случае вместо (34) можно использовать следствие уравнений (33) и (34), полученное путем исключения производной по t:

$$w_{xx} = 3w w_x - w^3 - aw - b. \tag{35}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение соответствует подстановке выражений (31) для h_1 и h_0 в (27). Замена $w = -U_x/U$ преобразует (35) к линейному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$U_{xxx} + aU_x - bU = 0, \tag{36}$$

решения которого определяются корнями кубического уравнения $\lambda^3 + a\lambda - b = 0$. В частности, если все корни λ_n действительны, то общие решения уравнений (35) и (36) определяются по формулам

$$w = -U_x/U, \quad U = r_1(t)\exp(\lambda_1 x) + r_2(t)\exp(\lambda_2 x) + r_3(t)\exp(\lambda_3 x). \tag{37}$$

Функции $r_n(t)$ находятся путем подстановки выражения (37) в уравнение (33) [или в уравнение (34)].

Отметим, что более подробно уравнение (33) исследовано другим методом в разд. 6.3 (см. пример 7 при $b_0 = 0$).

Пример 4. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + w^2. \tag{38}$$

Зададим дифференциальную связь первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi(x,t), \tag{39}$$

где φ — некоторая (пока произвольная) функция своих аргументов. Тогда исходное уравнение (38) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi^2 + w^2. \tag{40}$$

Найдем условие совместности соотношений (39) и (40). Для этого продифференцируем (39) по t, а (40) — по x, а затем исключим из полученных выражений смешанную производную с учетом равенства $w_{xt} = w_{tx}$. Заменив согласно (39) производную w_x на φ, имеем

$$\varphi_t = \varphi_{xx} + 2\varphi\varphi_x + 2w\varphi.$$

Выразим отсюда w:

$$w = \frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}. \tag{41}$$

Подставив (41) в (39) и (40), получим переопределенную систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}\right) = \varphi, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}\right) = \varphi_x + \varphi^2 + \left(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}\right)^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Решение первого уравнения (42) ищем методом разделения переменных в виде произведения функций разных аргументов $\varphi(x,t) = \psi(t)\theta(x)$. Элементарные выкладки показывают, что первому уравнению (42) удовлетворяет функция

$$\varphi(x,t) = \psi(t)\sin(x + C), \tag{43}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная. Подставляя выражение (43) во второе уравнение (42), приходим к уравнению для определения функции $\psi(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\psi + \psi}{2\psi}\right) = \left(\frac{\dot\psi + \psi}{2\psi}\right)^2 + \psi^2 \tag{44}$$

(точка обозначает производную по t). Если решение автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (44) получено, то решение исходного уравнения (38) может быть найдено по формуле

$$w(x,t) = \frac{\dot\psi + \psi}{2\psi} - \psi\cos(x + C),$$

которая получается путем подстановки выражения (43) в (41).

Замечание 1. В общем случае для заданной функции $\mathcal{F}$ условие совместности (16) представляет собой нелинейное уравнение с частными производными для функции $\mathcal{G}$, которое имеет бесконечное множество решений (теорема о локальном существовании решений). Поэтому уравнение с частными производными второго порядка (14) допускает бесконечное множество совместных дифференциальных связей первого порядка (15).

Замечание 2. В общем случае решение уравнения с частными производными первого порядка (15) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений [см. Э. Камке (1965) и В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003)].

Замечание 3. Вместо дифференциальной связи первого порядка (15) в ряде случаев удобнее использовать дифференциальную связь второго порядка, которая возникает в результате исключения производной по времени из уравнений (14) и (15). Полученная дифференциальная связь может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной x с параметром t (см. разд. 9.3.1).

9.2.2. Гиперболические уравнения второго порядка

Аналогичным образом рассматривается гиперболическое уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = \mathcal{F}\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}\Big), \tag{45}$$

дополненное дифференциальной связью первого порядка (15). Считаем, что $\mathcal{G}_{w_x} \neq 0$.

Условие совместности уравнений определяется путем однократного дифференцирования (45) по t и двукратного дифференцирования (15) по t и по x с последующим приравниванием полученных третьих производных w_{xtt}:

$$\mathrm{D}_t \mathcal{F} = \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_t \mathcal{G}]. \tag{46}$$

Здесь D_t и D_x — операторы полного дифференцирования (17), в которых частные производные w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt} должны быть выражены через x, t, w, w_x с помощью (45) и (15) и их дифференциальных следствий.

Покажем, как вычисляются вторые производные. Продифференцируем (15) по x и заменим смешанную производную правой частью (45). Находим выражение для второй производной по x:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + w_x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + w_{xx} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x} = \mathcal{F}\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}\Big) \implies \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{H}_1\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big). \tag{47}$$

Здесь и далее учитывается, что с помощью (15) производную по t можно выразить через производную по x. Дифференцируя далее (15) по t, имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + w_t \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + w_{xt} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x} \implies \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mathcal{H}_2\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big). \tag{48}$$

Заменяя в (17) производные w_t, w_{xt}, w_{xx}, w_{tt} их выражениями из (15), (45), (47), (48), находим операторы полного дифференцирования D_t и D_x, которые должны использоваться в условии совместности (46).

Пример 5. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = f(w). \tag{49}$$

Дополним (49) квазилинейной дифференциальной связью вида

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi(t) g(w). \tag{50}$$

Дифференцируя (49) по x и заменяя затем первую производную по x правой частью равенства (50), имеем

$$w_{xxt} = \varphi g f'_w. \tag{51}$$

Дифференцируя далее (50) по x и t, получим два соотношения:

$$w_{xx} = \varphi g'_w w_x = \varphi^2 g g'_w, \tag{52}$$

$$w_{xt} = \varphi'_t g + \varphi g'_w w_t. \tag{53}$$

Исключив в (53) смешанную производную с помощью уравнения (49), найдем первую производную по t:

$$w_t = \frac{f - \varphi'_t g}{\varphi g'_w}. \tag{54}$$

Дифференцируя (52) по t и заменяя w_t правой частью (54), имеем

$$w_{xxt} = 2\varphi\varphi'_t g g'_w + \varphi^2 (g g'_w)'_w w_t = 2\varphi\varphi'_t g g'_w + \varphi (g g'_w)'_w \frac{f - \varphi'_t g}{g'_w}. \tag{55}$$

Приравнивая теперь третьи производные (51) и (55), после сокращения на φ и элементарных преобразований приходим к определяющему уравнению

$$\varphi'_t g[(g'_w)^2 - g g''_{ww}] = g g'_w f'_w - f(g g'_w)'_w, \tag{56}$$

которое имеет два различных решения.

Решение 1. Уравнение (56) удовлетворяется тождественно для любой функции $\varphi = \varphi(t)$, если положить

$$(g'_w)^2 - g g''_{ww} = 0,$$
$$g g'_w f'_w - f(g g'_w)'_w = 0.$$

Общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$f(w) = a e^{\lambda w}, \quad g(w) = b e^{\lambda w/2}, \tag{57}$$

где a, b, λ — произвольные постоянные. Для простоты выкладок далее будем полагать

$$a = b = 1, \quad \lambda = -2. \tag{58}$$

Подставим функцию $g(w)$, заданную формулами (57)–(58), в дифференциальную связь (50). Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$w = \ln[\varphi(t)x + \psi(t)], \tag{59}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. Подставляя (59) в уравнение (49) с правой частью (57)–(58), приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $\psi(t)$:

$$\psi\varphi'_t - \varphi\psi'_t = 1.$$

Общее решение этого уравнения дается формулой

$$\psi(t) = C\varphi(t) - \varphi(t)\int \frac{dt}{\varphi^2(t)}, \tag{60}$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом, точное решение нелинейного уравнения $w_{xt} = e^{-2w}$ определяется выражениями (59)–(60), где $\varphi(t)$ — произвольная функция.

Решение 2. Второе решение задается линейной зависимостью

$$\varphi(t) = at + b, \tag{61}$$

где a и b — произвольные постоянные. В этом случае функции $f(w)$ и $g(w)$ связаны одним соотношением (56) при $\varphi'_t = a$. Интегрирование уравнения (50) при условии (61) позволяет найти структуру решения в виде

$$w = w(z), \quad z = (at + b)x + \psi(t), \tag{62}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. Подставим эту зависимость в исходное уравнение (49), а затем заменим x на z с помощью (62). В результате получим

$$[az + (at + b)\psi'_t - a\psi]w''_{zz} + a w'_z = f(w). \tag{63}$$

Для того чтобы это выражение было обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $w = w(z)$, надо положить

$$(at + b)\psi'_t - a\psi = \text{const}.$$

Интегрируя, определяем функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t) = ct + d, \tag{64}$$

где c и d — произвольные постоянные.

Формулы (62) и (64) определяют решение уравнения (49) для произвольной функции $f(w)$. При этом функция $w(z)$ описывается уравнением (63) при условии (64). Частному случаю $a = d = 0$ соответствует решение типа бегущей волны, а случаю $b = c = d = 0$ — автомодельное решение.

9.2.3. Уравнения второго порядка общего вида

Рассмотрим гиперболическое уравнение второго порядка общего вида

$$\mathcal{F}(x, t, w, w_x, w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}) = 0 \tag{65}$$

вместе с дифференциальной связью первого порядка

$$\mathcal{G}(x, t, w, w_x, w_t) = 0. \tag{66}$$

Последовательно дифференцируем уравнения (45) и (46) по обеим переменным для получения дифференциальных следствий, содержащих вторые и третьи производные. Имеем

$$\begin{gathered}\mathrm{D}_x\mathcal{F} = 0, \quad \mathrm{D}_t\mathcal{F} = 0, \quad \mathrm{D}_x\mathcal{G} = 0, \quad \mathrm{D}_t\mathcal{G} = 0,\\ \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_x\mathcal{G}] = 0, \quad \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_t\mathcal{G}] = 0, \quad \mathrm{D}_t[\mathrm{D}_t\mathcal{G}] = 0.\end{gathered} \tag{67}$$

Условие совместности для (65) и (66) можно найти путем исключения из девяти уравнений (65)–(67) производных w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, w_{xxx}, w_{xxt}, w_{xtt}, w_{ttt}. В результате получим выражение вида

$$\mathcal{H}(x, t, w, w_x) = 0. \tag{68}$$

Если левая часть (68) представляет собой полином относительно w_x, то для получения условий совместности надо приравнять нулю функциональные коэффициенты этого полинома.

Задачи и упражнения к разд. 9.2

1. Построить точные решения нелинейного уравнения теплопроводности с источником
$w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,
используя дифференциальные связи первого порядка:
a) $w_x = \varphi(t)g(w)$,
b) $w_x = \varphi(x)g(w)$,
c) $w_t = \varphi(t)g(w)$.

2. Рассмотреть задачу отыскания нелинейных уравнений
$w_t = f(w)w_{xx} + g(w)w_x$,
обладающих инвариантными многообразиями первого порядка:
a) $w_t = \varphi(w)$,
b) $w_x = \varphi(t)\psi(w)$,
c) $w_t = \varphi(w)w_x + \psi(w)$.
Найти соответствующие точные решения.

3. Найти точные решения нелинейных уравнений:
a) $w_t = w_{xx} + (w_x)^2 + aw^2 + bw + c$,
b) $w_t = ww_{xx} + aw^2 + bw + c$,
c) $w_t = (ww_x)_x + aw^2 + bw + c$
с помощью дифференциальной связи первого порядка $w_x = f(x)g(t)$.

Указание. Для проверки результатов исследования уравнения a) см. пример 4 (приведенные там рассуждения использовать для анализа двух других уравнений).

4. Рассмотреть задачу отыскания нелинейных уравнений $w_{xt} = f(w)$, обладающих инвариантными многообразиями первого порядка $w_t = g(w)w_x$. Найти соответствующие точные решения.

5. Рассмотреть задачу отыскания нелинейных уравнений $w_{xt} = f(w)$, обладающих инвариантными многообразиями первого порядка $w_tw_x = g(w)$. Показать, что определяющие функции должны удовлетворять уравнению

$$gg'' - (g')^2 - 2f'g + 3fg' - 2f^2 = 0.$$

Построить соответствующие точные решения.

Литература к разд. 9.2: А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко (1984), V. A. Galaktionov (1994), P. J. Olver (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), P. J. Olver, E. M. Vorob'ev (1996), E. M. Vorob'ev (1996), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

9.3. Дифференциальные связи второго и старших порядков

9.3.1. Дифференциальные связи второго порядка для эволюционных уравнений

1°. При использовании дифференциальных связей второго и более высоких порядков для построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными надо, вообще говоря, уметь строить точные решения этих дифференциальных связей. В общем случае это весьма проблематично. Поэтому для эволюционных уравнений обычно используют дифференциальные связи специального вида, в которые входят производные только по одной переменной x (т. е. фактически рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно x, в которые другая независимая переменная t входит неявно или параметрическим образом; от t будут зависеть постоянные интегрирования).

Задачу о совместности эволюционного уравнения второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{F}_1\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) \tag{69}$$

с дифференциальной связью аналогичного вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{F}_2\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) \tag{70}$$

можно свести к задаче с дифференциальной связью первого порядка, которая рассматривается в разд. 9.2. Для этого надо сначала исключить из уравнений вторую производную w_{xx}. Затем полученное таким образом уравнение первого порядка

$$\Phi\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}\Big) = 0$$

надо исследовать вместе с исходным уравнением (69) [или исходной дифференциальной связью (70)].

2°. Дифференциальную связь (70) для уравнения (69) удобно заменить эквивалентной дифференциальной связью, которая получается путем исключения w_t из (70) с помощью (69). В результате получается дифференциальная связь вида

$$\Psi\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = 0,$$

которую можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной x с параметром t (именно о дифференциальных связях такого вида говорится в п. 1°).

9.3.2. Примеры использования дифференциальных связей для построения точных решений

Пример 6. Выделим из класса нелинейных уравнений теплопроводности с источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_1(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + f_2(w) \tag{71}$$

уравнения, которые обладают инвариантными многообразиями вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g_1(w)\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g_2(w). \tag{72}$$

Функции $f_2(w)$, $f_1(w)$, $g_2(w)$, $g_1(w)$ подлежат определению в процессе анализа.

Исключая из (71) и (72) вторую производную, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\varphi(w)\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\psi(w), \tag{73}$$

где использованы обозначения

$$\varphi(w)=f_1(w)g_1(w)+f_1'(w),\quad \psi(w)=f_1(w)g_2(w)+f_2(w). \tag{74}$$

Условие инвариантности многообразия (72) по отношению к уравнению (71) получим путем дифференцирования (72) по t:

$$w_{xxt}=2g_1w_xw_{xt}+g_1'w_x^2w_t+g_2'w_t.$$

В этом равенстве надо исключить производные w_{xxt}, w_{xt}, w_t с помощью уравнений (72) и (73) и их дифференциальных следствий. В результате имеем

$$(2\varphi g_1^2+3\varphi'g_1+\varphi g_1'+\varphi'')w_x^4+(4\varphi g_1g_2+5\varphi'g_2+\varphi g_2'-g_1\psi'-\psi g_1'+\psi'')w_x^2+2\varphi g_2^2+\psi'g_2-\psi g_2'=0. \tag{75}$$

Далее будем считать, что $g_2\not\equiv 0$. Приравнивая в (75) к нулю коэффициенты при различных степенях w_x, приходим к трем уравнениям, которые удобно записать в форме

$$\begin{gathered}(\varphi'+\varphi g_1)'+2g_1(\varphi'+\varphi g_1)=0,\\ 4g_2(\varphi'+\varphi g_1)+(\varphi g_2-\psi g_1)'+\psi''=0,\\ \varphi=-\tfrac{1}{2}(\psi/g_2)'.\end{gathered} \tag{76}$$

Первому уравнению можно удовлетворить, если положить $\varphi'+\varphi g_1=0$. Соответствующее частное решение системы (76) имеет вид:

$$\varphi=-\frac{1}{2}\mu',\quad \psi=\mu g_2,\quad g_1=-\frac{\mu''}{\mu'},\quad g_2=\left(2C_1+\frac{C_2}{\sqrt{|\mu|}}\right)\frac{1}{\mu'}, \tag{77}$$

где $\mu=\mu(w)$ — произвольная функция. Учитывая соотношения (74), находим функциональные коэффициенты исходного уравнения (71) и инвариантного множества (72):

$$f_1=\left(C_3-\frac{1}{2}w\right)\mu',\quad f_2=(\mu-f_1)g_2,\quad g_1=-\frac{\mu''}{\mu'},\quad g_2=\left(2C_1+\frac{C_2}{\sqrt{|\mu|}}\right)\frac{1}{\mu'}. \tag{78}$$

Уравнение (72) с учетом (78) допускает первый интеграл:

$$w_x^2=\big[4C_1\mu+4C_2\sqrt{|\mu|}+2\sigma_t'(t)\big]\frac{1}{(\mu')^2}, \tag{79}$$

где $\sigma(t)$ — произвольная функция. Исключим w_x^2 в (73) с помощью (79) и подставим функции φ и ψ из (77). Приходим к уравнению

$$\mu'w_t=-C_2\sqrt{|\mu|}-\sigma_t'(t). \tag{80}$$

Рассмотрим подробно частный случай $C_2=C_3=0$. Интегрируя уравнение (80) с учетом равенства $\mu_t=\mu'w_t$, получим

$$\mu=-\sigma(t)+\theta(x), \tag{81}$$

где $\theta(x)$ — произвольная функция. Подставим (81) в (79) и учтем равенство $\mu_x=\mu'w_x$. В результате имеем

$$\theta_x^2-4C_1\theta=2\sigma_t-4C_1\sigma.$$

Приравнивая обе части этого равенства нулю и интегрируя полученные обыкновенные дифференциальные уравнения, находим функции в правой части формулы (81):

$$\sigma(t)=A\exp(2C_1t),\quad \theta(x)=C_1(x+B)^2, \tag{82}$$

где A и B — произвольные постоянные. Таким образом, точное решение уравнения (71) с функциями f_1 и f_2 из (78) при $C_2=C_3=0$ записывается в неявном виде:

$$\mu(w)=-A\exp(2C_1t)+C_1(x+B)^2.$$

В решении и определяющих выражениях (78) функция $\mu(w)$ задается произвольно.

Пример 7. Рассмотрим задачу об определении нелинейных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f_2(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + f_0(w), \tag{83}$$

обладающих инвариантными многообразиями вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + g_0(w). \tag{84}$$

Анализ совместности этих уравнений приводит к следующим зависимостям для определяющих функций:

$$\begin{aligned}
&f_2(w) \text{ — произвольная функция},\\
&f_1(w) = C_1 w + C_2 - (3C_1C_3 w + C_4) f_2(w),\\
&f_0(w) = (-C_1^2 C_3 w^3 - C_1 C_4 w^2 + C_5 w + C_6)[1 - C_3 f_2(w)],\\
&g_1(w) = 3C_1C_3 w + C_4,\\
&g_0(w) = C_3(-C_1^2 C_3 w^3 - C_1 C_4 w^2 + C_5 w + C_6),
\end{aligned} \tag{85}$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

Уравнение (84) может быть проинтегрировано при некоторых значениях постоянных C_n, задающих функции (85). Для этого надо сопоставить уравнения (84) и (35). Построение соответствующих точных решений, как и вывод определяющих соотношений (85), предоставляем читателю в качестве упражнений.

В разд. 9.4 приведены примеры дифференциальных связей второго и третьего порядков, использование которых эквивалентно прямому заданию наиболее распространенных форм точных решений.

Отметим, что дифференциальные связи третьего и более высоких порядков редко используются, поскольку приводят к большим выкладкам и весьма сложным уравнениям (часто более сложным, чем исходные).

Задачи и упражнения к разд. 9.3

1. Построить точные решения нелинейного уравнения теплопроводности (71), используя дифференциальную связь второго порядка (72) при $g_2 \equiv 0$.

Указание. Положить в (75) $g_2 \equiv 0$, а затем показать, что общее решение первых двух уравнений (76) имеет вид

$$\varphi = C_1\mu' + C_2\mu\mu', \quad \psi = \frac{C_3}{\mu'} + \frac{C_4\mu}{\mu'}, \quad g_1 = -\frac{\mu''}{\mu'},$$

где $\mu = \mu(w)$ — произвольная функция, C_n — произвольные постоянные. Далее использовать такие же рассуждения, как в примере 5.

2. Построить точные решения нелинейного уравнения теплопроводности (71), используя дифференциальную связь второго порядка (72) и решение системы (76) при $\varphi \equiv 0$.

Указание. Для контроля результатов использовать решение, полученное в примере 2.

3. Построить точные решения нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичной нелинейностью

$w_t = [(a_1 w + a_0)w_x]_x + b_2 w^2 + b_1 w + b_0,$

используя дифференциальную связь второго порядка $w_{xx} = \varphi(x) w_x$.

Литература к разд. 9.3: А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко (1984), V. A. Galaktionov (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

9.4. Использование нескольких дифференциальных связей

Как указывалось в замечании 2 из разд. 9.1 (см. также разд. 9.5.3), вместо одной могут задаваться сразу несколько дифференциальных связей вида (12). В общем случае дифференциальные связи должны исследоваться на совместность. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 8. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w). \tag{86}$$

Зададим две дифференциальные связи первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \varphi(x,t,w), \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \psi(x,t,w), \end{aligned} \tag{87}$$

где φ и ψ — некоторые (пока произвольные) функции своих аргументов.

Сначала найдем условие совместности дифференциальных связей (87). Для этого продифференцируем первое соотношение (87) по x, второе — по t, а затем заменим в полученных выражениях первые производные правыми частями (87). Имеем

$$\begin{aligned} w_{tx} &= \varphi_x + \varphi_w w_x = \varphi_x + \psi\varphi_w, \\ w_{xt} &= \psi_t + \psi_w w_t = \psi_t + \varphi\psi_w. \end{aligned}$$

Приравнивая $w_{tx} = w_{xt}$, находим условие совместности

$$\varphi_x + \psi\varphi_w - \psi_t - \varphi\psi_w = 0. \tag{88}$$

Подставим теперь (87) в исходное уравнение (86). Получим

$$\varphi = (\psi_x + \psi\psi_w)f + \psi^2 f' + g. \tag{89}$$

Исключив функцию φ в условии совместности (88) с помощью (89), с учетом (87) приходим к следующему уравнению для определения функции ψ:

$$\psi_t = (\psi_{xx} + 2\psi\psi_{xw} + \psi^2\psi_{ww})f + (3\psi\psi_x + 2\psi^2\psi_w)f' + \psi^3 f'' + \psi g' - g\psi_w. \tag{90}$$

Уравнение (90) содержит три независимые переменные x, t, w и выглядит сложнее, чем исходное уравнение (86), которое содержит только две независимые переменные x, t. Однако наличие «лишней» переменной w дает более широкий выбор решений, которые можно искать, задавая структуру функции ψ. Ниже будет показано, как можно найти два класса решений нелинейного уравнения теплопроводности с источником (86), исходя из уравнения (90).

Случай 1. Сначала ищем частные решения уравнения (90), которые не зависят от x, в виде произведения функций разных аргументов

$$\psi = \alpha(t)h(w). \tag{91}$$

Формула (91) задает структуру решения, где функции $\alpha(t)$ и $h(w)$ пока неизвестны и подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (91) в (90), получим (точка обозначает производную по t):

$$\dot\alpha(t) = \alpha^3(t)h(w)\big(f(w)h(w)\big)'' + \alpha(t)h(w)\big(g(w)/h(w)\big)'.$$

Это уравнение имеет нетривиальное решение, если имеют место равенства

$$\begin{aligned} h(w)\big(f(w)h(w)\big)'' &= A, \\ h(w)\big(g(w)/h(w)\big)' &= B, \end{aligned} \tag{92}$$

где A, B — произвольные постоянные. Уравнения (92) содержат три неизвестных функции; задавая одну из них (любую), можно найти две другие.

Функция (91) порождает решение исходного уравнения (86). Согласно второму уравнению (87), это решение можно записать в неявном виде

$$\int \frac{dw}{h(w)} = \alpha(t)x + \beta(t), \tag{93}$$

где функция $\alpha = \alpha(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли

$$\dot\alpha = A\alpha^3 + B\alpha,$$

которое легко интегрируется. Функция $\beta(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения, которое можно получить подстановкой решения (93) в исходное уравнение (86).

Считая функцию $h = h(w)$ заданной (ее можно задать произвольно), проинтегрируем уравнения (92). В результате находим вид функций, определяющих рассматриваемое уравнение (86):

$$f(w) = \frac{A}{h(w)} \int Q(w)\,dw + \frac{C_1 w + C_2}{h(w)}, \quad g(w) = h(w)\big[BQ(w) + C_3\big], \quad Q(w) = \int \frac{dw}{h(w)},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Случай 2. Теперь ищем частные решения уравнения (90), которые не зависят от t, в виде произведения функций разных аргументов

$$\psi = \theta(x)p(w). \tag{94}$$

Подставив (94) в (90), после перегруппировки членов имеем

$$\theta''_{xx} fp + \theta\theta'_x p(2fp'_w + 3f'_w p) + \theta^3 p^2 (fp)''_{ww} + \theta(pg'_w - p'_w g) = 0. \tag{95}$$

Подобные функционально-дифференциальные уравнения подробно рассматривались в главе 4. Решения уравнения (95) (их несколько) можно получить методом расщепления, используя результаты разд. 4.5 [см. функциональное уравнение (60) и его решения (61)–(62)].

Не проводя полного анализа уравнения (95), укажем здесь одно его точное решение:

$$\theta(x) = x, \quad f(w) = \frac{aw + b}{p(w)}, \quad g(w) = -3(aw + b) - 2p(w) \int \frac{(aw + b)p'_w(w)\,dw}{p^2(w)}, \tag{96}$$

где $p = p(w)$ — произвольная функция, a, b — произвольные постоянные. Подставим (94) во вторую дифференциальную связь (87), а затем учтем зависимость $\theta(x) = x$ [см. (96)]. Получим $w_x = xp(w)$. Интегрируя это равенство, имеем

$$\int \frac{dw}{p(w)} = \frac{1}{2}x^2 + \xi(t). \tag{97}$$

Дифференцируя (97) по t и учитывая вид первой дифференциальной связи (87), находим функцию $\varphi = \xi'_t p(w)$. Подставив выражения для φ и ψ в (89) и учитывая зависимости (96)–(97), получим линейное дифференциальное уравнение для функции $\xi(t)$. Его решение приводит к экспоненциальной зависимости

$$\xi(t) = Ce^{-2at}, \tag{98}$$

где C — произвольная постоянная.

Формулы (97)–(98) дают решение в неявной форме нелинейного уравнения теплопроводности (86), определяющие функции которого $f(w)$ и $g(w)$ задаются выражениями (96), где $p(w)$ — произвольная функция.

Замечание. Неклассический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений сводится к анализу уравнений с помощью двух дифференциальных связей, одна из которых первого порядка, а порядок второй определяется порядком рассматриваемого уравнения (см. разд. 9.5.3).

Задачи и упражнения к разд. 9.4

1. Найти частное решение функционально-дифференциального уравнения (95) при $\theta = 1/x$. Построить соответствующее точное решение нелинейного уравнения теплопроводности (86).

2. Построить все решения функционально-дифференциального уравнения (95) и найти соответствующие точные решения уравнения (86).

Указание. Для решения уравнения (95) использовать метод расщепления, изложенный в разд. 4.5.

3. Найти точные решения обобщенного уравнения Бюргерса
$w_t = f(w)w_{xx} + g(w)w_x$
с помощью двух дифференциальных связей (87).

Литература к разд. 9.4: P. J. Olver, E. M. Vorob'ev (1996).

ТАБЛИЦА 10
Дифференциальные связи второго порядка, соответствующие некоторым классам точных решений, задаваемых в явном виде

№	Тип решений	Структура решений	Дифференциальные связи
1	Решение с аддитивным разделением переменных	$w=\varphi(x)+\psi(y)$	$w_{xy}=0$
2	Решение с мультипликативным разделением переменных	$w=\varphi(x)\psi(y)$	$ww_{xy}-w_xw_y=0$
3	Решение с обобщенным разделением переменных	$w=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x)$	$w_{yy}-f(x)=0$
4	Решение с обобщенным разделением переменных	$w=\varphi(x)\psi(y)+\chi(x)$	$w_{yy}-f(y)w_y=0$ $w_{xy}-g(x)w_y=0$
5	Решение с функциональным разделением переменных	$w=f(z),\ \ z=\varphi(x)y+\psi(x)$	$w_{yy}-g(w)w_y^2=0$
6	Решение с функциональным разделением переменных	$w=f(z),\ \ z=\varphi(x)+\psi(y)$	$ww_{xy}-g(w)w_xw_y=0$

9.5. Связь между методом дифференциальных связей и другими методами

Метод дифференциальных связей является одним из наиболее общих методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Многие другие методы можно считать его частными случаями*.

9.5.1. Обобщенное и функциональное разделение переменных и дифференциальные связи

В табл. 10 приведены примеры дифференциальных связей второго порядка, использование которых эквивалентно прямому заданию наиболее распространенных форм точных решений, используемых при разделении переменных. Для решений с функциональным разделением переменных (см. строки 5 и 6) функцию g можно выразить через f.

В табл. 11 приведены примеры дифференциальных связей третьего порядка, использование которых эквивалентно прямому заданию наиболее распространенных форм точных решений с обобщенным и функциональным разделением переменных.

В общем случае поиск решения с обобщенным разделением переменных вида $w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(y)$ эквивалентен заданию дифференциальной связи порядка $2n$.

Для указанных в табл. 10 и 11 типов решений предпочтительнее использовать методы обобщенного и функционального разделения переменных, поскольку они содержат меньше этапов, связанных с решением промежуточных дифференциальных уравнений. Кроме того, метод дифференциальных связей

* Основная трудность для практического использования метода дифференциальных связей состоит в его очень общей формулировке и необходимости при рассмотрении конкретных классов уравнений выбирать подходящие дифференциальные связи. Поэтому для построения точных решений нелинейных уравнений часто предпочтительнее использовать более простые (но менее общие) методы.

ТАБЛИЦА 11
Дифференциальные связи третьего порядка, соответствующие некоторым классам точных решений, задаваемых в явном виде

Тип решений	Структура решений	Дифференциальные связи
Решение с обобщенным разделением переменных	$w=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x)$	$w_{yyy}=0$
Решение с обобщенным разделением переменных	$w=\varphi(x)\psi(y)+\chi(x)$	$w_y w_{xyy}-w_{xy}w_{yy}=0$
Решение с функциональным разделением переменных	$w=f\bigl(\varphi(x)y+\psi(x)\bigr)$	$w_y(w_x w_{yyy}-w_y w_{xyy})=$ $=2w_{yy}(w_x w_{yy}-w_y w_{xy})$
Решение с функциональным разделением переменных	$w=f\bigl(\varphi(x)+\psi(y)\bigr)$	$w_x w_y w_{xyy}-w_y w_{xxy}=$ $=w_{xy}(w_x^2 w_{yy}-w_y^2 w_{xx})$

малопригоден для построения точных решений уравнений старших (произвольных) порядков.

9.5.2. Прямой метод Кларксона—Крускала и метод дифференциальных связей

Рассмотрим поиск точного решения в виде

$$w(x,t)=F\bigl(x,t,u(z)\bigr),\qquad z=z(x,t), \tag{99}$$

где $F(x,t,u)$ и $z(x,t)$ должны выбираться так, чтобы для функции $u(z)$ в конечном итоге получить одно обыкновенное дифференциальное уравнение (см. разд. 6.2).

Покажем, что использование структуры решения (99) эквивалентно поиску решения с помощью квазилинейной дифференциальной связи первого порядка

$$\xi(x,t)\,\frac{\partial w}{\partial t}+\eta(x,t)\,\frac{\partial w}{\partial x}=\zeta(x,t,w). \tag{100}$$

Действительно, первые интегралы характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{\xi(x,t)}=\frac{dx}{\eta(x,t)}=\frac{dw}{\zeta(x,t,w)}$$

имеют вид

$$z(x,t)=C_1,\qquad \varphi(x,t,w)=C_2, \tag{101}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Поэтому общее решение уравнения (100) записывается так:

$$\varphi(x,t,w)=u(z(x,t)), \tag{102}$$

где $u(z)$ — произвольная функция. Разрешив (102) относительно w, получим представление решения в виде (99).

9.5.3. Методы группового анализа и метод дифференциальных связей

Классический и неклассический методы исследования симметрий дифференциальных уравнений (классический и неклассический методы группового анализа) можно переформулировать в терминах метода дифференциальных связей. Покажем это на примере уравнения второго порядка общего вида

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0. \tag{103}$$

Дополним уравнение (103) двумя дифференциальными связями:

$$\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} = \zeta, \tag{104}$$

$$\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial w} + \zeta_1 \frac{\partial F}{\partial w_x} + \zeta_2 \frac{\partial F}{\partial w_y} + \zeta_{11} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \zeta_{12} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \zeta_{22} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} = 0, \tag{105}$$

где $\xi = \xi(x, y, w)$, $\eta = \eta(x, y, w)$, $\zeta = \zeta(x, y, w)$ — искомые функции, а координаты первого и второго продолжений ζ_i и ζ_{ij} определяются по формулам (9) и (14) из разд. 7.1. Дифференциальная связь (105) совпадает с условием инвариантности уравнения (103), см. (17) из разд. 7.2.

Замечание. Метод построения точных решений уравнения (103), основанный на уравнении с частными производными первого порядка (104) и условии инвариантности (105), соответствует неклассическому методу исследования симметрий дифференциальных уравнений (см. разд. 8.1).

При использовании классической схемы группового анализа сначала рассматриваются два уравнения: (103) и (105). Из этих уравнений исключается одна из старших производных, например, w_{yy}, а остальные производные (w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}) считаются «независимыми». Полученное выражение расщепляется по степеням «независимых» производных (см. разд. 7.2). В результате приходят к переопределенной системе уравнений и находят из нее функции ξ, η, ζ. Затем эти функции подставляются в квазилинейное уравнение первого порядка (104), решение которого позволяет определить общий вид решения (в этом решении содержится функциональный произвол). Далее с помощью уравнения (103) уточняется вид решения, полученного на предыдущем этапе.

Классическая схема может привести к потере решений, поскольку на первом этапе при расщеплении предполагается, что первые производные w_x и w_y являются независимыми, в то время как в силу уравнения (104) эти производные связаны линейным соотношением.

Задачи и упражнения к разд. 9.5

1. Найти дифференциальные связи второго порядка, эквивалентные заданию структуры решения в следующем виде (f и g — произвольные функции соответствующего аргумента):

a) $w = f(x + t) + g(x - t)$;

b) $w = f(x + at) + g(x + bt)$;

c) $w = f(x + at)g(x + bt)$.

Указание. Путем дифференцирования рассматриваемого выражения и его следствий исключить произвольные функции.

2. Найти дифференциальные связи третьего порядка, эквивалентные заданию структуры решения в следующем виде (f, g, h — произвольные функции соответствующего аргумента):

a) $w = f(x + t) + g(x - t) + h(x)$;

b) $w = f(x + at)g(x + bt) + h(t)$;

c) $w = f(z) + h(t)$, $z = x + g(t)$;

d) $w = f(z) + h(t)$, $z = xg(t)$;

e) $w = f(z)$, $z = x^2 g(t) + h(t)$;

f) $w = f(t)g(z)$, $z = x + h(t)$;

g) $w = f(t)g(z)$, $z = xh(t)$.

Указание. Путем дифференцирования рассматриваемого выражения и его следствий исключить произвольные функции.

3. Найти дифференциальную связь первого порядка вида (100), эквивалентную заданию структуры решения в следующем виде (f, g, h — произвольные функции соответствующего аргумента):

a) $w = f(t)g(z)$, $z = x + h(t)$;
b) $w = f(z)$, $z = xg(t) + h(t)$;
c) $w = f(z) + g(x)$, $z = xg(t)$.

Указание. Рассмотреть соответствующую характеристическую систему уравнений и исследовать вид ее первых интегралов.

Литература к разд. 9.5: С. В. Мелешко (1983), P. J. Olver (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).