С. Д. Алгазин

Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики

МОСКВА
“НАУЧНЫЙ МИР”
2002

УДК 519.6
ББК – 22.193
А45

С. Д. Алгазин
А45 Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики.
– М.: Научный Мир, 2002.– 155 с.

ISBN 5-89176-184-X

В книге рассматривается новый подход к конструированию алгоритмов математической физики. В основном рассматриваются спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения Лапласа (три краевых задачи) и бигармонического уравнения (две краевые задачи).
Классический подход, основанный на применении методов конечных разностей и конечных элементов, обладает существенными недостатками – он не реагирует на гладкость отыскиваемого решения. Для разностной схемы *p*-го порядка в независимости от гладкости отыскиваемого решения погрешность метода - $O(h^P)$. Гладкость решения определяется входными данными задачи. Рассматриваемые в книге алгоритмы свободны от этих недостатков.
Предлагаемые алгоритмы автоматически настраиваются на гладкость отыскиваемого решения и их точность тем выше, чем большим условиям гладкости отвечает отыскиваемое решение. Для рассматриваемых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений экспериментально показано, что убывание погрешности - экспоненциально. Этого невозможно добиться методами конечных разностей и конечных элементов.
Для двумерных задач громоздкие вычисления затабулированы в таблицах небольшого объёма, что позволяет разработать компактные алгоритмы решения поставленных задач. Приводятся программы на фортране.
Монография представляет интерес для студентов и аспирантов физико-технических и математических специальностей, специалистов по численным методам, а также для научных сотрудников и инженеров, интересующихся новыми методами численного решения задач математической физики.

УДК 519.6
ББК- 22.193
ISBN 5-89176-184-X

Оглавление

Обозначения

Введение

$N(r,t)$ - плотность нейтронов в точке r в момент времени t;
Σ_a - вероятность поглощения нейтрона на единичной длине пробега (макроскопическое сечение поглощения);
$\vec{j}$ - ток нейтронов (количество нейтронов, проходящих через единичную площадку перпендикулярно вектору $\vec{j}$ в единицу времени);
D - константа диффузии;
k_∞ - количество быстрых нейтронов, генерируемых в реакторе при поглощении одного нейтрона (коэффициент размножения нейтронов в бесконечной размножающейся среде);
β - доля запаздывающих нейтронов;
λ - постоянная распада (вероятность распада ядра в единицу времени);
$C(r,t)$ - плотность ядер предшественников запаздывающих нейтронов;
l_∞ - среднее время жизни нейтрона до его поглощения;
$M^2=D/\Sigma_a$ - площадь миграции (M - длина диффузии нейтрона).

Глава 1

$R(\zeta)=R(\zeta,T)=(T-\zeta I)^{-1}$ - резольвента оператора T;
I - единичный оператор;

$P_\nu = -\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} R(\varsigma)d\varsigma$ - вычет резольвенты;

$\rho(T)$ - резольвентное множество оператора T;

$SprT = \lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$ - спектральный радиус ограниченного оператора;

$|A|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$ - чебышевская норма матрицы.

Глава 2

λ - спектральный параметр;
h - шаг сетки;
$R_n(x;f)$ – погрешность интерполяции;
$\omega_n = O(\ln(n))$ - константа Лебега интерполяции;
$E_n(y)$ — наилучшее приближение функции y многочленом степени не выше $(n$-1) в норме C;
$G(x,\xi)$ - функция Грина;
$D_n(x;a)$ - ядро Дирихле;
J_0 - функции Бесселя.

Глава 3

$D_n(\theta)$ - ядро Дирихле;
$T_m(r)$ - многочлен Чебышева степени m;
E_ω - наилучшее приближение функции $f \in C[D]$;
$|P_M|_\infty$ - норма проектора P_M;
$\rho_M(r,\theta;f)$ - погрешность интерполяционной формулы;
$z=\varphi(\zeta)$, $|\zeta|\leq 1$ - конформное отображение единичного круга на область Γ;
$K(\varsigma,\xi) = -\dfrac{1}{2\pi}\ln|(1-\varsigma\bar{\xi})/(\varsigma-\xi)|$ - функция Грина оператора Лапласа в круге с краевым условием Дирихле;

$$K_0(\varsigma,\theta) = \frac{1-\rho^2}{2\pi(1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi))}, \quad \varsigma = \rho e^{i\varphi}.$$

Глава 4

G - область в комплексной z - плоскости с достаточно гладкой границей ∂G;
n - единичный вектор внешней нормали к ∂G;
$\partial/\partial s$ - дифференцирование по длине дуги **(**длина отсчитывается против часовой стрелки**);**
$1/\rho$ - кривизна ∂G;
ν - коэффициент Пуассона;

$\sqrt{\lambda} = \omega\sqrt{\rho_0 / D}$, ρ_0 - плотность, а D - цилиндрическая жёсткость;
$z=\varphi(\zeta)$, $|\zeta| \leq 1$ - функция, задающая конформное отображение круга единичного радиуса на область G;
$K(\varsigma,\xi)$ - функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа;
$K_0(\varsigma,\theta)$ - ядро Пуассона;
D_n - ядро Дирихле;
$N=2n+1$ - число узлов интерполяции на границе круга;
r_n - погрешность интерполяции;
L - дифференциальный оператор.

Глава 5

I_n - единичная матрица размера $n\times n$;
B' - матрица трпанспонированная к B;
n - внутренняя нормаль к телу;
∂T - граница тела T;
V_∞ - скорость потока в бесконечности;
$|x|$ - длина вектора (x_1,x_2,x_3);
ρ - плотность;
Re - число Рейнольдса;
(v^1,v^2,v^3) - вектор скорости;
p – давление;
p_∞ - давление в невозмущенном потоке (в бесконечности);
$N=N(r,t)$ - плотность нейтронов;
$C=C(r,t)$ - плотность ядер предшественников запаздывающих нейтронов;
l_∞ - среднее время жизни быстрого нейтрона до его поглощения;
M - длина диффузии нейтрона (M^2 - площадь миграции);
β - доля запаздывающих нейтронов;
λ - постоянная распада (среднее количество запаздывающих нейтронов, выпускаемых на 1 секунду осколками деления);
$1/D$ - длина экстраполяции.

Незабвенной памяти моих родителей
Алгазина Дмитрия Александровича и
Алгазиной Надежы Николаевны
посвящаю.

Введение

В этой книге рассматриваются классические краевые и спектральные задачи для оператора Лапласа: одномерные, двумерные и трёхмерные. Также рассмотрены спектральные задачи для бигармонического оператора.

Спектральные задачи для оператора Лапласа естественным образом возникают в теории ядерных реакторов. Уравнение динамики реактора есть следствие закона сохранения количества нейтронов в произвольном подвижном объёме $V=V(t)$ учётом процессов рождения и захвата нейтронов. Пусть $N=N(r,t)$ плотность нейтронов в точке r в момент времени t, тогда

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} N(r,t)dV = \int\limits_{V(t)} \left(S-\Sigma_a vN\right)dV. \qquad (1)$$

Здесь $V(t)$ - подвижный объём; Σ_a - вероятность поглощения нейтрона на единичной длине пробега (макроскопическое сечение поглощения); $SdVdt$ - количество нейтронов, генерируемых в объёме dV за время dt; $\Sigma_a vNdVdt$ - количество нейтронов, поглощаемых в элементе объёма dV за время dt, где v - скорость нейтрона, а остальные величины, входящие в это выражение, определены выше.

Для производной интеграла по подвижному объёму в левой части уравнения (1) легко получить следующее соотношение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} N(r,t)dv = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial N(r,t)}{\partial t}dv + \int\limits_{\Sigma(t)} (\vec{j}\vec{n})d\sigma, \qquad (2)$$

где $\vec{j}$ - ток нейтронов (количество нейтронов проходящих через единичную площадку, перпендикулярно вектору $\vec{j}$ в единицу времени), $\Sigma=\Sigma(t)$ - поверхность подвижного объёма $V(t)$, а $\vec{n}$ - вектор нормали к этой поверхности.

Для того чтобы перейти к дифференциальному уравнению, преобразуем последний интеграл в соотношении (2) в объёмный по теореме о дивергенции

$$\int_{\Sigma} j_n d\sigma = \int_{V} div\vec{j}dV.$$

В результате, т.к. объём произвольный, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial N}{\partial t} + div\vec{j} = S - \Sigma_a vN.$$

Предположим, что выполняется закон Фика, принимаемый в диффузионной теории переноса нейтронов

$$\vec{j} = -DvgradN,$$

где D - константа диффузии. Итак, имеем

$$\frac{\partial N}{\partial t} = Dv\Delta N + S - \Sigma_a vN.$$

Теперь распишем подробно, что означает величина $S=S(r,t)$. При поглощении нейтрона ядром испускается при его распаде 2-3 мгновенных нейтрона. Часть осколков деления через некоторое время испускает запаздывающие нейтроны. Благодаря наличию запаздывающих нейтронов, можно управлять ядерной реакцией. Пусть N - полная плотность нейтронов всех энергий, k_∞ - количество быстрых нейтронов, генерируемых в реакторе при поглощении одного нейтрона (коэффициент размножения нейтронов в бесконечной размножающейся среде). Если β - доля запаздывающих нейтронов, то вклад мгновенных нейтронов в суммарную мощность источника S равен

$$(1-\beta)k_\infty \Sigma_a vN.$$

Пусть λ - постоянная распада (вероятность распада ядра в единицу времени); $C=C(r,t)$ - плотность ядер предшественников запаздывающих нейтронов, т.е. λC - мощность источника запаздывающих нейтронов. Итак,

$$S = (1-\beta)k_\infty \Sigma_a vN + \lambda C.$$

Необходимо ещё одно уравнение для концентрации ядер предшественников запаздывающих нейтронов. Предположим, что миграция (диффузия) ядер предшественников мала, получим

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \beta k_\infty \Sigma_a vN - \lambda C.$$

Введём два символа: $l_\infty = 1/v\Sigma_a$ - среднее время жизни нейтрона до его поглощения; $M^2 = D/\Sigma_a$ - площадь миграции (M - длина диффузии нейтрона). В результате получим систему уравнений

$$l_\infty \frac{\partial N}{\partial t} = M^2 \Delta N + (1-\beta) k_\infty N + \lambda l_\infty C - N,$$

$$l_\infty \frac{\partial C}{\partial t} = \beta k_\infty N - \lambda l_\infty C. \tag{3}$$

Если процесс стационарен, то из уравнений (3) получим

$$-\Delta N = \frac{k_\infty^0 - 1}{M^2} N \ , \tag{4}$$

где k_∞^0 - стационарное значение материального параметра k_∞ . Вследствие утечки нейтронов из активной зоны реактора (для реактора типа ВВЭР активная зона имеет форму цилиндра), для уравнений (3), (4) принимается граничное условие третьего рода

$$\left. \frac{\partial N}{\partial n} + dN \right|_{\partial \Omega} = 0 \ . \tag{5}$$

Пусть μ - первое собственное значение оператора $-\Delta$ с граничным условием (5), т.е. собственное значение, отвечающее собственной функции оператора $-\Delta$, не имеющей перемен знаков. Тогда

$$k_\infty^0 = 1 + \mu M^2. \tag{6}$$

Итак, стационарное значение плотности нейтронов N - это первая собственная функция оператора Лапласа, а стационарное значение материального параметра k_∞^0 выражается по формуле (6) через соответствующее собственное значение. Этим фактом объясняется важность исследования спектральных задач для оператора Лапласа.

Исследуемые ниже двумерные спектральные и краевые задачи для оператора Лапласа рассматриваются только в гладких областях. Решения этих задач (собственные функции) бесконечно дифференцируемы либо даже аналитичны, и поэтому для создания эффективных алгоритмов необходимо учесть эту колоссальную априорную информацию. Традиционные методы конечных разностей и конечных элементов почти не используют информацию о гладкости решения, т.е. это методы с насыщением. Термин "насыщение" введён К. И. Бабенко [1]. Для пояснения того, что это означает в нашем случае, рассмотрим абстрактную схему приведённых в этой книге алгоритмов.

Пусть T - замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве B с областью определения $D(T)$, а P_n - проектор на конечномерное подпространство $L^n \subset D(T)$. Назовём дискретизацией оператора T оператор P_nTP_n . Пусть для оператора T имеем задачу на собственные значения:

$$Tu = \lambda u, \ \|u\| = 1 . \tag{7}$$

Если H - матрица конечномерного оператора P_nTP_n в некотором базисе $l_1, l_2, ..., l_n \subset L^n$, то точное собственное значение λ оператора T удовлетворяет соотношению вида

$$Hu=\lambda u+r. \tag{8}$$

Здесь H - матрица размера $n \times n$; $u = (u_1, u_2, ..., u_n)'$ - вектор значений собственной функции в узлах сетки; $r = (r_1, r_2, ..., r_n)'$ - погрешность дискретизации. Заметим, что (8) - точное соотношение, т.е. λ - собственное значение задачи (7), а u_i, $i = 1,2,...,n$ суть точные значения соответствующей собственной функции задачи (7) в узлах сетки. Отбрасывая в (8) погрешность дискретизации, получим приближённую конечномерную задачу на собственные значения

$$H\tilde{u} = \tilde{\lambda}\tilde{u}.$$

В первой главе книги будет показано, что вообще говоря $\left|\lambda - \tilde{\lambda}\right|$ порядка погрешности дискретизации $\|r\|$. Таким образом точность приближённого определения собственных значений оператора T зависит от скорости, с которой $\|r\| \to 0$ при $n \to \infty$. Причём $r = r(u, \lambda)$, т.е. имеет своё значение для каждой собственной функции и соответствующего собственного значения. В алгоритмах, рассмотренных в книге, скорость стремления $\|r(u, \lambda)\|$ к нулю зависит от гладкости собственной функции, и, чем выше гладкость u, тем быстрее $\|r\| \to 0$ при $n \to \infty$. Это и означает, что описанные алгоритмы не имеют насыщения. Разностные методы приводят также к соотношению вида (8). Однако, в этом случае $\|r\| = O(h^p)$, где h - шаг сетки, а p - порядок разностной схемы. Таким образом, скорость стремления $\|r\|$ к нулю не улучшается, если увеличивается гладкость собственной функции. Аналогичные утверждения справедливы и для метода конечных элементов.
Целью книги является разработка и исследование алгоритмов без насыщения для названных выше классических задач.
Проблема решения задач на собственные значения (краевых задач) разбивается на две: прежде всего нужно бесконечномерную задачу свести к конечномерной; затем указать метод решения полученной алгебраической задачи на собственные значения (системы линейных уравнений). Для двумерных и трёхмерных задач решение соответствующей конечномерной задачи может представлять сложную проблему. В рассматриваемом случае исследование структуры конечномерной задачи позволило преодолеть эти трудности. Так, например, при исследовании двумерных задач в круге оказалось, что матрицы соответствующих конечномерных задач имеют следующую блочную структуру

$$H = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mm} \end{Vmatrix}, \qquad (9)$$

где $h_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 1,2,\dots,m$ – симметричные циркулянты размера $N\times N$, $N=2n+1$, т.е. матрицы, первая строка которых имеет вид $b_0,b_1,\dots,b_n,b_n,\dots,b_1$, а остальные строки получаются из первой циклической перестановкой. Для краткости будем называть матрицы такого вида h-матрицами. Следовательно, в массиве H всего $m^2(n+1)$ различных элементов. Здесь m и N - параметры сетки выбираемой в круге для дискретизации соответствующих спектральных задач (m - число окружностей, а N - число точек на каждой окружности), т.е. всего в круге выбирается $M=mN$ точек. Свойства матриц вида (9) изучаются в третьей главе книги. Оказывается, что они наследуют свойства соответствующих бесконечномерных задач. Причём, несмотря на большие размеры этих матриц (до 1230), удаётся вычислить у них все собственные значения даже на маломощной ЭВМ. Для произвольной области применением конформного отображения задача сводится к кругу, и поэтому матрица дискретной задачи по-прежнему имеет достаточно простой вид. В результате, для вычисления собственных значений возможно применить метод простой итерации в сочетании с методом исключения [2]. В качестве одного из примеров вычислены пять собственных частот свободно опёртой пластинки (с 7-8 знаками после запятой), граница которой (эпитрохоида) имеет в 12 точках кривизну порядка $I0^3$.

Исследование структуры конечномерной задачи позволяет также создать эффективный алгоритм решения уравнения Пуассона. Отметим, что быстрый алгоритм решения уравнения Пуассона необходим при расчёте движения пучка заряженных частиц (плазмы) в самосогласованном электрическом поле, т.к. на каждом шаге по времени требуется пересчитывать потенциал электрического поля, т.е. решать уравнение Пуассона.

Глава I.
ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

В этой главе на основе регулярной теории возмущений [3] доказаны теоремы о локализации собственных значений замкнутого линейного оператора в банаховом пространстве. Необходимые сведения из функционального анализа формулируются в первом параграфе. Рассмотренные теоремы позволяют привести абстрактную схему оценки погрешности приближённых методов вычислений собственных значений линейных операторов.

§1. Формализация

Пусть X - банахово пространство. Будем обозначать $B(X)$ множество линейных, ограниченных в X операторов. Если $P,Q \in B(X)$ - пара проекторов ($P^2=P, Q^2=Q$) и $\|P-Q\|<1$, то образы PX и QX изоморфны. В частности $dimP=dimQ$.

Теорема 1

Пусть $P(t)$ - проектор, непрерывно зависящий от параметра t, пробегающего (связную) область вещественной оси или комплексной плоскости. Тогда образы $P(t)X$ изоморфны при всех t. В частности, функция $dimP(t)X$ постоянна.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\|P(t')-P(t'')\|<1$$

для достаточно близких t' и t'' и поэтому сформулированные выше результаты применимы к паре проекторов $P(t')$ и $P(t'')$. Операторозначная функция

$$R(\zeta)=R(\zeta,T)=(T-\zeta I)^{-1}$$

называется резольвентой оператора T (I - единичный оператор) и удовлетворяет резольвентному тождеству

$$R(\varsigma_1)-R(\varsigma_2)=(\varsigma_1-\varsigma_2)R(\varsigma_1)R(\varsigma_2),$$

из которого, в частности, получаем, что $R(\zeta)$ - голоморфная функция от параметра ζ. Особые точки $R(\zeta)$ суть собственные значения λ_ν, $\nu=1,2,\ldots$ оператора T. Вычет резольвенты

$$P_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} R(\varsigma)d\varsigma$$

является оператором проектирования, т.е. $P_\nu^2 = P_\nu$. Если замкнутый контур Γ_ν не содержит других собственных значений оператора T кроме λ_ν, то $P_\nu X$ называется алгебраическим собственным подпространством, а его размерность $dimP_\nu X$ называется алгебраической кратностью собственного значения λ_ν. Проектор P_ν перестановочен с оператором T: $TP_\nu= P_\nu T= P_\nu TP_\nu$.

Среди неограниченных операторов выделяются операторы, которые называются замкнутыми. Обозначим $D(T)$ область определения оператора T. Оператор T называется замкнутым, если для любой последовательности $u_n \in D(T)$ такой, что $u_n \to u$ и $Tu_n \to v$ вектор u принадлежит $D(T)$ и $Tu=v$. Ограниченный оператор замкнут тогда и только тогда, когда подпространство $D(T)$ замкнуто. Если оператор T обратим, то замкнутость T эквивалентна замкнутости T^{-1}.

§2. Теоремы локализации

Пусть **B** – банахово пространство, а T – замкнутый линейный оператор. Будем обозначать через $\rho(T)$ резольвентное множество оператора T, т.е. совокупность точек ζ комплексной плоскости, для которых существует оператор $(T-\zeta I)^{-1}$, ограниченный и имеющий область определения, плотную в **B**. Если T - замкнутый оператор, то $R(\zeta)$ определён на всём **B**. Для ограниченного оператора будем обозначать через

$$SprT = \lim_{n\to\infty}\left\|T^n\right\|^{1/n}$$

спектральный радиус.

Теорема 2

Пусть T - замкнутый оператор в банаховом пространстве **B** с областью определения $D(T)$, а T_n - ограниченный оператор. Пусть Γ - спрямляемый замкнутый контур (или конечная совокупность таких попарно не пересекающихся контуров), содержащих внутри

m собственных значений оператора T, сосчитанных с их алгебраической кратностью, и пусть выполнено условие

$$\sup_{\varsigma\in\Gamma} Spr(R(\varsigma)(T_n-\varsigma I)-I)<1, \qquad (2.1)$$

то внутри Γ лежит ровно m собственных значений оператора T_n, считая собственное значение столько раз, какова его алгебраическая кратность.

Доказательство основано на классической теории возмущений [3]. Введём семейство операторов $T(\kappa)=T+\kappa T^{(1)}$, $T^{(1)}=T_n-T$, где κ - комплексное число. Пусть $\zeta \in \rho(T)$, тогда $T(\kappa)-\zeta I=(T-\zeta I)(I+\kappa R(\zeta)T^{(1)})$, где $R(\zeta)$ – резольвента оператора T. Заметим, что $R(\zeta)T^{(1)}= R(\zeta)(T_n-\zeta I)-I$ – ограниченный оператор, и обозначим

$$r_0=\left[\sup_{\varsigma\in\Gamma} Spr(R(\varsigma)(T_n-\varsigma I)-I)\right]^{-1}>1. \qquad (2.2)$$

При $|\kappa|<r_0$ получаем

$$(T(\kappa)-\varsigma I)^{-1}=R(\varsigma)+\sum_{k=1}^{n}\kappa^k R^k(\varsigma),\ R^k(\varsigma)=(-1)^k(R(\varsigma)T^{(1)})^k R(\varsigma), \qquad (2.3)$$

т.е. $\varsigma\in\rho(T(\kappa))$ и $(T(\kappa)-\varsigma I)^{-1}$ можно представить равномерно по $\varsigma\in\Gamma$ сходящимся рядом (2.3). Причём коэффициенты этого ряда суть ограниченные операторы, а поэтому $(T(\kappa)-\varsigma I)^{-1}$ - также ограниченный оператор, определённый на всём **B**. Интегрируя (2.3) почленно, получаем, что собственный проектор $P(\kappa)$ оператора $T(\kappa)$ определяется сходящимся при $|\kappa|<r_0$

$$P(\kappa)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\varsigma,\kappa)d\varsigma=P+\sum_{k=1}^{n}\kappa^k P^{(k)},\ P^{(k)}=-\int_\Gamma R^{(k)}(\varsigma)d\varsigma,\ P=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\varsigma)d\varsigma.$$

В частности, $P(\kappa)$ непрерывен по κ, а следовательно, внутри Γ находятся, вообще говоря, m собственных значений $\lambda_1(\kappa),\dots,\lambda_m(\kappa)$ оператора $T(\kappa)$ при $|\kappa|<r_0$, но $r_0>1$ и теорема доказана.

Замечания.

1) Вместо условия (4.1) можно ввести более грубое условие

$$\sup_{\varsigma\in\Gamma}\|R(\varsigma)(T_n-\varsigma I)-I\|<1. \qquad (2.4)$$

При ограниченном операторе T соотношения (2.1) и (2.4) выполнены, если выполнено

$$\|R(\varsigma)\| \ \|T_n - T\| < 1, \quad \forall \varsigma \in \Gamma$$

($\|R(\varsigma)\|$ - непрерывная функция на компактном подмножестве комплексной плоскости).

2) Если $\varsigma \in \rho(T)$ и $Spr(R(\varsigma)(T_n - \varsigma I) - I) < 1$, то $\varsigma \in \rho(T_n)$.

3) Условие (2.1) означает, что резольвенты операторов T и T_n достаточно близки.

Если в теореме 2 дополнительно предположить, что T – ограниченный оператор, то в соответствующем соотношении (2.1) можно поменять T и T_n местами. Например, если внутри $\Gamma_{\tilde{\lambda}}$, где $\tilde{\lambda}$ - простое собственное значение оператора T_n (найти $\tilde{\lambda}$ и соответствующую изолирующую окрестность можно из численных расчётов), нет других собственных значений оператора T_n и выполнено условие

$$\sup_{\varsigma \in \Gamma_{\tilde{\lambda}}} Spr(R_n(\varsigma)(T - \varsigma I) - I) < 1, \ \ R_n(\varsigma) = (T_n - \varsigma I)^{-1},$$

то внутри $\Gamma_{\tilde{\lambda}}$ лежит единственное собственное значение оператора T. Другими словами, используя результаты вычислений, можно доказать строгую математическую теорему о локализации собственных значений ограниченного оператора. Проблема такого рода возникает в задаче Гаусса [4].

Покажем пример применения теоремы 2 в конечномерном случае. Пусть A – матрица размера $n{\times}n$ с комплексными элементами a_{ij}. Обозначим $A_1=diag(a_{11},\dots,a_{nn})$, $A_2=A-A_1$, $A_3(\zeta)=(A_1-\zeta I)^{-1} A_2$, т.е.

$$A_3(\varsigma)=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}-\varsigma} & \dots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}-\varsigma} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}-\varsigma} & 0 & \dots & \dfrac{a_{2n}}{a_{22}-\varsigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}-\varsigma} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.5)$$

где $\zeta \in \Gamma$ - точка границы области, образованной объединением кругов с центрами a_{ii} и радиусами r_i (Γ может состоять из нескольких замкнутых, непересекающихся контуров). Пусть $P_i = \sum_{i\neq j} |a_{ij}|$, $i=1,\dots,n$, тогда общеизвестен классический результат Гершгорина [5], что все собственные значения матрицы A лежат внутри области, образованной объединением кругов с центрами a_{ii} и радиусами P_i. Этот результат без труда получается в виде следствия теоремы 2. Действительно, пусть $|A|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ - чебышевская норма матрицы, тогда

$$|A_3(\varsigma)|_\infty = \max_i \sum_{i\neq j} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}-\varsigma|} \leq \max_i \frac{P_i}{r_i}. \qquad (2.6)$$

Если $\max_i \frac{P_i}{r_i} < 1$, то внутри Γ лежат все собственные значения матрицы A. Отсюда следует результат Гершгорина. Пусть $r_i=P_i+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, тогда правая часть (2.6) меньше единицы, но $\varepsilon>0$ произвольно, следовательно, при $r_i=P_i$ внутри или на границе соответствующей области лежат все собственные значения матрицы A. Это и есть теорема Гершгорина.

Заметим, что в этих рассуждениях использовалось условие (2.4). Используя более тонкое условие (2.1), получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3

Пусть A – матрица размера $n \times n$ с комплексными элементами a_{ij}, Γ - спрямляемый контур (или конечная совокупность таких попарно непересекающихся контуров), который содержит внутри себя диагональные элементы a_{ii}, $i=1,2,\ldots,n$ матрицы A, тогда, если выполнено условие

$$\sup_{\varsigma \in \Gamma} Spr\, A_3(\varsigma) < 1$$

(по поводу обозначений см. 2.5), то внутри Γ лежат все собственные значения матрицы A.

Таким образом, результат, сформулированный в теореме 3, есть обобщение результата Гершгорина. Используя теорему 2, нетрудно получить и другие результаты подобного типа. Заметим, что теоремы о локализации собственных значений имеют большое значение при их практическом вычислении [6].

§3. Априорная оценка погрешности в задачах на собственные значения

Теорема 4

Пусть выполнены условия теоремы 2, но в качестве контура Γ выберем выпуклый контур Γ_λ, который содержит внутри себя собственное значение λ оператора T алгебраической кратности m и не содержит других точек спектра этого оператора. Обозначим $\rho = \max_{\varsigma \in \Gamma_\lambda} |\lambda - \varsigma|$, а $\hat{\lambda} = \frac{1}{m}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)$ - среднее арифметическое собственных значений оператора T_n, лежащих внутри Γ_λ, тогда выполняется неравенство

$$|\lambda - \hat{\lambda}| \le \rho \frac{r_0^{-1}}{1 - r_0^{-1}},$$

где величина r_0 определена в (2.2).

Доказательство. Функция $\hat{\lambda}(\kappa) = \frac{1}{m}(\lambda_1(\kappa) + \ldots + \lambda_m(\kappa))$ (см. доказательство теоремы 2) голоморфна при $|\kappa| < r_0$, т.е.

$$\hat{\lambda}(\kappa)=\lambda+\kappa\hat{\lambda}_1+\kappa^2\hat{\lambda}_2+\ldots, \qquad (3.7)$$

причём, так как Γ_λ - выпуклый контур, то $\hat{\lambda}(\kappa)$ лежит внутри Γ_λ и для коэффициентов ряда (3.7) выполняются формулы Коши:

$$|\hat{\lambda}_k|\le \rho r_0^{-k}, \quad k=1,2,\ldots,$$

но $r_0>1$, и, следовательно, ряд (4.7) мажорируется сходящейся геометрической прогрессией со знаменателем $q=r_0^{-1}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. Пусть T – ограниченный оператор, тогда оператор $T^{(1)}=T_n$-T также ограничен. Допустим, что выполняется условие

$$\|R(\varsigma)\|\|T^{(1)}\|<1,\ \varsigma\in\Gamma_\lambda,$$

тогда выполняется неравенство

$$|\lambda-\hat{\lambda}|\le C_n\|T^{(1)}\|,$$

где $C_n=\rho\|R(\varsigma_0)\|(1-\|R(\varsigma_0)\|\|T^{(1)}\|)^{-1}$, а $\zeta_0\in\Gamma_\lambda$ - точка, в которой достигается максимум $\|R(\varsigma)\|$ при $\zeta\in\Gamma_\lambda$.

Не будет, видимо, большой ошибкой сказать, что существующие методы вычисления собственных значений операторных уравнений (дифференциальных, интегральных и т.д.) сводятся в конце концов к конечномерной задаче вида $Av=\mu v$, получаемой из соотношения

$$Au=\lambda u+r, \qquad (3.8)$$

где A – матрица размера $n\times n$, а u и r – n-мерные векторы. Причём λ - точное собственное значение соответствующего оператора T. Далее, $u=(u_1\ldots u_n)'$, где u_i – точные значения в узлах интерполяции (узлах сетки, коэффициенты разложения в ряд и т.д.) собственной функции исходного оператора, соответствующей собственному значению λ, $r=(r_1\ldots r_n)'$ - погрешность дискретизации. Причём $r=r(u,\lambda)$, т.е. погрешность дискретизации, имеет своё значение для каждой собственной функции.

Пусть λ - простое собственное значение оператора T, P_n – проектор на конечномерное подпространство $L_n \subset \mathbf{B}$. Назовём дискретизацией оператора T оператор $T_n = P_n T P_n$, а A обозначим матрицу конечномерного оператора $P_n T P_n \big|_{L_n}$ в некотором базисе $l_1, \ldots, l_n \in L_n$. Пусть выполнено соотношение (2.1), где в качестве контура Γ выберем контур Γ_λ, удовлетворяющий условиям теоремы 2. Таким образом, внутри Γ_λ лежит одно собственное значение оператора T_n. Отсюда следует, что внутри Γ_λ лежит одно собственное значение матрицы A. Точное собственное значение исходного оператора T удовлетворяет соотношению вида (3.8). Введём в рассмотрение матрицу $B = A - (u,u)^{-1} r u^*$, где $u^* = (\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n})$ – матрица, сопряжённая к одностолбцовой матрице u, а $(u,v) = (u_1 \bar{v}_1 + \ldots + u_n \bar{v}_n)$ – скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$. Нетрудно видеть, что $Bu = \lambda u$, т.е. λ и u суть собственное значение и собственный вектор матрицы B. Обозначим $\|.\|_2$ матричную норму, подчинённую норме вектора в $\mathbf{C}^n$, тогда $\|A - B\|_2 \le \|r\|_2$.

Итак, внутри Γ_λ лежит одно собственное значение матрицы A. Если выполнено условие

$$\sup_{\varsigma \in \Gamma_\lambda} Spr(A - \varsigma I)(B - \varsigma I) - I) < 1, \qquad (3.9)$$

то внутри Γ_λ нет других собственных чисел матрицы B, кроме λ. Заметим, что условие (3.9) выполнено, если выполнено

$$\|R(\varsigma, A)\|_2 \|r\|_2 < 1, \quad \forall \varsigma \in \Gamma_\lambda. \qquad (3.10)$$

Таким образом, если погрешность дискретизации достаточно мала, то внутри Γ_λ нет «паразитических» собственных чисел матрицы B, т.е. собственных чисел, отличных от λ. Теперь осталось применить следствие из теоремы 4, чтобы получить оценку погрешности

$$| \lambda - \tilde{\lambda} | \leq C_n \|r\|_2 ,$$
$$C_n = \rho \|R(\varsigma_0, A)\|_2 (1 - \|R(\varsigma_0, A)\|_2 \|r\|_2)^{-1}, \qquad (3.11)$$

$\zeta_0 \in \Gamma_\lambda$ - точка, в которой достигается максимум $\|R(\varsigma, A)\|_2$ при $\zeta \in \Gamma_\lambda$. Пусть теперь λ - полупростое собственное значение замкнутого оператора T кратности m, а M – соответствующее m-мерное геометрическое собственное подпространство, и $dimP_nM=m$ при достаточно большом n. В результате дискретизации задачи на собственные значения для оператора T получаем, вообще говоря, m конечномерных задач вида (3.8):

$$Au_i=\lambda u_i+r_i\,,\ \ i=1,2,\ldots,m,$$

где $(u_i,u_j)=\delta_{ij}$. Если Γ_λ - контур, удовлетворяющий условиям теоремы 2, и выполнено соотношение (2.1), то внутри Γ_λ лежит m собственных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ оператора T_n (матрицы A), считая каждое собственное значение столько раз, какова его алгебраическая кратность. Введём в рассмотрение матрицу

$$B = A - r_1 u_1^* - \ldots - r_m u_m^* .$$

Нетрудно заметить, что матрица B имеет λ m-кратным собственным значением, а $u_1,\ldots,u_m$ – соответствующие собственные векторы. Если выполнено условие (3.9), то внутри Γ_λ нет других собственных значений матрицы B. Обозначим $R=A$-B, тогда $\|R\|_2 \leq m \max\limits_i \|r\|_2$. Соотношение (3.9) выполнено, если выполнено

$$\|R(\varsigma, A)\|_2 \|R\|_2 < 1, \ \ \forall \varsigma \in \Gamma_\lambda .$$

Теперь так же, как для простого собственного значения, получаем оценку

$$| \lambda - \hat{\lambda} | \leq C_n \|R\|_2 ,$$
$$C_n = \rho \|R(\varsigma_0, A)\|_2 (1 - \|R(\varsigma_0, A)\|_2 \|R\|_2)^{-1}.$$

Здесь $\hat{\lambda} = \frac{1}{m}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)$, $\zeta_0 \in \Gamma_\lambda$ - точка, в которой достигается масимум $\|R(\varsigma, A)\|_2$ при $\zeta \in \Gamma_\lambda$.

§4. Апостериорная оценка погрешности в задачах на собственные значения

Теоремы, доказанные в параграфах 2 и 3, позволяют получить также апостериорную оценку погрешности в задачах на собственные значения для ограниченного оператора T. Действительно, пусть T_n - последовательность ограниченных операторов (дискретизация оператора T), у которых можно вычислить собственные значения непосредственно (например, если $T_n = P_n T P_n$ (см. §2), то задача о вычислении собственных значений оператора T_n эквивалентна вычислению собственных значений некоторой матрицы A размера $n\times n$, а для решения такой проблемы существуют надёжные алгоритмы [6]).

Пусть $\tilde{\lambda}$ - простое собственное оператора T_n, а $\Gamma_{\tilde{\lambda}}$ - замкнутый контур, содержащий внутри себя точку $\tilde{\lambda}$ и не содержащий других точек спектра оператора T_n. Для того чтобы выяснить, с какой точностью $\tilde{\lambda}$ является собственным значением оператора T, следует вычислить величину

$$r_0^{-1} = \mathop{Sup}_{\varsigma \in \Gamma_{\tilde{\lambda}}} Spr(R_n(\varsigma)(T - \varsigma I) - I) < 1, \quad R_n(\varsigma) = (T_n - \varsigma I)^{-1}.$$

Если $r_0^{-1} < 1$, то внутри $\Gamma_{\tilde{\lambda}}$ лежит единственное собственное значение λ оператора T и выполняется неравенство

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \le \rho \frac{r_0^{-1}}{1 - r_0^{-1}}, \; \rho = \max_{\varsigma \in \Gamma_{\tilde{\lambda}}} |\tilde{\lambda} - \varsigma|.$$

Важно заметить, что вычислять наибольшее по модулю собственное значение оператора $R_n(\zeta)(T-\zeta I)-I$ можно грубо. Необходимо только выяснить, что $Spr(R_n(\zeta)(T-\zeta I)-I)<1$, а также порядок этой величины.

§5. Обобщения для пучка операторов

Пусть **B** – банахово пространство, а A,B – пара ограниченных операторов. Обозначим $P(A,B)$ резольвентное множество, т.е. множество комплексных чисел $\zeta\in\mathbf{C}$, для которых существует ограниченный оператор $(A-\zeta B)^{-1}$. Дополнение $\Sigma(A,B)=\mathbf{C}-P(A,B)$ называется спектром пары операторов A,B. Если для некоторого числа $\lambda\in\mathbf{C}$ имеется решение $u\neq 0$ уравнения $Au=\lambda Bu$, тогда λ называется собственным значением, соответствующим собственному вектору u для пары операторов A,B. Собственные значения пары операторов A,B лежат в спектре $\Sigma(A,B)$. Далее будем применять обозначения $R(\zeta)=(A-\zeta B)^{-1}$. Пусть λ - некоторое собственное значение пары операторов A,B, а $\Gamma\subseteq P(A,B)$ – спрямляемый контур, содержащий внутри себя только это собственное значение. Обозначим

$$E=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R(\varsigma)d\varsigma.$$

Оператор $P=EB$ является проектором. Если пространство $P(\mathbf{B})$ конечномерно, тогда $dimP=dimP(\mathbf{B})$ называется алгебраической кратностью собственного значения λ ([3]).

Теорема 5

Пусть A,B - пара ограниченных операторов в банаховом пространстве **B**, а A_n ,B_n – также пара ограниченных операторов. Пусть Γ - спрямляемый замкнутый контур (или конечная совокупность таких попарно не пересекающихся контуров), содержащих внутри m собственных значений пары операторов A,B, сосчитанных с их алгебраической кратностью, и пусть выполнено условие

$$r_0^{-1}=\sup_{\varsigma\in\Gamma}Spr(R(\varsigma)(A_n-\varsigma B_n)-I)<1, \qquad (5.1)$$

то внутри Γ лежит ровно m собственных значений пары операторов A_n,B_n, считая каждое собственное значение столько раз, какова его алгебраическая кратность.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2, с тем различием, что теперь в отличие от классической теории резольвенты оператором проектирования на алгебраическое собственное подпространство является проектор $P=EB$ (см. выше).

Теорема 6

Пусть выполнены условия теоремы 5, но в качестве контура Γ выберем выпуклый контур Γ_λ, который содержит внутри себя собственное значение λ пары операторов A,B алгебраической кратности m и не содержит других точек спектра этого оператора. Обозначим $\rho = \max\limits_{\varsigma \in \Gamma_\lambda} |\lambda - \varsigma|$, а $\hat{\lambda} = \frac{1}{m}(\lambda_1 + ... + \lambda_m)$ - среднее арифметическое собственных значений пары операторов A_n,B_n, лежащих внутри Γ_λ, тогда выполняется неравенство

$$|\lambda - \hat{\lambda}| \le \rho \frac{r_0^{-1}}{1 - r_0^{-1}},$$

где величина r_0 определена в (5.1).

Доказательство дословно аналогично доказательству теоремы 4 (см. выше). Смысл теоремы 5 состоит в том, что резольвенты пар операторов A,B и A_n,B_n достаточно близки.

Глава 2.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Введение

Для численного решения задачи о собственных значениях имеется ряд конкурирующих методов. Это прежде всего проекционные методы - метод Ритца, метод Бубнова-Галеркина и др. Известно немало о точности, которую дают эти методы. Так, например, приближения для собственных значений самосопряженных задач, даваемые методом Ритца, лежат сверху точных значений. Известен ряд результатов о сходимости, и в некоторых частных случаях установлены оценки погрешности проекционных методов [7].
Наряду с проекционными методами большое распространение получили и разностные методы [8]. Однако при конструировании указанных численных методов не учитывается ряд важных обстоятельств, что значительно снижает их эффективность. Обычно при решении задачи на собственные значения мы располагаем колоссальной априорной информацией. Чаще всего отыскиваемые решения бесконечно дифференцируемы либо даже аналитичны. Поэтому они являются элементами функциональных компактов, довольно просто устроенных. Как правило, для таких компактов хорошо известна асимптотика их поперечников. С другой стороны, любой проекционный метод основан на выборе некоторого набора конечномерных подпространств и тем самым некоторого способа приближения искомого решения (причем этот способ, как правило, не согласован с оптимальными способами, о которых говорилось выше). Это, естественно, приводит к тому, что численный алгоритм, построенный на таком проекционном методе, далек по своим свойствам от оптимального. Вместе с тем, положив в основу численного алгоритма рациональный способ приближения искомого элемента, получим алгоритм, близкий к оптимальному. Этот подход будет развиваться ниже, и основан он на идеях работы [1]. Разностным методам присущи существенные недостатки [1] и, в частности, то, что это методы с насыщением

(вопросам точности этих методов посвящено довольно много работ, и из них мы укажем лишь на [8], [9]). Поэтому и при разностном методе решения задачи на собственные значения опять-таки игнорируется априорная информация о гладкости решения, а учитывая потерю гладкости, присущую разностным методам, получаем алгоритмы, далекие от оптимальности. Проблема построения численных методов решения задачи на собственные значения разбивается на две. Прежде всего нужно бесконечномерную задачу свести к конечномерной задаче, а затем указать метод решения полученной алгебраической задачи на собственные значения. В этой работе рассматривается только первый этап, а полученная алгебраическая задача решается QR-методом.

Абстрактные теоремы об оценке погрешности в задачах на собственные значения опубликованы в [10], [11]. Отметим, что в [11] рассматриваются только компактные операторы, а в [10] - произвольные замкнутые операторы. Выше в главе 1 приведены результаты работы [10] и их обобщения на случай пучка ограниченных операторов.

Для пояснения, чем предлагаемые алгоритмы отличаются от классических, рассмотрим классическую задачу Штурма-Лиувилля

$$y''(x) - q(x)y(x) = \lambda\rho(x)y(x), \qquad x \in (-1,+1), \tag{1.1}$$

$$y(-1) = y(+1) = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $q(x)$ и $\rho(x)$ – заданные функции, λ - спектральный параметр. Хочется сказать, что задача (1.1) - (1.2) тривиальна для численного решения. Традиционным методом решения этой задачи является разностный метод. Его суть состоит в следующем: пусть h - шаг сетки; выберем на отрезке $(-1,+1)$ n узлов

$$x_i = -1+hi,\ h=2/(n+1),\ i=1,2,\ldots,n,\ x_0= -1,\ x_{n+1}=1,$$

т.е. всего на замкнутом отрезке $[-1,1]$ выбираем $(n+2)$ узла.

Если $y(x) \in C^3[-1,1]$, то

$$y(x+h) = y(x) + \frac{y'(x)}{1!}h + \frac{y''(x)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x)}{3!}h^3 + O(h^4), \tag{1.3}$$

$$y(x-h)=y(x)-\frac{y'(x)}{1!}h+\frac{y''(x)}{2!}h^2-\frac{y'''(x)}{3!}h^3+O(h^4). \qquad (1.4)$$

Складывая соотношения (1.3), (1.4), получим

$$y(x+h)+y(x-h)=2y(x)+y''(x)h^2+O(h^4),$$

тогда

$$y''(x)=\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}+O(h^2). \qquad (1.5)$$

Обозначим

$$y(x_i)=y_i, \quad y''(x_i)=y_i'',$$

тогда из (1.5) получаем

$$y_i''=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+O(h^2), \quad i=1,2,...,n. \qquad (1.6)$$

Первый член в правой части соотношения (1.6) - это вторая разностная производная. Таким образом, разностная производная аппроксимирует y_i'' со вторым порядком, т.е. с точностью до $O(h^2)$. Подставим (1.6) в (1.3) и получим для каждого узла сетки

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}-q_iy_i=\lambda\rho_iy_i+O(h^2), \quad i=1,2,...,n, \qquad (1.7)$$

$$y_0=y_{n+1}=0. \qquad (1.8)$$

Отбрасывая погрешность дискретизации $O(h^2)$, получим приближённую конечномерную задачу для трёхдиагональной симметричной матрицы. Как показано выше (см. гл. 1) возмущение, вносимое в собственные значения отбрасыванием $O(h^2)$, порядка погрешности дискретизации с коэффициентом, зависящим от расстояния, исследуемого собственного значения λ до остальной части спектра задачи Штурма-Лиувилля. Таким образом, в независимости от гладкости решения задачи Штурма-Лиувилля (1.1) - (1.2) погрешность определения собственного значения порядка $O(h^2)$. По терминологии К. И. Бабенко [1], разностный метод решения задачи Штурма-Лиувилля имеет насыщение. Аналогичным недостатком обладает и метод конечных элементов. Опишем теперь альтернативный метод решения задач на собственные значения, который не обладает указанными недостатками.

§2. Дискретизация классических спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассматривается задача на собственные значения для нулевого уравнения Бесселя, задача Штурма-Лиувилля, периодическая и антипериодическая задачи для оператора Штурма-Лиувилля. Вначале рассмотрим краевую задачу для уравнения Бесселя:

$$(xy')' + \lambda xy = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{2.1}$$

$$y(1) = 0, \tag{2.2}$$

$$|y(0)| < \infty. \tag{2.3}$$

Решение этой задачи известно, и поэтому она удобна для проверки методики. Краевая задача (2.1) - (2.3) эквивалентна интегральному уравнению

$$y\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} G\left(\frac{x+1}{2}, \frac{\varsigma+1}{2}\right)\frac{\varsigma+1}{2}\, y\left(\frac{\varsigma+1}{2}\right)d\varsigma,$$

$$G(x,\xi) = -\ln[(x+\xi+|\xi-x|)/2].$$

Применим для функции *[(ζ+1)/2]y[(ζ+1)/2]* интерполяционную формулу вида

$$(P_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)l_k(x) + R_n(x; f), \tag{2.4}$$

где фундаментальные функции интерполяции суть

$$l_k(x) = \frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n'(x_k)}, \qquad k = 1,2,\dots,n,$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad x_k = \cos[(2k-1)\pi/2n],$$

$R_n(x;f)$ – погрешность интерполяции. Проводя вычисления, получаем

$$y_j = \lambda \sum_{k=1}^{n} B_{jk} y_k + r_n(x_j; y), \qquad (2.5)$$

$$B_{jk} = B_k(x_j), \quad y_k = y(x_k), \quad k, j = 1, 2, ..., n,$$

где

$$B_k(x) = \frac{\varsigma_k + 1}{4} \int_{-1}^{+1} G\left(\frac{x+1}{2}, \frac{\varsigma+1}{2}\right) l_k(\varsigma) d\varsigma,$$

$$r_n(x, y) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} G\left(\frac{x+1}{2}, \frac{\varsigma+1}{2}\right) R_n\left(\varsigma; \left(\frac{\varsigma+1}{2}\right) y\right) d\varsigma,$$

Отбрасывая в (2.5) погрешность дискретизации, получаем приближенную задачу на собственные значения

$$\tilde{y} = \tilde{\lambda} B \tilde{y}.$$

Здесь $\tilde{y}$ - вектор приближенных значений искомой собственной функции *y(x)* в узлах сетки, $\tilde{\lambda}$ - приближенное собственное значение. Легко видеть ([1], с. 189), что

$$\max_{|x| \le 1} |r_n(x; y)| \le c |\lambda| (1 + \omega_n) E_n(y),$$

где c - абсолютная постоянная, ($\omega_n = O(\ln(n))$ - константа Лебега интерполяции, а $E_n(y)$ - наилучшее приближение функции y многочленом степени не выше $(n-1)$ в норме C). Заметим далее, что собственные функции задачи (2.1) - (2.3) целые, а поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{E_n(y)} = 0$$

([12], с. 254), т.е. величина погрешности дискретизации очень быстро стремится к нулю. Возмущение, вносимое в собственные значения отбрасыванием погрешности дискретизации, будет оценено ниже. Здесь обсудим результаты численных расчетов. При n=5 получим первое собственное значение с четырьмя знаками после запятой, а третье собственное значение - с одним знаком после запятой. При n=20 первое собственное значение вычисляется с 22 знаками после запятой, а 14-е собственное значение вычисляется с одним знаком после запятой. Последний расчет проводился на ЭВМ БЭСМ-6 с использованием двойной точности (длина мантиссы 80 бит). Время расчета - 4мин 40с вместе с вычислением матрицы. В [13] опубликована программа *BESSEL*, по которой проводились эти расчеты, а также результаты расчета собственных функций краевой задачи (2.1) - (2.3).

Теперь рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения

$$y''(x)-q(x)y(x)=\lambda\rho(x)y(x), \quad x\in(b_1,b_2), \tag{2.6}$$

с краевыми условиями

$$\alpha y'+\beta y\big|_{x=b_1}=0, \tag{2.7}$$

$$\alpha_1 y'+\beta_1 y\big|_{x=b_2}=0, \tag{2.8}$$

$$\alpha^2+\alpha_1^2\neq 0.$$

Заменой независимой переменной задача сводится к интервалу *(-1,1)*, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $b_1=-1$, $b_2=1$. Будем также предполагать, что функции $q(x)$ и $\rho(x)$, входящие в уравнение (2.6), гладкие.

Сведём краевую задачу (2.6) - (2.8) к интегральному уравнению. Пусть $G(x,\xi)$ - функция Грина оператора d^2/dx^2 с краевыми условиями (2.7),(2.8) тогда получим

$$y(x)=\int_{-1}^{+1}G(x,\xi)[q(\xi)+\lambda\rho(\xi)y(\xi)]d\xi. \tag{2.9}$$

Дискретизацию интегрального уравнения (2.9) произведем так же, как и выше. Применив для функций yq и $y\rho$ интерполяционную формулу (2.4), получим

$$y(x)q(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k q_k l_k(x)+R_n(x;yq),$$

$$y(x)\rho(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k\rho_k l_k+R_n(x;y\rho),$$

где

$$y_k = y(x_k), \quad \rho_k = \rho(x_k), \quad q_k = q(x_k), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Подставляя эти соотношения в (2.9), имеем

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} D_{jk} q_k y_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} D_{jk} \rho_k y_k + r_n(x_j; yq) + \lambda r_n(x_j; y\rho), \quad j = 1, 2, ..., n,$$

здесь

$$D_{jk} = \int_{-1}^{+1} G(x_j, \xi) l_k(\xi) d\xi, \quad j, k = 1, 2, ..., n, \tag{2.10}$$

$$r_n(x_j; yq) = \int_{-1}^{+1} G(x_j, \xi) R_n(\xi, yq) d\xi, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{2.11}$$

$$r_n(x_j; y\rho) = \int_{-1}^{+1} G(x_j, \xi) R_n(\xi, y\rho) d\xi, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{2.12}$$

Окончательно приходим к алгебраической задаче на собственные значения

$$(A_n - \lambda B_n) y = r_a + \lambda r_b. \tag{2.13}$$

Здесь $A_n=I-DQ$, $B_n=DP$ – матрицы размера $n \times n$; $Q=diag(q_1, ..., q_n)$, $P= diag(\rho_1, ..., \rho_n)$ – диагональные матрицы. Элементы матрицы D определяются по формуле (2.10), векторы погрешностей r_a и r_b имеют компоненты, определяемые по формулам (2.11) и (2.12) соответственно. Заметим, что в соотношении (2.13) λ - точное искомое собственное значение, а y – вектор длины n, компоненты которого содержат значения соответствующей собственной функции в узлах сетки. Отбрасывая в (2.13) погрешности дискретизации r_a и r_b, получаем приближённую задачу на собственные значения

$$(A_n - \tilde{\lambda} B_n) \tilde{y} = 0,$$

где $\tilde{\lambda}$ - приближённое собственное значение, а $\tilde{y}$ - вектор длины n, компоненты которого содержат приближённые значения искомой собственной функции в узлах сетки. Возмущение, вносимое в собственные значения отбрасыванием погрешностей дискретизации, будет оценено ниже, а сейчас рассмотрим некоторые результаты численных расчетов.

В [14] рассчитывались далекие собственные значения краевой задачи

$$y''(x)+(\lambda-x^2)y(x)=0, \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

Для 100-го собственного значения по асимптотической формуле получены значения 97711.8842956852, а в результате вычислений 97711.8846. Вычисления по описанной в этом параграфе методике дают значение 97711.884322. Этот результат получен на сетке из n=180 узлов. Он несколько точнее, чем в [14]. Таким образом, описанная методика позволяет вычислять настолько далекие собственные значения, когда уже можно использовать асимптотические формулы.

В качестве второго численного примера рассмотрим краевую задачу

$$y''(x)+(\lambda x-x^4)y(x)=0, \; y'(1) - y(1) = y'(2) - 4y\,(2) = 0.$$

В [14] результаты расчета этого примера приведены в табл. VIII. В качестве первого собственного значения приводится 2.00000000. Однако легко видеть, что точное первое собственное значение -2. Оно соответствует собственной функции $y(x)=c\exp(x^3/3)$. Следующие четыре собственных значения больше истинных на 6 единиц (дробная часть правильна). Правильные собственные значения, полученные на сетке из n=20 узлов суть: λ_1=-2.000000000005, λ_2=7.4742107310, λ_3=27.637864542, λ_4=60.869801997, λ_5=107.37160421. При $n=2$ получены собственные значения -2.20 и 7.46, т.е. с 10% относительной точностью первое собственное значение вычисляется на сетке из двух узлов. Расчеты проводились по программе EIGVAL [13]. Отметим, что в этой программе ошибка, которая проявляется только при нечетном n. Правильное значение 6-й строки ([13], с. 54) есть *C1=C0*(1-(-1)**N)/N*. Все примеры расчетов, приведенные в [13], правильны.

В связи с полученными результатами отметим, что в [8], с. 335 приводится следующий расчет: для того чтобы по разностной схеме 6-го порядка найти пятое собственное значение с тремя верными знаками после запятой, нужно -50 узлов сетки. В данном методе требуется 12-13 узлов интерполяции.

В качестве следующего численного примера рассмотрим уравнение параболического цилиндра

$$y''(x)+\{\lambda+\gamma^2x^2\}y(x)=0,$$

$$y(0)=y(1)=0.$$

В таблице 1 для $\gamma=50$ и $\gamma=100$ приведены результаты расчета по описанной выше методике. Там же для сравнения приводятся результаты работы [14]. Число точек $n=40$ для $\gamma=50$ и $n=100$ для $\gamma=100$.

Суть методики, описанной в [14], состоит в следующем. Заменой Прюфера задача сводится к системе 2-х уравнений 1-го порядка. Для определения собственных значений используется одно из этих уравнений (правая часть которого зависит от λ). Левое краевое условие дает начальное значение. По схеме Рунге-Кутта 6-го порядка можно построить для каждого λ решение этой задачи Коши. Используя правое краевое условие, получаем трансцендентное уравнение для определения собственных значений. Важным преимуществом этой методики является возможность вычислять далекие собственные значения.

Для (2.6) с периодическим потенциалом $q(x)$, $q(x)=q(x+a)$ и $p=1$ будем рассматривать периодическую задачу

$$y(0)-y(a)=y'(0)-y'(a)=0, \tag{2.14}$$

и антипериодичсскую задачу

$$y(0) + y(a) = y(0) + y'(a) = 0. \tag{2.15}$$

Пусть κ - вещественное число, тогда (2.6) можно переписать в виде

$$d^2y/dx^2+\kappa^2y=(\mu+q(x))y(x), \qquad \mu=\lambda+\kappa^2.$$

Пусть $G\ (x,\xi)$ - функция Грина оператора

$$d^2y/dx^2+\kappa^2$$

для граничных условий (2.14) либо (2.15). Тогда получаем интегральное уравнение

Таблица 1

γ=50			γ=100		
m	λ_m		m	λ_m	
	расчет по описанной методике	результаты [14] на 100 точках		расчет по описанной методике	результаты [14] на 100 точках
9	121.0784681	121.0785	17	219.8930241	219.893
10	279.0426771	279.0427	18	483.3507150	483.351
11	465.1662800	465.1663			

$$y(x)=\int_0^a G(x,\xi)(\mu+q(\xi)y(\xi))d\xi.$$

Для интерполяции решения применим в периодическом случае интерполяционную формулу

$$P_n(x;y)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y(x_k)D_n(x-x_k;a),\qquad x_k=\frac{ak}{2n+1},$$

где $D_n(x;a)$ - ядро Дирихле

$$D_n(x;a)=\frac{\sin[(n+0.5)2\pi x/a]}{2\sin(\pi x/a)}.$$

В антипериодическом случае применим интерполяционную формулу

$$P_n(x;y)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y(x_k)\cos\frac{\pi}{a}(x-x_k)D_n(x-x_k;a).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны проделанным в задаче Штурма-Лиувилля. В результате получаем алгебраическую задачу на собственные значения вида (2.13). Отбрасывая погрешность дискретизации получим приближенную задачу на собственные значения:

$$y = \mu By, \qquad B = (I + AQ)^{-1} A. \tag{2.16}$$

Исследуем подробнее конечномерную задачу (2.16). Для периодических краевых условий

$$G(x,\xi) = K(x-\xi), \qquad K(x) = \frac{2}{a}\left(\frac{1}{2\kappa^2} + \sum_1^\infty \frac{\cos\frac{2\pi\nu}{a}x}{\left(\frac{2\pi\nu}{a}\right)^2 + \kappa^2}\right),$$

а поэтому

$$A_{ij} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{n}{}' \frac{\cos\frac{2\pi k}{a}(x_i - x_j)}{\left(\frac{2\pi k}{a}\right)^2 + \kappa^2} \tag{2.17}$$

(штрих у знака суммы означает, что слагаемое при *k=0*, берётся с коэффициентом ½), т.е. матрица *A* – симметричный циркулянт размера *N*×*N*.

Симметричным циркулянтом размера *N*×*N* *(N=2n+1)* называется действительная матрица, первая строка которой имеет вид: $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n a_{n-1} \ldots a_1$, а остальные строки получаются из 1-ой циклической перестановкой. Следовательно, в этой матрице всего *n+1* различных элементов. Свойства циркулянтов хорошо изучены ([15]). А именно, все матрицы этого класса имеют одни и те же собственные векторы

$$x_j = (1, \theta_j, \ldots, \theta_j^{N-1}), \quad \theta_j = \exp(i\varphi_j), \quad \varphi_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0,1,\ldots,2n,$$

соответствующие собственные значения суть

$$\lambda_j = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi_j, \quad j = 0,1,\ldots,2n.$$

Нетрудно понять, что λ_0 - однократное собственное значение, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - двукратные. Легко проверяется результат, что класс $\boldsymbol{L}$

симметричных циркулянтов размера $N \times N$ замкнут относительно алгебраических операций т.е. если $A,B \in \boldsymbol{L}$, то $A+B \in \boldsymbol{L}$, $AB \in \boldsymbol{L}$, $A^{-1} \in \boldsymbol{L}$ если A^{-1} существует. Кроме того $AB=BA$. При алгебраических операциях с матрицами класса $\boldsymbol{L}$ аналогичные операции совершаются с их собственными значениями. Заметим, что рассматриваются только действительные матрицы, а комплексная форма записи для собственного вектора x применяется для удобства. Она означает, что собственными векторами соответствующими собственному значению λ_j являются Rex_j и Imx_j.

Таблица 2

Собственные числа уравнения Матье λ_i		
i	Периодическая задача	Антипериодическая задача
2	-0.11024881701	-0.11024881700
3	1.85910807252	1.85910807252
6	9.04773925990	9.04773925997
7	9.0783688477	9.0783688472
10	25.020840822	25.020840824
11	25.020854343	25.020854342
14	49.010413	49.010418
15	49.010413	49.010418
18	80.98	81.01
19	80.98	81.01

В качестве численного примера рассмотрим уравнение Матье ($q(x)=cos2x$) на промежутке $[0,2\pi]$ для периодического случая и на промежутке $[0,\pi]$ для антипериодического. Обе эти задачи имеют общие собственные функции (функции Матье ce_{2n+1} и se_{2n}). Результаты расчёта при $N=21$ приведены в таблице 2. В таблице 3 приведены результаты расчёта при $N=101$ (номером i в порядке возрастания перенумерованы собственные значения λ_i периодической задачи, т.е. собственные значения соответствующие всем функциям Матье). Причем в таблицах 2 и 3 приведены только совпадающие знаки у собственных значений, рассчитанные по двум методикам. Из рассмотрения таблицы 3 усматривается асимптотический закон роста собственных значений рассматриваемого уравнения Матье

$$\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1} \sim k^2. \qquad (2.18)$$

Таким образом, описанная методика позволяет для данной задачи вычислить настолько далёкие собственные значения, что начинает с хорошей точностью выполняться асимптотическая формула (2.18).

§3. Экспериментальное исследование скорости сходимости

Рассмотренные во втором параграфе задачи для уравнения Бесселя и второй пример для задачи Штурма-Лиувилля позволяют экспериментально оценить скорость сходимости предложенной методики.

Рассмотрим вычисление первого собственного значения уравнения Бесселя. Квадратный корень из этого собственного значения – первый нуль функции Бесселя J_0. Существуют таблицы, в которых нули функций Бесселя вычислены с 30 знаками после запятой. Проводились вычисления на сетке из 3-12 узлов с шагом 1. Получены следующие значения погрешности *0.11, 0.53e-2, 0.37e-3, 0.54e-4, 0.20e-5, 0.23e-6, 0.64e-8, 0.68e-9, 0.17e-10, 0.29e-11*. Затем подбиралась аналитическая зависимость для этой последовательности. Получено $\varepsilon=exp(a+bn^{0.5})$, $a=17.395416$, $b=-11.317619$.

Далее рассматривалась задача Штурма-Лиувилля. Второй численный пример, имеет аналитически вычисляемое собственное значение -2. Проверялась скорость сходимости, предложенного численного метода на сетке из 2-17 узлов. Получены следующие значения погрешности *8e-1, 5e-1, 7e-2, 3e-2, 6e-3, 1e-3, 2e-4, 2e-5, 4e-6, 6e-7, 1e-7, 1e-8, 2e-9, 3e-10, 4e-11, 5e-12*. Эта табличная зависимость апроксимировалась аналитически.

Таблица 3

Собственные числа уравнения Матье λ_i		
i	Периодическая задача	Антипериодическая задача
18	81.0062503	81.0062507
19	81.0062503	81.0062507
22	121.004167	121.004167
23	121.004167	121.004167
26	169.002976	169.002978
27	169.002976	169.002978
98	2400.995	2401.001
99	2400.995	2401.001

Получено $\varepsilon = \exp(a+bn^3)$, a=0.013621586, b=-0.028013035.

Таким образом, в отличие от классических разностных методов, где зависимость скорости сходимости от числа узлов сетки степенная, здесь имеем экспотенциальное убывание погрешности. При $N=20$, полученная выше формула для уравнения Бесселя даёт оценку погрешности *3.74e-15*. Фактически погрешность меньше (см. §2).

В приложении 1 приведены программы и формулы для програмирования, описанных в этой главе задач.

Глава 3.

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

§1. Введение

В этой главе разработаны практические алгоритмы для трёх классических спектральных и краевых задач: Дирихле, Неймана и смешанной. Поскольку алгоритмы, основанные на локальных методах приближения, насыщаемы [1], то для дискретизации названных выше задач используется глобальная интерполяционная формула для функции двух переменных в круге. Задачи для уравнения Лапласа, рассматриваемые в односвязной области Γ с гладкой границей $\partial\Gamma$, конформным отображением сводятся к кругу. Причём в описанных ниже алгоритмах конформное отображение предполагается заданным. Отметим, что для численного построения конформного отображения имеются надёжные алгоритмы [16].

Классические методы - разностный и метод конечных элементов - приводят к разреженной матрице дискретной задачи, что является большим достоинством этих методов. Рассматриваемые ниже двумерные алгоритмы приводят к полностью заполненным матрицам. Однако внимательный анализ структуры матрицы конечномерной задачи позволяет довести эти алгоритмы до высокого совершенства. Оказывается, что можно затабулировать громоздкие вычисления в таблицах небольшого размера. В таком случае описанные алгоритмы можно трактовать как расшифровывающие алгоритмы, которые, используя начальные данные в виде таблиц небольшого объёма, строят матрицу дискретной задачи. Далее, если рассматривается задача на собственные значения, то остаётся вычислить у построенной матрицы собственные значения. Если же требуется приближённо решить уравнение Пуассона, то оказывается, что это можно экономно сделать в двумерной и некоторых трёхмерных областях.

В качестве примера в приложении 2 приведены две подпрограммы, содержащие 41 и 35 фортрановских операторов (представляющих алгоритм) и таблицы небольшого объёма, используемые этими программами в качестве начальных данных.

§2. Интерполяционная формула для функции двух переменных в круге и её свойства

Для того чтобы построить дискретизацию, обладающую нужными свойствами (не имеющую насыщения), применяется интерполяционная формула К. И. Бабенко для функции двух переменных в круге. Свойства этой интерполяционной формулы таковы, что скорость убывания её погрешности, с ростом числа узлов интерполяции, тем выше, чем большим условиям гладкости удовлетворяет интерполируемая функция. Другими словами, построенная дискретизация не имеет насыщения.

Выберем в круге $|\zeta|\le 1$ сетку, состоящую из узлов $\zeta_{\nu l}=r_\nu exp(i\theta_l)$, $r_\nu=cos((2\nu\text{-}1)\pi/4/m)$, $\nu=1,2,\dots,m$, $\theta_l=2\pi\, l/N$, $N=2n+1$, $l=0,1,\dots,2n$, т.е. в круге выбирается m окружностей с радиусами r_ν, $\nu=1,2,\dots,m$, а на каждой окружности через равные углы $2\pi/N$ выбирается N точек. Здесь r_ν, $\nu=1,2,\dots,m$ – положительные нули многочлена Чебышева T_{2m} чётной степени $2m$. Всего в круге выбирается $M=mN$ узлов.

По этим узлам построим интерполяционную формулу вида:

$$(P_M\, f)(r,\theta)=\sum_{l=0}^{2n}\sum_{\nu=1}^{m} f_{\nu l}L_{\nu l}(r,\theta), \tag{2.1}$$

$$L_{\nu l}(r,\theta)=\frac{2T_{2m}(r)}{NT'_{2m}(r_\nu)}\left(\frac{D_n(\theta-\theta_l)}{r-r_\nu}-\frac{D_n(\theta-\theta_l+\pi)}{r+r_\nu}\right),$$

$$D_n(\theta)=0.5+\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta,\quad T_m(r)=\cos(m\arccos x).$$

Здесь $D_n(\theta)$ - ядро Дирихле, $T_m(r)$ - многочлен Чебышева степени m. Суть этой интерполяции состоит в том, что на диаметре круга для рассматриваемой функции применяется интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами в нулях полинома Чебышева степени $2m$, а по θ применяется интерполяция тригонометрическим многочленом степени n. Ниже часто вместо двух индексов, нумерующих узлы интерполяции, будет применяться один. В этом случае узлы интерполяции нумеруются, начиная с первой окружности ($\nu=1$) против часовой стрелки ($l=0,1,\dots,2n$).

Интерполяционная формула (2.1) обладает нужными свойствами. Действительно, формула (2.1) точна на многочленах от двух переменных степени $\omega=min(n,m-1)$. Обозначим множество этих многочленов P_ω, а E_ω обозначим наилучшее приближение функции $f\in C[D]$ (D – единичный круг) многочленом из P_ω. Тогда определён проектор

$$P_M\colon C[D]\to L^M,\ L^M=L(L_1,\dots,L_M)$$

и справедливо классическое неравенство:

$$|\,f(r,\theta)-(P_M f)(r,\theta)\,|\le(1+|\,P_M\,|_\infty)E_\omega(f), \tag{2.2}$$

в котором $|P_M|_\infty$ - норма проектора P_M. Так же, как в одномерном случае, неравенство (2.2) показывает, что соответсвующая интерполяционная формула не имеет насыщения. Норма проектора P_M удовлетворяет соотношению

$$|P_M|_\infty=O(ln^2M), \tag{2.3}$$

причём не составляет труда уточнить эту оценку; медленный рост нормы $|P_M|_\infty$ особенно важен для бигармонического уравнения.

Делая некоторые предположения о гладкости класса интерполируемых функций, можно оценить скорость убывания наилучшего приближения E_ω при $M\to\infty$ и получить конкретные оценки погрешности интерполяционной формулы (2.1).

Пусть

$$f(r,\theta)=(P_M f)(r,\theta)+\rho_M(r,\theta;f), \tag{2.4}$$

где $\rho_M(r,\theta;f)$ - погрешность интерполяционной формулы (2.1) (остаток). Тогда справедлива следующая теорема К. И. Бабенко.

Теорема 7

Рассмотрим класс функций $H^M_\infty(K;D)\subset C(D)$, удовлетворяющих в круге D условиям

$$\left|\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}\right| \le K, \qquad k+l \le \mu,$$

тогда, если $f \in H_\infty^M(K;D)$, то

$$|\rho_M(\,.\,;f)|_\infty \le c_\mu K M^{-\mu/2} \log^2 M, \tag{2.5}$$

где c_μ - константа, зависящая от μ.

Таким образом, из рассмотрения формулы (2.5) видно, что при одинаковом числе узлов интерполяции M скорость убывания погрешности интерполяционной формулы (2.1) возрастает с ростом μ, т.е. с ростом гладкости интерполируемой функции f. Это означает, что полученная интерполяционная формула не имеет насыщения.

Основываясь на интерполяционной формуле (2.1), легко построить квадратурную формулу для вычисления определённых интегралов, когда областью интегрирования является круг. В самом деле, заменяя подынтегральную функцию выражением (2.1), получим квадратурную формулу:

$$\int_D f(r,\theta)d\sigma = \sum_{\nu,l} f(r_\nu,\theta_l)c_{\nu l} + \delta(f), \tag{2.6}$$

где $d\sigma$ - элемент площади, $c_{\nu l}$ – весовые коэффициенты, а $\delta(f)$ – погрешность. Для $c_{\nu l}$ имеем

$$c_{\nu l} = \int_D L_{\nu l}(r,\theta)d\sigma, \tag{2.7}$$

и они не зависят от l. Введём в рассмотрение блочно-диагональную матрицу

$$C=diag(c_1, c_2, \ldots, c_m), \tag{2.8}$$

где c_ν, $\nu=1,2,\ldots,m$ – диагональные матрицы размера $N\times N$ с одинаковыми числами на диагонали. Для погрешности квадратурной формулы имеем следующую оценку:

$$|\delta(f)| \le 2\pi E_\omega(f).$$

Заметим, что все $c_{\nu l}$ положительны при достаточно большом числе узлов интерполяции.

§3. Дискретизация оператора Лапласа

В произвольной области $\Gamma \in R^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\Gamma$ рассмотрим задачи: (3.1), (3.2); (3.1), (3.3); (3.1), (3.4):

$$\Delta u(z)+f(z)=0,\ z\in\Gamma, \tag{3.1}$$

$$u|_{\partial\Gamma} = 0\ , \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{3.3}$$

$$\left. au+\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{3.4}$$

Здесь функция $f(z)$ либо задана, либо $f(z)=[q(z)+\lambda p(z)]u(z)$, где $q(z)$ и $p(z)$ – заданные функции, и в этом случае имеем задачу на собственные значения для оператора Лапласа; a – заданная на границе $\partial\Gamma$ гладкая функция; n – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma$. В дальнейшем будем считать, что f, q и p – гладкие функции.

Пусть $z=\varphi(\zeta)$, $|\zeta|\le 1$ - конформное отображение единичного круга на область Γ, тогда в плоскости ζ формально получаем те же соотношения (3.1) - (3.4), где, однако, вместо $u(z)$ и $f(z)$ следует писать $u(\zeta)=u(z(\zeta))$ и $|\varphi'(\zeta)|^2 f(z(\zeta))$, а вместо a- $\alpha(\theta)=a(z(e^{i\theta}))\,|\,\varphi'(e^{i\theta})\,|$.

Обозначим через

$$K(\varsigma,\xi) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\,(1-\varsigma\bar{\xi})/(\varsigma-\xi)\,|$$

функцию Грина оператора Лапласа в круге с краевым условием Дирихле. Из (3.1) имеем

$$u(\varsigma) = -\int\limits_{|\xi|\le 1} K(\varsigma,\xi)\,|\,\varphi'(\xi)\,|^2\ [q(\xi)+\lambda\, p(\xi)]u(\xi)d\xi + \int\limits_0^{2\pi} K_0(\varsigma,\theta)\psi(\theta)d\theta,$$

$$K_0(\varsigma,\theta) = \frac{1-\rho^2}{2\pi(1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi))},\quad \varsigma=\rho e^{i\varphi}. \tag{3.5}$$

Здесь $\psi(\theta)$ - значение u на границе. Для задачи Дирихле, которая рассматривается в этом параграфе, $\psi(\theta)=0$, а для остальных задач должна быть выбрана с учётом краевого условия.

Подставим соотношение (2.1) для функции $F(\zeta)=|\varphi'(\zeta)|^2 f(\zeta)$, $\zeta=r\exp(i\theta)$ в (3.5) и, проведя аналитические вычисления интегралов, получим

$$u(\varsigma)=\sum_{l=0}^{2n}\sum_{\nu=1}^{m}H_{\nu l}(\varsigma)z_{\nu l}f_{\nu l}+R_M(\varsigma,F), \tag{3.6}$$

$$R_M(\varsigma;F)=-\int\limits_{|\xi|\le 1}K(\varsigma,\xi)\rho_M(\xi;F)\,d\xi, \tag{3.7}$$

$$H_{\nu l}(\varsigma)=-\int\limits_{|\xi|\le 1}K(\varsigma,\xi)L_{\nu l}(\xi)d\xi,\ \ \xi=r\exp(i\theta). \tag{3.8}$$

Если ζ в (3.6) пробегает узлы интерполяции, то получаем конечномерную задачу вида

$$u=HZf+R. \tag{3.9}$$

Здесь u – вектор-столбец, компоненты которого содержат значения искомого решения (собственной функции) в узлах сетки; H – матрица размера $M\times M$, получаемая из соотношения (3.8), когда ζ пробегает узлы сетки; Z- диагональная матрица с числами $z_{\nu l}$, $\nu=1,2,\dots,m$; $l=0,1,\dots,2n$ на диагонали (см. выше); f – либо заданный вектор-столбец, компоненты которого содержат значения соответствующей функции в узлах сетки, либо $f=(Q+\lambda P)u$, где Q и P – диагональные матрицы, содержащие на диагонали значения соответствующих функций в узлах сетки; в последнем случае имеем задачу на собственные значения; R- вектор погрешности дискретизации, содержащий значения функции $R_M(\varsigma;F)$ (см. 3.7) в узлах сетки. Отбрасывая в (3.9) погрешность дискретизации R, получаем приближённую конечномерную задачу. Возмущение, вносимое в собственное значение отбрасыванием погрешности дискретизации, будет оценено ниже. Оценка точности решения уравнения Пуассона только абсолютной константой отличается от (2.5).

§4. Теоремы об *h*-матрице

Теорема 8

Матрица H имеет следующий блочный вид:

$$H = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mm} \end{Vmatrix}, \qquad (4.1)$$

где $h_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 1,2,\dots,m$ – симметричные циркулянты размера $N\times N$, $N=2n+1$, т.е. матрицы, первая строка которых имеет вид: $b_0,b_1,\dots,b_n,b_n,\dots,b_1$, а остальные строки получаются из первой циклической перестановкой. Для краткости будем называть матрицы такого вида h-матрицами.

Доказательство. Вычисляя интегралы в (3.8), получаем

$$H_{\nu l}(\varsigma) = \frac{1}{N} a_{\nu 0}(\rho) + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}(\rho)\cos k(\varphi - \theta_l), \;\; \varsigma = \rho \exp(i\varphi_l), \;\; \theta_l = 2\pi l / N. \qquad (4.2)$$

Если ζ в (4.2) пробегает узлы сетки, то получаем

$$H = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{n}{}' \; \Lambda_k \otimes h_k, \qquad (4.3)$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $k=0$ берётся с коэффициентом ½; Λ_k, $k=0,1,\dots,n$ – матрица размера $m\times m$:

$$\Lambda_{k\mu\nu} = a_{\nu k}(\rho_\mu), \;\; \mu,\nu=1,2,\dots,m,$$

где ρ_μ - радиус μ-й окружности сетки в круге; h_k, $k=0,1,\dots,n$ – матрица размера $N\times N$:

$$h_{kij} = \cos[k2\pi(i-j)/N)], \;\; i,j=1,2,\dots,N,$$

через $\otimes$ обозначено кронекерово произведение матриц. Вид функций $a_{\nu k}(\rho)$ для доказательства теоремы не важен и поэтому не приводится.

Из (4.3) следует утверждение теоремы. Таким образом, в матрице H всего $m^2(n+1)$ различных элементов. Например, для матрицы размера 104 × 104 (8 окружностей по 13 точек) нужно хранить

448 элементов, а для матрицы 1230 × 1230 (30 окружностей по 41 точке) нужно хранить 18900 элементов.

Используя это свойство, можно вычислять собственные значения матрицы *HZ* (т.е. приближённые собственные значения оператора Лапласа в произвольной плоской области) методом простых итераций в сочетании с методом исключения.

Теорема 9

Пусть *H* – действительная *h*-матрица, тогда эта матрица ортогонально подобна блочно-диагональной матрице

$$\Lambda = diag(\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{2n}),$$

где Λ_j – матрица размера $m \times m$, элемент (k,l) которой есть *j-ое* собственное значение матрицы h_{kl}:

$$\lambda_j = b_0 + 2\sum_{p=1}^{n} b_p \cos(p\varphi_j), \quad \varphi_j = 2\pi j / N, \quad j = 0,1,\ldots,2n, \qquad (4.4)$$

а $b_0, b_1, \ldots, b_n$ - первые элементы первой строки матрицы h_{kl}, причём $\Lambda_j = \Lambda_{N-j}$, $j=1,2,\ldots,n$, т.е. среди клеток Λ_j все парные, кроме Λ_0. Собственные векторы матрицы *H* можно представить в виде

$$y_\nu^{(k)} = c_\nu^{(k)} \otimes x^{(k)}, \qquad (4.5)$$

где

$$x^{(k)} = [1, \exp(ik\psi_1, \ldots, \exp(ik\psi_{2n})], \quad \psi_j = 2\pi j / N, \quad k = 0,1,\ldots,2n,$$

а $c_\nu^{(k)}$, $\nu=1,2,\ldots,m_1$, $m_1 \le m$ – собственный вектор матрицы Λ_k.

Доказательство. Рассмотрим вначале свойства симметричных циркулянтов размера $N \times N$, $N=2n+1$, т.е. матриц, первая строка которых имеет вид $b_0, b_1, \ldots, b_n, b_n, \ldots, b_1$, а остальные строки получаются из первой циклической перестановкой. Следовательно, в этой матрице всего $(n+1)$ различных элементов.

Все матрицы этого класса имеют одни и те же собственные векторы

$$x_j = (1, \theta_j, \ldots, \theta_j^{N-1}), \quad \theta_j = \exp(i\varphi_j), \quad \varphi_j = 2\pi j / N, \quad j = 0,1,\ldots,2n,$$

а соответствующие собственные значения суть

$$\lambda_j = b_0 + 2\sum_{p=1}^{n} b_p \cos(p\varphi_j), \quad j = 0,1,\ldots,2n.$$

Нетрудно видеть, что λ_0 – однократное собственное значение, а $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ – двукратные. Легко проверяется, что класс S симметричных циркулянтов размера $N\times N$ $(N=2n+1)$ замкнут относительно алгебраических операций, т.е. если $A,B\in S$, то $A+B\in S$, $AB\in S$, $A^{-1}\in S$, если A^{-1} существует. Кроме того, $AB=BA$. При алгебраических операциях с матрицами класса S аналогичные операции совершаются с их собственными значениями. Заметим, что рассматриваются только действительные матрицы, а комплексная форма записи для собственного вектора x_j применяется для удобства. Она означает, что собственными векторами, соответствующими собственному значению λ_j являются $Re\, x_j$ и $Im\, x_j$, $j=1,2,\dots,n$. Симметричный циркулянт можно представить в виде:

$$B_{ij}=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{n}{}' \lambda_k\cos[k2\pi(i-j)/N],\quad i,j=1,2,\dots,N, \qquad (4.6)$$

где λ_k, $k=0,1,\dots,n$ – собственные значения этой матрицы (см. 4.4), штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $k=0$ берётся с коэффициентом ½ .

Обозначим x_{ij} $(i=1,2,\dots,N,\ j=0,1,\dots,2n)$ i-ю компоненту ортонормированного собственного вектора x_j симметричного циркулянта и рассмотрим ортогональную матрицу

$$X=\left\|\begin{matrix} x_{10}\dots 0\ \dots\ 0\ \dots\ x_{12n}\ \dots\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{N0}\dots 0\ \dots\ 0\ \dots\ x_{N2n}\dots\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\dots\dots x_{10}\dots\dots 0\dots\dots x_{12n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\dots\dots x_{N0}\dots\dots 0\dots\dots x_{N2n} \end{matrix}\right\|.$$

Тогда легко проверяется соотношение

$$\Lambda=X'HX$$

Таким образом, первое утверждение теоремы 9 доказано. Собственный вектор матрицы H представляется в виде

$$Y=XC, \tag{4.7}$$

где C – собственный вектор блочно-диагональной матрицы Λ. Следовательно, C можно представить в блочном виде:

$$C=\begin{Vmatrix} c^0 \\ \ldots \\ c^{2n} \end{Vmatrix}, \tag{4.8}$$

где c^i, $i=0,1,\ldots,2n$ есть m-мерные векторы, причём в выражении (4.8) все $c^i=0$ при $i\neq k$, а c^k является собственным вектором матрицы Λ_k, $k=0,1,\ldots,2n$. Теперь второе утверждение теоремы 9 следует из соотношения (4.7).

Следствие 1. Если собственные значения матриц Λ_k простые, то соответсвующая матрица H имеет m простых собственных значений, а остальные – двукратные.

Следствие 2. Матрица H тогда и только тогда является h-матрицей, когда она представляется в виде (4.3). Это следует из теоремы 8 и формулы (4.6) для симметричного циркулянта.

Следствие 3. Пусть L – класс h-матриц и $H_1,H_2\in L$, тогда $c_1H_1+c_2H_2\in L$ (c_1,c_2 – константы), $H_1H_2\in L$, $H_1^{-1}\in L$, если H_1^{-1} существует. Причём H_1^{-1} существует тогда и только тогда, когда не вырождены матрицы Λ_j, $j=0,1,\ldots,n$, и в этом случае $H_1^{-1}=X'\Lambda^{-1}X$, $\Lambda^{-1}=diag(\Lambda_0^{-1},\ldots,\Lambda_{2n}^{-1})$ или

$$H_1^{-1}=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{n}{}' \Lambda_k^{-1}\otimes h_k \tag{4.9}$$

(сравни с 4.3).

Для примера рассмотрим вычисление собственных значений для матрицы размера 1230×1230 (30 окружностей по 41 точке). В таблице 3.1 в левой колонке приведены вычисления собственных значений матрицы Λ_{20} размера 30×30. В правой колонке приведены нули J_{20} из таблиц. Таким образом, даже 20-й нуль функции J_{20} вычислен с точностью около 6,6%.

Таблица 3.1

l	Результаты вычислений $1/\sqrt{\mu_{20,l}}$	Табличные значения нулей J_{20}
1	25.4171408136	25.4171408141
5	41.41306548	41.4130655139
10	58.600	58.6020220738
15	75.18	75.0763080700
20	97.3	91.2635481625

§5. Построение клеток *h*-матрицы с использованием дискретизации уравнений Бесселя

Рассмотрим спектральную задачу Дирихле для оператора Лапласа при $q=0,\ p=1$. Известно, что в круге собственные функции $u_{kj}(r,\theta)$ и собственные значения λ_{kj} связаны соотношением

$$u_{kj}(r,\theta) = J_k(\sqrt{\lambda_{kj}}\,r)\exp(ik\theta), \quad k = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots \ . \qquad (5.1)$$

Из краевого условия следует, что $\sqrt{\lambda_{kj}}$ есть j-ый нуль функции Бесселя J_k, причём λ_{0j} – простые собственные значения, а остальные двукратные. Смысл теоремы 9 состоит в том, что соответсвующая конечномерная задача наследует описываемые ниже свойства.

1. Двумерная задача на собственные значения для оператора Лапласа в круге разделением переменных сводится к одномерным задачам (уравнениям Бесселя); матрица H ортогонально подобна блочно-диагональной матрице Λ, и вычисление её собственных значений сводится к вычислению собственных значений матриц $\Lambda_j,\ j=0,1,\ldots,n$ размера $m\times m$ (m - число точек по радиусу).
2. Часть собственных значений оператора Лапласа с краевым условием Дирихле простые, а остальные – двукратные; это верно и для соответствующей матрицы H: собственные значения матриц Λ_0 простые, и т.к. $\Lambda_j=\Lambda_{N-j}$, $j=1,2,\ldots,n$, то остальные собственные значения двукратные.

3. Наследуется вид собственных функций (сравни 5.1 и 4.5).
4. k-ому уравнению Бесселя, решением которого является функция $J_k(\sqrt{\lambda_{kj}}\, r)$, соответствует клетка Λ_k в блочно-диагональной форме матрицы H, т.е. собственные значения μ_{kj} этой матрицы являются приближениями для λ_{kj}^{-1}; а собственные векторы матрицы Λ_k: $y_j=(y_{j1}\dots\ y_{jm})'$ - удовлетворяют приближённому равенству $y_{jp} \approx const\, J_k(\sqrt{\lambda_{kj}}\, r_p)$, r_p – радиус p-ой окружности сетки в круге.
Итак, вычисляя собственные векторы и собственные значения матрицы H, получаем приближённые выражения для функций Бесселя и их нулей. Обратно, имея алгоритм вычисления функций Бесселя и таблицу их нулей, можно построить соответствующие матрицы Λ_k, $k=0,1,\dots,n$, а затем и матрицу H (см. 4.3). Вычислить матрицы Λ_k можно также, проведя дискретизацию соответствующих уравнений Бесселя:

$$-[V''(r)+(1/r)V'(r)]+(k/r)^2V(r)=\lambda V(r),\quad V(1)=0,\ |V(0)|<\infty$$

на сетке r_ν, $\nu=1,2,\dots,m$ (см. §2).
В результате численных экспериментов выбран следующий способ построения матриц Λ_k:
1) матрицы Λ_0 и Λ_1 вычисляются по методике, описанной выше, а затем вычисляются обратные к этим матрицам Λ_0^{-1} и Λ_1^{-1}; таблицы этих массивов при $m=3,5,7,9$ приведены в [28];
2) $\Lambda_{2k}^{-1}=\Lambda_0^{-1}+4k^2R$, $\Lambda_{2k+1}^{-1}=\Lambda_1^{-1}+4k(k+1)R$, $k=1,2,\dots,n$, $R=diag(r_1^{-2},\dots,r_m^{-2})$ - диагональная матрица.
После вычисления этих матриц приближённое вычисление для H^{-1} получается по формуле (4.9).
Итак, построена матрица дискретного оператора $-\Delta$ в круге с краевым условием Дирихле. Случай произвольной области сводится к кругу при помощи конформного отображения:

$$Z^{-1}H^{-1}U=(Q+\lambda P)U$$

Здесь $U=(u_1,\dots,u_M)'$, $M=mN$ – вектор, компоненты u_i которого являются приближёнными значениями собственной функции $u(\zeta)$ в i-ом узле сетки (узлы в круге нумеруются, начиная с первой окружности сетки против часовой стрелки), т.е. $u_i \approx u(\zeta_i)$, а λ - приближённое значение соответствующего собственного значения; Z, Q и P диагональные матрицы, на диагонали у которых стоят значения соответствующих функций $z=|\varphi'(\zeta)|^2$, $q(\zeta)$ и $p(\zeta)$ в узлах сетки.

Окончательно, для построения матрицы дискретной задачи Дирихле для оператора Лапласа в круге требуется хранить два небольших массива чисел, т.е. все громоздкие вычисления затабулированы, и матрица H^{-1} вычисляется по простой формуле (4.3). В [28] для построения h-матрицы H^{-1} приведены две небольшие подпрограммы на языке ФОРТРАН: HMATR (41 оператор) и RASPAK (35 операторов). Заметим, что матрица H используется для вычисления матрицы дискретной задачи в бигармонической проблеме.

В [28] проводились тестовые расчёты по описанной в этом пункте методике. Рассматривалась область, которая получается из круга $|\zeta|\leq 1$ при помощи конформного отображения

$$z=\zeta(1+(1/6)\zeta^4),\ \zeta=r\exp(i\theta),$$

Таблица 3.2

i	$\sqrt{\lambda_i}$				
	3×49=147 точек	5×29=145 точек	7×21=147 точек	9×15=135 точек	30×41=1230 точек
I	2.382	2.38439	2.3844462	2.3844461	2.38444650947
2	3.7351	3.73463	3.7346119	3.73479	3.73461160260
3	3.7351	3.73483	3.7346119	3.73479	3,73461160262
4	4.64	4.6033	4.602969	4.6028	4.60299170652
5	5.24	5.214	5.21300	5.212	5.21305408450
6	5.6	5.4101	5..409670	5.409	5.40967176981

и вычислялись первые собственные значения оператора -Δ с краевым условием Дирихле. Результаты сравнивались с расчётом на сетке из 30x41=1230 узлов [28]. На сетке из 3x49=147 узлов первое собственное значение вычислено с тремя знаками после запятой, а 6-е собственное значение вычислено с одним знаком после запятой (выписаны знаки, совпавшие с расчётом на мелкой сетке 30x41). Заметим, что для построения матрицы дискретной задачи в этом расчёте использовались две таблицы всего по 9 чисел. Результаты расчётов представлены в таблице 3.2.

§6. Быстрое умножение *h*-матрицы на вектор с использованием быстрого преобразования Фурье

Для того, чтобы оценить количество операций, необходимых для умножения h-матрицы H на вектор f, представим f в блочном виде:

$$f=(f_1 f_2 \ldots f_m)',$$

где векторы $f_\nu \in R^N$, $\nu=1,2,\ldots,m$, тогда

$$Hf = \begin{Vmatrix} h_{11} f_1 + \ldots + h_{1m} f_m \\ h_{21} f_1 + \ldots + h_{2m} f_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{m1} f_1 + \ldots + h_{mm} f_m \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, задача сводится к построению быстрого алгоритма умножения симметричного циркулянта $h_{\mu\nu}$ на вектор $f_\nu \in R^N$, $\mu, \nu=1,2,\ldots,m$.

Представим компоненты этого вектора в виде:

$$f_{\nu j} = a_{\nu 0} + \sum_{k=1}^{n} [a_{\nu k} \cos(k\varphi_j) + b_{\nu k} \sin(k\varphi_j)],\ \varphi_j = 2\pi j / N,\ N = 2n+1,\ j = 0,1,\ldots,2n,$$

где

$$a_{\nu 0} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2n} f_{\nu j}, \qquad (6.1а)$$

$$a_{\nu p} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{2n} f_{\nu j} \cos(p\varphi_j), \quad p = 1,2,\ldots,n, \qquad (6.1б)$$

$$b_{\nu p} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{2n} f_{\nu j} \sin(p\varphi_j), \quad p = 1,2,\ldots,n, \quad \nu = 1,2,\ldots,m. \qquad (6.1в)$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{2n} h_{\mu\nu ij} f_{\nu j} = a_{\nu 0}\lambda_{\mu\nu 0} + \sum_{p=1}^{n} [\lambda_{\mu\nu p} a_{\nu p} \cos(p\varphi_i) + \lambda_{\mu\nu p} b_{\nu p} \sin(p\varphi_i)], \;\; i = 0,1,...,2n. \qquad (6.2)$$

Следовательно, нужно уметь быстро вычислять суммы (6.1), а также суммы, входящие в соотношение (6.2). Эти процедуры сводятся к вычислению сумм вида:

$$A_q = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp(2\pi i \frac{qj}{N}), \quad q = 0,1,..., N-1, \qquad (6.3)$$

где $N=2n+1$ нечётно. Если $N=3^{\mu}$, $\mu=1,2,...$, то для вычисления требуется $4N\mu$ операций; доказательство аналогично классическому случаю.

Подсчитаем количество операций, необходимых для умножения h-матрицы на вектор. Надо вначале вычислить коэффициенты Фурье векторов f_{ν}, $\nu=1,2,...,m$ по формулам (6.1), а затем умножить m^2 циркулянтов на вектор по формуле (6.2). Кроме того, требуется произвести $Nm(m-1)$ сложений; всего получаем $O(m^2 N\log N)$ операций. Например, при $N=27$ и больших m экономия составляет 53% операций по сравнению с непосредственным умножением матрицы H на вектор.

Для того, чтобы убедиться в устойчивости предложенного метода решения уравнения Пуассона, следует оценить норму матрицы H. Заметим, что точное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в круге даётся формулой

$$u(\varsigma) = \sum_i H_i(\varsigma) f_i.$$

Так как при $f\equiv 1$ решение соответствующего уравнения Пуассона есть

$u=0.25(1-r^2)$, то

$$\sum_i H_i(re^{i\theta}) = \frac{1}{4}(1-r^2), \; \varsigma = re^{i\theta}.$$

Если $H_i(\zeta)\geq 0$, то из последнего равенства нетрудно вывести, что

$$| H |_{\infty} = \frac{1}{4}(1-r_m^2) < 0.25, \quad r_m = \cos\frac{(2m-1)\pi}{4m}, \qquad (6.4)$$

m - число окружностей сетки в круге. Численные эксперименты показывают, что среди элементов матрицы H очень мало отрицательных и по модулю они имеют величину порядка 10^{-8}–10^{-12}. Поэтому формула (6.4) даёт практически точную оценку для нормы матрицы H. Практические расчёты подтверждают эту оценку.

§7. Симметризация *h*-матрицы

Теорема 10

Матрица $B=CH$, $C=diag(c_1,\dots,c_m)$ – асимптотически симметрична (см. 2.8).

Доказательство. Обозначим K интегральный оператор в $L_2(D)$:

$$(Kf)(x)=\int_D K(x,\varsigma)\, f(\varsigma)d\varsigma,$$

где $K(x,\zeta)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге, а D – круг единичного радиуса. Тогда

$$(Kf,v)=(f,Kv),\ \forall f,v\in L_2.$$

Здесь (,) обозначено скалярное произведение в $L_2(D)$. Положим

$$f(x)=L_k(x),\ v(x)=L_j(x),\ j\neq k$$

(см. 2.1), тогда

$$(Kf,v)=\int_D H_k(\varsigma)L_j(\varsigma)d\varsigma. \qquad (7.1)$$

Вычислим входящий в это выражение интеграл по квадратурной формуле (2.6):

$$\int_D H_k(\varsigma)L_j(\varsigma)d\varsigma = H_{jk}c_j+\delta_M(H_kL_j), \qquad (7.2)$$

где δ_M – погрешность квадратурной формулы, а M – число узлов интерполяции. Аналогично получаем, что

$$(f,Kv)=H_{kj}c_k+\delta_M(H_jL_k). \qquad (7.3)$$

Обозначим $B_{il}=H_{il}c_i$, тогда из (7.1) - (7.2) имеем

$$B_{jk}-B_{kj}=\delta_M(H_kL_j)-\delta_M(H_jL_k). \qquad (7.4)$$

Из равенства (7.4) следует утверждение теоремы.

Следствие.

$$\left|B_{jk} - B_{kj}\right| \le 2\pi\, E_{\omega}(H_k L_j) + 2\pi\, E_{\omega}(H_j L_k).$$

В таблице 3.3 приведены конкретные цифры, подтверждающие асимптотическую симметричность матрицы $B=CH$.

Таблица 3.3

M	104=8×13	210= 10×21	820= 20×41
$\max\lvert B_{jk}-B_{kj}\rvert$	7.8×10^{-7}	1.3×10^{-7}	3.1×10^{-9}

Пусть $q\neq 0$, но по-прежнему рассматривается задача в круге ($z\equiv 1$) при $p\equiv 1$. Заметим, что в описанном выше алгоритме при $q\equiv 0$ обращается оператор Δ, а при $q\neq 0$ приближённо обращается оператор $\Delta+q$, т.е. если учесть ошибку, с которой обращается этот оператор, то все остальные рассуждения сохранятся без изменений и, следовательно, матрица $C(I\text{-}HQ)^{-1}H$ – асимптотически симметрична.

Рассмотрим теперь произвольную область ($z\neq 1$) при $p\neq 1$, $p\geq p_0>0$, причём предположим, что $q\equiv 0$ (случай $q\neq 0$ рассматривается аналогично). Умножим (3.9) на матрицу C слева и сделаем замену $u=(ZPC)^{-1/2}w$, тогда получаем задачу на собственные значения для матрицы $A=(ZPC)^{1/2}B(ZPC)^{1/2}$, где $B=CH$, а матрица $(ZPC)^{1/2}$ диагональная с числами $\sqrt{z_i p_i / c_i}$ на диагонали. Нетрудно видеть, что матрица A так же, как и B, асимптотически симметрична.

§8. Пример оценки погрешности для задачи Дирихле

Рассмотрим, например, случаи $q(\varsigma)=0$, т.е. задачу на собственные значения для оператора $-\Delta^{-1}pz$ в единичном круге D, где Pz обозначен оператор умножения на функцию $p(\varsigma)\left|\varphi'(\varsigma)\right|^2$, Δ^{-1} обозначен оператор (интегральный) с ядром K. Пусть $\eta=1/\lambda$ - искомое собственное значение, тогда из (3.9) имеем точное равенство

$$HPZu = \eta u + \eta R. \qquad (8.1)$$

Отбрасывая в (8.1) погрешность дискретизации ηR получим приближённую задачу на собственные значения для матрицы *HPZ*. Для того, чтобы оценить погрешность определения простого собственного значения, воспользуемся оценкой (3.11) главы 1:

$$|\eta - \tilde{\eta}| \le C_M \|\eta R\|_2 .$$

Таким образом, относительная ошибка $\delta\eta = |\eta - \tilde{\eta}| / \eta$ определения собственного значения не превосходит величины $C_M \|R\|_2$, где

$$\|R\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{M} R_i^2 \right)^{1/2} ,$$

а величины $R_i = R_M(\varsigma_i; pzu)$, $z(\varsigma) = |\varphi'(\varsigma)|^2$, $i = 1, 2, ..., M$ определены в (3.7), т.е. $R_M(\varsigma; pzu)$ - решение уравнения Пуассона с правой частью $\rho_M(\varsigma, pzu)$ и нулевым граничным условием Дирихле. В силу непрерывной зависимости решения уравнения Пуассона от правой части, получим, что при достаточно большом *M*

$$|R|_\infty \le C |\rho_M|_\infty ,$$

где $|.|_\infty$ обозначена норма в *C(D)*. Учитывая неравенство между векторными нормами $\|.\|_2$ и $|.|_\infty$, получим неравенство

$$\delta\eta \le C C_M K M^{(1-\mu)/2} \log^2 M . \qquad (8.2)$$

Таким образом, чем большим условиям гладкости удовлетворяет функция $p(\varsigma) |\varphi'(\varsigma)|^2 u(\varsigma)$, $\varsigma \in D$, т.е. $\mu \to \infty$, тем меньше относительная погрешность $\delta\eta$ определения собственного значения. Следовательно, оценка (8.2) показывает, что описанный численный алгоритм не имеет насыщения.

§9. Смешанная задача

В этом параграфе будет рассмотрена задача (3.1), (3.4). Для её дискретизации воспользуемся соотношением (3.5), в которое входит неизвестная функция $\psi(\theta)$. Эту функцию нужно подобрать так, чтобы удовлетворялось краевое условие (3.4).

Дискретизацию 1-го слагаемого в формуле **(**3.5**)** проведём также, как и в параграфе 3, а для функции $\psi(\theta)$ применим интерполяцию тригонометрическим полиномом степени n:

$$\psi(\theta)=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{2n}D_n(\theta-\theta_j)\psi_j+\rho_n(\theta;\psi),\quad \psi_j=\psi(\theta_j),\quad \theta_j=\frac{2\pi j}{N},\quad j=0,1,...,2n,$$

$$D_n(\theta-\theta_j)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(\theta-\theta_j).$$

Здесь ρ_n - погрешность интерполяции, а $N=2n+1$ - число точек на границе круга, которое совпадает с числом точек по внутренним окружностям. Обозначим

$$H_j^0=\frac{2}{N}\int_0^{2\pi}K_0(\varsigma,\theta)D_n(\theta-\theta_j)d\theta=\frac{2}{N}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{L=1}^{n}\rho^L\cos L(\varphi-\theta_j)\right\},\quad \varsigma=\rho e^{i\varphi}. \tag{9.1}$$

Тогда из (3.5) получим

$$\begin{gathered}u(\varsigma)=\sum_{p=1}^{M}H_p(\varsigma)f_p+\sum_{j=0}^{2n}H_j^0(\varsigma)\psi_j+R_M(\varsigma;f)+\tilde{\rho}_n(\varsigma;\psi),\\ \tilde{\rho}_n(\varsigma;\psi)=\int_0^{2\pi}K_0(\varsigma,\theta)\rho_n(\theta;\psi)d\theta,\end{gathered} \tag{9.2}$$

а выражение для $R_M(\varsigma;f)$ такое же, как в (3.7). Исключим из соотношения (9.2) неизвестные величины ψ_j. Для этого продифференцируем (9.2) по ρ и положим $\rho=1$ в полученном соотношении. Учитывая, что

$$H_p(\rho e^{i\varphi})|_{\rho=1}=0,$$

$$H_j^0(\rho e^{i\varphi})|_{\rho=1}=\frac{2}{N}D_n(\varphi-\theta_j),$$

получим для определения вектора $\psi=(\psi_0\psi_1...\psi_{2n})$ систему линейных уравнений:

$$\sum_{j=0}^{2n} B_{ij}\psi_j + \sum_p H_p'(\theta_i) f_p + \delta_i,$$

$$B_{ij} = \alpha_i\delta_{ij} + H_j^{0\,\prime}(\theta_i), \quad \alpha_i = \alpha(\theta_i),$$

$$H_j^{0\,\prime}(\theta_i) = \tfrac{2}{N}\sum_{L=1}^{n} L\cos L(\theta_i - \theta_j), \tag{9.3}$$

$$H_{\nu l}{}'(\theta_i) = \frac{1}{N} a_{\nu 0}{}'(1) + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}{}'(1)\cos k(\theta_i - \theta_l).$$

Штрих означает производную по аргументу в скобках. Для погрешности δ_i нетрудно выписать явное выражение.

Обозначим $C=B^{-1}$, т.е. матрицу обратную к матрице B**,** тогда из (9.3) получаем

$$\psi_j = -\sum_{i=0}^{2n} C_{ji}\left(\sum_p H_p'(\theta_i) f_p + \delta_i\right).$$

Подставим это выражение в (9.2) и получим

$$u(\varsigma) = \sum_p H_p(\varsigma) f_p - \sum_{j=0}^{2n} H_j^0(\varsigma)\sum_{i=0}^{2n} C_{ji}\sum_p H_p'(\theta_i) f_p + \hat{\delta}. \tag{9.4}$$

Пусть в (9.4) $\varsigma=\varsigma_q$, $q=1,2,\dots,M$ пробегает узлы интерполяции, тогда имеем

$$u = (H - E) f + \hat{\delta}. \tag{9.5}$$

Здесь $u=(u_1,u_2,\dots,u_M)'$ - вектор столбец, а $u_i=u(\varsigma_i)$, $i=1,2,\dots,M$ - значения искомой функции в узлах сетки; f - либо заданный вектор, либо $f=Z(Q+\lambda P)$, где Z, Q и P диагональные матрицы. Для погрешности $\hat{\delta}$ нетрудно написать явное выражение. Элементы матрицы E определяются по формуле

$$E_{pq} = \sum_{j=0}^{2n} H_j^0(\varsigma_q)\sum_{i=0}^{2n} C_{ji} H_p{}'(\theta_i), \quad p,q = 1,2,\dots,M. \tag{9.6}$$

Отбросив в (9.5) погрешность дискретизации $\hat{\delta}$ получим приближённую конечномерную задачу.

Исследуем структуру матрицы E. Обозначим

$$H_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

блочную матрицу. Здесь матрицы b_v симметричные циркулянты размера $N\times N$. Для элементов этих матриц имеем следующее выражение

$$b_{vij} = \frac{1}{N} + \frac{2}{N}\sum_{l=1}^{n} r_v^l \cos l(\theta_i - \theta_j), \quad i, j = 1, 2, ..., N, \qquad (9.7)$$

где r_v - радиус v-ой окружности сетки в круге. Введём ещё одну блочную матрицу

$$H_1 = (d_1\, d_2 \dots d_m),$$

где d_v, $v=1,2,\dots,m$ - симметричные циркулянты размера $N\times N$ и

$$d_{vij} = \frac{1}{N} a_{v0}{}'(1) + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{n} a_{vk}{}'(1) \cos k(\theta_i - \theta_j), \quad i, j = 1, 2, ..., N,$$

$$a_{vk}{}'(1) = \frac{d}{d\rho} a_{vk}(\rho)\bigg|_{\rho=1} \qquad (9.8)$$

(см. 4.2). Для элементов матрицы B также нетрудно написать явные формулы (см. 9.3):

$$B_{ij} = \frac{2}{N}\sum_{l=1}^{n} l \cos l(\theta_i - \theta j), \quad \theta_i = \frac{2\pi i}{N}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \ne j;$$

$$B_{ii} = \alpha_i + \frac{n(n+1)}{2n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, если $\alpha \equiv const$ то матрицы B, $C=B^{-1}$ - симметричные циркулянты. С учётом введённых обозначений имеем для матрицы E следующее выражение

$$E = H_0 C H_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} C \left(d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_m \right).$$

Поэтому при $\alpha \equiv const$ матрица $D=H\text{-}E$ является h-матрицей. Это следует из правил обращения с циркулянтами и h-матрицами, сформулированными в §4. Итак, для круга при $Q=0$, $P=1$с краевым условием

$$const u + \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=1} = 0$$

структура матрицы конечномерной задачи полностью аналогична структуре матрицы H задачи Дирихле. Следовательно, все свойства конечномерной задачи, сформулированные в §4-§6, переносятся и на этот случай. Остаётся верным также утверждение о том, что матрица D близка к симметризуемой.

Максимальное число точек, с которым производились расчёты для круга, - 820 (20 окружностей по 41 точке). В таблице 3.4 в левой колонке приведены результаты расчёта однократных собственных значений смешанной задачи с краевым условием

$$u + \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 0. \tag{9.9}$$

Таблица 3.4

i	$\sqrt{\lambda_i}$	
	Двумерная методика 820 точек	Одномерная методика 100 точек
1	1.2557837116	1.25578371186
5	13.398397486	13.3983974896
10	29.08114	29.0812215613

Практически для этого вычислялись собственные значения матрицы Λ_0 размера 20х20. В правой колонке приведены результаты расчёта (на 100 точках) собственных значений следующей одномерной задачи:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)u+\lambda u=0,\quad 0<r<1,$$

$$u+u'|_{r=1}=0,$$

$$u-\textit{регулярна в нуле}.$$

Методика расчёта этой задачи аналогична двумерной, которая описана выше. Причём, в левой колонке приведены только знаки, совпадающие (кроме последней цифры) с результатами расчётов по одномерной методике.

В таблице 3.5 приведены результаты расчета собственных значений матрицы Λ_1 размера 20x20. Для сравнения в правой колонке приведены значения нулей функции Бесселя J_0 из таблиц. Дело в том, что для круга собственные функции оператора Лапласа имеют вид (5.1). Причём, для краевого условия (9.9) собственные значения λ_{kj} удовлетворяют уравнению

$$J_n'(\mu)\mu+J_n(\mu)=0,\quad \mu=\sqrt{\lambda_{kj}}\,.$$

Здесь J_n - функция Бесселя. Однако $(\mu J_1)'=\mu J_0$, и, следовательно, $\sqrt{\lambda_{1j}},\quad j=1,2,\ \ldots$ - нули функции J_0. В рассматриваемой методике этим собственным значениям соответствуют собственные значения матрицы Λ_1 .

Таблица 3.5

i	$\sqrt{\lambda_i}$	
	Двумерная методика 820 точек	Нули функции Бесселя J_0 из таблиц
1	2.4048255574	2.404825557695773
5	14.9309177085	14.930917708487786
10	30.6347	30.634606468431957

В таблице 3.6 приводятся результаты расчётов собственных значений матрицы Λ_{20}. Причём, т.к. теоретического теста в этом случае нет, то удерживаем такое же количество знаков как в таблице 3.5.

Таблица 3.6

i	$\sqrt{\lambda_i}$
	Двумерная методика 820 точек
1	22.4446432826
5	39.6184129615
10	56.5866

В таблице 3.7 приведены результаты расчёта собственных значений для области, получающейся из крута $|\varsigma| \le 1$ конформным отображением $z= \varsigma(1+0,0625\varsigma^{12})$. Граница этой области имеет в 12 точках кривизну -2710 т.е порядка 10^3. В левой колонке приведены результаты расчёта на сетке из 99=9x11 точек (9 окружностей по 11 точек). В таблице 3.7 приведены результаты расчётов на 99=9×11 (левая колонка), 369=9×41 (средняя колонка) и 615=15×41 точках (правая колонка). Причём в правой колонке приведены результаты расчётов с 8 знаками после запятой, а первой и второй колонки приведены совпадающие знаки.

Таблица 3.7

i	$\sqrt{\lambda_i}$		
	99 точек	369 точек	615 точек
1	1.27	1.306999	1.30699932
5	3.459	3.457197	3.45719393
10	5.44	5.39657	5.39656302
15	6.8	6.66864	6.66860961
20	8.5	7.84332	7.84327034
100		19.0	18.7633305

§10. Задача Неймана

В этом параграфе рассматривается задача (3.1), (3.3), т.е. задача Неймана. Дискретизация этой задачи проводится аналогично §9, но теперь в соотношении (9.3) матрица

$$B_{ij}=\frac{2}{N}\sum_{l=1}^{n}l\cos l(\varphi_i-\varphi_J),\quad i,j=1,2,...,N \qquad (10.1)$$

вырождена (сумма элементов в каждой строке матрицы B равняется нулю**).** Таким образом, нужно решить систему линейных уравнений (10.1) с вырожденной матрицей.

Представим матрицу B в виде $B=\Omega\Lambda\Omega^{-1}$ **,** где $\Lambda=diag(\lambda_1...\lambda_N)$ - диагональная матрица, у которой на диагонали стоят собственные значения матрицы B $(\lambda_N=0)$; Ω, Ω^{-1} - матрицы размера $N\times N$, для элементов которых имеем соотношение:

$$\Omega_{pq}=\theta_q^{p-1},\ \Omega_{pq}^{-1}=\frac{1}{N}\theta_p^{1-q},\ \theta_q=\exp(i\varphi_q),\ \ p,q=1,2,...,N.$$

Следовательно, нужно решить вырожденную систему линейных уравнений вида

$$\Omega\Lambda\Omega^{-1}=d,$$

где правая часть d определена в (9.3). Пусть $\xi=\Omega^{-1}\psi$, $\eta=\Omega^{-1}d$, тогда

$$\xi_j=\frac{1}{\lambda_j}\eta_j,\quad j=1,2,...,N-1,$$

$$\psi_p=\sum_{q=1}^{N}\Omega_{pq}\xi_q=\sum_{q=1}^{N-1}\Omega_{pq}\xi_q+\xi_N.$$

Отсюда, с учётом выражений для матриц Ω и Ω^{-1}, получаем

$$\psi_p=\xi_N+\frac{2}{N}\sum_{l=1}^{N}\left(\sum_{q=1}^{n}\mathrm{Re}\frac{\theta_q^{p-l}}{\lambda_q}\right)d_l.$$

Подставляя это соотношение в (6.2), имеем

$$u(\varsigma)=\sum_i H_i(\varsigma)f_i+\sum_{p=0}^{2n}\left\{H_p^0(\varsigma)(\xi_N-\sum_{q=1}^{N}C_{pq}\sum_i H_i^{'}(\theta_q)f_i\right\}+\delta_0(\varsigma),$$

$$\mathrm{C}_{\mathrm{pq}}=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}\frac{\theta_j^{p-q}}{\lambda_j},\quad p,q=1,2,...,N. \qquad (10.2)$$

$\delta_0(\zeta)$ - погрешность дискретизации, для которой нетрудно написать

конкретное выражение.
Пусть в (10.2) ζ пробегает узлы интерполяции, тогда получаем

$$u = (H - E)Zf + \xi_N e + \delta, \tag{10.3}$$

Здесь $u=(u_1,u_2,\ldots,u_M)'$ - вектор столбец, содержащий значения искомой собственной функции в узлах интерполяции; f - либо заданный вектор, либо $f=Z(Q+\lambda P)u$, где Z, Q и P - диагональные матрицы; ξ_N - неизвестный параметр; $e=(1,1,\ldots,1)'$ - вектор столбец все элементы которого равны единице; для матрицы E имеем представление аналогичное (9.6), где матрица C - симметричный циркулянт и определена в (10.2). Справедливо также блочное представление $E=H_0CH_1$. Причём матрицы H_0 и H_1 определены в §9. Если решается уравнение Пуассона с краевым условием Неймана, то вектор f задан, а соотношение (10.3) показывает, что (как и следовало ожидать) решение этой задачи может быть получено только с точностью до константы. Для того же, чтобы привести спектральную задачу (10.3) к стандартному виду, нужно исключить неизвестный параметр ξ_N. Для этого умножим соотношение (10.3) слева на матрицу R вида

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

тогда получим

$$R(I - (H - E)ZQ)u = \lambda R(H - E)ZPu + \xi_N e_1 + R\delta. \tag{10.4}$$

Здесь $e=(1,0,\ldots,0)'$ - единичный вектор, т.е. неизвестный параметр ξ_N входит теперь только в первое уравнение. Таким образом, для определения параметра ξ_N требуется ещё одно уравнение.
Это соотношение получим из условия разрешимости задачи Неймана

$$\int\limits_{|\varsigma|\le 1} f(\varsigma)d\varsigma = 0. \tag{10.5}$$

Для дискретизации соотношения (10.5) применим квадратурную формулу, описанную в §2. Тогда имеем

$$\sum_i c_i f_i + \delta_1 = 0, \quad f_i = Z_i(Q_i + \lambda P_i), \tag{10.6}$$

где коэффициенты квадратурной формулы определены в соотношении (2.7)

(δ_1 - погрешность дискретизации).

Заменяя в (10.4) первую строку на (10.6), получим уравнение вида:

$$A_1 u = \lambda A_2 u + \delta_2,$$

где матрицы A_1 и A_2 получаются из матриц $R(I-(H-E)ZQ)$ и $R(H-E)ZP$ заменой первой строки на строки $c_1q_1z_1 \ldots c_Mq_Mz_M$ и $-c_1p_1z_1 \ldots -c_1p_1z_M$ соответственно. Обращая матрицу A_1 и отбрасывая погрешность дискретизации, получим приближённую конечномерную задачу на собственные значения

$$u = \lambda Du, \quad D = A_1^{-1} A_2. \tag{10.7}$$

Замечание. Если функция $q=0$, то матрица A_1 вырождена. Однако в этом случае можно считать, что $q=1$. Это эквивалентно сдвигу на единицу собственных значений.

Рассмотрим задачу Неймана в круге при $q=0$, $p=1$. В этом случае $\sqrt{\lambda_{nj}}$ являются нулями $J_n^{'}$, т.е. нулями производных функций Бесселя. Причём λ_{0j} - однократные собственные значения ($\lambda_{01}=0$), а остальные парные. Проверим, как это выполняется в описанном выше приближённом методе. Умножим соотношение (10.3) слева на блочно-диагональную матрицу $\boldsymbol{B}$ размера $m \times m$: $\boldsymbol{B} = diag(B \ldots B)$, где матрица B размера $N \times N$ определена в (10.1). Легко видеть, что вектор e - является собственным вектором матрицы $\boldsymbol{B}$, а соответствующее собственное значение нулевое. Следовательно, получаем

$$Bu = B(H-E)f + \hat{\delta}, \ \hat{\delta} = B\delta. \tag{10.8}$$

Матрицы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}(H-E)$ являются h-матрицами и приводятся в одном и том же базисе к блочно-диагональному виду. Причём соответствующие клетки Λ_0 тождественно равны нулю. Поэтому из соотношения (10.8) можно приближённо определить только кратные собственные значения, а для определения однократных собственных значений следует воспользоваться общим соотношение (10.7).

Максимальное число точек, с которым проводились расчёты для круга *820* (20 окружностей по 41 точке). В таблице 3.8 приведены результаты расчёта собственных значений матрицы $(1/20)\Lambda_{20}$ размера 20x20 (Λ_{20} соответствующая клетка в блочно-диагональной форме матрицы $\boldsymbol{B}(H\text{-}E)$, а $diag(20\ldots20)$ - соответствующая клетка блочно- диагональной формы матрицы $\boldsymbol{B}$).

Причём в правой колонке приведены значения нулей $J_{20}{}'$ из таблиц, а в левом колонке выписаны только совпадающие знаки, округленные по последней цифре.

Таблица 3.8.

i	$\sqrt{\lambda_{20,i}}$	нули $J_{20}{}'$ из таблиц
1	22.21914648	22.21914648
2	27.71212684	27.71212684
3	31.97371525	31.97371522
4	35.6739414	35.87394150
5	39.58453	39.58453089
6	43.1765	43.17653646
7	46.688	46.68716642
8	50.13	50.13856248
9	53.6	53.54502716
10	56.6	56.91634767

В качестве примера расчёта для области, отличной от крута, рассмотрим область G, получающейся из крута $|\varsigma| \leq 1$ конформным отображением $z= \varsigma(1+0{,}0625\varsigma^{12})$. Граница этой области имеет в 12 точках кривизну -2710 т.е. порядка 10^3. В таблице 3.9 приведены результаты расчётов на 99=9×11 (левая колонка), 369=9×41 (средняя колонка) и 615=15×41 точках (правая колонка). Причём в правой колонке приведены результаты расчётов с 9 знаками после запятой, а первой и второй колонки приведены совпадающие знаки.

Таблица 3.9

i	$\sqrt{\lambda_i}$		
	99 точек	369 точек	615 точек
2	1.763	1.7762353	1.77623579
6	3.77	3.731809	3.73180707
11	5.2	5.17767	5.17765590
16	7.0	6.47896	6.47893376
21	8.5	8.00561	8.00557953
101		19.16	19.12050681

Глава 4.

БИГАРМОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В этой главе результаты главы 3 обобщаются на случай бигармонического уравнения. Рассматриваются задачи о свободных колебаниях пластинки и основная бигармоническая проблема, т.е. краевая задача для бигармонического уравнения, когда на границе заданы значения решения и его нормальной производной. Если рассматривается задача о свободных колебаниях, то для круга матрица дискретной задачи является *h*-матрицей, и, следовательно, справедливы утверждения, сформулированные в теореме 9. В частности, эта матрица имеет большое количество повторяющихся элементов, и поэтому возможно организовать расчёты на сетке из большого числа точек. Это обстоятельство можно также использовать при решении краевой задачи, например, основной бигармонической проблемы. Как известно, к основной бигармонической проблеме сводятся плоские задачи теории упругости, и поэтому она имеет важное практическое значение.
Отметим, что задачи для бигармонического уравнения более трудные, чем для уравнения Лапласа, и требуют для расчётов сетки с большим числом точек.

§1. Постановка задачи и дискретизация

Рассматриваются алгоритмы численного решения краевых задач (1.1) - (1.3) и (1.1), (1.2), (1.4)

$$\Delta^2 u(z) = F(z), \quad z \in G, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\partial G} = 0, \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0, \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь G - область в комплексной z - плоскости с достаточно гладкой границей ∂G; n - единичный вектор внешней нормали к ∂G; $\partial/\partial s$ - означает дифференцирование по длине дуги (длина отсчитывается против часовой стрелки); $1/\rho$ - кривизна ∂G; ν - постоянная (коэффициент Пуассона). Функция $F(z)$ либо задана, либо $F(z)=(Q(z)+\lambda P(z))u(z)$, где Q и P - некоторые функции, и в этом случае имеем задачу на собственные значения для бигармонического уравнения. В частности, при $Q=0$ и $P=1$ получаем задачу о свободных колебаниях пластинки, где собственная частота колебания ω связана со спектральным параметром λ соотношением $\sqrt{\lambda}=\omega\sqrt{\rho_0/D}$, ρ_0 - плотность, а D - цилиндрическая жёсткость. Краевые условия (1.2) и (1,3) означают, что пластинка защемлена по краю, а краевые условия (1.2) и (1.4) означают опирание по краю. Пусть $z=\varphi(\zeta)$, $|\zeta|\leq 1$ - функция, задающая конформное отображение круга единичного радиуса на область G. Тогда в плоскости ζ получаем вместо (1.1) - (1.4) следующие соотношения:

$$\Delta\left(\left|\varphi'(\varsigma)\right|^{-2}\Delta u\right)=\left|\varphi'(\varsigma)\right|^{2} f(\varsigma),\quad \varsigma=re^{i\varphi},\ \ r<1, \tag{1.5}$$

$$u\Big|_{r=1}=0, \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0, \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\left\{\nu+(\nu-1)\operatorname{Re}\left(\varsigma\frac{\varphi''(\varsigma)}{\varphi'(\varsigma)}\right)\right\}\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0. \tag{1.8}$$

Здесь $f(\varsigma)=F(z(\varsigma))$, а в граничном условии (1.8) учтено условие (1.6), т.е. положено $\partial^2u/\partial s^2$.

Для удачной дискретизации краевых задач (1.5) - (1.8) следует воспользоваться априорной информацией о решении - его аналитичностью. Чтобы в полной мере использовать это обстоятельство, обратим дифференциальный оператор, стоящий в левой части соотношения (1.5) и применим интерполяционную формулу (2.1) главы 3 для функции двух переменных в круге. Подробно эта процедура приводится ниже. Сначала обратим в (1.5) первый оператор Лапласа, тогда получим

$$\Delta u(\varsigma)=\left|\varphi'(\varsigma)\right|^2\int\limits_{|\xi|\leq 1}K(\varsigma,\xi)\left|\varphi'(\xi)\right|^2 f(\xi)d\xi+\left|\varphi'(\varsigma)\right|^2\int\limits_0^{2\pi}K_0(\varsigma,\theta)v\left(e^{i\theta}\right)d\theta\equiv S(\varsigma). \tag{1.9}$$

Здесь $K(\varsigma,\xi)$ - функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа,

$K_0(\varsigma,\theta)$ - ядро Пуассона (см. гл.3, §3), а $v\left(e^{i\theta}\right)=\left|\varphi'\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 \Delta u(e^{i\theta})$ - неизвестная функция. Обратим в (1.9) оператор Лапласа и получим, учитывая краевое условие (1.6):

$$u(\varsigma)=\int\limits_{|\xi|\le 1} K(\varsigma,\xi)S(\xi)d\xi. \tag{1.10}$$

Применим к функциям $S(\xi)$ и $|\varphi'(\xi)|^2 f(\xi)$ интерполяционную формулу (2.1) главы 3 для функции двух переменных в круге, а для $v(e^{i\theta})$ применим тригонометрическую интерполяцию

$$v(e^{i\theta})=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{2n} D_n(\theta-\theta_j)v_j+r_n(\theta;v),\quad \theta_j=\frac{2\pi j}{N}. \tag{1.11}$$

Здесь D_n - ядро Дирихле, $N=2n+1$ - число узлов интерполяции на границе крута, а r_n - погрешность интерполяции. Тогда получаем

$$u(\varsigma)=\sum_j H_j(\varsigma)z_j\sum_i H_{ji}z_i f_i-\sum_j H_j(\varsigma)z_j\sum_{p=0}^{2n} H_p^0(\varsigma_j)v_p+\delta(\varsigma), \tag{1.12}$$

где величины $H_j(\varsigma),\ H_{ji},\ H_p^0(\varsigma),\ z_j$ определены в §3 и §9 главы 3; δ - погрешность дискретизации; $v_0,v_1,\dots,v_{2n}$ - неизвестные величины. Для их определения воспользуемся вторым граничным условием (1.7) или (1.8). Удобно рассмотреть несколько более общую задачу. Обозначим L дифференциальный оператор, стоящий в левой части второго граничного условия, а первое граничное условие остается прежним (1.6). Применим к равенству (1.12) дифференциальный оператор L, положим в полученном соотношении $\zeta=e^{i\theta}$, где θ пробегает узлы интерполяции θ_j, $j=0,1,\dots,2n$ на границе круга (см. 1.11). Тогда для определения вектора $v=(v_0,v_1,\dots,v_{2n})'$ получаем систему линейных уравнений с матрицей A:

$$\begin{aligned} A_{pq}&=\sum_{i=1}^{M} H_{i,p}^1 z_i H_q^0(\varsigma_i),\quad p,q=1,2,\dots,N;\\ H_{j,p}^1&=L(H_j(\varsigma))\big|_{\varsigma=e^{i\theta_p}},\quad j=1,2,\dots,M,\ \ p=1,2,\dots,N \end{aligned} \tag{1.13}$$

и правой частью $R=(R_0,R_1,\dots,R_{2n})'$, где

$$R_p=\sum_{i,j}^{M} H_{i,p}^1 z_i H_{ij} z_j+\delta_1,$$

а δ_1 - погрешность. Пусть $C=A^{-1}$, тогда $v=CR$. Подставим это выражение в (1.12) и пусть в полученном соотношении ζ пробегает узлы интерполяции внутри круга. В результате имеем

$$u = (B^2 - BEB)f + \hat{\delta}. \tag{1.14}$$

Соотношение (1.14) - итог наших изысканий. Здесь $u = (u(\varsigma_1),...,u(\varsigma_M))'$ - вектор значений функции $u(\zeta)$ в узлах сетки; f - соответствующий вектор значений правой части бигармонического уравнения; $B=HZ$ - матрица дискретной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в рассматриваемой области G; для матрицы E имеем следующее выражение

$$E_{lj} = \sum_{p=0}^{2n} H_p^0(\varsigma_l) \sum_{q=0}^{2n} C_{qp} \sum_i H_{i,q}^1 z_i, \quad l, j = 1, 2, ..., M, \tag{1.15}$$

а $\hat{\delta}$ - погрешность дискретизации. Отбрасывая в (1.14) погрешность $\hat{\delta}$, получим приближённую конечномерную задачу. Таким образом, решение задачи об изгибе пластинки сводится к умножению матрицы $D=B^2–BEB$ на вектор, а задаче на собственные значения соответствует приближённая конечномерная задача

$$u=(B^2–BEB)Z(Q+\lambda P)u,$$

где $Q=diag(q(\zeta_1)...q(\zeta_M))$, $P=diag(p(\zeta_1)...p(\zeta_M))$, $Z=diag(z(\zeta_1)...z(\zeta_M))$ - диагональные матрицы, у которых на диагонали стоят значения соответствующих функций в узлах интерполяции. Для задачи о свободных колебаниях $Q=0$, $P=1$, т.е. эта задача сводится к вычислению собственных значений матрицы D. Отметим, что вид второго краевого условия учитывается строением массива E.

§2. Вычисление матрицы конечномерной задачи

В алгоритме, описанном в §1, молчаливо предполагалось, что можно обратить с хорошей точностью матрицу (1.13). Однако это требует подробного обоснования. Оказывается, что система линейных уравнений с этой матрицей есть дискретизация некоторого одномерного интегрального уравнения первого рода. Поэтому этот вопрос сводится к вопросу о возможности численного решения соответствующего интегрального уравнения. Трудность же решения интегрального уравнения первого рода зависит от скорости, с которой его собственные значения стремятся к нулю.
Для примера рассмотрим краевое условие (1.3). Если $\zeta=re^{i\varphi}$, то, дифференцируя соотношение (1.10) по r и полагая затем $r=1$, получаем для определения v интегральное уравнение первого рода:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} L(\varphi,\theta)v(e^{i\theta})d\theta = \Phi(\varphi),$$

$$\Phi(\varphi) = -\int_{|y|\le 1} K_0(y,\varphi)\left(|\varphi'(y)|^2 \int_{|\varsigma|\le 1} K(y,\varsigma)\,|\varphi'(\varsigma)|^2\ f(\varsigma)d\varsigma \right) dy,$$

где для ядра $L(\varphi,\theta)$ имеем следующее соотношение:

$$L(\varphi,\theta) = \int_{|y|\le 1} K_0(y,\varphi)K_0(y,\theta)\,|\varphi'(y)|^2\ dy.$$

В частности, для круга $(|\varphi'(y)|^2=1)$

$$L(\varphi,\theta) = L(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos l(\varphi-\theta)}{l+1}\right)$$

и легко видеть, что в этом случае собственные функции оператора L суть $u_k=exp(ik\theta)$, $k=0,1,2,\dots$, а соответствующие собственные значения $\lambda_k=1/2(k+1)$, $k=0,1,2,\dots$. Если выполнено условие

$$0 < p_0 \le |\varphi'(\varsigma)|^2 \le p_{1,}\ \ |\varsigma| \le 1,$$

то в общем случае

$$\frac{p_0}{2(k+1)} \le \lambda_k \le \frac{p_1}{2(k+1)}, \quad k = 0,1,2,\dots\ ,$$

т.е. $\lambda_k \sim 1/k$. Численные расчёты подтверждают эти рассуждения. В практических расчётах число обусловленности матрицы A никогда не превосходило величины порядка 10^2 (максимальное n, с которым проводились расчёты, было равно 20).

§3. Исследование структуры конечномерной задачи

Покажем, что для круга матрица $D=B^2-BEB$ имеет структуру, аналогичную структуре матрицы H задачи Дирихле, т.е. является h-матрицей. Вначале рассмотрим краевое условие (1.3). Тогда матрицу A (см. 1.13) можно представить в следующем виде

$$A = (d_1 z_1 \dots\ \ d_m z_m)\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = H_1 Z H_0 = d_1 z_1 b_1 + \dots + d_m z_m b_m, \qquad (3.1)$$

где b_ν и d_ν - симметричные циркулянты размера $N\times N$ (см. 9.7, 9.8 главы 3); z_ν, $\nu=1,2,\dots,m$ - диагональные матрицы, которые содержат на диагонали значения функции $|\varphi'(\zeta)|^2$ в узлах интерполяции на ν-ой окружности, $Z=diag(z_1 \dots z_m)$. Для круга z_ν - единичные матрицы, а поэтому матрицы A и $C=A^{-1}$ в этом случае суть симметричные циркулянты. Далее имеем

$$E=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} C(d_1 z_1 \dots \;\; d_m z_m) = H_0 C H_1 Z, \tag{3.2}$$

а поэтому матрица E для круга является h-матрицей. Следовательно, такого же типа и матрица D. Теперь рассмотрим краевое условие (1.4). В этом случае вместо матрицы H_1 нужно подставить в (3.1) и (3.2) матрицу

$$H_2 = (d_1^0 + \psi d_1 \; \dots \; d_m^0 + \psi d_m).$$

Здесь $\psi=diag(\psi_0 \dots \psi_{2n})$ - диагональная матрица, где

$$\psi_j = \nu + (\nu-1)\operatorname{Re}\left(\varsigma \frac{\varphi''(\varsigma)}{\varphi'(\varsigma)}\right)\Bigg|_{\varsigma=e^{i\theta_j}}, \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j=0,\dots,2n,$$

d_ν - симметричные циркулянты размера $N\times N$ и

$$d^0_{\nu ij} = \frac{1}{N} a''_{\nu 0} + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{n} a''_{\nu k}(1)\cos k(\theta_i - \theta_j)$$

(сравни с формулой 9.8 главы 3). Для круга $\psi_j=\nu$, а поэтому структура матрицы H_2 аналогична структуре матрицы H_1, т.е. ссоответствующая матрица D является h-матрицей.

Итак, справедливы все свойства конечномерной задачи, сформулированные выше для уравнения Лапласа (см. теорему 9 главы 3). Соображения об асимптотической симметричности матриц конечномерной задачи также переносится и на этот случай.

§4. Численное решение основной бигармонической проблемы

Описанная выше методика применима также к численному решению краевых задач для бигармонического уравнения. Для примера рассмотрим основную бигармоническую проблему, т.е. краевую задачу (4.1) - (4.3)

$$\Delta^2 u(z) = F(z), \quad z \in G, \tag{4.1}$$

$$u\big|_{\partial G} = \mathrm{X}(z), \tag{4.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = \Psi(z). \tag{4.3}$$

Будем предполагать, что *F, X, Ψ* - достаточно гладкие функции, а G - область с гладкой границей ∂G; n - единичный вектор внешней нормали к ∂G. Аналогично, как в §1, переходим при помощи конформного отображения $z=\varphi(\varsigma),\ |\varsigma|\le 1$ к краевой задаче в круге:

$$\Delta\left(\left|\varphi'(\varsigma)\right|^{-2}\Delta u\right)=\left|\varphi'(\varsigma)\right|^{2} f(\varsigma), \quad \varsigma = re^{i\varphi}, \ \ r<1, \tag{4.4}$$

$$u\big|_{r=1} = \chi(\theta), \tag{4.5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \psi(\theta), \tag{4.6}$$

Здесь $f(\varsigma) = F(\varphi(\varsigma)),\ \chi(\theta) = \mathrm{X}(\varphi(e^{i\theta})),\ \psi(\theta) = |\,\varphi'(\varsigma)\,|\,\Psi(\varphi(\varsigma))\big|_{\varsigma=e^{i\theta}}$.

Переход от задачи (4.4) - (4.6) к конечномерной задаче полностью аналогичен переходу в §1. Будем обозначать

$$z(\varsigma)=|\,\varphi'(\varsigma)\,|^2,\quad u=(u_1 \ldots u_M)',\quad f=(f_1\ldots f_M)',\quad \psi=(\psi_1\ldots\psi_{2n})',\quad \chi=(\chi_1\ldots\chi_{2n})'$$

векторы значений соответствующих функций в узлах интерполяции внутри круга и на границе. Тогда имеем

$$u=Df+BH_0C\psi+(H_0-BH_0C\boldsymbol{B})\chi+\delta, \tag{4.7}$$

где δ - погрешность дискретизации, для которой нетрудно написать конкретное выражение. Матрицы D, B, H_0 и C определены выше в §3, а элементы матрицы $\boldsymbol{B}$ размера $N\times N$ определены в соотношении (10.1) главы 3.

Таким образом, для того чтобы приближённо вычислить в узлах интерполяции значения решения краевой задачи (4.4) - (4.6), нужно умножить матрицы D, BH_0C и H_0-$BH_0C\boldsymbol{B}$ на векторы f, ψ и χ соответственно. В выражении (4.7) конкретный вид области учитывается заданием диагональной матрицы $diag(z_1\ldots z_M)$, а вид правой части уравнения (4.1) и вид граничных условий (4.2), (4.3) учитывается заданием соответствующих векторов. Остальные массивы H, H_0, H_1 и $\boldsymbol{B}$ вычисляются только один раз (они используются и в других задачах). Кроме того, эти массивы содержат большое число повторяющихся элементов и могут храниться в "упакованном" виде, т.е. хранить следует только различные элементы. Это обстоятельство позволяет производить расчёты с большим числом точек, т.е. на частой сетке и, следовательно, рассмотреть задачи в сложных областях.

§5. Примеры численных расчётов

Вначале рассмотрим примеры численных расчётов для круга. Максимальное число точек, с которым производились расчёты для круга - 820 (20 окружностей по 41 точке). Как уже говорилось выше, вычисление собственных значений матрицы 820x820 сводится к вычислению собственных значений 21 матрицы размера 20x20. А поэтому можно вычислить все собственные значения исходной матрицы. В таблице 4.1 приведены однократные собственные значения соответствующей матрицы дискретной задачи (1-ая и 3-я колонки), а рядом для сравнения приведены результаты расчёта по одномерной методике на 100 точках (в круге разделением переменных задача на собственные значения для бигармонического уравнения сводится к одномерным задачам, методика решения которых аналогична методике для двумерных задач). Коэффициент Пуассона ν принимался равным 0.25 (для 2-ой краевой задачи). Результаты расчёта по одномерной методике приводятся в таблице 4.1 с 12 значащими цифрами, а для расчётов по двумерной методике приводятся совпадающие знаки, т.е. только верные знаки.

Таблица 4.1

i	λ_i			
	1-ая краевая задача 820 точек	одномерная методика 100 точек	2-ая краевая задача 820 точек	одномерная методика 100 точек
1	104.3631056	104.363105916	23.62085804	23.6208580299
2	1581.744	1581.74636379	879.8434	879.843510932
3	7939.549	7939.54527889	5491.016	5491.02409476
4	25022.26	25022.1915197	19117.1548	19117.1544172
5	61012.	61014.1567852	49356.	49357.5252428

Интересно сопоставить эти результаты с расчётами на редкой сетке. Например, для сетки в круге из 9=3x3 точек получаем для первого собственного значения первой и второй краевых задач значения 103.1 и 23.66 соответственно. Причём при построении матрицы D дискретной задачи массив H вычисляется по методике, описанной в §5 главы 3. Отметим, что в работе [18] вычислено по семь первых собственных значений для обеих краевых задач. Результаты этих расчётов приводятся в таблице 4.2. Здесь 1-ое и 4-ое собственные значения однократные и соответствуют 1-ому и 2-ому собственным значениям таблицы 4.1. Таким образом, расчёты работы [18] неточны (в особенности при краевом условии свободного опирания). Для примера приведём ещё для второй краевой задачи 1-ое собственное значение клетки Λ_4 – 3224.568989. Этому собственному значению соответствует 7-ое собственное значение таблица 4.2.

Таблица 4.2

i	результаты [18]	
	1-ая краевая задача	2-ая краевая задача
I^x	104.344	24.774
2	452.044	194.192
3	1216.673	658.139
4^x	1561.306	885.481
5	2604.748	1594.386
6	3699.608	2353.339
7	4854.245	3259.626

Теперь рассмотрим результаты расчётов для области, отличной от круга. А именно для области, для которой в таблице 3.2 приведены результаты расчётов задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Опять же применялся метод простой итерации. Однако теперь проводится больше расчётов. А именно, для числа точек: 104 (8 окружностей по 13 точек), 205 (5 окружностей по 41 точке), 410 (10 окружностей по 41 точке) и 1230 (30 окружностей по 41 точке).

Таблица 4.3

i	λ_i				
	104 точки	205 точек	410 точек	820 точек	1230 точек
1	119.	122.58	122.60360	122.603650158	122.603650157
2	452.	461.80	461.8863	461.886402882	461.886402889
3	459.	461.84	461.9195	461.9195728	461.919572661
4	827.	827.0	827.2752	827.275347	827.275346369
5	1329.	1326.	1329.6928	1329.69367744	1329.69367746
6	1657.	1698.	1701.433	1701.4343766	1701.43437638
7	1991.	2041.	2036.1185	2036.11887	2036.11887644
8	2018.	2042.	2036.3867	2036.3871404	2036.38714010
9	3263.	3654.	3639.464	3639.46578	3639.46577182
10	3428.	3653.	3639.159	3639.16092	3639.16089134

Результаты расчётов для 1-ой краевой задачи приведены в таблице 4.3. В последней колонке приведены результаты с 12 значащими цифрами, а в остальных колонках приведены только знаки, совпадающие с этим расчётом. Напомним, что граница этой области имеет в 4-х точках кривизну порядка 10^2. Несмотря на это, погрешность вычисления 1-го собственного значения 10^{-9}.

Результаты расчётов для 2-ой краевой задачи в той же области приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4

i	λ_i			
	205 точек	410 точек	820 точек	1230 точек
I	66.7	68.283	68.28134302	68.2813430387
2	247.	245.203	245.197378	245.197370928
3	244.	242.702	242.6973158	242.697315693
4	388.	389.321	389.3203381	389.320337997
5	-	726.904	726.9001235	726.900124761

В таблице 4.5 приведены результаты расчёта собственных значений второй краевой задачи для области, получающейся из круга конформным отображением $z=\zeta(1+0,0625\zeta^{12})$. Граница этой области (эпитрохоида) имеет в 12 точках кривизну -2710,т.е. порядка 10^3.

Последний пример, который будет рассмотрен, это вычисление основной частоты защемлённой эллиптической пластинки. Конформное отображение круга на эллипс проводилось численно [16] (на 141 точке). В таблице 4.6 приводится сравнение полученных результатов с результатами работ [19-20] (a, b обозначают полуоси эллипса). Результат автора содержится в последней строке таблицы 4.6 и получен для 1-ой колонки на 104 точках (8 окружностей по 13 точек), а для второй на 410 точках (10 окружностей по 41 точке).

Таблица 4.5

i	λ_i		
	410 точек	820 точек	1230 точек
1	10.57	10.64343900	10.6434390886
2	95.6	95.7918066	95.7918067703
3	272.6	272.32445319	272.324453259
4	470.6	471.2710702	471.271070279
5	587.6	587.1410688	587.141069472

Таблица 4.6

Автор	$\sqrt{\lambda_i}$	
	a=1, b=0.5	*a=1, b=1/3*
[19]	28.5148	60.3179
[20]	27.5	56.9
x	27.2	56.4

Глава 5.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Способ дискретизации оператора Лапласа, описанный выше в главе 3, основан на том факте, что дискретная задача наследует свойства дифференциальной задачи. В частности, наследуется свойство разделения переменных. Возникает вопрос, как перенести этот способ дискретизации на другие уравнения математической физики с разделяющимися переменными. Это существенно для построения дискретного бигармонического оператора в прямоугольной области с краевым условием свободного опирания.

§1. Уравнения общего вида с разделяющимися переменными

Пусть линейный оператор S в функциональном банаховом пространстве **B** имеет собственную функцию вида $u_k=v_k(\,.\,)exp(ik\varphi)$, $k=0,1,\ldots$, где через $v_k(\,.\,)$ обозначена функция одного или нескольких аргументов, $\varphi\in[0,2\pi]$.
Свойство разделения переменных означает, что

$$Su_k=(s_kv_k)exp(ik\varphi), \tag{1.1}$$

где s_k – некоторый линейный оператор. Будем также предполагать, что линейные операторы S и s_k имеют действительные коэффициенты, тогда

$$S(Re u_k)=(s_kv_k)Re(exp(ik\varphi)). \tag{1.2}$$

Из линейности операторов S и s_k следует, что свойства (1.1) и (1.2) выполняются также для экспонент вида $exp[ik(\varphi-\varphi_p)]$, где φ_p – некоторое число.
Пусть $u\in\mathbf{B}$. Применим следующую интерполяцию по φ:

$$u\approx\frac{2}{N}\sum_{p=0}^{2n}u_pD_n(\varphi-\varphi_p),\quad N=2n+1,\ \ \varphi_p=2\pi p/N.$$

Здесь $u_p=u(\; . \; ,\varphi_p)$, точкой обозначена одна или несколько переменных.

$$D_n(\varphi-\varphi_p)=\sum_{k=0}^{n}{}' \cos[k(\varphi-\varphi_p)],$$

штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $k=0$ берётся с коэффициентом ½ .

Тогда имеем

$$u \approx \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{n}{}' \{\sum_{p=0}^{2n} u_p \cos[k(\varphi-\varphi_p)]\},$$

$$Su=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{n}{}' \{\sum_{p=0}^{2n} (s_k u_p) \cos[k(\varphi-\varphi_p)]\}.$$

Проведём дискретизацию оператора s_k. Для этого применим для функции u_p интерполяцию вида:

$$u_p \approx \sum_{q=1}^{m} l_q(.)u_{qp},$$

где l_q, $q=1,2,\ldots,m$ – фундаментальные функции интерполяции; m – число узлов сетки; u_{qp} - значение функции u_p в q-ом узле сетки. Обозначим

$$a_{qk}(\; . \;)=s_k l_q(\; . \;), \tag{1.3а}$$

$$H_{qp}(\; . \; ,\varphi)=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{n}{}' a_{qk}(\; . \;)\cos[k(\varphi-\varphi_p)], \tag{1.3б}$$

тогда

$$Su \approx \sum_{q=1}^{m}\sum_{p=0}^{2n} H_{qp}(\; . \; ,\varphi)u_{qp}.$$

Если $(\; . \;)$ и φ пробегают узлы сетки, то из (1.3) получаем $Su \approx Hu$, где H есть h-матрица, u – вектор столбец, содержащий значения соответствующей функции в узлах сетки (узлы нумеруются сначала по φ, потом по остальным пространственным переменным). Для построения клеток h-матрицы Λ_k, $k=0,1,\ldots,n$ требуется произвести дискретизацию операторов s_k.

Описанный в этом параграфе метод дискретизации уравнений с разделяющимися переменными применяется ниже для быстрого решения уравнения Пуассона в торе и во внешности тела вращения, при этом правая часть уравнения Пуассона - произвольна, т.е. рассматриваются трёхмерные задачи; для приближённого решения уравнения Пуассона использовались свойства h-матрицы.

§2. Дальнейшие обобщения

Следующим логическим обобщением метода дискретизации, описанного в предыдущем параграфе, является случай, когда собственная функция рассматриваемого линейного оператора представляется в виде произведения функции от нескольких переменных на функцию от одной переменной (в §1 функция одной переменной имела вид $exp(ik\varphi)$). В качестве примера рассмотрим уравнение Пуассона в прямоугольнике $G=\{[-1,1]\times[-b,b]\}$. Требуется найти матрицу, которая наследовала бы свойство разделения переменных для собственной функции оператора Лапласа в прямоугольнике; такая матрица имеет следующий вид:

$$C=I_n\otimes A+B\otimes I_m. \qquad (2.1)$$

Здесь n - число узлов сетки по высоте прямоугольника; m - число узлов сетки по ширине прямоугольника; I_n - единичная матрица размера $n\times n$; A - матрица размера $m\times m$ (одномерный дискретный лапласиан на отрезке $[-1,1]$); B - матрица размера $n\times n$ (одномерный дискретный лапласиан на отрезке $[-b,b]$); I_m - единичная матрица размера $m\times m$.

Для построения матриц A и B следует произвести дискретизацию одномерной спектральной задачи $u''=\lambda u$ с краевыми условиями $u(-1)=u(1)=0$ и $u(-b)=u(b)=0$ соответственно. Дискретизация этой задачи производится по методике, описанной в §2 главы 2.

Собственным значением матрицы C является сумма собственных значений матриц A и B, а соответствующий собственный вектор представляется в виде кронекерова произведения собственных векторов этих матриц.

Последнее свойство показывает, что дискретный лапласиан наследует свойства дифференциального оператора Лапласа. Представлению собственной функции дифференциального оператора Лапласа в виде произведения двух функций от одной переменной соответствует кронекерово произведение собственных векторов матриц A и B.

Это свойство матрицы (2.1) показывает, что вместо оператора Лапласа может быть рассмотрен другой линейный оператор математической физики, а вместо прямоугольника G – другая область, в которой собственная функция рассматриваемого оператора представляется в виде произведения двух функций (например, в виде произведения функции от двух переменных и функции от одной переменной).

Далее возникает вопрос, в какой мере свойства класса h-матриц распространяются на матрицы (2.1). А именно, как аналитически обратить матрицу C и возможен ли быстрый алгоритм умножения матрицы C^{-1} на вектор. Перейдём к рассмотрению этих вопросов. Пусть

$$B = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k, \quad b_k^2 = b_k, \quad b_k b_p = 0, \quad k \neq p,$$

есть спектральное разложение матрицы B. Такое разложение всегда можно построить, если B – матрица простой структуры, т.е. имеет полную систему собственных векторов; именно этот случай будем иметь в виду в дальнейших рассуждениях. Здесь b_k, $k=1,2,\dots,n$ – собственные проекторы на одномерное инвариантное подпространство, λ_k – соответствующее собственное значение. В практических расчётах размер матрицы B невелик ($n \leq 19$) и спектральное разложение можно построить, решив полную проблему собственных значений для матриц B и B'.

Заметим, что $\sum_{k=1}^{n} b_k = I_n$, т.к. матрица $\sum_{k=1}^{n} b_k$ совпадает со своей обратной, и преобразуем соотношение (2.1) следующим образом:

$$C = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) \otimes A + \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k \right) \otimes I_m = \sum_{k=1}^{n} (b_k \otimes A + \lambda_k b_k \otimes I_m) = \sum_{k=1}^{n} b_k \otimes (A + \lambda_k I_m).$$

Тогда имеем следующую формулу для обратной к матрице C:

$$C^{-1} = \sum_{k=1}^{n} b_k \otimes (A + \lambda_k I_m)^{-1}, \tag{2.2}$$

которая проверяется непосредственным умножением. Формула (2.2) является обобщением формулы (см. гл. 3, 4.9).
Случай, когда возможно быстрое умножение матрицы C^{-1}, на вектор (круговой цилиндр) подробно описан ниже.

§3. Дискретизация оператора Лапласа и быстрое решение уравнения Пуассона в торе

При расчете движения пучка заряженных частиц (плазмы) в самосогласованном электрическом поле требуется на каждом шаге по времени пересчитывать потенциал электрического поля, т. е. решать, уравнение Пуассона. Для того чтобы расчет проводился за приемлемое время, необходим быстрый алгоритм решения уравнения Пуассона. В особенности это актуально для трехмерных задач. В этом параграфе описывается алгоритм, которым дискретное уравнение Пуассона в торе решается за $O(N_r^2 N_\theta^2 N \log N)$ операций, где N_r, N_θ, N число узлов сетки по переменным $r,\ \theta,\ \varphi$ некоторой криволинейной системы координат.

1. Постановка задачи и дискретизация

Пусть рассматриваемый тор T получается вращением круга единичного радиуса вокруг оси z некоторой декартовой системы координат (x,y,z). Причем центр круга лежит в плоскости (x,y) на расстоянии R от оси z и плоскость круга перпендикулярна плоскости (x,y).
Рассмотрим в этой области, например, задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z),\ (x,y,z) \in T,\ u\big|_{\partial G} = 0.$$

В криволинейных координатах (r,θ,φ), связанных с декартовой системой координат $(x,y\ z)$ соотношениями

$$x=(R-r\cos\theta)\cos\varphi,\quad y=(R-r\cos\theta)\sin\varphi,\quad z=r\sin\theta,$$
$$0\le\varphi<2\pi,\quad 0\le\theta<2\pi,\quad 0\le r\le 1,$$

оператор Лапласа

$$\Delta u = div\ grad\ u$$

записывается в виде

$$\Delta u=\Delta_{r,\theta}u+\frac{u''_{\varphi^2}}{(R-r\cos\theta)^2}+\frac{u'_\theta\sin\theta-ru'_r\cos\theta}{r(R-r\cos\theta)},$$

$$\Delta_{r,\theta}=\frac{1}{r}(ru'_r)'_r+\frac{1}{r^2}u''_{\theta^2}.$$

Для построения дискретного Лапласиана в торе рассмотрим вспомогательную спектральную задачу

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)+\lambda u(r,\theta,\varphi)=0,\quad (r,\theta,\varphi)\in T, \qquad (3.1a)$$

$$u\big|_{r=1}=0. \qquad (3.1б)$$

Здесь можно отделить переменную по φ и представить собственную функцию в виде

$$u_k(r,\theta,\varphi)=v_k(r,\theta)e^{ik\varphi},\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots\ ,$$

где функция $v_k(r,\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{r,\theta}v_k+\frac{v'_{k\theta}\sin\theta-rv'_{kr}\cos\theta}{r(R-r\cos\theta)}-\frac{k^2\ \ v_k}{(R-r\cos\theta)^2}+\lambda v_k=0, \qquad (3.2a)$$

$$v_k\,|_{r=1}=0. \qquad (3.2б)$$

Построим дискретизацию спектральной задачи (3.2). Для этого введем сетку по переменным (r,θ), состоящую из точек (r_ν,θ_p):

$$r_\nu=\cos\frac{(2\nu-1)\pi}{4N_r},\quad \nu=1,2,\dots,N_r,\quad \theta_p=\frac{2\pi p}{N_\theta},\quad N_\theta=2n_\theta+1,\quad p=0,1,\dots,2n_\theta. \quad (3.3)$$

Для дискретизации на этой сетке плоского оператора Лапласа $\Delta_{r\theta}$ применим методику, описанную в главе 3, а для дискретизации младших членов в (3.2*a*) применим интерполяционную формулу из этой же главы. При этом значения производных по r и θ в узлах сетки получаем дифференцированием указанной интерполяционной формулы. В результате получаем приближенную дискретную задачу на собственные значения:

$$\Lambda_k v_k + \lambda v_k = 0,$$

где Λ_k - матрица размера $m \times m$, $m = N_r N_\theta$, $v_k \in R^m$ - вектор, компоненты которого содержат приближенные значения соответствующей собственной функции краевой задачи (3.2) в узлах сетки (3.3). При этом узлы нумеруются, начиная с первой окружности $\nu=1$, против часовой стрелки $p=0,1,...,2n_\theta$.

Теперь для дискретизации спектральной задачи (3.2) введем по φ сетку из N точек

$$\varphi_q = \frac{2\pi q}{N}, \; q = 0,1,...,2n,$$

и, учитывая сказанное в первом параграфе, получаем приближенную задачу на собственные значения в виде h-матрицы:

$$Hu+\lambda u=0.$$

Здесь $u \in R^M$, $M = mN$ - вектор, компоненты которого содержат приближенные значения соответствующей собственной функции в узлах сетки. Причем узлы $(r_\nu,\theta_p,\varphi_q)$ нумеруются в следующем порядке: $\nu=1,2,...,N_r$, $p=0,1,...,2n_\theta$, $q=0,1,...,2n$, т.е. быстрее всего меняется индекс ν, затем p и q. Оценка погрешности описанного приближенного метода решения спектральной задачи (3.1) получается стандартным способом (см. гл. 1). После того как дискретный Лапласиан построен для приближенного решения уравнения Пуассона, требуется решить систему линейных уравнений

$$Hu=f. \tag{3.4}$$

Здесь $u,f \in R^M$, $M = mN$ - векторы, компоненты которых содержат приближенные значения решения уравнения Пуассона и его правой части в узлах сетки. Оценка погрешности отклонения решения дискретного уравнения Пуассона от точного может быть получена стандартным способом. Отметим только некоторые качественные особенности. Применяемая дискретизация основана на интерполировании решения многочленами (алгебраическими и тригонометрическими). Известно [12], что точность этой интерполяции тем выше, чем глаже интерполируемая функция. Таким образом, описанный алгоритм не имеет насыщения. Указанное обстоятельство позволяет проводить расчеты уравнения Пуассона с гладкой правой частью на редкой сетке.

2. Быстрое решение дискретного уравнения Пуассона

Для того чтобы решить дискретное уравнение Пуассона (3.4), необходимо обратить *h*-матрицу *H.* Это делается по формуле (см. гл. 3, 4.9). Затем производится быстрое умножение этой матрицы на вектор (см. гл. 3, §6).

Например, при $N=27$ требуется $678N_r^2N_\theta^2+271N_rN_\theta$ операций, а прямое умножение матрицы H^{-1} на вектор требует $1458N_r^2N_\theta^2-27N_rN_\theta$ операций. При больших N_r и N_θ экономия составляет около 53% операций.

Для того чтобы убедиться в устойчивости предложенного метода, следует оценить норму матрицы H^{-1}. Обозначим через $\|.\|_2$ спектральную норму матрицы. Тогда

$$\left\|H^{-1}\right\|_2=\max\left\|\Lambda_k^{-1}\right\|_2.$$

Вычисления при R=5 показывают, что максимум достигается при k=0, слабо зависит от числа узлов по переменным (r,θ) и имеет значение, близкое к 0.1928.

3. Заключение

Применение дискретного преобразования Фурье для быстрого решения уравнения Пуассона в классическом двумерном случае [21] основано на том, что разностный оператор Лапласа наследует вид собственных функций оператора Лапласа. Настоящая работа основана на аналогичном приеме: *h*-матрица наследует спектральные свойства двумерного и трехмерного оператора Лапласа. Для примера рассмотрено уравнение Пуассона в торе, но аналогичные результаты справедливы и для других задач, в результате дискретизации которых получается конечномерная задача с *h*-матрицей.

§4. Дискретизация оператора Лапласа и быстрое решение уравнения Пуассона для внешности тела вращения

1. Рассмотрим уравнение Пуассона во внешности односвязного тела вращения Ω:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=f(x,y,z). \tag{4.1}$$

Пусть на границе тела вращения $\partial\Omega$ задано краевое условие Дирихле

$$\Phi|_{\partial\Omega}=0.$$

Потребуем также, чтобы решение обращалось в нуль в бесконечности. Введем криволинейную систему координат (r,θ,φ), связанную с декартовой системой координат (x,y,z) соотношениями

$$x=v(r,\theta)cos\varphi,\ y=v(r,\theta)sin\varphi,\ z=u(r,\theta). \tag{4.2}$$

Если выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},$$

то система координат (r,θ,φ) ортогональна и в этой системе координат лапласиан скалярной функции имеет вид

$$\Delta\Phi=\frac{r}{vw^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rv\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},\ w^2=(\partial v/\partial\theta)^2+(\partial u/\partial\theta)^2. \tag{4.3}$$

Удобно считать, что (r,θ,φ) - сферические координаты, а соотношения (4.2) задают отображение шара единичного радиуса на внешность рассматриваемого тела вращения Ω. Обозначим через G область, получаемую меридиональным сечением тела вращения Ω (т.е. тело Ω получается вращением области G вокруг оси z). Пусть $\psi=\psi(\xi)$, $\psi=u+iv$, $\xi=r\ exp(i\theta)$ - конформное отображение круга $|\xi|\leq 1$ на внешность области G, причем центр круга переходит в бесконечность. Тогда вместо внешней задачи для уравнения (4.1) имеем внутреннюю задачу в шаре единичного радиуса, проколотом в центре, для уравнения (4.3). Причем в центре шара и на его границе, т.е. при $z=0$ и $z=1$, ставится граничное условие $\Phi=0$.

Далее будем считать, что конформное отображение круга единичного радиуса на внешность области G известно. Заметим, что для численного построения конформного отображения имеются надежные алгоритмы (см., например, [I], [16]).

Сделав в (4.3) замену переменных $\zeta=\cos\theta$, получим

$$\Delta\Phi=\frac{r}{vw^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rv\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\sqrt{1-\varsigma^2}\,\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\frac{v}{r}\sqrt{1-\varsigma^2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varsigma}\right)\right]+\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},\quad(4.4)$$

Система координат $(r,\varsigma,\varphi),\ 0<r\le 1,\ -1\le\varsigma\le 1,\ 0\le\varphi<2\pi$ наиболее удобна для поставленной выше задачи.

2. Для дискретизации соотношения (1.4), т.е. для построения дискретного лапласиана, воспользуемся результатами из §1. Рассмотрев вспомогательную спектральную задачу

$$\Delta\Phi+\lambda\Phi=0,\ \Phi|_{r=1}=0,\ \Phi|_{r=0}=0$$

и, отделив переменную по φ, получим дискретный лапласиан в виде h-матрицы:

$$H=\frac{2}{L}{\sum_{k=0}^{l}}'\Lambda_k\otimes h_k,\quad L=2l+1,\qquad(4.5)$$

где L - число узлов сетки по переменной φ ($\varphi_k=2\pi k/L,\ k=0,1,\dots,L-1$ - узлы сетки), символ $\otimes$ обозначает кронекерово произведение матриц Λ_k и k размера $M\times M$ и $L\times L$ соответственно. Матрицы Λ_k размера $M\times M,\ M=mn$ получены дискретизацией дифференциального соотношения, зависящего от k:

$$\frac{r}{vw^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rv\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)+\sqrt{1-\varsigma^2}\,\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\frac{v}{r}\sqrt{1-\varsigma^2}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varsigma}\right)\right]-\frac{k^2}{v^2}\Phi_1,\quad(4.6)$$

где m - число узлов сетки по r, n - число узлов сетки по ζ, $\Phi(r,\zeta,\varphi)=\Phi_1(r,\zeta)\,\Phi_2(\varphi)$. Штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $k=0$ берется с коэффициентом ½ .

Другими словами, построена h-матрица со свойствами, аналогичными свойствам лапласиана от скалярной функции.

Рассмотрим подробно дискретизацию дифференциального выражения (4.6). Выберем по r сетку, состоящую из m точек,

$$r_\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta_\nu, \ \theta_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2m}, \ \nu = 1,2,...,m,$$

и построим интерполяционную формулу

$$\Phi(r) = \sum_{\nu=1}^{m} T_m(x)(r-1)r\Phi_\nu \left[\frac{m(-1)^{\nu-1}}{\sin\theta_\nu}(r_\nu - 1)r_\nu(x - x_\nu) \right]^{-1}, \Phi_\nu = \Phi(r_\nu), \quad (4.7)$$

где $x=2r-1$, $x_\nu=r_\nu-1$, $T_m(x)=\cos(m \arccos x)$.

Первую и вторую производные по r, входящие в соотношения (4.6), получим дифференцированием интерполяционной формулы. По ζ выберем сетку, состоящую из n точек,

$$\varsigma_j = \cos\theta_j, \ \ \theta_j = (2j-1)\pi/(2n), \ \ j = 1,2,...,n,$$

и применим интерполяционную формулу

$$\Phi(\varsigma) = \sum_{j=1}^{n} T_n(\varsigma)\Phi_j \left[\frac{n(-1)^{j-1}}{\sin\theta_j}(\varsigma - \varsigma_j) \right]^{-1}, \quad \Phi_j = \Phi(\varsigma_j). \qquad (4.8)$$

Нетрудно показать, что порядок аппроксимации построенной таким образом дискретизации лапласиана зависит от гладкости решения уравнения Пуассона. Причем аппроксимация тем лучше, чем большим условиям гладкости удовлетворяет решение уравнения Пуассона. Это следует из теорем о приближении гладких функций многочленами [12]. Другими словами, построенный алгоритм не имеет насыщения [1]. Для небольших m и n аппроксимация интерполяционными многочленами (4.7) и (4.8) практически совпадает с многочленом наилучшего приближения в норме C. Соответственно, скорость убывания с ростом m и n погрешности дискретизации этими многочленами совпадает со скоростью стремления к нулю наилучшего приближения гладкой функции в норме C.

3. Итак, для приближенного решения уравнения Пуассона (4.1) нужно решить систему линейных уравнений

$$H\Phi=f, \qquad (4.9)$$

где матрица H определена в (4.5), а Φ и f - векторы, компоненты которых содержат значения соответствующих функций в узлах сетки. В §1 показано, что

$$H^{-1} = \frac{2}{L}\sum_{k=0}^{l}{}' \Lambda^{-1}{}_k \otimes h_k, \quad L = 2l+1,$$

т.е. обращение h-матрицы сводится к обращению $n+1$ матриц, Λ_k, $k=0,1,\ldots ,l$ и в результате получаем также h-матрицу. Матрицы Λ_k вычисляются для заданной области один раз, и поэтому требуемое для этого количество операций можно не учитывать. Следовательно, решение дискретного уравнения Пуассона (3.1) сводится к умножению h-матрицы H^{-1} на вектор. В практическом алгоритме умножения H^{-1} на вектор при $N=3^{\mu}$, $\mu=1,2,\ldots$ можно применить быстрое преобразование Фурье, тогда количество операций составит

$$m^2n^2(L+8L\log_3 L+2)+mn(mn-1)+4mn(L\log_3 L-l).$$

При $\mu = 3$ и больших m и n получаем, что экономия числа операций составляет 53% по сравнению с числом операций, необходимых для непосредственного умножения матрицы H^{-1} на вектор. С возрастанием μ эффективность алгоритма увеличивается.

4. В качестве численного примера рассматривалось уравнение Пуассона во внешности эллипсоида вращения

$$x^2/b^2 + y^2/b^2 + z^2/a^2 = 1$$

с правой частью

$$f(x,y,z) = \left(\frac{2}{R^3}-\frac{6}{R^4}\right)\left[\left(\frac{2x}{b^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{2z}{a^2}\right)^2\right]+\left(\frac{2}{R^3}-\frac{1}{R^2}\right)\left(\frac{4}{b^2}+\frac{2}{a^2}\right),$$

где $R(x,y,z) = x^2/b^2 + y^2/b^2 + z^2/a^2$.

Аналитическое решение этой задачи известно:

$$\Phi(x,y,z)=1/R-1/R^2.$$

Известно также конформное отображение

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2}\left[(a-b)\xi + \frac{a+b}{\xi}\right], |\xi| \le 1.$$

Расчеты проводились на сетке из 225 ($m=n=5$, $L=9$) точек и на сетке из 900 ($m=n=10$, $L=9$) точек при $a=1$, $b=0.5$. В последнем случае совпадение точного и приближенного решений составляет 4-5 знаков после запятой.

§5. Численное исследование задачи об обтекании под углом атаки тела вращения потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости

Численное исследование устойчивости движения автомобиля при боковом ветре имеет важное значение для безопасности его движения. В настоящее время такие исследования проводятся в аэродинамической трубе обдуванием готового автомобиля или его модели. Натурные эксперименты дороги, кроме того, требуют изготовления опытного экземпляра модели или целого автомобиля. Представляется перспективным заменить натурный эксперимент численным и исследовать аэродинамику автомобиля на стадии проектирования. Для этого требуется выбрать математическую модель и решить численно выписанные уравнения. Поскольку скорости движения автомобиля невысоки по сравнению со скоростью звука и составляют примерно третью его часть, то обычно выбирается модель несжимаемой жидкости. Кроме того, обычно предполагается, что жидкость идеальная и течение является потенциальным. В такой постановке рассматриваемая задача решается панельным методом [22]. Недостатком этого метода является его насыщаемость, т.е. он не использует информацию о гладкости решаемого уравнения Лапласа. В настоящей работе отрабатывается методика построения алгоритма без насыщения на примере тела вращения, обтекаемого потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Построенный алгоритм использует априорную информацию о гладкости решения уравнения Лапласа. Проведенные расчеты показывают перспективность его применения в задаче об обтекании автомобиля потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Количество узлов сетки по сравнению с методом конечных элементов может быть уменьшено в 10 раз при получении в результате такой же точности.

Осесимметричная задача, т.е. обтекание тела вращения под нулевым углом атаки, решалась в [1] методом конечных элементов. Точность полученного решения невысока. В настоящей работе исследуется более общее течение под ненулевыми углами атаки. Предложенный численный алгоритм не имеет насыщения [1] ,т.е. его точность автоматически реагирует на гладкость решения. Это позволяет проводить расчеты с высокой точностью на редкой сетке.

Задача обтекания тела T потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости сводится к отысканию потенциала скорости $\Phi=\Phi(x_1,x_2,x_3)$ - функции гармонической вне обтекаемого тела T:

$$\Delta\Phi = 0, \tag{5.1}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\partial T} = 0, \tag{5.2}$$

$$grad\Phi \to \vec{V}_\infty, \ \ при \ \ |x| \to \infty, \tag{5.3}$$

где n - внутренняя нормаль к телу, ∂T - граница тела T, V_∞ - скорость потока в бесконечности, |x| - длина вектора (x_1,x_2,x_3).

Без ограничения общности можно принять, что скорость на бесконечности $\vec{V}_\infty=(1,0,0)$. В случае шара $T=\{x:|x| \le 1\}$, потенциал имеет вид $\Phi=x_1+x_1/(2|x|^3)$.

Как окончательный выход алгоритма интересен не только потенциал скорости, но и давление и вектор скорости, особенно на поверхности обтекаемого тела. Давление вычисляется по формуле, вытекающей из интеграла Бернулли:

$$p\rho^{-1} + \frac{1}{2}V^2 = p_\infty\rho^{-1} + \frac{1}{2}V^2, \ \vec{V} = grad\Phi,$$

где p - давление на бесконечности, ρ - плотность, V, V_∞ - модули скорости.

Если в соотношениях (5.1) - (5.3) произвести замену $\Phi=x_1-\Phi_1$, то Φ гармонична в области $\Omega=R^3\backslash T$:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \cos(n, x_1), \tag{5.4}$$

$$\Phi_1 \to 0 \quad при \quad |x| \to \infty. \tag{5.5}$$

Введем криволинейную систему координат (r,θ,φ), связанную с декартовыми координатами (x_1,x_2,x_3) соотношениями:

$$x_1=v(r,\theta)\cos\varphi,\ x_2=v(r,\theta)\sin\varphi,\ x_3=u(r,\theta). \tag{5.6}$$

Если выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},$$

то система координат (r,θ,φ) ортогональна, и в этой системе координат Лапласиан скалярной функции имеет вид

$$\Delta\Phi = \frac{r}{v\omega^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rv\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\right] + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},\ \ \omega^2 = (\partial v/\partial\theta)^2 + (\partial u/\partial\theta)^2.$$

Обозначим G область, получаемую меридиональным сечением тела вращения T. Пусть $\psi=\psi(\xi)$, $\psi=u+iv$, $\xi=r\exp(i\theta)$ - конформное отображение круга $|\xi|\leq 1$ на внешность области G, причем центр круга переходит в бесконечность, тогда $\omega = r\,|\,\psi'(\xi)\,|$.

Удобно считать, что (r,θ,φ) - сферические координаты, тогда соотношения (5.6) задают отображение проколотого в центре шара единичного радиуса на внешность рассматриваемого тела T. В результате замены (5.6) соотношения (5.4), (5.5) принимают вид

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right|_{r=1} = |\varphi'|\, f(\theta,\varphi) \equiv f_1(\theta,\varphi), \tag{5.7}$$

$$\Phi_1\big|_{r=0} = 0, \tag{5.8}$$

где $f(\theta,\varphi)$ получается из $\cos(n,x_1)$ заменой (5.6).

Знак в формуле (5.7) выбран с учетом того, что при отображении (5.6) внутренняя нормаль к телу переходит во внешнюю.

Произведем еще одну замену:

$$\Phi_2(r,\theta,\varphi) = \Phi_1(r,\theta,\varphi) - rf_1(\theta,\varphi),$$

тогда из соотношения (5.7), (5.8) получаем

$$\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \tag{5.9}$$

$$\Phi_2\big|_{r=0} = 0. \tag{5.10}$$

Теперь функция $\Phi_2(r,\theta,\varphi)$ не гармоническая, а удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Phi_2 = -\Delta(rf_1(\theta,\varphi) \equiv F(r,\theta,\varphi) \tag{5.11}$$

с однородными краевыми условиями (5.9), (5.10).

Рассмотрим, например, эллипсоид вращения

$$\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Тогда:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}\left((a-b)r + \frac{a+b}{r}\right)\cos\theta,$$

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2}\left((a-b)r - \frac{a+b}{r}\right)\sin\theta,$$

$$\omega^2 = \frac{1}{4}\left((a-b)r + \frac{(a+b)^2}{r}\right)^2 \sin^2\theta + \frac{1}{4}\left((a-b)r - \frac{(a+b)^2}{r}\right)^2 \cos^2\theta,$$

$$f_1(\theta,\varphi) = a\sin\theta\cos\varphi,$$

$$F(r,\theta,\varphi) = a\frac{r\cos\varphi}{\omega^2 v}\left[(b-a)\sin^2\theta + \frac{1}{2}\left((b-a)r + \frac{a+b}{r}\right)\cos^2\theta\right] + \frac{r\sin\theta\cos\varphi}{v^2}.$$

Например, для шара *(a=1,b=1)* $F(r,\theta,\varphi) = 2x^3\sin\theta\cos\varphi$, а решение краевой задачи (5.9) - (5.11) есть $\Phi_2(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{r^2}{2} - r\right)\sin\theta\cos\varphi.$

Если Φ_2 найдено, то для эллипсоида $\Phi = v(r,\theta)\cos\varphi - \Phi_1(r,\theta,\varphi)$.

Для дискретизации краевой задачи (5.9) - (5.11) применим подход, предложенный в §1. Таким образом, получаем дискретный Лапласиан в виде h-матрицы:

$$H = \frac{2}{L}\sum_{k=0}^{l}{}' \Lambda_k \otimes h_k, \quad L = 2l + 1,$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $k=0$ берется с коэффициентом 1/2, символ $\otimes$ обозначает кронекерово произведение матриц Λ_k и h_k размера $M\times M$ и $L\times L$ соответственно. Матрицы Λ_k размера $M\times M$, $M=mn$ получены дискретизацией дифференциального соотношения, зависящего от k:

$$\frac{r}{\nu\omega^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\nu\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\nu}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right)\right]-\frac{k^2}{\nu^2}\Phi_2,\ k=0,1,\dots,L-1 \qquad (5.12)$$

с краевыми условиями (5.9), (5.10), где m - число узлов сетки по r, n - число узлов сетки по θ.

Для дискретизации дифференциального оператора (5.12) выберем по θ сетку, состоящую из n узлов:

$$\theta_\nu=\frac{\pi}{2}(x_\nu+1),\ x_\nu=\cos\chi_\nu,\ \chi_\nu=\frac{(2\nu-1)\pi}{2n},\ \nu=1,2,\dots,n,$$

и применим интерполяционную формулу

$$f(\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{T_n(x)f_\nu}{n\frac{(-1)^{\nu-1}}{\sin x_\nu}(x-x_\nu)},\quad x=\frac{1}{\pi}(2\theta-\pi),\ \ f_\nu=f(\theta_\nu),\ \ \nu=1,2,\dots,n; \qquad (5.13)$$

$T_n(x)=\cos\ (n\ arc\cos(x))$.

Первую и вторую производные, входящие в соотношения (5.12), получим дифференцированием интерполяционной формулы (5.13).

По r выбираем сетку, состоящую из m узлов:

$$r_\nu=\frac{1}{2}(y_\nu+1),\ y_\nu=\cos\alpha_\nu,\ \alpha_\nu=\frac{(2\nu-1)\pi}{2m},\ \ \nu=1,2,\dots,m,$$

и рассмотрим интерполяционную формулу

$$g(r)=\sum_{\nu=1}^{n}l_\nu(r)g_\nu,\quad g_\nu=g(r_\nu),$$

$$l_\nu(r)=\sum_{p=0}^{m}{}'\ \beta_{\nu p}rT_p(2r-1)-c_\nu^m r(r-1)T_m, \qquad (5.14)$$

$$\beta_{\nu p}=\frac{4\cos\alpha_\nu}{m(\cos\alpha_\nu+1)},\quad c_m^\nu=\sum_{p=0}^{m-1}\beta_{\nu p}(1+2p^2).$$

Заметим, что $l_\nu(0)=0,\ \ l'_\nu(1)=0$, т.е. краевые условия (5.9), (5.10) выполнены. Первую и вторую производные, входящие в соотношение (5.12), получим дифференцированием интерполяционной формулы (5.14).

После того, как матрицы Λ_k , $k=0,1,...,l$ построены для приближенного решения краевой задачи (5.9) - (5.11) требуется решить систему линейных уравнений

$$H\Phi_2=F, \tag{5.15}$$

где Φ_2 и F - векторы, компоненты которых суть значения соответствующих функций в узлах сетки (по φ выбирается сетка из узлов ($\varphi_k=2\pi k/L,\ k=0,1,\ldots,L-1$).

В §1 показано, что для обращения h-матрицы справедлива формула

$$H^{-1}=\frac{2}{L}\sum_{k=0}^{l}{}' \Lambda^{-1}{}_k\otimes h_k, \quad L=2l+1, \tag{5.16}$$

т.е. для решения системы линейных уравнений (5.15) достаточно обратить матрицы Λ_k, $k = 0,1,...,l$ после чего задача сводится к умножению h-матрицы (5.16) на вектор.

Оценку погрешности построенной дискретизации можно получить стандартными средствами. Отметим только ее качественные особенности. Для дискретизации использовалась интерполяция решения многочленами. Известно [1,12] свойство приближения гладких функций интерполяционными многочленами. Это приближение тем точнее, чем большим условиям гладкости отвечает приближаемая функция. Таким образом, построенный алгоритм не имеет насыщения, т.е. точность полученного приближенного решения тем выше, чем большим условиям гладкости отвечает точное решение.

Конкретные расчеты проводились для шара ($a=1,b=1$) и эллипсоида ($a=1,b=0.5$) на сетке $m=7$, $n=10$, $L=9$, т.е. состоящей из 630 узлов. Оказалось, что для шара матрица Λ_0 плохо обращается методом Гаусса. Норма ($\Lambda_0\Lambda_0^{-1}-I$) оказалась порядка 10^{-3}. Пришлось применить итерационное уточнение обратной матрицы [2], после чего норма ($\Lambda_0\Lambda_0^{-1}-I$) уменьшилась до 10^{-8}. Однако непосредственным умножением матрицы (5.16) на вектор получить решение не удается. Дело в том, что норма Λ_0^{-1} оказалась порядка 10^{16}. Норма остальных матриц $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ суть 10^5, 10^4, 10^3, 10^3. Пришлось применить масштабирование с коэффициентом 10^{10}. После этого мантисса полученного приближенного решения совпала с мантиссой точного решения с 7 знаками после запятой (порядок отличался на 10 в соответствии с выбранным масштабным множителем). Для эллипсоида матрица Λ_0 обращалась хорошо, и итерационное уточнение обратной матрицы не потребовалось. Нормы матриц $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ имели величину порядка 10^6, 10^4, 10^3, 10^3, 10^3, соответственно масштабирование не потребовалось (разумеется, правая часть уравнения Пуассона (5.11) должна быть вычислена с 6-7 запасными знаками).

Отметим, что для умножения матрицы H^{-1} на вектор требуется $O(m^2n^2L\log L)$ операций.

Итак, проведенные расчеты показали, что дискретная задача может быть плохо обусловленной. Поэтому при практическом применении алгоритма следует следить за качеством обращения клеток h-матрицы $\Lambda_0, \Lambda_1,\dots,\Lambda_l$. В случае необходимости применять итерационное уточнение обратной матрицы. Также следует следить за нормой полученных матриц $\Lambda_0^{-1},\Lambda_1^{-1},\dots,\Lambda_l^{-1}$ и применять, если потребуется, масштабирование и вычисление правой части уравнения Пуассона с запасными знаками.

§6. Численное исследование уравнений Стокса

Рассматривается внешняя задача для линеаризованных стационарных уравнений Навье-Стокса (уравнений Стокса) при обтекании тела вращения с малыми числами Рейнольдса. Относительно направления вектора скорости в невозмущенном потоке не делается никаких предположений. Таким образом, в общем случае задача трехмерна. В результате численного исследования этих уравнений установлена их плохая обусловленность. Предложен численный алгоритм решения плохо обусловленных уравнений Стокса, который не имеет насыщения, т.е. его точность тем выше, чем большим условиям гладкости удовлетворяет искомое решение.

1. Постановка задачи и выбор системы координат

В декартовых координатах (x_1,x_2,x_3) система уравнений Стокса имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta v_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial v^1}{\partial x_1} + \frac{\partial v^2}{\partial x_2} + \frac{\partial v^3}{\partial x_3} = 0, \tag{6.2}$$

где Re - число Рейнольдса; (v^1,v^2,v^3) — вектор скорости; p - давление. Входящие в уравнения (6.1), (6.2) зависимые и независимые переменные обезразмерены стандартным способом. За характерные величины принимаются характерный линейный размер L_a и модуль вектора скорости потока в бесконечности v_∞, тогда, например, $p = (P - p_\infty)/(\rho v_\infty^2)$ (P - размерное давление, ρ- плотность жидкости, p_∞ - давление в невозмущенном потоке (в бесконечности)).

Таким образом, для определения параметров потока, вектора скорости
(v^1,v^2,v^3) и давления p требуется найти решение системы уравнений (6.1), (6.2), удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$v^i\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ i = 1,2,3,\ \ v^i\Big|_\infty = v_\infty^i,\ i = 1,2,3,\ \ p\Big|_\infty = 0.$$

Здесь Ω - рассматриваемое тело вращения вокруг оси x_3; $\partial\Omega$ - его граница; v_∞^i $(i = 1,2,3)$ − скорость жидкости в невозмущенном потоке (в бесконечности).

Следствием уравнений (6.1), (6.2) будет соотношение

$$\Delta p = 0, \tag{6.3}$$

т.е. давление является гармонической функцией вне тела вращения. Это обстоятельство используется ниже.

Введем систему криволинейных координат (r,θ,φ), связанную с декартовыми координатами (x_1,x_2,x_3) соотношениями

$$x_1=v(r,\theta)\cos\varphi,\ x_2=v(r,\theta)\sin\varphi,\ x_3=u(r,\theta). \qquad (6.4)$$

Обозначим G область, получаемую меридиональным сечением тела Ω, и выберем функции u и v следующим образом. Пусть $\psi=\psi(z)$, $\psi=u+iv$, $z=r\exp(i\theta)$ - конформное отображение круга $|z|\leq 1$ на внешность области G, причем центр круга переходит в бесконечно удаленную точку. Удобно считать (r,θ,φ) сферическими координатами, тогда соотношения (6.4) задают отображение шара единичного радиуса на внешность тела Ω.

Для эллипсоида вращения вокруг оси x_3

$$\frac{x_1^2}{b^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{a^2}-1=0 \qquad (6.5)$$

функции u и v известны в аналитическом виде (см. §4). Поверхность шара единичного радиуса переходит при отображении (6.4) в поверхность тела Ω. Тогда краевые условия, заданные на $\partial\Omega$, переносятся на поверхность шара, а краевые условия, заданные в бесконечности, переносятся в центр шара.

Обычно при использовании криволинейных координат уравнения для векторных величин записываются в проекциях на оси собственного базиса, координатные векторы которого направлены по касательным к координатным линиям. Этот базис зависит от координат точки пространства. В данном случае такой подход неудобен, так как отображение (6.4) теряет однозначность на оси x_3 (если $v=0$, то φ любое). Это вызывает появление особенностей в решении, которые вызваны не существом дела, а «плохой» системой координат. Отметим, что сферическая система координат обладает аналогичным недостатком.

Выход из этого положения следующий: оставим в качестве искомых функций проекции вектора скорости V^i($i=1,2,3$) на оси декартовой системы координат, а независимые переменные x_1, x_2, x_3 заменим подстановкой (6.4) на r, θ, φ. Тогда получаем

$$\alpha\cos\varphi\frac{\partial p}{\partial r}+\beta\cos\varphi\frac{\partial p}{\partial\theta}-\frac{1}{v}\sin\varphi\frac{\partial p}{\partial\varphi}=\frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta V^1+f_1), \qquad (6.6)$$

$$\alpha \sin\varphi \frac{\partial p}{\partial r} + \beta \sin\varphi \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{v}\cos\varphi \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta V^2 + f_2), \tag{6.7}$$

$$\frac{rv_\theta}{w^2}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{rv_r}{w^2}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta V^3 + f_3), \tag{6.8}$$

$$\begin{gathered}\alpha \cos\varphi \frac{\partial V^1}{\partial r} + \beta \cos\varphi \frac{\partial V^1}{\partial \theta} - \frac{1}{v}\sin\varphi \frac{\partial V^1}{\partial \varphi} + \ \alpha \sin\varphi \frac{\partial V^2}{\partial r} + \beta \sin\varphi \frac{\partial V^2}{\partial \theta} \\ + \frac{1}{v}\cos\varphi \frac{\partial V^2}{\partial \varphi} + + \frac{rv_\theta}{w^2}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{rv_r}{w^2}\frac{\partial p}{\partial \theta} = f_4,\end{gathered} \tag{6.9}$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha(r,\theta) = -ru_\theta / w^2, \quad (w^2 = u_\theta^2 + v_\theta^2);\\
&\beta(r,\theta) = (1 + ru_\theta v_r / w^2)/v_\theta;\\
&f_i = -rv_\infty^i(1 + rv_r / v)/w^2, \quad (i = 1,2,3);\\
&f_4 = v_\infty^1 \alpha \cos\varphi + v_\infty^2 \alpha \sin\varphi + v_\infty^3 r v_\theta / w^2;\\
&v^i = (1-r)v_\infty^i + V^i, \quad (i = 1,2,3).
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Замена искомых функций v^i на V^i ($i=1,2,3$) по формуле (6.10) произведена для того, чтобы сделать краевые условия для скорости однородными:

$$V^i|_{r=0} = V^i|_{r=1} = 0,\ i = 1,2,3. \tag{6.11}$$

Это требуется для более удобной дискретизации лапласиана. Для давления имеем краевое условие

$$\mathrm{p}|_{r=0} = 0. \tag{6.12}$$

Лапласиан от функций V^i ($i=1,2,3$) для переменных (r, θ, φ) принимает вид

$$\Delta V^i = \frac{r}{vw^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rv\frac{\partial V^i}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v}{r}\frac{\partial V^i}{\partial \theta}\right)\right] + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V^i}{\partial \varphi^2}. \tag{6.13}$$

Итак, требуется решить уравнения (6.6) - (6.9) в шаре единичного радиуса с краевыми условиями (6.11), (6.12).

2. Дискретный лапласиан и дискретные уравнения Стокса

Для дискретизации лапласиана (6.13) с однородными краевыми условиями (6.11) применим методику, описанную в §1.

Таким образом, получаем дискретный лапласиан в виде *h*-матрицы:

$$H = \frac{2}{L}\sum_{k=0}^{l}{}' \Lambda_k \otimes h_k, \quad L = 2l+1. \tag{6.14}$$

Здесь штрих означает, что слагаемое при $k=0$ берется с коэффициентом 1/2; знак $\otimes$ кронекерово произведение матриц; *h*-матрица размера $L \times L$ с элементами

$$h_{kij} = \cos k\,\frac{2\pi(i-j)}{L}, \quad i, j = 1, 2, ..., L;$$

Λ_k - матрица дискретного оператора, соответствующего дифференциальному оператору

$$\frac{r}{vw^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rv\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\right]-\frac{k^2}{v^2}\Phi \;,\; k = 0,1,...,l \tag{6.15}$$

с краевыми условиями

$$\Phi|_{r=0} = \Phi|_{r=1} = 0. \tag{6.16}$$

Для дискретизации дифференциального оператора (6.15), (6.16) выберем по θ сетку, состоящую из n узлов:

$$\theta_\nu = \frac{\pi}{2}(y_\nu + 1),\; y_\nu = \cos\varepsilon_\nu,\; \varepsilon_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2n},\; \nu = 1,2,...,n,$$

а также применим интерполяционную формулу

$$g(\theta) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{T_n(x)g_\nu}{n\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{\sin\varepsilon_\nu}(y-y_\nu)}, \quad y = \frac{1}{\pi}(2\theta-\pi), \tag{6.17}$$

$$g_\nu = g(\theta_\nu),\;\; \nu = 1,2,...,n; \quad T_n(x) = \cos(n\arccos(x)).$$

Первую и вторую производные по θ, входящие в соотношения (6.15), получим дифференцированием интерполяционной формулы (6.17).

По r выберем сетку, состоящую из m узлов:

$$r_\nu = \frac{1}{2}(z_\nu + 1),\ z_\nu = \cos\chi_\nu,\ \chi_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2m},\ \nu = 1,2,...,m,$$

а также применим интерполяционную формулу

$$q(r) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{T_m(r)(r-1)rq_k}{m\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{\sin\chi_\nu}(r_\nu-1)r_\nu(z-z_\nu)}, \quad q_\nu = q(r_\nu), \quad z = 2r-1. \qquad (6.18)$$

Первую и вторую производные по r, входящие в выражение (6.15), найдем дифференцированием интерполяционной формулы (6.18). Дифференцированием интерполяционных формул (6.17), (6.18) получим значения производных по θ и r, входящих в левую часть уравнения неразрывности (6.9).

Для дискретизации производных от давления по r используем интерполяционную формулу

$$q(r) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{T_m(r)rq_\nu}{m\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{\sin\chi_\nu}r_\nu(z-z_\nu)}. \qquad (6.19)$$

Величины, входящие в формулу (6.19), определены выше. Значения первой производной от давления по r, входящие в левую часть соотношений (6.6) - (6.8), получим дифференцированием интерполяционной формулы (6.19).

Для построения формулы численного дифференцирования по φ рассмотрим интерполяционную формулу

$$s(\varphi) = \frac{2}{L}\sum_{k=0}^{2l} D_l(\varphi-\varphi_k)s_k, \quad L = 2l+1, \quad s_k = s(\varphi_k),$$

$$\varphi_k = 2\pi k/L, \quad k = 0,1,...,2l; \qquad (6.20)$$

$$D_l(\varphi-\varphi_k) = 0,5 + \sum_{j=1}^{l}\cos j(\varphi-\varphi_k).$$

Значения производных по φ определим дифференцированием формулы (6.20).

Для получения дискретных уравнений Стокса нужно в уравнениях
(6.6) - (6.9) заменить производные дискретными производными, найденными дифференцированием соответствующих интерполяционных формул (6.17)-(6.20); лапласиан заменяется на матрицу *H.* Вместо функций V^1, V^2, V^3 и p в дискретные уравнения Стокса войдут значения этих функций в узлах сетки $(\theta_\nu, r_\mu, \varphi_k)$, $\nu = 1, 2, ..., n$, $\mu = 1, 2, ..., m$, $k = 0, 1, ..., 2l$. В результате имеем систему из $4mnL$ линейных уравнений. В явном виде система дискретных уравнений не выписывается из-за ее громоздкости. Например, при m=n=0, L=9 порядок системы уравнений 3600.

Для исследования числа обусловленности этой системы линейных уравнений вычислялись собственные значения оператора Лапласа с однородными краевыми условиями (6.11). Для этого достаточно вычислить собственные значения матриц Λ_k, $k=0,1,...,l$. Вычислительные эксперименты показали, что собственные значения оператора Лапласа имеют две точки сгущения: 0 и $-\infty$. Таким образом, нормы матриц H и H^{-1} имеют большие значения, которые быстро растут с увеличением числа узлов сетки. В этом состоит отличие внешних задач по сравнению с внутренними.

Матрица дискретных уравнений Стокса имеет блочный вид

$$A = \begin{Vmatrix} H & 0 & 0 & P_1 \\ 0 & H & 0 & P_2 \\ 0 & 0 & H & P_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{Vmatrix},$$

где H - дискретный лапласиан; P_i ($i=1,2,3$) - матрицы, получаемые при дискретизации членов с давлением; u_i ($i=1,2,3$) - матрицы, получаемые при дискретизации уравнения неразрывности. Все эти матрицы размера $R \times R$ (R=mnL - число узлов сетки). Обозначим

$$A_{n-1} = \begin{Vmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \end{Vmatrix}, \quad v_n = (u_1, u_2, u_3), \quad u_n = (P_1, P_2, P_3)',$$

и будем разыскивать матрицу, обратную матрице A, в виде

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & \alpha_n^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Здесь $P_{\mathrm{n-1}}$ - матрица размера $3R\times3R$; $q_n=(q_1,q_2,q_3)$, где q_i ($i=1,2,3$) - матрицы размера $R \times R$; $r_n=(r_1,r_2,r_3)'$, где r_i ($i=1,2,3$) - матрицы размера $R\times R$. Тогда получаем

$$q_n = \alpha_n^{-1} v_n A_{n-1}^{-1}, P_{n-1} = A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1} u_n \alpha_n^{-1} v_n A_{n-1}^{-1}, r_n = -A_{n-1}^{-1} u_n \alpha_n^{-1}$$

($\alpha_n = -u_1 H^{-1} p_1 - u_2 H^{-1} p_2 - u_3 H^{-1} p_3$ - матрица размера $R\times R$).

Таким образом, легко видеть, что из-за описанных выше свойств матриц H и H^{-1} норма матриц A и A^{-1} имеет большое значение, которое растет с увеличением числа узлов сетки, т.е. система дискретных уравнений Стокса плохо обусловлена. Это является следствием плохой обусловленности дифференциальных уравнений Стокса в неограниченной области (внешности тела вращения) и вызвано строением спектра оператора Лапласа в данной области.

Ниже будет рассмотрен приближенный метод решения плохо обусловленных дискретных уравнений Стокса, а сейчас обсудим свойства проведенной дискретизации. Классический подход к дискретизации уравнений математической физики состоит в замене производных конечными разностями. Этот подход обладает существенным недостатком: он не реагирует на гладкость решения рассматриваемой задачи математической физики, т.е. погрешность дискретизации не зависит от гладкости разыскиваемого решения. Другими словами, разностные алгоритмы приводят к численным методам с насыщением [1]. Поэтому выше для дискретизации уравнений Стокса применялась интерполяция решения многочленами (алгебраическими или тригонометрическими). Производные от искомых функций, входящие в уравнения Стокса, вычислялись дифференцированием интерполяционных формул. Данный метод дискретизации не имеет насыщения, поскольку интерполяционный многочлен приближает искомую функцию тем точнее, чем большим условиям гладкости она удовлетворяет [1]. Такое свойство алгоритма позволяет вести расчеты на достаточно редкой сетке, когда число обусловленности дискретных уравнений Стокса не очень велико.

3. Определение давления

Выше указывалось (см. 6.3), что давление - гармоническая функция. Рассмотрим более общую задачу на собственные значения для оператора Лапласа в проколотом в центре шаре единичного радиуса:

$$\Delta p = \lambda p, \quad p\big|_{r=0} = 0. \tag{6.21}$$

При этом нас интересуют собственные функции краевой задачи (6.21), соответствующие нулевому собственному значению $\lambda=0$. Замена соотношения (6.3) на более общую задачу (6.21) объясняется тем, что методы решения конечномерных задач на собственные значения хорошо разработаны [6], так же как и методы дискретизации лапласиана (см. выше).

В дискретном виде краевая задача (6.21) сводится к вычислению собственных значений h-матрицы, т.е. к решению алгебраической проблемы собственных значений:

$$H\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p} \tag{6.22}$$

($\boldsymbol{p}$ - вектор длины nmL, компоненты которого содержат значения искомого давления в узлах сетки). Матрица H строится по формуле (6.14). Однако для численного дифференцирования по r применяется интерполяционная формула (6.19), удовлетворяющая краевому условию (см. 6.21). Решая конечномерную задачу (6.22), определяем собственные значения, близкие к нулю. Соответствующий собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя c. Подставив найденное давление в дискретные уравнения Стокса, легко определим из уравнений движения компоненты скорости. Для этого требуется обратить h-матрицу по формуле

$$H^{-1} = \frac{2}{L}\sum_{k=0}^{l}{}' \Lambda^{-1}{}_k \otimes h_k, \quad L = 2l+1,$$

(эта формула проверяется непосредственным умножением) и вычислить произведение полученной матрицы на некоторые векторы. Теперь осталось подобрать константу c так, чтобы выполнялось уравнение неразрывности. Подставим в уравнение неразрывности найденные компоненты скорости и получим для определения константы c $R=mnL$ уравнений, т.е. переопределенную систему линейных уравнений, которая служит для отбраковки «лишних» решений и нахождения константы c. Для искомого решения константы c, определяемые из дискретного уравнения неразрывности, обязательно должны быть примерно равными, и за искомую константу c можно принять любую из них или среднее арифметическое всех полученных констант. Для посторонних решений константы c сильно отличаются, и такие решения должны быть отброшены.

Заметим, что вычисление собственных значений и собственных векторов h-матрицы сводится к вычислению собственных значений и собственных векторов матриц Λ_k, $k=0,1,...,l$ меньшего размера. Таким образом, удается определить все собственные значения и собственные векторы h-матрицы размера 900×900.

4. Результаты численных экспериментов

Численные расчеты проводились для шара с $a=b=1$ и эллипсоида вращения с $a=1$, $b=0,5$; $0,95$ (см. 6.5) на сетке, состоящей из 225 узлов ($m=n=5$, $L=9$), 900 узлов ($m=n=0$, $L=9$) и 2025 узлов ($m=n=15$, $L=9$). В качестве граничного условия по скорости в невозмущенном потоке (в бесконечности) рассматривалось течение с параметрами $v_\infty^1 = 1,\ v_\infty^2 = v_\infty^3 = 0$. Во всех расчетах принималось $Re=0,01$.

Вначале обсудим результаты расчетов для шара. На сетке из 225 узлов ($m=n=5$, $L=9$) у матрицы Λ_0 определены два близких к нулю собственных значения: $\lambda_{24}=-0,3\times10^{-5}$ и $\lambda_{23}=-0,7\times10^{-18}$, остальные собственные значения имели порядок от 10^{-2} до 10^{2}. У матрицы Λ_1 определено одно собственное значение, близкое к нулю: $\lambda_{24}=-0,5\times10^{-5}$. Остальные собственные значения порядка 10^{-2}-10^{3}. Матрицы Λ_2, Λ_3, Λ_4 имеют собственные значения порядка 10^{-2}-10^{3}, 10^{-}

^{1}-10^4, 10^{-1}-10^4 соответственно, и, следовательно, у них нет собственных значений, которые можно интерпретировать как близкие к нулю. Второй расчет проводился на сетке из 900 узлов ($m=n=10$, $L=9$). Матрица Λ_0 имеет два действительных собственных значения, близких к нулю: λ_{99} $=0{,}2\times10^{-11}$ и $\lambda_{100}=$ $-0{,}4\times10^{-18}$. Кроме того, имелась также комплексная пара собственных значений, близкая к нулю, с действительными частями собственных значений $\lambda_{97}=\lambda_{98}=$ $-0{,}5\times10^{-7}$. Остальные собственные значения имели порядок 10^{-3}-10^3. Матрица Λ_1 имеет близкое к нулю действительное собственное значение $\lambda_{100}=-0{,}2\times10^{-12}$. Кроме того, есть близкая к нулю комплексная пара с действительными частями собственных значений $\lambda_{98}=\lambda_{99}=-0{,}2\times10^{-8}$. Остальные собственные значения порядка 10^{-4}-10^4. Собственные значения матриц Λ_2, Λ_3, Λ_4 имели порядок 10^{-6}-10^5, 10^{-4}-10^5, 10^{-3}-10^5 соответственно. Итак, проведенные расчеты показывают, что для шара единичного радиуса у h-матрицы четыре семейства собственных векторов, дающих близкие к нулю собственные значения (заметим, что собственное значение матрицы Λ_1) двукратное.

Вычисление собственных векторов h-матрицы для шара проводилось на сетке из 900 узлов ($m=n=10$, $L=9$). Искомые четыре семейства собственных функций задачи (6.21) для шара единичного радиуса легко угадываются. Собственные векторы h-матрицы, отвечающие близким к нулю действительным собственным значениям матрицы Λ_0, дают два семейства собственных функций, не зависящих от φ.

$$p_1=cr \tag{6.23}$$

соответствует собственному значению λ_{100} матрицы Λ_0, а

$$p_2=c_1 r\ln((1-\cos\theta)/(1+\cos\theta))+c_2 r \tag{6.24}$$

- собственному значению λ_{99} матрицы Λ_0. Точнее говоря, одно из инвариантных подпространств оператора Лапласа (6.21), отвечающее нулевому собственному значению, имеет вид (6.24), т.е. двумерно. В расчетах получается два близких к нулю собственных значения матрицы Λ_0 размера 100×100 (λ_{100} и λ_{99}). Как уже говорилось выше, собственному значению λ_{100} соответствует собственная функция вида (6.23) (это подтверждается численными расчетами), а собственному значению λ_{99} - некоторая собственная функция из семейства (6.24).

Собственные векторы h-матрицы, отвечающие действительному близкому к нулю собственному значению λ_{100} матрицы Λ_1, дают два семейства собственных функций, зависящих от φ.

$$p_3 = c_3 r^2 \sin\theta \cos\varphi, \tag{6.25}$$

$$p_4 = c_4 r^2 \sin\theta \sin\varphi. \tag{6.26}$$

Семейство собственных функций (6.25) соответствует решению, приведенному в [23] для шара. Семейства (6.23), (6.24), (6.26) дают посторонние решения, не удовлетворяющие уравнению неразрывности (см. п. 3).

Далее проводилось вычисление константы c_3 из уравнения неразрывности (см. п. 3). За искомую константу принималось среднее арифметическое близких друг к другу констант, определяемых из дискретного уравнения неразрывности. Получено значение c_3=144,09 (собственный вектор матрицы Λ_1, отвечающий собственному значению λ_{100}, нормировался по максимуму модуля). Найденное приближенное решение сравнивалось с точным [23]. Вычисления показывают, что максимальная относительная погрешность составляет 0,26%.

Второй расчет проводился для эллипсоида с полуосями $a=1$, $b=0,5$. На сетке из 225 узлов ($m=n=5$, $L=9$) получено, что у матрицы Λ_0 есть одно собственное значение, близкое к нулю: $\lambda_{25} = -0,3\times10^{-5}$. Остальные собственные значения были порядка 10^{-2}-10^{2}. Собственные значения матриц Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4 имели порядок 10^{-2}-10^{3}, 10^{-2}-10^{4}, 10^{-1}-10^{4}, 10^{-1}-10^{5}. Таким образом, число узлов сетки явно недостаточно. На сетке из 900 узлов ($m=n=10$, $L=9$) матрица Λ_0 имеет два близких к нулю собственных значения: $\lambda_{99}=0,4\times10^{-6}$, $\lambda_{100}=0,2\times10^{-9}$, остальные собственные значения порядка 10^{-3}-10^{4}. Матрица Λ_1 имеет одно собственное значение, близкое к нулю: $\lambda_{94}=0,3\times10^{-5}$, остальные собственные значения порядка 10^{-3}-10^{4}. Матрицы Λ_2, Λ_3, Λ_4 имеют собственные значения порядка 10^{-3}-10^{5}, 10^{-3}-10^{5}, 10^{-2}-10^{6}.

Далее проводились расчеты на сетке из 2025 узлов (m=n=15, L=9). Вычислялись собственные значения матриц Λ_0 и Λ_1. Матрица Λ_0 имеет два близких к нулю собственных значения: λ_{224}= $-0{,}1\times10^{-9}$, $\lambda_{225}=-0{,}2\times10^{-13}$. Остальные собственные значения порядка 10^{-5}-10^{4}. Матрица Λ_1 имеет одно собственное значение, близкое к нулю: $\lambda_{221}=-0{,}1\times10^{-8}$. Остальные собственные значения порядка 10^{-4}-10^{5}. Таким образом, h-матрица для эллипсоида также имеет четыре семейства собственных векторов, соответствующих близким к нулю собственным значениям матриц Λ_0 и Λ_1. Нас интересует четная по φ собственная функция, отвечающая близкому к нулю собственному значению матрицы Λ_1 (возмущение соответствующей собственной функции для шара). Приближенное вычисление этой собственной функции проводилось на сетке из 900 узлов (m=n=10, L=9).

Результаты расчета показывают, что константы c_i (i=1,2,...,900) достаточно сильно отличаются друг от друга со средним значением 318,31. Очевидно, что 900 узлов недостаточно для нахождения этой собственной функции (напомним, что собственное значение матрицы Λ_1, отвечающее искомому собственному вектору, имеет порядок 10^{-5}, т.е. недостаточно близко к нулю). Для проверки этой гипотезы были проведены расчеты для эллипсоида с полуосями a=1, b=0,95 на сетке из 900 узлов. Вычислялись собственные значения матриц Λ_0 и Λ_1. Оказалось, что матрица Λ_0 имеет два близких к нулю собственных значения: $\lambda_{99}=0{,}2\times10^{-11}$ и λ_{100} $=0{,}1\times10^{-16}$. Кроме того, имелась близкая к нулю комплексная пара собственных значений с действительными частями собственных значений $\lambda_{97}=\lambda_{98}$ $=-0{,}6\times10^{-7}$. Остальные собственные значения были порядка 10^{-3}-10^{3}. Матрица Λ_1 имеет одно действительное близкое к нулю собственное значение λ_{100} $=0{,}2\times10^{-12}$ и комплексную пару с действительными частями собственных значений $\lambda_{98}=\lambda_{99}$ $=-0{,}2\times10^{-8}$. Вычисление собственного вектора проводилось для собственного значения λ_{100} матрицы Λ_1. Разброс c_i (i=1,2,...,900) составил от 147,85 до 160,57 со средним значением c=152,36. Максимальная относительная погрешность отличия полученного решения от решения в шаре 6%. Таким образом, для применения этого приближенного решения дискретных уравнений Стокса расчетная сетка должна быть такова, чтобы близкие к нулю собственные значения h-матрицы (6.22) были порядка 10^{-12}. Расчеты проводились на ПЭВМ типа АТ-386 с тактовой частотой 25 МГц и объемом оперативной памяти 640 килобайт. Как видно из описанных выше расчетов, для численного исследования доступны задачи об обтекании тел, близких к шару при малых числах Рейнольдса, потоком вязкой несжимаемой жидкости. Для изучения обтекания тел сложной формы необходимо использовать более мощную ЭВМ.

§7. Об уравнении Пуассона в цилиндре

Рассматривается трёхмерное уравнение Пуассона в цилиндре с неоднородными краевыми условиями и правой частью обеспечивающими гладкость решения. Для приближенного нахождения этого решения построен численный алгоритм без насыщения. Указан эффективный способ решения соответствующей дискретной задачи.

1. Введение

В §1 описана дискретизация уравнения Пуассона в цилиндре с однородными краевыми условиями. В этой методике требование однородности краевых условий существенно, поскольку идея дискретизации состоит в построении конечномерной задачи со спектральными свойствами, аналогичными дифференциальной задаче. Вместе с тем практические задачи часто приводят к уравнению Пуассона с неоднородными краевыми условиями. В качестве примера можно привести задачу о деформации горного массива над нефтяным пластом, вызванную падением давления в пласте после откачки нефти. Если считать горный массив упругим телом, то объемное расширение удовлетворяет уравнению Пуассона. В качестве области, в которой это уравнение рассматривается, можно выбрать цилиндр с достаточно большим радиусом основания, снося на его поверхность граничные условия из бесконечности.

Ниже построен численный алгоритм без насыщения [1] для уравнения Пуассона в цилиндре с неоднородными краевыми условиями. Особенности численных алгоритмов без насыщения является то, что они в отличие от разностных методов приводят к дискретной задаче с полностью заполненной матрицей. Эффективное решение которой и представляет основную трудность. Ниже подробно описан прием, позволяющий свести обращение матрицы большого размера к обращению нескольких матриц меньшего размера. Можно сказать, что, вместо решения трехмерной задачи, решается несколько двухмерных задач. В случае кругового цилиндра задача еще упрощается и сводится к решению нескольких одномерных задач.

Описание методики проведём для случая кругового цилиндра. По ходу изложения будет сказано, как обобщить эти результаты на случай цилиндра с произвольным основанием.

2. Постановка задачи и дискретизация

Рассматривается уравнение Пуассона с краевым условием Дирихле

$$\Delta u+f=0, \tag{7.1}$$

$$u|_{\partial G}=g. \tag{7.2}$$

Решение ищется в круговом цилиндре единичного радиуса, т.е. в области $G=\{r\le 1; a\le z\le b\}$, где (r, ϑ, z) - цилиндрические координаты. Для примера рассмотрено краевое условие Дирихле. Проведённые ниже рассуждения без труда обобщаются на другие типы краевых условий.

Будем обозначать: $g_a=g_a(r,\vartheta)$ - граничное условие на донышке цилиндра ($z=a$); $g_b=g_b(r,\vartheta)$ - граничное условие на крышке цилиндра ($z=b$); $g_c=g_c(\vartheta, z)$ - граничное условие на боковой поверхности цилиндра.

$$\Delta u=\Delta_{r,\vartheta}u+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{7.3}$$

где $\Delta_{r,\vartheta}$ - плоский оператор Лапласа. Из (7.3) следует

$$u(\zeta,z)=-\int\limits_{|\zeta|\le 1} K(\zeta,\xi)\left(f(\xi,z)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)d\xi+\int\limits_0^{2\pi} K_0(\zeta,\vartheta)g_c(\vartheta,z)d\vartheta. \qquad (7.4)$$

Здесь

$$K(\zeta,\xi)=-\frac{1}{2\pi}\, ln|(1-\zeta\bar{\xi})/(\zeta-\xi)|,\ \ \zeta=\rho\exp(i\varphi),\ \ \xi=r\exp(i\varphi)$$

- функция Грина оператора Лапласа с краевым условием Дирихле (однородным);

$$K_0(\zeta,\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\vartheta-\varphi)},\ \ \zeta=\rho\exp(i\varphi)$$

- ядро Пуассона.

Выберем в круге (сечении цилиндра плоскостью $z=const$) сетку из m окружностей и $N=2n+1$ точек на каждой окружности. На границе круга также выберем $N=2n+1$ точек. Причём радиус ν-ой окружности $r_\nu=cos(2\nu-1)/\pi/4m)$, $\nu=1,2,...,m$. По окружностям узлы располагаются через равные углы $\vartheta_l=2\pi l/N$, $l=0,1,...,2n$.

Применим для функции

$$F(\xi,z)=f(\xi,z)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

интерполяционную формулу К. И. Бабенко для функции двух переменных в круге [1, стр. 212], а для функции $g_c(\vartheta,z)$ применим интерполяцию тригонометрическим многочленом (здесь z - фиксировано), тогда из (7.4) получаем приближённое значение $\tilde{u}(\zeta,z)$ для функции $u(\zeta,z)$

$$\tilde{u}(\zeta,z)=\sum_i H_i(\zeta)F(\xi_i,z)+\sum_{j=0}^{2n} H_j^0(\zeta)g_c(\vartheta_j,z), \qquad (7.5)$$

где

$$H_i(\zeta)=\int\limits_{|\zeta|\le 1} K(\zeta,\xi)l_i(\xi)d\xi,$$

$$H_j^0 = \frac{2}{N}(0.5 + \sum_{l=1}^{n} \rho^l \cos l(\varphi - \vartheta_j)), \zeta = \rho \exp(i\varphi).$$

Здесь $l_i(\xi)$, $i=1,2,...,R$, $R=mN$ - фундаментальные функции интерполяционной формулы К. И. Бабенко в круге. Конкретный вид этих функций приведен в [1, стр. 212]. Для дальнейших рассуждений он неважен.

Проведём теперь дискретизацию $\partial^2 v / \partial z$ по z. Выберем для $v(\xi, z)$ интерполяционную формулу по k узлам

$$\tilde{v}(\xi, z) = \frac{(-1)^{k+1}(x-1)}{2} T_k(x) g_a(\xi)$$

$$+ \frac{2(1-x^2)}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sin^2 \psi_j} \sum_{q=0}^{k-1}{}' \cos(q\psi_j) T_q(x) \tilde{v}(\xi, z_j)$$

$$+ \frac{(x+1)}{2} T_k(x) g_b(\xi). \tag{7.6}$$

Здесь $\tilde{v}(\zeta, z)$ - приближённое значение функции $v(\zeta, z)$, $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ - многочлен Чебышева степени k; $z=((b-a)x+a+b)/2$; $\psi_j = (2j-1)\pi / 2k$, $x_j = \cos \psi_j$; $z_j = ((b-a)x_j + a + b)/2$, $j=1,2,...,k$; штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $q=0$ берётся с коэффициентом ½ .

Обозначим

$$L_a(x) = \frac{(-1)^{k+1}(x-1)}{2} T_k(x),$$

$$L_j(x) = \frac{2(1-x^2)}{k} \frac{1}{\sin^2 \psi_j} \sum_{q=0}^{k-1}{}' \cos(q\psi_j) T_q(x),$$

$$L_b(x) = \frac{(x+1)}{2} T_k(x).$$

Дифференцируя (7.6) два раза по z, получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} = \frac{4}{(b-a)^2}(L_a''(x)g_a(\xi) + \sum_{j=1}^{k} L_j''(x)\tilde{v}(\xi, z_j) + L_b''(x)g_b(\xi)). \qquad (7.7)$$

Обозначим

$$\Phi(\zeta, z) = \sum_p H_p(\zeta)[f(\zeta_p, z) + \frac{4}{(b-a)^2}\{L_a''(x)g_a(\xi_p) + L_b''(x)g_b(\xi_p)]\} + \sum_{q=0}^{2n} H_q^0(\zeta)g_c(\vartheta_q, z), \qquad (7.8)$$

$$D_{ij} = \frac{4}{(b-a)^2} L_j''(x_i); \; i,j = 1,2,...,\mathrm{k}$$

матрицу размера $k \times k$. Тогда из (7.5), (7.7) получаем

$$u(\zeta_q, z_i) = \sum_p H_{qp} \sum_{j=1}^{k} D_{ij} \tilde{u}(\zeta_p, z_j) + \Phi(\zeta_q, z_j). \qquad (7.9)$$

Здесь $H_{qp} = H_p(\zeta_q)$, где $p,q=1,2,...,R$ пробегают узлы интерполяции в круге, т.е. H - матрица дискретной задачи Дирихле для плоского оператора Лапласа ; $z_i, i=1,2,...,k$ пробегает узлы интерполяции по z. Эффективный способ вычисления элементов матрицы H_{qp} указан в главе 3.

3. Исследование структуры конечномерной задачи

Перенумеруем узлы в цилиндре сначала по z, а затем по ζ, т.е. быстрее всего меняется индекс i, потом q. Тогда имеем из соотношений (7.9) в матричной форме

$$u = H \otimes Du + \Phi, \qquad (7.10)$$

где u - вектор столбец, содержащий приближённые значения искомого решения в узлах сетки; Φ - вектор столбец, содержащий значения соответствующей функции (см. 7.8) в узлах сетки; знаком $\otimes$ обозначено кронекеровское произведение матриц H и D. Размерность этих векторов $N_g = Rk$ равна числу внутренних узлов сетки. Решив конечномерную задачу (7.10) получим приближённое значение решения в узлах сетки. В остальных точках цилиндра решение может быть восстановлено по используемым в п.2 интерполяционным формулам.

Таким образом, для решения системы линейных уравнений (7.10) требуется обратить матрицу $I - H \otimes D$ большого размера $N_g x N_g$.
Например, для сетки *m=5, N=11, k=10* эта матрица 550x550, и она полностью заполнена. Современные персональные ЭВМ позволяют работать с такими матрицами, но время обращения достаточно большое. На ПЭВМ типа Pentium с тактовой частотой 90Мгц время обращения матрицы 550x550 по стандартной программе занимает примерно 7 минут. Кроме этого, требуется много памяти для хранения полностью заполненной матрицы. В этом параграфе описывается как преодолеть эти трудности.

Пусть

$$D = \sum_{q=1}^{k} \lambda_q b_q, b_q^2 = b_q, \ \ b_q b_p = 0, \ \ q \neq p \qquad (7.11)$$

есть спектральное разложение матрицы *D*. Такое разложение всегда можно построить, если *D* - матрица простой структуры, т.е. имеет полную систему собственных векторов. Поскольку по построению *D* - это матрица дискретного оператора, соответствующего дифференциальному оператору d^2/dz^2 с однородными краевыми условиями при *z=a* и *z=b*, то это условие выполняется. Далее в (7.11) $b_q, q = 1,2,...,k$ - собственные проекторы на одномерное инвариантное подпространство, λ_q - соответствующее собственное значение. В практических расчётах размер матрицы *D* невелик (*k*=6 ÷ 20) и спектральное разложение можно построить, решив полную проблему собственных значений для матриц *D* и *D'*.

Заметим, что $I = I_R \otimes I_k ; I_k = \sum_{q=1}^{k} b_k$, тогда

$$I - H \otimes D = I_R \otimes (\sum_{q=1}^{k} b_q) - H \otimes (\sum_{q=1}^{k} \lambda_q b_q) = \sum_{q=1}^{k} (I_R - \lambda_q H) \otimes b_q .$$

В таком случае имеем следующую формулу для обратной к матрице $I - H \otimes D$:

$$(I - H \otimes D)^{-1} = \sum_{q=1}^{k} (I_R - \lambda_q H)^{-1} \otimes b_q \,, \tag{7.12}$$

которая проверяется непосредственным умножением.
Таким образом, вместо обращения матрицы размера $N_g x N_g$ требуется обратить k матриц размера $R\times R$, т.е. размера, равного числу узлов сетки в круге. Отметим, что $I_R - \lambda_q H$ - h-матрица и её обращение сводится к обращению (n+1) матриц размера $m\times m$. Кроме того, для хранения h-матрицы требуется хранить всего $m^2(n+1)$ элементов. Теперь для того, чтобы решить систему линейных уравнений (7.10), нужно умножить правую часть соотношения (7.12) на вектор. Если $N = 3^{\mu}$, $\mu = 1,2,...$, то для умножения h-матрица на вектор можно, для уменьшения количества операций, использовать быстрое преобразование Фурье. Следовательно, для кругового цилиндра формула (7.12) даёт исчерпывающее решение поставленной задачи.
Обсудим теперь изменения, которые следует внести в методику, чтобы рассмотреть цилиндр с произвольным основанием в виде области G, с гладкой границей ∂G. Пусть $\varphi(z)$, $|z| \leq 1$ конформное отображение круга на область G. Обозначим $Z = diag(|\varphi'(\zeta_1)|^2,...,|\varphi'(\zeta_R)|^2)$. Тогда аналогично получаем, что в формулы этого параграфа вместо H нужно подставить матрицу HZ. Изменится также правая часть Φ соотношения (7.11). Вместо $f(\zeta_p, z)$ в (7.8) войдёт $|\varphi'(\zeta_p)|^2\; f(\zeta_p, z)$. Эти изменения приведут к тому, что в формуле (7.12) придётся численно обращать k матриц размера $R\times R$. Полученная после обращения матрица будет матрицей общего вида и, для её умножения на вектор не удастся использовать быстрое преобразование Фурье.

4. Обсуждение методики и численный пример

Для того, чтобы оценить погрешность предложенной методики, нужно выписать применяемые интерполяционные формулы с остатком и оценить погрешность дискретизации. Это делается стандартными приёмами и поэтому не рассматривается. Исследование устойчивости проводится ниже при рассмотрении конкретных расчётов. Отметим качественную характеристику методики. Выше применялась интерполяция решения многочленами: алгебраическими и тригонометрическими. Известно [1,12], что интерполяционный многочлен приближает гладкую функцию тем точнее, чем большим условиям гладкости она удовлетворяет, т.е. мы получили метод без насыщения. Он автоматически настраивается на гладкость решения. Гладкость решения определяется входными данными: граничными условиями и правой частью.

В качестве численного примера рассматривалось решение уравнения Пуассона в круговом цилиндре единичного радиуса при $a = 0,\ b = \pi$.

Пусть $u(r,\vartheta,z) = r^3 z^6 \cos 5\vartheta$, тогда это решение удовлетворяет соотношениям (7.1), (7.2), если

$$f(r,\vartheta,z) = (-9rz^6 + 25rz^6 - 30r^3z^4)\cos 5\vartheta;$$

$$g_a(r,\vartheta) = 0;$$

$$g_b(r,\vartheta) = \pi^6 r^3 \cos 5\vartheta;$$

$$g_c(\vartheta,z) = z^6 \cos 5\vartheta.$$

Расчёты проводились на сетках: *m=3, N=11, k=6*; *m=3, N=11, k=8*; *m=5, N=11, k=10*; *m=3, N=11, k=7.*

Во всех случаях отклонение точного решения от приближённого было величиной порядка 10^{-9}. Получить такую точность, используя разностную схему, практически невозможно.

Второй расчёт проводился для этого цилиндра с правой частью *f=10* и теми же граничными условиями. Приближённое решение определялось на сетке *k=6, m=13, N=15.* Затем по интерполяционной формуле К. И. Бабенко вычислялись значения на оси *z* в точках: *0,h,2h,...,*π, $h = \pi/10$. Были получены следующие значения 0.8269×10^{-2}, 1.243, 1.901, 2.211, 2.332, 2.361, 2.332, 2.211, 1.901, 1.243, 0.8269×10^{-2}. Дальнейшие расчёты проводились на сетках: $8\times7\times11$; $8\times7\times13$; $10\times11\times11$; $9\times11\times11$; $20\times7\times7$; $15\times9\times9$; $13\times9\times9$; $5\times15\times15$; $7\times13\times13$. Результаты интерполировались на равномерную сетку по оси z (см. выше). Отклонение решений во внутренних узлах сетки во всех случаях составляло величину порядка 10^{-2}. Из этого можно сделать вывод, что решение не обладает высокой гладкостью. Одновременно вычислялась Чебышевская норма матрицы $(I - H \otimes D)^{-1}$. Во всех случаях эта величина была порядка 10^{3}. Таким образом, при численном счёте существенного накопления погрешности не происходит.

Последний рассматриваемый пример - определение объёмного расширения упругого цилиндра, находящегося под действием собственного веса:

$$\Delta e = 0,$$

$$e_a = 0,$$

$$e_b = (1-2\nu)\rho g b / E,$$

$$e_c = (1-2\nu)\rho g z / E.$$

Решение этой задачи известно (поскольку известно решение задачи о деформации цилиндра под действием собственного веса):

$$e = \rho g z(1-2\nu) / E.$$

Здесь $\nu, \rho, g, E -$ коэффициент Пуассона, плотность, ускорение свободного падения и модуль Юнга. Этот пример интересен тем, что показывает наличие гладких решений у уравнения Пуассона в цилиндре в практически важных задачах. Расчёты проводились при реальных константах горного массива на сетках: $k=6$, $m=3$, $N=11$; $k=3$, $m=3$, $N=11$; $k=2$, $m=3$, $N=3$; $k=1$, $m=3$, $N=3$. Абсолютная погрешность отклонения точного решения от приближённого была величиной порядка 10^{-15}-10^{-16}. Таким образом подтверждается высокая точность методики для гладких решений.

§8. О прогнозировании динамики ядерного реактора

Описывается методика для численного решения уравнений трехмерной кинетики ядерного реактора с обратной связью по температуре топлива. Математически задача сводится к системе трех дифференциальных уравнений: для плотности быстрых нейтронов, плотности ядер предшественников запаздывающих нейтронов и температуры топлива. Причем коэффициент в уравнении для плотности быстрых нейтронов зависит от температуры топлива и, таким образом, рассматриваемая система дифференциальных уравнений нелинейная.

Уравнение для плотности быстрых нейтронов есть следствие закона сохранения количества нейтронов в произвольном объеме с учетом процессов рождения и захвата нейтронов. Уравнение для запаздывающих нейтронов есть следствие аналогичного закона сохранения, но без учета диффузии медленных нейтронов. Наконец в уравнении теплопроводности также не учитывается диффузия тепла, а мощность источников тепла принимается пропорциональной относительной плотности быстрых нейтронов. Начальными условиями служат стационарные решения этих уравнений, а граничное условие третьего рода описывает утечку нейтронов из активной зоны ядерного реактора. Меняя параметр управления u, входящий в коэффициент уравнения для быстрых нейтронов, можно моделировать переход реактора в нестационарный режим.

Предлагаемый численный алгоритм основан на оригинальной дискретизации Лапласиана в цилиндрической области. Суть этого подхода состоит в использовании структуры матрицы конечномерной задачи, то есть строится матрица, которая обладает свойствами аналогичными свойствам трехмерного оператора Лапласа. При этом задача сводится к построению дискретизации двумерного и одномерного операторов Лапласа. Если плоская область, лежащая в основании цилиндра, гладкая, то для таких задач имеются эффективные алгоритмы [l] . Счет по времени осуществлялся по методике, описанной в [24].

Конкретные расчеты проводились для кругового цилиндра на сетке из 60 узлов (4 сечения по высоте цилиндра и по 15 точек в каждом плоском сечении) и доказали эффективность построенной дискретизации.

1. Математическая постановка задачи

Пусть $N = N(r, t)$ - плотность нейтронов; $C = C(r, t)$ - плотность ядер предшественников запаздывающих нейтронов. Для их определения имеем систему двух дифференциальных уравнений с начальными и граничными условиями [25]:

$$l_\infty \frac{\partial N}{\partial t} = M^2 \Delta N + (1-\beta) r_\infty N + \lambda l_\infty C - N, \ \ r \in \Omega, \tag{8.1}$$

$$l_\infty \frac{\partial C}{\partial t} = \beta r_\infty N - \lambda l_\infty C, \tag{8.2}$$

$$C\Big|_{t=0} = C_0(r), \ \ N\Big|_{t=0} = N_0(r), \tag{8.3}$$

$$\left.\frac{\partial N}{\partial n} + DN\right|_{\partial\Omega} = 0, \ \ D > 0 \tag{8.4}$$

в некоторой цилиндрической области *Ω*. Здесь коэффициент реактивности $r_\infty = r_\infty(r, T, u)$ то есть зависит от пространственной координаты *r*, температуры топлива *T* и параметра управления *u*. Для температуры топлива имеем уравнение

$$\tau \frac{dT(r,t)}{dt} = -T(r,t) + T_в(r) + (T_0(r) - T_в(r)) \frac{N(r,t)}{N_0(r)}. \tag{8.5}$$

Здесь τ - характерное время остывания среды

$$T\,|_{t=0} = T_0(r). \tag{8.6}$$

Причем величины $T_0(r)$ и $T_в(r)$ связаны некоторой физической зависимостью. Смысл остальных параметров в уравнениях (8.1) - (8.4) следующий: l_∞ - среднее время жизни быстрого нейтрона до его поглощения; *M* -длина диффузии нейтрона (M^2 - площадь миграции); β - доля запаздывающие нейтронов; λ - постоянная распада (среднее количество запаздывающие нейтронов, выпускаемых на 1 секунду осколками деления); *1/D* - длина экстраполяции.

В уравнениях (8.1), (8.2) принимается, что плотность нейтронов *N=N(r,t)* и плотность ядер предшественников запаздывающих нейтронов *C=C(r,t)* зависит от координаты *r* (точки внутри цилиндра *Ω*) и времени *t*. Пусть T_x - характерное время, *L* - характерный линейный размер. Обозначим

$$a = \frac{M^2 T_x}{L^2 l_\infty},\ b = \frac{T_x}{l_\infty},\ c = \beta \frac{T_x}{l_\infty},\ d = \frac{\lambda}{T_x}.$$

За безразмерными зависимыми и независимыми переменными и постоянной τ оставим прежние обозначения. Тогда вместо уравнений (8.1) и (8.2) получим

$$\frac{\partial N}{\partial t} = a\Delta N + (b(r_\infty - 1) - cr_\infty)N + dC,\ r \in \Omega, \tag{8.7}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = cr_\infty N - dC. \tag{8.8}$$

Внешний вид остальных уравнений не меняется.

2. Дискретизация лапласиана

Опишем структуру дискретного оператора Лапласа в цилиндрической области $\Omega=\{S\times[0,l]\}$, где S - плоская область (основание цилиндра), l - высота цилиндра.

В цилиндрических координатах (ρ,φ,z) трехмерный оператор Лапласа представляется в виде

$$\Delta = \Delta_{\rho,\varphi} + \frac{d^2}{dz^2}, \tag{8.9}$$

где $\Delta_{\rho,\varphi}$ - плоский оператор Лапласа. Собственные значения оператора Δ описываются формулой

$$\lambda_{pq} = \mu_p + \nu_q,\quad p,q=1,2,\ldots,$$

μ_p и ν_q обственные значения оператора $\Delta_{\rho,\varphi}$ и оператора d^2/dz^2 соответственно, а собственная форма является произведением соответствующие собственных форм.

Пусть h - матрица размера $R\times R$, и B - матрица размера $L\times L$ являются дискретными аналогами плоского оператора Лапласа $\Delta_{\rho,\varphi}$ и одномерного оператора d^2/dz^2 соответственно.

Эти матрицы получены в результате некоторой дискретизации из соотношений следующего вида:

$$hv=\mu v+R_h(v), \tag{8.10}$$

$$Bw=\nu w+R_b(w), \tag{8.11}$$

где v и w векторы размерности R и L соответственно, а R_h и R_b -

погрешности дискретизации. Отметим, что в соотношениях (8.10) и (8.11) μ и ν - точные собственные значения соответствующих операторов, а v и w-точные значения в узлах сетки соответствующих собственных форм. Рассмотрим матрицу

$$H = I_L \otimes h + B \otimes I_R, \tag{8.12}$$

где I_L и I_R - единичные матрицы, а символ $\otimes$ обозначает кронекерово произведение матриц. Проверим, что собственный вектор матрицы H представляется в виде $y=w\otimes v$ Действительно,

$$Hy=(I_L \otimes h + B \otimes I_R)(w\otimes v)=(\mu+\nu)y+RH, \quad RH=w\otimes Rh+Rb\otimes v. \tag{8.13}$$

Заметим, что соотношению (8.13) удовлетворяют точные значения собственной функции оператора Δ в узлах сетки, а $(\mu+\nu)$ - соответствующее точное собственное значение. Таким образом, матрица H является дискретным аналогом пространственного оператора Δ (дискретным оператором Лапласа).

3. Дискретизация по пространственным переменным и оценка погрешности

Параметры N, C и T обозначают векторы, компоненты которых суть значения соответствующих функций в узлах сетки.

В результате дискретизации Лапласиана краевая задача (8.1) - (8.6) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} N \\ C \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & -a_{12} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N \\ C \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R(N) \\ 0 \\ \dfrac{T_b}{\tau} l \end{pmatrix}, \tag{8.14}$$

где $l=(11...1)'$ - вектор размерности Q (Q - число узлов сетки в цилиндре); $a_{11},a_{12},a_{21},a_{31}$ и a_{33} - матрицы размерности $Q\times Q$. Конкретный вид этих матриц пока не важен. Заметим, что $a_{11}=a_{11}(T)$, $a_{21}=a_{21}(T)$ то есть матрицы зависят от решения. Остальные матрицы от решения не зависят. Причем a_{11} - разреженная матрица, а остальные матрицы - диагональные. Погрешность дискретизации $R=R(N)$ зависит от решения N. Получить для погрешности дискретизации R конкретное выражение, можно разложив решение в ряд по собственным функциям оператора Лапласа и оценив, исходя из соотношения (8.13), погрешность определения собственных функций. Практически решение N "почти" первая собственная форма оператора Лапласа и поэтому приближается хорошо на достаточно редкой сетке.

Отбросив погрешность дискретизации *R(N)* получим приближенную конечную задачу. Пусть $\widehat{N}, \widehat{C}\, u\, \widehat{T}$ - ее решение. Обозначим

$$\varepsilon_N = N - \widehat{N},\ \ \varepsilon_c = C - \widehat{C},\ \ \varepsilon_T = T - \widehat{T}.$$

Для этих величин можно написать нелинейную систему дифференциальных уравнений, аналогичную (8.14). Откуда получим

$$\left.\frac{d\varepsilon_N}{dt}\right|_{t=0} = R(N_0),\ \ \left.\frac{d\varepsilon_c}{dt}\right|_{t=0} = 0,\ \ \left.\frac{d\varepsilon_T}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, в первом приближении $T = \widehat{T},\ C = \widehat{C}$, а для величины ε_N (при постоянном управлении u) имеем соотношение

$$\frac{d\varepsilon_N}{dt} = (aH - bI_Q + (b-c)r_\infty(T)I_Q)\varepsilon_N + R,$$

$$\left.\varepsilon_N\right|_{t=0} = 0.$$

Обозначим

$$A(t) = aH - bI_Q + (b-c)r_\infty(T)I_Q,$$

$$F(t) = -\int_0^t A(t)dt,$$

тогда

$$\varepsilon_N(t) = e^{-F(t)}\int_0^t e^{F(\tau)}Rd\tau.$$

Результаты расчетов. Конкретные расчеты производились для кругового цилиндра с реальными ядерно-физическими константами на сетке из 60 узлов. Причем по высоте выбиралось четыре сечения, а в каждом сечении выбиралось 15 точек (3 окружности по 5 точек). Дискретизация плоского оператора Лапласа производилась по методике, описанной в главе 3. Дискретизация по z производилась по методике, описанной в главе 2. Счет по времени проводился неявным методом. Проведенные расчеты показали высокую эффективность описанной дискретизации.

Программа для описанной задачи реализована так, что использует в качестве начальных данных небольшие массивы (матрицы плоского и одномерного дискретных операторов Лапласа). Следовательно, если расчеты проводятся на постоянной сетке, то громоздкие вычисления по построению дискретного оператора Лапласа можно затабулировать.

Например, для сетки из $4\times3\times5=60$ узлов требуется два массива по 9 чисел и один массив из 16 чисел, то есть всего требуется хранить 34 числа. Написанную для этой задачи программу можно рассматривать как расшифровывающий алгоритм. Если имеется достаточно эффективная программа для счета по времени [24,26], то расчеты можно производить на *PC*. Время счета сравнимо со временем реального процесса. Таким образом, можно утверждать, что решена задача табулирования решения трехмерных уравнений кинетики ядерного реактора.

Приложение 1.
Стандартные программы на фортране и формулы для программирования к главе 2

1. Уравнение Бесселя

Подпрограмма BESSEL

Подпрограмма *BESSEL* сводит вычисление собственных чисел и собственных функций краевой задачи

$$(xy')'+\lambda xy=0,\ |u(0)|<\infty,\ u(1)=0$$

к алгебраической задаче

$$(E-\lambda B)y=0,$$

где E – единичная матрица, B - матрица, вычисляемая подпрограммой *BESSEL*. Формулы для элементов матрицы B приведены ниже.

Формулы для программирования

$$\text{цикл}\quad i=1,n;\ \ l=1,n$$

$$\theta_i=\frac{2i-1}{2n}\pi,\ \ A_{li}=\cos(l\theta_i),\ \ y_i=\sin\theta_i,\ \ p_i=\ln|\cos\frac{\theta_i}{2}|;$$

$$\text{цикл}\quad i=1,n$$

$$J_{i1}=1-A_{1i}+2p_i;$$

$$\text{цикл}\quad i=1,n;\ \ l=2,n$$

$$J_{il}=(-1)^l\left\{2\sum_{m=1}^{k}\left[\frac{A_{2m-1,i}-1}{2m-1}-\frac{A_{2m,i}-1}{2m}\right]+\frac{A_{li}-1}{l}-2p_i\right\},\ \ k=\left[\frac{l}{2}\right];$$

$$\text{цикл}\quad k=1,n$$

$$C_{k1}=-\frac{(A_{1k}-1)^2}{4};$$

$$\text{цикл}\quad k=1,n;\ \ l=2,n-1$$

$$C_{kl}=\frac{J_{k,l+1}}{2(l+1)}-\frac{J_{k,l-1}}{2(l-1)}+2p_k\frac{(-1)^l}{l^2-1};$$

$цикл \quad k = 1, n; \quad i = 1, n$

$$b_{ki} = \frac{(-1)^{i-1}}{y_i}(1 - A_{1k}) + \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_{il} C_{kl}, \quad где \quad \alpha_{il} = \frac{2(-1)^{i-1}}{y_i} A_{li};$$

$цикл \quad k = 1, n; \quad i = 1, n$

$$a_{ki} = \frac{(-1)^{i-1}}{4n}(A_{1i} + 1) b_{ki} y_i,$$

a – *выходная матрица.*

Описание параметров

SUBROUTINE BESSEL (N,B,A,X,Y):
N – размер матрицы;
B – вычисляемая матрица;
A,X,Y – рабочие массивы размеров *N*×*N, N, N* соответственно.

Пример использования

```
      PROGRAM TBESS
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(400),B(400),X(20),Y(20),IV1(20),FV1(20)
      WRITE (*,*) 'N=?'
      READ (*,*) N
      CALL BESSEL (N,B,A,X,Y)
      CALL RG (N,N,B,X,Y,0,A,IV1,FV1,IERR)
      WRITE (*,*) 'IERR =',IERR
      WRITE (*,10) (X(I),I=1,N)
      WRITE (*,10) (Y(I),I=1,N)
   10 FORMAT (4E18.11)
      S=0.D0
      DO 1 I=1,N
      IF (X(I).GT.S) S=X(I)
    1 CONTINUE
      SE=2.404825557695772768621 5D0**2
      S=1.D0/S
      S1=SQRT(S)
      EPS=ABS(S-SE)
      WRITE (*,*) N,S,S1
      WRITE (*,12) EPS
   12 FORMAT ('EPS=',E9.2)
      PAUSE
      STOP
      END
```

Подпрограмма на Фортране

```
      SUBROUTINE BESSEL (N,B,A,X,Y)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N,N),B(N,N),X(N),Y(N)
      PI=3.141592653589D0
      N1=N-1
      DO 20 K=1,N
      Y(K)=(2.D0*K-1.D0)*PI/2.D0/N
      X(K)=COS(Y(K))
      C3=LOG(COS(ABS(Y(K)/2.D0)))
      A(K,1)=1.D0-X(K)+2.D0*C3
      DO 22 L=2,N
      A(K,L)=(COS(L*Y(K))-1.D0)/L-2.D0*C3
      MK=L/2
      DO 21 M=1,MK
   21 A(K,L)=A(K,L)+2.D0*((COS((2.D0*M-1.D0)*Y(K))-1.D0)/
     1(2.D0*M-1.D0)-(COS(2.D0*M*Y(K))-1.D0)/2.D0/M)
   22 A(K,L)=(-1)**L*A(K,L)
      DO 20 L=2,N1
   20 A(K,L-1)=A(K,L+1)/2.D0/(L+1.D0)-A(K,L-1)/2.D0/(L-1.D0)+2.D0*C3*
     1(-1)**L/(L*L-1.D0)
      DO 1 K=1,N
      DO 1 I=1,N
      B(K,I)=0.25D0*(X(I)+1.D0)*(1.D0-X(K))/N
     1-0.125D0*X(I)*(X(I)+1.D0)*(X(K)-1.D0)**2/N
      DO 1 L=2,N1
    1 B(K,I)=B(K,I)+(0.5D0*(X(I)+1.D0)/N)*COS(L*Y(I))*A(K,L-1)
      RETURN
      END
```

2. Задача Штурма-Лиувилля

Подпрограмма EIGVAL

Подпрограмма *EIGVAL* сводит вычисление собственных чисел и собственных функций краевой задачи

$$y'' - q(x)y = \lambda\rho(x)y,$$

$$\alpha y' + \beta y\Big|_{x=b_1} = 0,$$

$$\alpha_1 y' + \beta_1 y\Big|_{x=b_2} = 0, \alpha^2 + \alpha_1^2 \neq 0.$$

к алгебраической задаче на собственные значения

$(A\text{-}\lambda B)y=0,$

где матрицы A и B вычисляются подпрограммой *EIGVAL*. Формулы для элементов матриц A и B приведены ниже.

Формулы для программирования

Формулы написаны для отрезка *[-1,1]*. Общий случай сводится к нему заменой независимой переменной. В приведённой ниже подпрограмме эта замена проделана

$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1, \quad \bar{\beta}_1 = \beta_1, \quad \bar{\alpha} = \alpha / \Delta, \quad \bar{\beta} = \beta / \Delta, \quad \Delta = 2\beta\beta_1 + \beta\alpha_1 - \beta_1\alpha.$

цикл $k = 1, n$

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad x_k = \cos\theta_k, \quad q_k = Q(x_k), \quad R_k = R(x_k);$$

цикл $k = 1, n; \quad i = 1, n$

$$J_{ki} = C_{ki}(E_{ik} - E_{ki}) + A_i E_{ki} - \bar{\beta}[\bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}_1(x_k - 1)]B_i + D_{ki},$$

где

$$C_{ki} = \frac{2\sin\theta_i}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1-\cos l\theta_k}{l}\sin l\theta_i + \frac{(-1)^{i-1}}{n^2}\sin\theta_i,$$

$$A_i = \frac{2\sin\theta_i}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1-(-1)^l}{l}\sin l\theta_i + \frac{(-1)^{i-1}(1-(-1)^n)}{n^2}\sin\theta_i,$$

$$B_i = \frac{(-1)^i}{n(n^2-1)}\sin\theta_i[1+(-1)^n],$$

$$D_{ki} = \frac{(-1)^i}{n(n^2-1)}\sin\theta_i(1+(-1)^k n\sin\theta_k),$$

$$E_{ki} = [\bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}_1(x_k - 1)][\bar{\alpha} - \bar{\beta}(1 + x_i)].$$

После вычисления J_{ki} *находим*

$b_{ki} = J_{ki}\rho_i, \quad a_{ki} = \delta_{ki} - J_{ki}q_i,$ *где* δ_{ki} *символ Кронекера.*

Описание параметров

SUBROUTINE EIGVAL (A,B,N,AL,AL1,BE,BE1,B1,B2,T,X):

A, B – выходные матрицы;

N - размер матриц *A* и *B*;

AL – параметр граничного условия *α*;

AL1 - параметр граничного условия α_1 ;
BE – параметр граничного условия β;
BE1 - параметр граничного условия β_1 ;
B1 – конец отрезка b_1 ;
B2 - конец отрезка b_2 ;
T, *X* – рабочие массивы длины *N*.
Требуемые функции-подпрограммы *Q*, *R*.

Пример использования

```
      PROGRAM STURM
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(400),B(400),X(20),Y(20)
      DIMENSION ALFR(20),ALFI(20),Z(400),BETA(20)
      WRITE (*,*) 'N=?'
      READ (*,*) N
      B1=1.D0
      B2=2.D0
      AL=1.D0
      AL1=1.D0
      BE=-1.D0
      BE1=-4.D0
      CALL EIGVAL (A,B,N,AL,AL1,BE,BE1,B1,B2,Y,X)
      call rgg(N,N,A,B,Alfr,Alfi,Beta,1,Z,ierr)
      write (*,*) 'ierr=',ierr
      DO 305 i=1,N
      X(i)=Alfr(i)/Beta(i)
      Y(i)=Alfi(i)/Beta(i)
      write (*,*) X(i),Y(i)
      pause
  305 continue
      STOP
      END
      REAL*8 FUNCTION Q(X)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      Q=X**4
      RETURN
      END
      REAL*8 FUNCTION R(X)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      R=-X
      RETURN
      END
```

Подпрограмма на Фортране

```
      SUBROUTINE EIGVAL (A,B,N,AL,AL1,BE,BE1,B1,B2,T,X)
```

```
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N,N),B(N,N),T(N),X(N)
      PI=3.14159265359D0
      C=0.5D0*(B2-B1)
      DEL=2.D0*BE*BE1+(BE*AL1-BE1*AL)/C
      A1=AL/C/DEL
      A2=AL1/C
      B0=BE/DEL
      DO 1 I=1,N
      T(I)=(2.D0*I-1.D0)*PI/2.D0/N
      X(I)=COS(T(I))
      DO 1 L=1,N
    1 A(L,I)=SIN(L*T(I))
      NN=N-1
      DO 2 I=1,N
      C0=(-1)**(I-1)*A(1,I)/N
      C1=C0*(1-(-1)**N)/N
      DO 3 L=1,NN,2
    3 C1=C1+4.D0*A(1,I)*A(L,I)/L/N
      C2=-C0*(1+(-1)**N)/(N*N-1)
      DO 2 K=1,N
      B(K,I)=C0/N
      DO 4 L=1,NN
    4 B(K,I)=B(K,I)+2.D0*A(1,I)*(1.D0-COS(L*T(K)))*A(L,I)/L/N
      C3=(A2-BE1*(X(K)-1.D0))*(A1-B0*(1.D0+X(I)))
      C4=(A2-BE1*(X(I)-1.D0))*(A1-B0*(1.D0+X(K)))
    2 B(K,I)=B(K,I)*(C4-C3)+C1*C3-B0*(A2-BE1*(X(K)-1.D0))*C2
     1-C0*(1+(-1)**K*N*A(1,K))/(N*N-1)
      DO 5 I=1,N
      C0=X(I)*C+(B2+B1)*0.5D0
      T(I)=C*C*R(C0)
      X(I)=C*C*Q(C0)
      DO 6 K=1,N
      A(K,I)=-X(I)*B(K,I)
    6 B(K,I)=T(I)*B(K,I)
    5 A(I,I)=A(I,I)+1.D0
      RETURN
      END
```

Замечание. Для решения алгебраической проблемы собственных значений использовались подпрограммы пакета *EISPACK*: *RG* и *RGG*. Программы этого пакета доступны в интернет по адресу: htpp://www.netlib.org/eispack.

Приложение 2.
Вычисление собственных значений оператора Лапласа

Интерполяционная формула для функции 2-х переменных в круге

Пусть $T_m(r)$ полином Чебышева четной степени m, $r_\nu=\cos\psi_\nu$, $\psi_\nu=(2\nu-1)\pi/2m$ - нули полинома, $\nu=1,2,\ldots,m$. Таким образом, выбираем в круге сетку из $m/2$ окружностей по $N_\nu=2n_\nu+1$ - точек на каждой окружности. Тогда применяется интерполяционная формула:

$$u(r,\theta) \sim \sum_{\nu=1}^{m/2}\sum_{l=0}^{2n_\nu}\frac{2u_{\nu l}}{2n_\nu+1}\frac{T_m(r)}{T_m'(r_\nu)}\left[\frac{D_{n_\nu}(\theta-\theta_{\nu l})}{r-r_\nu}-\frac{D_{n_\nu}(\theta+\pi-\theta_{\nu l})}{r+r_\nu}\right],$$

$$\theta_{\nu l}=2\pi l/(2n_\nu+1),\quad l=0,1,\ldots,2n_\nu;$$

$$D_{n_\nu}(\theta-\theta_{\nu l})=1/2+\sum_{k=1}^{n_\nu}\cos k(\theta-\theta_{\nu l}); \qquad (1)$$

$$D_{n_\nu}(\theta+\pi-\theta_{\nu l})=1/2+\sum_{k=1}^{n_\nu}(-1)^k\cos k(\theta-\theta_{\nu l});$$

$$T_m'(r_\nu)=\frac{(-1)^{\nu-1}}{\sin\psi_\nu}m;\quad u_{\nu l}=u(r_\nu,\theta_{\nu l}).$$

Поэтому если в круге в точках $z_{\nu l}=r_\nu e^{i\theta_{\nu l}}$ задана функция $u=u(r,\theta)$, то по формуле (1) её можно приближённо вычислить в других точках.

Практически это вычисление осуществляется при помощи подпрограмм *URT* и *EIGEN*.

Подпрограмма URT

Подпрограмма применяется при двумерной интерполяции. Если в круге радиуса 1 заданы m окружностей, а на каждой из них $NL(I)$ точек через равные углы, причем радиусы окружностей - нули полинома Чебышева степени $2m$, то подпрограмма *URT* позволяет восстановить значения функции на радиусе θ в точках пересечения этого радиуса с окружностями.

Описание параметров

TETA – значение угла на окружности θ;
M - число окружностей *m*;
NL - целый массив длины *M*, *i*-ый элемент которого содержит число точек (нечетное) на *i*-ой окружности.

U - одномерный массив длины $N = \sum_{\nu=1}^{m} (2n_\nu + 1),$ содержащий значения восстановления функции в узлах интерполяции; узлы нумеруются, начиная с 1-ой окружности против часовой стрелки;
Z – выходной массив длины *M*, содержащий результаты переинтерполяции.

```
      SUBROUTINE URT (TETA,M,NL,U,Z)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION U(21),NL(M),Z(M)
      K=0
      PI=3.141592653590D0
      DO 2 NU=1,M
      Z(NU)=0.
      NL1=NL(NU)
      DO 1 L1=1,NL1
      L=L1-1
      P=TETA-2.*PI*L/NL1
      DN=0.5
      N1=(NL1-1)/2
      DO 3 I=1,N1
    3 DN=DN+COS(I*P)
      DN=2.*DN/NL1
      IF (P.EQ.0.) DN=1.
      L2=L1+K
    1 Z(NU)=Z(NU)+U(L2)*DN
    2 K=K+NL1
      RETURN
      END
```

Подпрограмма EIGEN

Функция *EIGEN* восстанавливает значение функции в точке *X* на отрезке *[A,B]*, если заданы ее значения в узлах: $(2X_i–B-A)/(B-A)$, где X_i - нули полинома Чебышева степени *N*.

Описание параметров

X - значение аргумента, при котором вычисляется функция;

Y - массив длины *N*, который содержит на входе значение функции в узлах;
Z - рабочий массив длины *N*;
N - число узлов интерполяции;
A, B - координаты концов отрезка.

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION EIGEN (X,Y,Z,N,A,B)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION Y(N),Z(N)
      X1=(2.*X-B-A)/(B-A)
      PI =3.141592653589D0
      EIGEN=0.D0
      DO 1 I=1,N
    1 EIGEN=EIGEN +Y(I)
      CALL T(X1,Z,N)
      NN=N-1
      DO 2 K=1,NN
      BE=0.D0
      DO 3 J=1,N
      P=(2.*J-1.)*PI/2./N
    3 BE=BE+2.*Y(J)*COS(K*P)
    2 EIGEN=EIGEN+Z(K+1)*BE
      EIGEN=EIGEN/N
      RETURN
      END
```

Подпрограмма T

Вычисляет значения полиномов Чебышева степени от 0 до (*K*-*1*) в точке *X*.

Описание параметров

X - значение аргумента;
Z - выходной массив длины *K*, содержащий значения полиномов в точке *X*;
K - размерность массива *Z*.

```
      SUBROUTINE T(X,Z,K)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(K)
      Y=X
      Z1=1.0D+0
      Z2=Y
      Z(1)=Z1
      Z(2)=Z2
      DO 1 I=3,K
```

```
      Z3=2.0D0*Y*Z2-Z1
      IF (ABS(Z3).LE.1.D-19)Z3=0.D0
      Z(I)=Z3
      Z1=Z2
    1 Z2=Z3
      RETURN
      END
```

Пример использования

Пусть *U* - массив, содержащий значения функции в узлах интерполяции (узлы занумерованы начиная с 1-ой окружности против часовой стрелки), которая вычисляется в точке (r,θ). Тогда нужно проделать следующую последовательность вычислений.

```
      DIMENSION U( ),Y( ),Z( )
      …
      M1=2*M
      CALL URT(TETA,M,NL,U,Y)
      CALL URT(TETA+3.141592653589D0,M,NL,U,Z)
      DO 4 I=1,M
      I1=M1-I+1
    4 Y(I1)=Z(I)
      FUN=EIGEN(R,Y,Z,M1,-1.D0,1.D0)
```

В ячейке *FUN* содержится результат вычислений.

Вычисление собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа

Будут рассматриваться три краевые задачи: (2), (3); (2), (4) и (2), (5).

$$\Delta u(z)+(Q+\lambda P)u=0,\ z\in G, \tag{2}$$

$$u|_{\partial G} = 0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0, \tag{4}$$

$$Au+ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0. \tag{5}$$

где Q, P, A - некоторые функции заданные в области G, n - внешняя нормаль к ∂G. Мы предполагаем, что Q, P, A и $\partial G\in C^{\infty}$.

Пусть $z=\varphi(\zeta)$, $|\zeta|\leq 1$ - конформное отображение единичного круга на область G. Тогда в плоскости ζ формально получаем те же соотношения (2) - (5), где, однако, вместо $u(z)$ и $(Q+\lambda P)u$ следует писать $u(\zeta)=u(z(\zeta))$ и $|\varphi'(\zeta)|^2(q+\lambda p)u$, $q(\zeta)=Q(z(\zeta))$, $p(\zeta)=P(z(\zeta))$, а вместо A- $\alpha(\theta)=A(z(e^{i\theta}))\,|\varphi'(e^{i\theta})|$. Граничное условие теперь выполняется при $r=1$. Вместо производной по нормали в соотношениях (4), (5) будет входить производная по радиусу.

Вычисление собственных значений и собственных функций краевых задач (2) - (5) производит программа *LAP123*.

Программа LAP123

Программа *LAP123* производит вычисление собственных чисел и собственных функций трёх краевых задач для оператора Лапласа для области получающейся из круга конформным отображением:

$$\varphi(\varsigma)=\varsigma(1+\varepsilon\varsigma^n),\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{n+1},$$

$$|\varphi'(\varsigma)|^2=1+\varepsilon^2(n+1)^2r^{2n}+2\varepsilon r^n(n+1)\cos n\theta,\ \ \varsigma=re^{i\theta}.$$

Описание

1. Программа осуществляет счёт при $\alpha\equiv DM$ (см. начало программы).
2. Параметры области *NP*, *EPS1* считываются в режиме диалога.
3. Параметры сетки *M*, *N* считываются в режиме диалога.
4. Данные для программы должны быть размещены в файле *DATA*.
5. Номер краевой задачи запрашивается в режиме диалога.
6. Результаты выводятся на экран и записываются в файл *NOUT*.
7. Результаты счёта собственной функции выводятся на действительной оси в 11 точках (см. программу).

Примечание. Программа использует подпрограммы пакета *EISPACK: ELMHES, ELTRAN, HQR2*, доступные в интернет по адресу: htpp://www.netlib.org/eispack.

```
      PROGRAM LAP123
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(378225),AB(378225),X(615),Y(615),IANA(615),
     *HN(25215),NL(15),B(49,49),C(50625)
```

```
      DIMENSION B1(15),BC(30,24),E(29,15),H(49),
     *U(615),Z(615),Y2(11)
      DIMENSION E2(49,49)
      DIMENSION C0(225),C1(225)
      EQUIVALENCE (AB(1),HN(1))
      COMMON//EPS1,NP
      COMMON /DM/ DM
      EXTERNAL QMOD2,PMOD2
      DM=1.D0
      WRITE(*,*) ' NP = ? , EPS1 = ? '
      READ(*,*) NP,EPS1
      WRITE(*,*) 'M = ? '
      READ(*,*) M1
      WRITE(*,*) 'N = ? '
      READ (*,*) N
C
C   КАНАЛ ВВОДА ДАННЫХ
      NREAD = 3
      OPEN(UNIT=3,FILE='DATA')
C   КАНАЛ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ВЫДАЧ
      NOUT = 4
      OPEN(UNIT=4,FILE='NOUT')
C
      IM = 0
  300 IM = IM + 1
      IF (IM.GT.10) STOP
      READ(NREAD,*) M
C
      NT=M*N
      NM=(N-1)/2
      M2=M*M
C
      READ (NREAD,*) (C0(I),I=1,M2)
      READ (NREAD,*) (C1(I),I=1,M2)
      IF (M1.NE.M) GO TO 300
      DO 10 I = 1,M
   10 NL(I) = N
      WRITE (NOUT,*) ' M = ', M
      WRITE(NOUT,*) 'LAMDA0'
      WRITE(NOUT,*) (C0(I),I=1,M2)
      WRITE(NOUT,*) 'LAMDA1'
      WRITE(NOUT,*) (C1(I),I=1,M2)
C
      CALL HMATR1 (A,M,N,C0,C1,C)
      CALL RASPAK(A,M,NM)
      WRITE(*,*) 'Введи номер краевой задачи?'
      READ(*,*) IP
      IF(IP.EQ.1.OR.IP.EQ.2) GO TO 100
      IF(IP.EQ.3) CALL LAP3 (A,N,M,NL,NM,HN,B1,X,C,B,BC,E,H)
```

```
  100 CALL TRANSP (A,NT)
      IF (IP.EQ.2) GO TO 200
C
      CALL MOD2(Y,M,N)
      I1=0
      DO 5 I=1,NT
      DO 5 J=1,NT
      I1=I1+1
    5 A(I1)=A(I1)*Y(I)
      IF (IP.EQ.1.OR.IP.EQ.3) GO TO 400
  200 CONTINUE
C
      CALL BIJ(A ,NT,N,M,NL,NM,HN,B1,X,C,BC,E,H,E2)
      I1=0
      DO 55 I=1,NT
      DO 55 J=1,NT
      I1=I1+1
   55 AB(I1)=A(I1)
      CALL LDUDN (A,AB,NT,Y,C,NL,M,QMOD2,PMOD2)
      CALL DMINV (A,NT,DD1,X,Y)
      CALL DIVAB (NT,A,AB,Y)
  400 CONTINUE
      NT2=NT*NT
      CALL ELMHES (NT,NT,1,NT,A,IANA)
      WRITE(*,*) 'ELMHES'
      CALL ELTRAN (NT,NT,1,NT,A,IANA,AB)
      WRITE(*,*) 'ELTRAN'
      CALL HQR2 (NT,NT,1,NT,A,X,Y,AB,IERR)
      WRITE(*,*) 'HQR2'
      WRITE (NOUT,*) ' IERR = ', IERR
   13 FORMAT (13I5)
   12 FORMAT (4E18.11)
      WRITE(*,12) (X(I),I=1,NT)
C
      RMAX=0.D0
      IJ=1
  110 DO 60 I=1,NT
      IF (X(I).GT.RMAX) THEN
      RMAX=X(I)
      IANA(IJ)=I
      Y(IJ)=X(I)
      ENDIF
   60 CONTINUE
      X(IANA(IJ))=0.D0
      RMAX=0.D0
      IJ=IJ+1
      IF(IJ.LE.NT) GO TO 110
C
      WRITE(NOUT,12) (X(I),I=1,NT)
```

```
      WRITE(NOUT,12) (Y(I),I=1,NT)
      IF (IP.EQ.1.OR.IP.EQ.3) THEN
      DO 210 I=1,NT
  210 Y(I)=1.D0/SQRT(ABS(Y(I)))
      ELSE
      DO 1 I=NT-1,1,-1
    1 Y(I+1)=SQRT(1.D0+1.D0/Y(I))
      Y(1)=0.D0
      ENDIF
      WRITE (NOUT,*) 'Собственные значения'
      WRITE(NOUT,12) (Y(I),I=1,NT)
C
      M11=2*M
      IF(IP.EQ.2) KN=2
      IF(IP.NE.2) KN=1
      DO 21 K=KN,10
      WRITE (*,*) 'Введи номер собственного значения ?'
      READ (*,*) IJ
      WRITE (*,*) IJ, Y(IJ)
      I2=NT*(IANA(IJ)-1)
      DO 22 I=1,NT
      I3=I2+I
   22 U(I)=AB(I3)
      CALL URT (0.D0,M,NL,U,X)
      CALL URT (3.14159265359D0,M,NL,U,Z)
      DO 4 I=1,M
      I1=M11-I+1
    4 X(I1)=Z(I)
      DO 20 LL=1,11
      IF (IP.EQ.1.OR.IP.EQ.3) THEN
      X2=0.1*(LL-1)/Y(IJ)
      ELSE
      X2=0.1*(LL-1)
      ENDIF
   20 Y2(LL)=EIGEN (X2,X,Z,M11,-1.D0,+1.D0)
      CALL NORM1(Y2,11)
      WRITE (NOUT,12) Y2
      PRINT 12,Y2
   21 PAUSE
  120 FORMAT(A)
      END
      FUNCTION ALFA (X)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON//EPS1,NP
      COMMON /DM/ DM
      ALFA=DM*SQRT(1.+2.*EPS1*(NP+1.)*COS(NP*X)+EPS1*EPS1*(NP+1)**2)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE MOD2 (Z,M,N)
```

```
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(1)
      COMMON // EPS,L
      PI=3.141592653589D0
      I0=0
      DO 5 NU=1,M
      R=COS((2.*NU-1.)*PI/4./M)
      DO 5 K=1,N
      T=2.*PI*(K-1)/N
      I0=I0+1
    5 Z(I0)=1.+2.*EPS*(L+1)*R**L*COS(L*T)+EPS**2*(L+1)**2*(R*R)**L
      RETURN
      END
      SUBROUTINE NORM1(Y,N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION Y(1)
      P=0.D0
      DO 1 I=1,N
      IF (ABS(Y(I)).GT.P) IP=I
      IF (ABS(Y(I)).GT.P) P=ABS(Y(I))
    1 CONTINUE
      P=Y(IP)
      DO 2 I=1,N
    2 Y(I)=Y(I)/P
      RETURN
      END
      SUBROUTINE  PMOD2 ( Z,M,N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(1)
      COMMON // EPS,NP
      I=0
      DO 1 NU=1,M
      DO 1 L=1,N
      I=I+1
    1 Z(I)=1.D0
      CALL MOD2(Z,M,N)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE QMOD2 (Z,M,N )
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(1)
      COMMON // EPS,NP
      I=0
      DO 1 NU=1,M
      DO 1 L=1,N
      I=I+1
    1 Z(I)=1.D0
      CALL MOD2(Z,M,N)
      RETURN
```

```
      END
```

Подпрограмма MOD2

Подпрограмма *MOD2* вычисляет $|\varphi'(\varsigma)|^2$.

Описание параметров

Z – массив, который содержит результат вычисления $|\varphi'(\varsigma)|^2$ в узлах интерполяции внутри круга; длина этого массива равна числу точек в круге;
M – число окружностей в круге;
NL – одномерный массив длины *M*, *i*-ый элемент которого содержит число точек (нечётное) на *i*-ой окружности;
EPS –параметр области ε;
N – параметр области *n*.

```
      SUBROUTINE MOD2 (Z,M,NL,EPS,N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  Z(1),NL(M)
      PI=3.14159265359D0
      I=0
      DO 1 NU=1,M
      R= COS((2.*NU-1.)*PI/4./M)
      R1=R**N*(N+1)
      R2= R1*R1
      N1=NL(NU)
      DO 1 L=1,N1
      I=I+1
      T=2.*PI*(L-1.)/N1
    1 Z(I)=1.+2.*R1*EPS*COS(N*T)+EPS*EPS*R2
      RETURN
      END
```

Примечание. В используемой программе *LAP123* применяется версия программы, когда число точек по окружностям постоянно и равно *N*. Параметры области обозначены *EPS1*, *NP* и передаются в подпрограмму *MOD2* через непомеченный *COMMON* блок.

1. Задача Дирихле

Задача Дирихле сводится к алгебраической проблеме собственных значений

$$u=HZf+R. \quad (6)$$

Здесь u – вектор-столбец, компоненты которого содержат значения искомого решения (собственной функции) в узлах сетки; H – матрица размера $M\times M$, получаемая из соотношения (см. гл. 3, 3.8), когда ζ пробегает узлы сетки; Z- диагональная матрица с числами $z_{\nu l}$, $\nu=1,2,\ldots,m;\ l=0,1,\ldots,2n$ на диагонали (см. гл.3); f – либо заданный вектор-столбец, компоненты которого содержат значения соответствующей функции в узлах сетки, либо $f=(Q+\lambda P)u$, где Q и P – диагональные матрицы, содержащие на диагонали значения соответствующих функций в узлах сетки; в последнем случае имеем задачу на собственные значения; R- вектор погрешности дискретизации, содержащий значения функции $R_M(\varsigma;F)$ (см. гл.3, 3.7) в узлах сетки. Отбрасывая в (6) погрешность дискретизации R, получаем приближённую конечномерную задачу.

Программа HMATR1

Вычисление матрицы H производит программа *HMATR1*.

Описание параметров

H – выходной массив длины $m^2(n+1)$;
M – m (число окружностей сетки);
$N=2n+1$ – число точек на каждой окружности;
LAMDA0, LAMDA1 – входные массивы размерности $m\times m$, таблицы которых приведены ниже;
C – рабочий массив $m\times m$.

```
      SUBROUTINE HMATR1(H,M,N,LAMDA0,LAMDA1,C)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION H(1),C(M,M),R(15),LAMDA0(M,M),LAMDA1(M,M),
     1LX(15),MX(15)
      REAL*8 LAMDA0,LAMDA1
      INTEGER P,LX,MX
      PI=3.141592653589D0
      DO 4 I=1,M
    4 R(I)=1.D0/COS((2.D0*I-1.D0)*PI/4.D0/M)**2
      NM=(N+1)/2
      DO 20 NU=1,M
      DO 20 MU=1,M
   20 C(NU,MU)=LAMDA0(NU,MU)
```

```
      CALL DMINV(C,M,D,LX,MX)
      I0=0
      DO 1 NU=1,M
      DO 1 MU=1,M
      DO 1 L=1,NM
      I0=I0+1
    1 H(I0)=C(NU,MU)/N
      NM1=NM-1
      DO 2 K=1,NM1
      KK=K-2*(K/2)
      IF(KK.EQ.0) GO TO 10
      GO TO 11
   10 DO 5 NU=1,M
      DO 5 MU=1,M
      C(NU,MU)=LAMDA0(NU,MU)
      IF(NU.EQ.MU) C(NU,MU)=C(NU,MU)+4.*(K/2)**2*R(NU)
    5 CONTINUE
      CALL DMINV(C,M,D,LX,MX)
      GO TO 12
   11 DO 6 NU=1,M
      DO 6 MU=1,M
      C(NU,MU)=LAMDA1(NU,MU)
      IF(NU.EQ.MU) C(NU,MU)=C(NU,MU)+4.*(K/2)*(K/2+1)*R(NU)
    6 CONTINUE
      CALL DMINV(C,M,D,LX,MX)
   12 I0=0
      DO 3 NU=1,M
      DO 3 MU=1,M
      I2=0
      DO 3 P=1,NM
      I0=I0+1
      H(I0)=H(I0)+(2.D0/N)*C(NU,MU)*COS(K*2.D0*PI*I2/N)
    3 I2=I2+1
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Подпрограмма DMINV

DMINV – вариант с двойной точностью подпрограммы *MINV*, текст которой опубликован в [27].

Начальные данные

Начальные данные программы должны размещаться в файле *DATA*. Для *m=3,5* эти данные приведены ниже. В практических расчётах использовались значения *m=3,5,7,9,11,13,15*. Таблицы этих массивов распространяются автором на дискете. Запрос присылайте на адрес института проблем механики РАН - 119526, Москва, проспект Вернадского д. 101, к. 1; или электронный - algasinsd@mail.ru.

Файл DATA

```
  3
4.11941825936E2  -4.51418752798E1   3.51897397936E1  -6.11418752812E1
2.93333333334E1  -2.41914580529E1   7.47692687292E0  -8.19145805268E0
1.47248407322E1
4.57798232344E2  -5.82837505577E1   2.66666666663E1  -8.01401570151E1
3.73333333328E1  -2.14734903555E1   2.66666666637E1  -1.56170838946E1
3.28684342717E1
  5
3.05917979362E3  -2.45397191475E2   5.85756222727E1  -4.16357979478E1
8.61492076074E1  -4.79437239948E2   1.88502911226E2  -6.41781919923E1
2.12813887565E1  -3.38835422739E1   8.44641660921E1  -7.40667358125E1
7.20000000005E1  -4.04199446368E1   3.00225143569E1  -2.59406123323E1
1.40969411312E1  -3.05314008163E1   4.44135831757E1  -5.18469560093E1
6.47246249766E0  -3.08000609888E0   4.13397053668E0  -1.47786539187E1
3.59037120027E1
3.18279525483E3  -2.85286659253E2   7.99576262484E1  -4.87482886718E1
4.01993788820E1  -5.23871972443E2   2.04318047413E2  -7.21308166817E1
2.41993788780E1  -1.72591219339E1   1.16118802431E2  -8.45911088089E1
8.00000000012E1  -4.31013227380E1   1.83914115290E1  -5.55228900368E1
2.41993788778E1  -3.67524867912E1   5.30442717230E1  -4.22769412998E1
4.01993788889E1  -1.51532576528E1   1.26640438806E1  -2.30228910489E1
7.98424270845E1
```

Результат вычисления *h*-матрицы *H* выдаётся в упакованном виде, т.е. выдаются только различные элементы (см. гл.3).

Подпрограмма RASPAK

Подпрограмма *RASPAK* производит распаковку упакованной записи и выдаёт массив *H* по строкам.

Описание параметров

A - выходной массив размера $L{\times}L$, $L=mN$, $N=2n+1$;
$M - m$;
$NM - n$;

```
      SUBROUTINE RASPAK (A,M,NM)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
      DIMENSION A(1)
      N=2*NM+1
      N1=NM+1
      N2=M*N1
      N3=M*N
      N4=N-1
      N5=N3*N
      DO 1 MU=1,M
      MU1=M-MU+1
      DO 1 NU=1,M
      NU1=M-NU+1
      I1=N2*(MU1-1)+N1*(NU1-1)
      I2=(MU1-1)*N5+(NU1-1)*N
      DO 2 I=2,N1
      I10=N1-I+2
      I3=I1+I10
      I4=I2+I10
      A(I4)=A(I3)
      I5=I2+N +2-I10
    2 A(I5)=A(I3)
      I3=I1+1
      I4=I2+1
      A(I4)=A(I3)
      DO 3 I=2,N
      I6=I2+(I-1)*N3
      I7=I6-N3
      DO 4 J=1,N4
      I8=I7+J
      I9=I6+J+1
    4 A(I9)=A(I8)
    3 A(I6+1)=A(I7+N)
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

2. Смешанная задача

Смешанная задача сводится к алгебраической задаче на собственные значения следующим образом. Проведя дискретизацию интегрального уравнения (см. гл. 3,.3.5), получим

$$u(\varsigma)=\sum_{p=1}^{M}H_p(\varsigma)f_p+\sum_{j=0}^{2n}H_j^0(\varsigma)\psi_j+R_M(\varsigma;f)+\tilde{\rho}_n(\varsigma;\psi),$$

$$\tilde{\rho}_n(\varsigma;\psi)=\int_0^{2\pi}K_0(\varsigma,\theta)\rho_n(\theta;\psi)d\theta.$$

Подпрограмма HJO

Величины $H_j^0(\varsigma)$, $\varsigma=re^{i\varphi}$ определены в (см. гл. 3,.9.1) и вычисляются подпрограммой *HJO*.

Описание параметров

R – радиальная переменная ρ;
F – *угловая* переменная φ;
H – массив длины $N1=2n+1$, содержащий на выходе вычисленные интегралы;
$N1=2n+1$ – число точек в тригонометрической интерполяции.

```
      SUBROUTINE HJ0 (R,F,H,N1)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION H(1)
      PI=3.14159265359D0
      N=(N1-1)/2
      DO 1 J=1,N1
      J1=J-1
      P=F-2.D0*PI*J1/N1
      H(J)=0.5D0
      DO 2 L=1,N
    2 H(J)=H(J)+R**L*COS(L*P)
    1 H(J)= 2.D0*H(J)/N1
      RETURN
      END
```

Подпрограмма HNLI

Величины $H'_{\nu l}(\theta_i)$, определённые в (см. гл. 3,.9.3), вычисляются подпрограммой *HNLI*.

Описание параметров

A – выходной массив длины $N\sum_{\nu=1}^{m/2}(2n_\nu+1)$, т.е. (число точек интерполяции в круге) × (число узлов интерполяции на границе), и

содержит величины $H'_{\nu l}(\theta_i)$ для каждой точки в естественном порядке;
M – число окружностей;
*M1=2*M*;
*M2=2*M-1*;
N – число узлов интерполяции на границе;
NL – массив длины *M, ν*-ый элемент которого содержит число точек сетки на *ν*-ой окружности;
NM=max n_ν;
*B(M), X(M), BC(M1,NM), E(M2,M), C((2*NM+1)*N)* – рабочие массивы.

```
      SUBROUTINE HNLI (A,M,M1,M2,N,NL,NM,B,X,C,BC,E)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(18),NL(M),B(M),X(M),C(9),BC(M1,NM),E(M2,M)
      PI=3.141592653590D0
      DO 1 NU=1,M
      P=PI*(2.*NU-1.)/2./M1
      X(NU)=COS(P)
      E(1,NU)=X(NU)
      DO 1 KS=2,M2
    1 E(KS,NU)=COS(KS*P)
      DO 2 NU=1,M
      B(NU)=0.
      DO 2 KS=1,M2,2
    2 B(NU)=B(NU)-4.*X(NU)*E(KS,NU)/(1.+KS*(-1)**((KS-1)/2))
      CALL IKJ0 (BC,M1,NM)
      C(1)=1.D0
      I1=0
      DO 7 NU=1,M
      N2=NL(NU)
      N3=(N2-1)/2
      MNU=M-NU+1
      IF (N2.EQ.N) N4=N
      IF (N2.NE.N) N4=N2*N
      DO 6 J=2,N4
    6 C(J)= COS(2.*PI*(J-1)/N4)
      DO 7  L=1,N2
      DO 7 I=1,N
      I1=I1+1
      A(I1)=B(NU)
      IF (N2.NE.N) I2=IABS((I-1)*N2-(L-1)*N)
      IF (N2.EQ.N) I2=IABS(I-L)
      DO 8  K=1,N3,2
```

```
      LK=MOD (K*I2,N4)+1
    8 A(I1)=A(I1)+C(LK)*(4.*(-1)**NU*X(MNU)*BC(M1,K)-4.*X(NU)/(1+K))
      DO 10 KS=1,M2
      J=(1-(-1)**KS)/2+1
      IF(J.GT.N3)  GO TO 10
      DO  20  K=J,N3,2
      LK= MOD(K*I2,N4)+1
   20 A(I1)=A(I1)-8.*X(NU)*E(KS,NU)*BC(KS,K)*C(LK)
   10 CONTINUE
    7 A(I1)=A(I1)/FLOAT(N2*M1)
      RETURN
      END
```

Подпрограмма IKJ0

Подпрограмма *IKJ0* производит вычисление интеграла

$$I_{kj}^{0} = \int_{0}^{1} T_k(r) r^j dr, \quad (k+j) \ - \ \textit{нечётно}.$$

Описание параметров

A – выходной массив размерности *M1*×*N*, который содержит на соответствующих местах вычисленные интегралы;
M1, *N* – размерности массива *A*.

```
      SUBROUTINE IKJ0 (A,M1,N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(M1,N)
      A(2,1)=0.D0
      DO 3 K=4,M1,2
      P1=K*K-4
    3 A(K,1)=(-1-(-1)**(K/2))/P1
      IF(N.EQ.1) RETURN
      DO 2 J=2,N,2
    2 A(1,J)=1./(J+2)
      M=M1-1
      N1=N-1
      DO 4 K=1,M
      I=(1-(-1)**K)/2+1
      P=-1./K/(K+2)
      IF(I.GT.N1) GO TO 4
      DO 5 J=I,N1,2
      P4=K+J+3
      P1=(K+1)*(J+1)
    5 A(K+1,J+1)=A(K,J)*P1/P4/K+P*(K+2)/P4
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Подпрограмма *BN*

Подпрограмма *BN* вычисляет матрицу обратную к матрице *B* (см. гл.3, 9.3).

Описание параметров

B – матрица размера *N*×*N, в* которую засылается результат;
N – размерность матрицы *B*;
C – рабочий массив размерности 1 (в этом варианте программы не используется).

```
      SUBROUTINE BN(B,N,C)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION B(N,N),C(1)
      DIMENSION LL(49),MM(49)
      PI=3.141592653590D0
      N1=(N-1)/2
      N2=N-1
      DO 1  I=1,N2
      J1=I+1
      DO 1 J=J1,N
      B(I,J)=0.D0
      DO 2 L=1,N1
    2 B(I,J)=B(I,J)+2.D0*L*COS(L*2.D0*PI*(I-J)/N)/N
    1 B(J,I)=B(I,J)
      DO  3  I=1,N
    3 B(I,I)=ALFA(2.D0*PI*(I-1)/N)+0.25D0*(N-1.D0/N)
      CALL DMINV (B,N,D,LL,MM)
      IF (ABS(D).LT.1.E-3) WRITE(*,*) 'IN BN D = ',D
      RETURN
      END
```

Функция ALFA

Вычисляет значение функции α на границе круга.

Подпрограмма LAP3

Подпрограмма *LAP3* вычисляет матрицу *H-E* (см. гл. 3, 9.5) смешанной задачи.

Описание параметров

A – матрица, которая на входе содержит матрицу для задачи Дирихле, а на выходе матрицу для смешанной задачи; причём матрица задачи Дирихле должна задаваться по строкам, и результат поэтому тоже получается расположенным по строкам; следовательно после окончания работы (если нужно вычислять собственные век-

торы) матрица *A* должна транспонироваться;
N – число точек интерполяции на границе;
NL – массив длины *M*, *ν*-ый элемент которого содержит число точек на *ν*-ой окружности сетки;
$NM = max\, n_\nu$;
HN, *B1*, *X*, *C*, *B*, *BC*, *E*, *H* – рабочие массивы размерности *HN* (число точек интерполяции в круге)×(число узлов интерполяции на границе круга)), *B1(M)*, *X(M)*, *C((2*NM+1)*N)*, *B(N,N)*, *BC(M1,NM)*, *E(M2,M)*, *H(N)*, где *M1=2*M*, *M2=2*M-1*.
Требуемые подпрограммы *BN*, *HNLI*, *HJ0*.

```
      SUBROUTINE LAP3 (A,N,M,NL,NM,HN,B1,X,C,B,BC,E,H)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(1),NL(M),HN(18),B1(M),X(M),
     1C(9),BC(1),E(1),B(N,N),H(3)
      PI=3.14159265359D0
      M1=2*M
      M2=M1-1
      CALL BN(B,N,C)
      CALL HNLI (HN,M,M1,M2,N,NL,NM,B1,X,C,BC,E)
      I1=0
      DO 2 MU=1,M
      N1=NL(MU)
      DO 2 K=1,N1
      F=2.D0*PI*(K-1)/N1
      CALL HJ0 (X(MU),F,H,N)
      J1=0
      DO 2 NU=1,M
      N2=NL(NU)
      DO 2 L=1,N2
      I1=I1+1
      J1=J1+1
      DO 4 I=1,N
      I2=(J1-1)*N+I
      DO 4 J=1,N
    4 A(I1)=A(I1)-H(J)*B(J,I)*HN(I2)
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Программа TRANSP

Транспонирование матрицы *A* размера *N*×*N* после окончания работы *LAP3* проводит программа *TRANSP*.

```
      SUBROUTINE TRANSP (A,N)
      REAL*8 A,P
```

```
      DIMENSION A(N,N)
      N1=N-1
      DO 30 I=1,N1
      I1=I+1
      DO 30 J=I1,N
      P=A(I,J)
      A(I,J)=A(J,I)
   30 A(J,I)=P
      RETURN
      END
```

3. Задача Неймана

Подпрограмма BIJ

Матрицу *(H-E)Z* (см. гл. 3, 10.3) вычисляет подпрограмма *BIJ*.

Описание параметров

B – массив *NT*×*NT*, содержащий результат вычислений; на входе этот массив содержит матрицу *A* задачи Дирихле расположенную по столбцам;
NT – число точек интерполяции в круге;
N – число точек интерполяции на границе;
M – число окружностей в круге;
NL – массив длины *M*, ν-ый элемент которого содержит число точек на ν-ой окружности сетки;
$NM = max\ n_\nu$;
HN, B1, X, C, B, BC, E1, H, E – рабочие массивы размерности *HN* (число точек интерполяции в круге)x(число узлов интерполяции на границе круга), *B1(M), X(M), C((2*NM+1)*N), B(N,N), BC(M1,NM), E1(M2,M), H(N), E(N,N)*, где *M1=2*M, M2=2*M-1*.
Требуемые подпрограммы *HNLI*, *HJ0*.

```
      SUBROUTINE BIJ (B,NT,N,M,NL,NM,HN,B1,X,C,BC,E1,H,E)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION B(NT,NT),NL(M),HN(18),B1(1),X(1),C(1),BC(1),E1(1),
     *H(1),E(N,N)
      INTEGER P,Q
      N1=(N-1)/2
      PI=3.14159265359D0
      C(1)=1.D0
      N2=N-1
```

```
      DO 3 J=1,N2
    3 C(J+1)=COS(2.*PI*J/N)
      DO 1 J=1,N1
      HN(J)=N1*(N1+1.)/2.
      DO 1 L=1,N1
      DO 1 K=1,N1
      M1=MOD(IABS(K*(L-J)),N)+1
      M2=MOD(K*(L+J),N)+1
    1 HN(J)=HN(J)+L*(C(M1)+C(M2))
      DO 2 P=1,N
      DO 2 Q=1,N
      E(P,Q)=0.
      DO 2 J=1,N1
      M3=MOD(IABS((P-Q)*J),N)+1
    2 E(P,Q)=E(P,Q)+ C(M3)/HN(J)
      M1=2*M
      M2=M1-1
      CALL HNLI(HN,M,M1,M2,N,NL,NM,B1,X,C,BC,E1)
      I=0
      DO 4 NU=1,M
      N11=NL(NU)
      DO 4 L=1,N11
      I=I+1
      CALL HJ0(X(NU),2.*PI*(L-1)/N11,H,N)
      DO 4 J=1,NT
      I2=(J-1)*N
      DO 4 P=1,N
      DO 4 Q=1,N
      I3=I2+Q
    4 B(I,J)=B(I,J)-H(P)*E(P,Q)*HN(I3)
      RETURN
      END
```

Вычитаем первую строку соотношения (гл. 3,.10.3) из остальных и заменяем её на дискретное условие разрешимости. Тогда получаем окончательную алгебраическую задачу на собственные значения:

$$A_1 u = \lambda\, A_2 u + \delta_2\,,$$

где матрицы A_1 и A_2 получаются из матриц *R(I-(H-E)ZQ)* и *R(H-E)ZP* заменой первой строки на строки $c_1 q_1 z_1 \ldots c_M q_M z_M$ и $-c_1 p_1 z_1 \ldots -c_1 p_1 z_M$ соответственно.

Подпрограмма LDUDN

Матрицы A_1 и A_2 вычисляются подпрограммой *LDUDN*.

Описание параметров

A, B – матрицы размера *NT*×*NT*, которые содержат результат вычислений A_1 и A_2 ; на входе в матрицу *B* засылается результат работы программы *BIJ*;
NT – число точек интерполяции в круге;
Z, C – рабочие массивы длины *NT* и *M* соответственно;
NL – массив длины *M*, *ν*-ый элемент которого содержит число точек на *ν*-ой окружности сетки;
M – число окружностей в круге;
QMOD2, *PMOD2* – названия подпрограмм, которые должны быть описаны в операторе *EXTERNAL* в вызывающей программе.

```
      SUBROUTINE LDUDN (A,B,NT,Z,C,NL,M,QMOD2,PMOD2)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(NT,NT),B(NT,NT),Z(NT),C(M),NL(M)
      PI=3.14159265359D0
      DO 8 I=1,NT
      DO 9 J=1,NT
    9 A(I,J)=0.D0
    8 A(I,I)=1.D0
      DO 10 I=2,NT
   10 A(I,1)=-1.D0
      DO 7 I=1,NT
    7 A(1,I)=0.
      DO 3 J=1,NT
      DO 2 I=2,NT
      Z(I)=0.D0
      DO 2 L=1,NT
    2 Z(I)=Z(I)+A(I,L)*B(L,J)
      DO 3 I=2,NT
    3 B(I,J)=Z(I)
      CALL CNU (2*M,NL,C)
      I=0
      DO 4 NU=1,M
      N1=NL(NU)
      DO 4 L=1,N1
      I=I+1
    4 B(1,I)=C(NU)
      CALL QMOD2 (Z,M,NL)
      DO 5 I=1,NT
      DO 5 J=1,NT
    5 A(I,J)=A(I,J)-B(I,J)*Z(J)
      CALL PMOD2 (Z,M,NL)
      DO 6 I=1,NT
```

```
      DO 6 J=1,NT
    6 B(I,J)=B(I,J)*Z(J)
      RETURN
      END
```

Подпрограмма QMOD2

Обращение *QMOD2(Z,M,NL)* производит вычисление одномерного массива

$$|\varphi'(\varsigma_i)|^2 \; q(\varsigma_i), \; i=1,2,...,NT.$$

Описание параметров

Z – массив длины NT, который содержит на выходе результат вычислений $|\varphi'(\varsigma_i)|^2 \; q(\varsigma_i), \quad i=1,2,...,NT$;
M – число окружностей в круге;
NL – массив длины M, ν-ый элемент которого содержит число точек на ν-ой окружности сетки.

Подпрограмма PMOD2

Обращение *PMOD2(Z,M,NL)* производит вычисление одномерного массива

$$|\varphi'(\varsigma_i)|^2 \; p(\varsigma_i), \; i=1,2,...,NT.$$

Подпрограмма CNU

Подпрограмма *CNU* вычисляет коэффициенты квадратурной формулы.

Описание параметров

M – удвоенное число окружностей в круге;
NL – массив длины $M/2$, ν-ый элемент которого содержит число точек на ν-ой окружности сетки;
C – массив длины $M/2$, ν-ый элемент которого содержит коэффициент c_ν при $\nu=1,2,\ldots,M/2$.

```
      SUBROUTINE CNU (M,NL,C)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION NL(1),C(1)
```

```
      PI=3.14159265359D0
      M1=M-1
      M2=M/2
      DO 2 NU=1,M2
      N1=NL(NU)
      P=(2.*NU-1.)*PI/2./FLOAT(M)
      P1=COS(P)
      C(NU)=0.5*P1
      DO 3 KS=3,M1,2
      T=((-1)**((KS-1)/2)*FLOAT(KS)-1.)/(FLOAT(KS*KS)-1.)
    3 C(NU)=C(NU)+ T*COS(KS*P)
    2 C(NU)=C(NU)*4.*P1/FLOAT(M*N1)
      RETURN
      END
```

Приложение 3.
Вычисление собственных значений бигармонического оператора

Рассматриваются алгоритмы численного решения краевых задач (1) - (3) и (1), (2), (4)

$$\Delta^2 u(z) = F(z), \quad z \in G, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial G} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0. \tag{4}$$

Здесь G - область в комплексной z - плоскости с достаточно гладкой границей ∂G; n - единичный вектор внешней нормали к ∂G; $\partial/\partial s$ - означает дифференцирование по длине дуги **(**длина отсчитывается против часовой стрелки**)**; $1/\rho$ - кривизна ∂G; ν - постоянная (коэффициент Пуассона). Функция $F(z)$ либо задана, либо $F(z)=(Q(z)+\lambda P(z))u(z)$, где Q и P - некоторые функции, и в этом случае имеем задачу на собственные значения для бигармонического уравнения. В частности, при $Q=0$ и $P=1$ получаем задачу о свободных колебаниях пластинки, где собственная частота колебания ω связана со спектральным параметром λ соотношением $\sqrt{\lambda} = \omega\sqrt{\rho_0 / D}, \quad \rho_0$ - плотность, а D - цилиндрическая жёсткость.

Краевые условия (2) и (3) означают, что пластинка защемлена по краю, а краевые условия (2) и (4) означают опирание по краю. Пусть $z=\varphi(\zeta)$, $|\zeta|\le 1$ - функция, задающая конформное отображение круга единичного радиуса на область G. Тогда в плоскости ζ получаем вместо (1) - (4) следующие соотношения:

$$\Delta\left(\left|\varphi'(\varsigma)\right|^{-2} \Delta u\right) = \left|\varphi'(\varsigma)\right|^2 f(\varsigma), \quad \varsigma = re^{i\varphi}, r < 1, \tag{5}$$

$$u\big|_{r=1} = 0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left\{ \nu + (\nu - 1)\operatorname{Re}\left(\varsigma \frac{\varphi''(\varsigma)}{\varphi'(\varsigma)} \right) \right\} \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0. \tag{8}$$

Здесь $f(\varsigma)=F(z(\varsigma))$, а в граничном условии (8) учтено условие (6), т.е. положено $\partial^2 u/\partial s^2$.

Для решения этих краевых задач применяется программа *BIG12*.

Программа BIG12

Программа BIG12 вычисляет собственные значения, выписанных краевых задач по формуле:

$$u = (B^2 - BEB) f + \widehat{\delta}. \tag{9}$$

Соотношение (9) - итог наших изысканий. Здесь $u = (u(\varsigma_1),...,u(\varsigma_M))'$ - вектор значений функции $u(\zeta)$ в узлах сетки; f соответствующий вектор значений правой части бигармонического уравнения; $B=HZ$ - матрица дискретной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в рассматриваемой области G; для матрицы E имеем следующее выражение

$$E_{lj} = \sum_{p=0}^{2n} H_p^0(\varsigma_l) \sum_{q=0}^{2n} C_{qp} \sum_i H_{i,q}^1 z_i, \quad l, j = 1, 2, ..., M, \tag{10}$$

а $\widehat{\delta}$ - погрешность дискретизации. Отбрасывая в (9) погрешность $\widehat{\delta}$, получим приближённую конечномерную задачу. Таким образом, решение задачи об изгибе пластинки сводится к умножению матрицы $D=B^2–BEB$ на вектор, а задаче на собственные значения соответствует приближённая конечномерная задача

$$u=(B^2–BEB)Z(Q+\lambda P)u,$$

где $Q=diag(q(\zeta_1)...q(\zeta_M))$, $P=diag(p(\zeta_1)...p(\zeta_M))$, $Z=diag(z(\zeta_1)...z(\zeta_M))$ - диагональные матрицы, у которых на диагонали стоят значения соответствующих функций в узлах интерполяции. Для задачи о свободных колебаниях $Q=0$, $P=1$, т.е. эта задача сводится к вычислению собственных значений матрицы D. Отметим, что вид второго краевого условия учитывается строением массива E.

Описание

1. Параметры области *NP*, *EPS1* считываются в режиме диалога.
2. Параметры сетки *M*, *N* считываются в режиме диалога.
3. Данные для программы должны быть размещены в файле *DATA*.
4. Номер краевой задачи запрашивается в режиме диалога.
5. Результаты выводятся на экран и записываются в файл *NOUT*.

6. Результаты счёта собственной функции выводятся на действительной оси в 11 точках (см. программу).

Примечание. Программа использует подпрограммы пакета *EISPACK: ELMHES*, *ELTRAN*, *HQR2*, доступные в интернет по адресу: htpp://www.netlib.org/eispack.

```
      PROGRAM BIG12
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(21609),AB(21609),X(147),Y(147),IANA(147),HN(7203),
     *NL(15),B(49,49),C(7203),BA(7203)
      DIMENSION BC(30,24),E(29,15),H(49),
     *U(147),Z(147),Y2(11)
      DIMENSION C0(25),C1(25)
      EQUIVALENCE (A(1),BA(1)),(A(7204),HN(1))
C
      PUAS=0.25D0
      WRITE(*,*) ' NP = ? , EPS1 = ? '
      READ(*,*) NP,EPS1
      WRITE(*,*) 'M = ? '
      READ(*,*) M1
      WRITE(*,*) 'N = ? '
      READ (*,*) N
C
C   КАНАЛ ВВОДА ДАННЫХ
      NREAD = 3
      OPEN(UNIT=3,FILE='DATA')
C   КАНАЛ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ВЫДАЧ
      NOUT = 4
      OPEN(UNIT=4,FILE='NOUT')
C
      IM = 0
  300 IM = IM + 1
      IF (IM.GT.10) STOP
      READ(NREAD,*) M
C
      NT=M*N
```

```
      NM=(N-1)/2
      M2=M*M
C
      READ (NREAD,*) (C0(I),I=1,M2)
      READ (NREAD,*) (C1(I),I=1,M2)
      IF (M1.NE.M) GO TO 300
      DO 10 I = 1,M
   10 NL(I) = N
      WRITE (NOUT,*) ' M = ', M
      WRITE(NOUT,*) 'LAMDA0'
      WRITE(NOUT,*) (C0(I),I=1,M2)
      WRITE(NOUT,*) 'LAMDA1'
      WRITE(NOUT,*) (C1(I),I=1,M2)
C
      CALL HMATR1 (A,M,N,C0,C1,C)
      CALL RASPAK(A,M,NM)
      CALL TRANSP (A,NT)
C
      NZAP  = 9
      NT2=NT*NT
      WRITE(NZAP) (A(I),I=1,NT2)
      END FILE (NZAP)
C
      WRITE(*,*) 'Введи номер краевой задачи ? '
      READ(*,*) IP
C
      M11=2*M
      M3=2*M+1
      M22=M11-1
C
      IF(IP.EQ.2) CALL PSI (Y,N,PUAS,EPS1,NP,C)
      IF(IP.EQ.1) CALL HNLI (HN,M,M11,M22,N,NL,NM,B,X,C,BC,E)
      IF(IP.EQ.2) CALL HNLI2M (HN,M,M11,M22,N,NL,NM,B,X,C,BC,E,NT,Y)
      CALL MOD2 (Y,M,NL,EPS1,NP)
      DO 30 I=1,NT
      I2=(I-1)*N
      DO 30 J1=1,N
      I3=I2+J1
   30 HN(I3)=HN(I3)*Y(I)
      CALL CN (B,N,HN,NL,X,M,H,NT)
      CALL EBIGM (AB,BA,NT,N,NL,B,HN,H,C,X,M,NZAP,Y)
      CALL BIGM (A,AB,NT,NZAP,Y)
  100 CONTINUE
C
      CALL ELMHES (NT,NT,1,NT,A,IANA)
      WRITE(*,*) 'ELMHES'
      CALL ELTRAN (NT,NT,1,NT,A,IANA,AB)
      WRITE(*,*) 'ELTRAN'
      CALL HQR2 (NT,NT,1,NT,A,X,Y,AB,IERR)
```

```
      WRITE(*,*) 'HQR2'
      WRITE (NOUT,*) ' IERR = ', IERR
   13 FORMAT (13I5)
   12 FORMAT (4E18.11)
      WRITE(NOUT,12) (X(I),I=1,NT)
      WRITE(NOUT,12) (Y(I),I=1,NT)
      DO 3 I=1,NT
    3 Y(I)=1.D0/X(I)
      WRITE (NOUT,*) 'Собственные значения'
      WRITE(NOUT,12) (Y(I),I=1,NT)
      WRITE (*,*) 'Собственные значения'
      PRINT 12,(Y(I),I=1,NT)
      PAUSE
      NT1=NT/4
      DO 21 K=1,NT1
      I2=NT*(K-1)
      DO 22 I=1,NT
      I3=I2+I
   22 U(I)=AB(I3)
      CALL URT (0.D0,M,NL,U,Y)
      CALL URT (3.141592653589D0,M,NL,U,Z)
      DO 4 I=1,M
      I1=M11-I+1
    4 Y(I1)=Z(I)
      DO 20 LL=1,11
      X2=0.1*(LL-1)
   20 Y2(LL)=EIGEN(X2,Y,Z,M11,-1.D0,+1.D0)
      CALL NORM (Y2,11)
      PRINT 12,Y2
   21 PAUSE
      STOP
      END
```

Подпрограмма HJ0M

Подпрограмма HJ0M вычисляет

$$H_j^0(\varsigma), \quad \varsigma = \rho e^{i\varphi_k}, \quad \varphi_k = \frac{2\pi(k-1)}{N_\nu},$$

$N_\nu \equiv 2n_\nu + 1$ – *число точек на* $\nu -$*ой окружности*, $k = 1,\ldots,N_\nu$.

Описание параметров

H – массив длины *N*, который содержит на выходе вычисленные интегралы $H_j^0(\rho e^{i\varphi_k})$ при $j=1,\ldots,N$;

C – массив длины *N4*, который содержит на входе таблицу косинусов;

$$c_j = \cos\frac{2\pi(j-1)}{N4}, \quad j = 1, 2, ..., N4;$$

N2 – число точек на рассматриваемой окружности;
R – ρ;
K – номер точки φ_k на окружности;
N - число точек на границе круга;
N4 – длина массива *C*, *N4=N*N2* при *N* не равном *N2* и *N4=N* при *N=N2*.

```
      SUBROUTINE HJOM (H,C,N2,R,K,N,N4)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION H(1),C(1)
      N1=(N-1)/2
      DO 1 J=1,N
      H(J)=1.D0/N
      IF (N2.NE.N) I2=IABS((K-1)*N-N2*(J-1))
      IF (N2.EQ.N) I2=IABS(J-K)
      DO 1 L=1,N1
      LK=MOD (L*I2,N4)+1
    1 H(J)=H(J)+2.D0*R**L*C(LK)/N
      RETURN
      END
```

Подпрограмма CN

Матрица *C* вычисляется подпрограммой *CN*. Производится вычисление матрицы обратной к матрице:

$$\bar{B}_{j1,j2} = \sum_i \bar{H}_{i,j2} Z_i H^0_{j1}(\xi_i).$$

Описание параметров

B - результат вычислений, матрица размера *N*×*N*;
N- число точек интерполяции на границе круга;
HN - одномерный массив длины *NT*N*, который содержит на входе массив $\bar{H}_{i,j_2} Z_i$ по строкам;
NL - массив длины M, ν-ый элемент которого содержит число точек на ν -ой окружности сетки;
X- рабочий массив длины *M*;
M - число окружностей в круге;
H - рабочий массив длины *N*;
NT - число точек интерполяции в круге.

Вызываемые подпрограммы *HJO*, *DMINV*.

```
      SUBROUTINE CN(B,N,HN,NL,X,M,H,NT)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION B(N,N),HN(18),NL(M),X(M),H(7)
      DIMENSION LL(49),MM(49)
      PI=3.14159265359D0
      DO 1 J1=1,N
      DO 1 J2=1,N
    1 B(J2,J1)=0.D0
      I=0
      DO 20 MU=1,M
      N1=NL(MU)
      DO 2 K=1,N1
      I=I+1
      CALL HJ0(X(MU),2.*PI*(K-1)/N1,H,N)
      I2=(I-1)*N
      DO 2 J2=1,N
      I3=I2+J2
      DO 2 J1=1,N 2 B(J2,J1)=B(J2,J1)+HN(I3)*H(J1)
   20 CONTINUE
   12 FORMAT (7E16.9)
      CALL DMINV (B,N,D,LL,MM)
      IF (ABS(D).LT.1.E-4) PRINT 10, D
   10 FORMAT (E18.11,'Обращаемая матрица близка к вырожденной ')
      RETURN
      END
```

Первая краевая задача

Разные краевые задачи отличаются только вычислением массива $\overline{H}_{i,j_2}$. Для краевого условия (3) этот массив вычисляется подпрограммой *HNLI*, описанной в приложении 2. Сама матрица *D* вычисляется подпрограммами *EBIGM* и *BIGM*.

Подпрограмма EBIGM

Подпрограмма EBIGM вычисляет матрицу *E* (см. гл. 4 1.15)…

Описание параметров

B - результат вычислений матрицы *E*. Массив размера *NT*×*NT*;
E(N,NT) рабочий массив;
NT- число точек интерполяции в круге;
N- число узлов интерполяции на границе;

NL - массив длины *M*, *ν*-ый элемент которого содержит число точек на *ν*-ой окружности сетки;
C - массив размера *N*×*N*, который содержит на выходе матрицу вычисляемую подпрограммой *CN*.
*HN(NT*N}, H(N), C1(NT*N)* - рабочие массивы;
X(M) - рабочий массив, который содержит на входе величины;

$$x_\nu = \cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2M}, \ \nu = 1,2,\ldots,M.$$

M- число окружностей в круге;
NZAP - номер магнитного носителя, где записана матрица для задачи Дирихле уравнения Лапласа (по столбцам);
Y - одномерный массив длины *NT*, который содержит на входе массив $z_i = |\varphi'(\varsigma_i)|^2$.

Требуемые подпрограммы *HJOM*.

```
      SUBROUTINE EBIGM (B,E,NT,N,NL,C,HN,H,C1,X,M,NZAP,Y)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION B(NT,NT),E(N ,NT),NL(1),C(N,N),HN(1),H(N),C1(1),X(1),
     *Y(1)
C
      REWIND (NZAP)
      READ (NZAP  ) ((B(I,J),I=1,NT),J=1,NT)
C
      DO 20 I=1,NT
      DO 20 J=1,NT
   20 B(I,J)=B(I,J)*Y(J)
      DO 5 I=1,NT
      I2=(I-1)*N
      DO 4 J1=1,N
      P=0.
      DO 3 J2=1,N
      I3=I2+J2
    3 P=P+HN(I3)*C(J1,J2)
    4 H(J1)=P
      DO 5 J1=1,N
      I3=I2+J1
    5 HN(I3)=H(J1)
      DO 7 J1=1,N
      DO 7 J=1,NT
      P=0.D0
      DO 6 I=1,NT
      I3=J1+(I-1)*N
    6 P=P+HN(I3)*B(I,J)
```

```
    7 E(J1,J)=P
      DO 8 J=1,NT
      I2=(J-1)*N
      DO 8 J1=1,N
      I3=I2+J1
    8 HN(I3)=E(J1,J)
      C1(1)=1.D0
      L=0
      N1=0
      DO 2 MU=1,M
      N2=NL(MU)
      IF (N2.EQ.N1) GO TO 30
      IF (N2.EQ.N) N4=N
      IF (N2.NE.N) N4=N2*N
      N1=N2
      DO 1 J=2,N4
    1 C1(J)=COS(2.*3.14159265359D0*(J-1)/N4)
   30 CONTINUE
      DO 2 K=1,N2
      L=L+1
      CALL HJ0M (H,C1,N2,X(MU),K,N,N4)
      DO 2 J=1,NT
      I2=(J-1)*N
      P=0.
      DO 40J1=1,N
      I3=I2+J1
   40 P=P+H(J1)*HN(I3)
    2 B(L,J)=P
      RETURN
      END
```

Подпрограмма BIGM

Производит вычисление матрицы $D=B^2-BE$ для бигармонического уравнения.

Описание параметров

B - массив размера *NT*×*NT*, который содержит на выходе матрицу *D*;
E - массив размера *NT*×*NT*, который содержит на входе матрицу *E*, вычисляемую подпрограммой *EBIGM*;
NT - число узлов сетки в круге.
NZAP - номер магнитного носителя, где записана матрица для задачи Дирихле уравнения Лапласа (по столбцам).
HN - одномерный массив длины *NT*, который содержит на входе

массив $z_i = |\varphi'(\varsigma_i)|^2$;

Требуемая подпрограмма *DIVAB.*

```
      SUBROUTINE BIGM (B,E,NT,NZAP,HN)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION B(NT,NT),E(NT,NT),HN(NT)
C
      REWIND (NZAP)
      READ (NZAP) ((B(I,J),I=1,NT),J=1,NT)
C
      DO 20 I=1,NT
      DO 20 J=1,NT
   20 B(I,J)=B(I,J)*HN(J)
      DO 10 K=1,NT
      DO 10 J=1,NT
   10 E(K,J)=B(K,J)-E(K,J)
      CALL DIVAB(NT,B,E,HN)
      RETURN
      END
```

Подпрограмма DIVAB

Подпрограмма *DIVAB* производит умножение матрицы *A* - размера $N \times N$ на матрицу *B* того же размера и засылает результат в *A (Y* - рабочий массив размерности *N).*

```
      SUBROUTINE DIVAB(N,A,B,Y)
      DOUBLE PRECISION A,B,Y
C
C  L  A*B = > A
C
      DIMENSION A(N,N),B(N,N),Y(N)
      DO 8 K=1,N
      DO 9 L=1,N
      Y(L)=0.D0
      DO 9 I=1,N
    9 Y(L)=Y(L)+A(K,I)*B(I,L)
      DO 8 L=1,N
    8 A(K,L)=Y(L)
      RETURN
      END
```

Подпрограмма DIVAB1

Подпрограмма *DIVAB1* производит аналогичные вычисления. Только результат засылается в *B*.

```
      SUBROUTINE DIVAB1 (N,A,B,Y)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N,N),B(N,N),Y(N)
```

```
      DO 3 J=1,N
      DO 1 I=1,N
      P=0.
      DO 2 L=1,N
    2 P=P+A(I,L)*B(L,J)
    1 Y(I)=P
      DO 3 I=1,N
    3 B(I,J)=Y(I)
      RETURN
      END
```

Вторая краевая задача

Под второй краевой задачей понимается задача (1), (2), (4).

Программа HNLI2M

Программа *HNLI2M* вычисляет массив $\bar{H}_{i,j_2}$ для краевого условия (4).

Описание параметров

A - выходной массив *NT*N*, который содержит на выходе массив $\bar{H}_{i,j_2}$ по строкам.

M - число окружностей;

*M1=2*M*;

M2=M1-1;

N - число точек на границе круга;

NL - массив длины *M*, ν-ый элемент которого содержит число точек на ν-ой окружности сетки;

$NM = max\, n_\nu$;

*B(M), X(M), BC(M1,NM), E(M2,M), C((2*NM+1)*N)* - рабочие массивы;

NT - число точек в круге;

Y - выходной массив подпрограммы *PSI*, который содержит величины $y_j = \nu + (\nu - 1)\,\mathrm{Re}\left(e^{i\theta_j} \dfrac{\varphi''(e^{i\theta_j})}{\varphi'(e^{i\theta_j})} \right), \ j = 1,\ldots,N; \ \theta_j = \dfrac{2\pi(j-1)}{N}$, для нашей области; ν- коэффициент Пуассона.

```
      SUBROUTINE HNLI2M (A,M,M1,M2,N,NL,NM,B,X,C,BC,E,NT,Y)
```

```
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(18),NL(M),B(M),X(M),C(9),BC(M1,NM),E(M2,M),Y(1)
      CALL HNLI (A ,M,M1,M2,N,NL,NM,B,X,C,BC,E)
      PI=3.141592653589D0
      DO 5 I=1,NT
      I2=(I-1)*N
      DO 5 J=1,N
      I3=I2+J
    5 A(I3)=A(I3)*Y(J)
      C(1)=1.D0
      I1=0
      DO 7 NU=1,M
      PP=0.D0
      DO 15 KS=1,M2,2
   15 PP=PP-E(KS,NU)
C
      N2=NL(NU)
      N3=(N2-1)/2
      MNU=M-NU+1
      IF (N2.EQ.N) N4=N
      IF (N2.NE.N) N4=N2*N
      DO 6 J=2,N4
    6 C(J)= COS(2.*PI*(J-1)/N4)
      DO 7  L=1,N2
      DO 7 I=1,N
      I1=I1+1
      A(I1)=A(I1) -B(NU)/N2/M1
      A(I1)=A(I1)+4.*X(NU)*PP/N2/M1
      IF (N2.NE.N) I2=IABS((I-1)*N2-(L-1)*N)
      IF (N2.EQ.N) I2=IABS(I-L)
      DO 8  K=1,N3,2
      LK=MOD (K*I2,N4)+1
    8 A(I1)=A(I1)+C(LK)*(4.*(-1)**NU*X(MNU)*
     *(BC(M1,K)-1.)-4.*K*X(NU)/(1.+K))/N2/M1
      DO 10 KS=1,M2
      J=(1-(-1)**KS)/2+1
      IF(J.GT.N3)  GO TO 10
      DO  20  K=J,N3,2
      LK= MOD(K*I2,N4)+1
   20 A(I1)=A(I1)+8.*X(NU)*E(KS,NU)*(BC(KS,K)-1.)*C(LK)/N2/M1
   10 CONTINUE
    7 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Подпрограмма PSI

Подпрограмма *PSI* вычисляет массив *Y* для области получаемой из круга конформным отображением $\varphi(\zeta)=\zeta(1+\varepsilon\zeta^n)$, $\varepsilon\le 1/(n+1$.

Описание параметров

Y - массив длины *N*, который содержит результаты вычислений;
N - число точек на границе круга;
PUASS - ν (коэффициент Пуассона);
EPS-ε;
NP-n;
C - рабочий массив длины *N*.

```
      SUBROUTINE PSI (Y,N,PUAS,EPS,NP,C)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION Y(N),C(N)
      EPS1=EPS*(NP+1.)
      C(1)=1.
      DO 1 J=2,N
    1 C(J)=COS(2.*3.14159265359D0*(J-1.)/N)
      DO 2 J=1,N
      LK=MOD(NP*(J-1),N)+1
      Y(J)=EPS1*NP*(C(LK)+EPS1)/(1.+2.*EPS1*C(LK)+EPS1*EPS1)
    2 Y(J)=PUAS+(PUAS-1.)*Y(J)
      RETURN
      END
```

Предметный указатель

Л

М

Н

О

П

Ц

Ч

Э

Я

1. Литература

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986, с.744.
2. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. Бабенко К. И., Юрьев С. П. О дискретизации одной задачи Гаусса //Докл. АН СССР, 1978. Т. 240, 6, с.1273-1276.
5. Гершгорин С. Uber die Abgrenzung der eigenwerte einer Matrix //ИАН СССР, 1931. Т. 7, с.749-754.
6. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
7. Вайнико Г. М. Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в порблеме собственных значений //Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964. Т. 4, № 3, с.405-425.
8. Приказчиков В. Г. Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма-Лиувилля //Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964. Т. 4, № 3, с.687-698.
9. Hubbard B. E. Bounds for eigenvalues of the Sturm-Liouville problem by finite difference methods //Arch. Ration. Mech. and Analys, 1962. V. 10, n 2, p.171-179.
10. Алгазин С. Д. О локализации собственных значений замкнутых линейных операторов //Сиб. мат. журн., 1983. Т.24, № 2, с.3-8.
11. Mersier B., Osborn J., Rappaz J., Raviart P. A. Eigenvalue aproximation by mixed and hybryd methods //Math. Comput., 1981. V. 36, n. 154, p.427-453.
12. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехтеориздат, 1954.
13. Алгазин С. Д., Бабенко К. И., Косоруков А. Л. О численном решении задачи на собственные значения //Препринт ИПМатем, 1975. № 108, с.57.
14. Hargrave B. A. Numerical Approximation of Eigenvalues of Sturm-Liouville Systems // J. of comp. Physics, 1976. T. 20, p.381-396.

15. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Наука, 1969.
16. Казанджан Э. П. Об одном численном методе конформного отображения односвязных областей //Препринт ИПМатем АН СССР, 1979, №82.
17. Алгазин С. Д. О вычислении собственных значений оператора Лапласа и численном решении уравнения Пуассона //Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, 1979, № 191, с.32.
18. Гликман Б. Т. Свободные колебания круглой пластинки со смешанными граничными условиями. МТТ, 1972, №1.
19. Sundararajan C. An approximate solution for the fundamental frequency of Plates //Trans. of the ASME. Journal of applied mechanics, 1978, 45, 12.
20. Leisa A. W. Vibration of Plates, NASA SP-160, 1969.
21. Вычислительные методы в физике плазмы/Под ред. Б. Олдера и др. М.: Мир, 1974.
22. Аэродинамика автомобиля /Под ред. Григолюка Э. -И. Машиностроение, 1984.
23. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976, т. 2.
24. Alan C. Hindniarah. LSODE and LSODI two initial value ordinary differential equation solvers. ASH - Signum Newsletter, 1980, vol.15, n. 4, p.10-11.
25. Хетрик Д. Динамика ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1975.
26. Лебедев В.И. Явные разностные схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем уравнений //Препринт ОВМ АН СССР., 1987, № 177.
27. Сборник научных программ на фортране. Выпуск 2. Матричная алгебра и линейная алгебра. М.: Статистика, 1974.
28. Алгазин С. Д. О табулировании собственных значений двумерного оператора Лапласа //Препринт ИПМатем, 1982, № 54, с.15.

2. Заключение

По поводу получения полных версий описанных программ обращайтесь по электронному адресу: algazinsd@mail.ru или на адрес института проблем механики РАН: 119526, Москва, проспект Вернадского д. 101, к. 1.