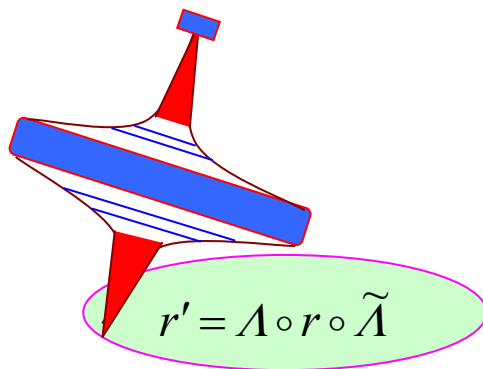


*Московский физико-технический  
институт  
(государственный университет)*

**Н.И. Амелькин**

**Кинематика и динамика  
твёрдого тела**



Москва 2000г.

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначается для студентов МФТИ, изучающих кинематику и динамику твердого тела в курсе теоретической механики.

Изложение раздела кинематики построено на использовании аппарата кватернионов – четырехмерных гиперкомплексных чисел со специальными правилами умножения. Кватернионы дают возможность в достаточно простой и удобной форме задавать повороты в трехмерном пространстве, что и обуславливает их применение для описания вращательного движения твердого тела.

Кватернионный способ имеет ряд преимуществ по сравнению с другими способами описания вращательного движения твердого тела. С помощью кватернионов эффективно решаются задачи на определение параметров конечного поворота твердого тела и задачи сложения поворотов. Кинематические уравнения движения твердого тела в кватернионах не вырождаются, как это имеет место при использовании углов Эйлера, и не содержат тригонометрических функций, а число этих уравнений существенно меньше, чем число уравнений в направляющих косинусах (четыре против девяти).

Предлагаемый вариант изложения кинематики твердого тела с помощью кватернионов аппарата дает также и методические преимущества. В кватернионах это изложение получается наиболее полным и компактным, являясь одновременно достаточно простым и доступным для изучения.

Раздел динамики твердого тела наряду с освещением традиционных вопросов содержит подробное изложение теории волчка Лагранжа.

Автор выражает благодарность В.Ф. Журавлеву за оказанное содействие в работе.

## 1. Алгебра кватернионов

Кватернионы были введены в математику В.Р. Гамильтоном в 1843 году. Они представляют собой обобщение аппарата комплексных чисел на четырехмерный случай и записываются выражениями следующего вида:

$$A = \lambda_0 \cdot i_0 + \lambda_1 \cdot i_1 + \lambda_2 \cdot i_2 + \lambda_3 \cdot i_3, \quad (1.1)$$

где  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – произвольные действительные числа, называемые компонентами кватерниона  $A$ , а  $i_0, i_1, i_2, i_3$  – кватернионные единицы.

Кватернионное сложение определяется по правилам обычной векторной алгебры, т. е. при сложении двух кватернионов  $A$  и  $M$  складываются их соответствующие компоненты  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ).

Кватернионное произведение обозначается знаком « $\circ$ » и определяется следующими правилами умножения кватернионных единиц:

$$\begin{aligned} i_0 \circ i_0 &= i_0, \quad i_0 \circ i_k = i_k \circ i_0 = i_k, \quad i_k \circ i_k = -1, \quad k = 1, 2, 3. \\ i_1 \circ i_2 &= i_3, \quad i_2 \circ i_3 = i_1, \quad i_3 \circ i_1 = i_2, \\ i_2 \circ i_1 &= -i_3, \quad i_3 \circ i_2 = -i_1, \quad i_1 \circ i_3 = -i_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В соответствии с приведенными правилами сложения и умножения можно использовать такую интерпретацию кватернионов, при которой элемент  $i_0$  отождествляется с вещественной единицей, а элементы  $i_1, i_2, i_3$  – с единичными векторами  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ , образующими в трехмерном пространстве правую ортогональную тройку. Тогда кватернион  $A$  можно записать в виде формальной суммы скалярной части  $\lambda_0$  и векторной части  $\vec{\lambda}$ :

$$A = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot \vec{i}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{i}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{i}_3 = \lambda_0 + \vec{\lambda}, \quad (1.3)$$

а правила (1.2) умножения базисных элементов кватерниона запишутся через скалярное и векторное произведение следующей формулой:

$$\vec{i}_k \circ \vec{i}_j = -(\vec{i}_k, \vec{i}_j) + \vec{i}_k \times \vec{i}_j, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (1.2^*)$$

Отсюда, аксиоматизируя дистрибутивность умножения по отношению к сложению, получаем формулу для кватернионного произведения векторов  $\vec{\lambda}$  и  $\vec{\mu}$ :

$$\vec{\lambda} \circ \vec{\mu} = -(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}, \quad (1.4)$$

а также формулу для произведения двух кватернионов с ненулевой скалярной частью  $A = \lambda_0 + \vec{\lambda}$  и  $M = \mu_0 + \vec{\mu}$ :

$$A \circ M = \lambda_0 \mu_0 - (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}. \quad (1.5)$$

Приведенные правила сложения и умножения полностью определяют алгебру кватернионов и все вытекающие из нее свойства. При рассмотрении кватернионов с нулевыми векторными частями ( $A = \lambda_0$ ) получаем алгебру вещественных чисел. Если же векторная часть кватернионов представлена одним измерением ( $A = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot \vec{i}_1$ ), то получается алгебра комплексных чисел. Поэтому алгебра кватернионов включает в себя алгебру вещественных и комплексных чисел.

Укажем основные свойства умножения кватернионов.

1. Умножение кватернионов обладает дистрибутивными по отношению к сложению свойствами, т. е.

$$A \circ (M + N) = A \circ M + A \circ N.$$

2. Умножение кватернионов ассоциативно, т. е.

$$A \circ (M \circ N) = (A \circ M) \circ N.$$

3. Кватернионное умножение не обладает свойством коммутативности, т. е.  $A \circ M \neq M \circ A$ . Это обусловлено некоммутативностью векторного произведения  $\vec{\lambda} \times \vec{\mu}$ , входящего в формулу (1.5) для произведения кватернионов. Поэтому равенство  $A \circ M = M \circ A$  имеет место только в том случае, когда векторные части сомножителей коллинеарны, т. е.  $(\vec{\lambda} \times \vec{\mu} = 0)$ .

4. Скалярная часть произведения кватернионов не изменяется при циклической перестановке сомножителей, т. е.

$$\text{sqa}(A \circ M \circ N) = \text{sqa}(N \circ A \circ M).$$

Свойство 2 устанавливается непосредственной проверкой с использованием введенных аксиом сложения и умножения кватернионов, а свойство 4 следует из того, что в силу формулы (1.5) скалярная часть произведения двух кватернионов не зависит от порядка сомножителей. Поэтому получаем

$$\text{sqa}[(A \circ M) \circ N] = \text{sqa}[N \circ (A \circ M)].$$

По аналогии с комплексными числами для кватерниона  $A = \lambda_0 + \vec{\lambda}$  определяется сопряженный кватернион  $\tilde{A}$  следующего вида:

$$\tilde{A} = \lambda_0 - \vec{\lambda}. \quad (1.6)$$

Нормой кватерниона  $A$  называется произведение этого кватерниона на его сопряженное значение  $\tilde{A}$ . Поскольку векторные части кватернионов  $A$  и  $\tilde{A}$  отличаются только знаком, то в соответствии с правилами умножения для нормы кватерниона  $A$  получается следующее выражение:

$$\|A\| = A \circ \tilde{A} = \lambda_0^2 + (\vec{\lambda}, \vec{\lambda}) = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2. \quad (1.7)$$

Таким образом, норма кватерниона является скаляром и инвариантна по отношению к выбору базиса  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ , в то время как компоненты  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  векторной части кватерниона зависят от выбора базиса.

Кватернион  $A$  называется нормированным, если  $\|A\| = 1$ .

Правила вычисления сопряженного значения и нормы от произведения двух кватернионов легко устанавливаются с помощью формулы умножения (1.5). Так, для произведения двух кватернионов  $\tilde{M}$  и  $\tilde{A}$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{M} \circ \tilde{A} &= (\mu_0 - \vec{\mu}) \circ (\lambda_0 - \vec{\lambda}) = \\ &= \lambda_0 \mu_0 - (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) - (\vec{\mu} \lambda_0 + \vec{\lambda} \mu_0 + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}) = (A \circ M \tilde{)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что сопряженное значение от произведения двух кватернионов равно произведению их сопряженных значений, взятых в обратном порядке:

$$(A \circ M \tilde{}) = \tilde{M} \circ \tilde{A}. \quad (1.8)$$

Полученное соотношение позволяет в свою очередь найти выражение для нормы произведения двух кватернионов:

$$\|A \circ M\| = A \circ M \circ \tilde{M} \circ \tilde{A} = \|A\| \circ \|M\|, \quad (1.9)$$

т. е. норма произведения двух кватернионов равна произведению норм сомножителей. Отсюда следует, что произведение нормированных кватернионов есть также нормированный кватернион.

Методом индукции легко показать, что правила (1.8) и (1.9) распространяются на случай произвольного числа сомножителей, т.е.

$$\begin{aligned} (A_1 \circ \dots \circ A_n \tilde{)} &= \tilde{A}_n \circ \dots \circ \tilde{A}_1, \\ \|A_1 \circ \dots \circ A_n\| &= \|A_1\| \cdot \dots \cdot \|A_n\|. \end{aligned}$$

Операция деления кватернионов определяется как операция умножения на обратный кватернион.

Кватернионом, обратным к  $A$ , называется кватернион  $A^{-1}$ , определяемый из условия

$$A \circ A^{-1} = 1. \quad (1.10)$$

Выражение для обратного кватерниона можно найти непосредственно из этого определения, рассматривая его как уравнение относительно неизвестного  $A^{-1}$ . Умножая обе части (1.10) на  $\tilde{A}$  слева и используя соотношение (1.7) для нормы, получаем

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\|A\|}, (\|A\| \neq 0). \quad (1.11)$$

Отсюда следует, что если кватернион  $A$  является нормированным, т. е.  $\|A\| = 1$ , то обратным к нему

кватернионом будет его сопряженное значение  $\tilde{A}$ .

Используя приведенные выше правила вычисления сопряженного значения и нормы от произведения кватернионов, получаем, что норма обратного кватерниона

равна  $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$ , а кватернион, обратный произведению

кватернионов, вычисляется по формуле

$$(A_1 \circ \dots \circ A_n)^{-1} = A_n^{-1} \circ \dots \circ A_1^{-1}. \quad (1.12)$$

Обратим внимание, что свойства сложения и умножения кватернионов аналогичны свойствам сложения и умножения матриц. Как следствие этого, правила решения кватернионных уравнений аналогичны правилам решения матричных уравнений.

Кватернионное уравнение эквивалентно четырем скалярным уравнениям. Одно из них получается

приравниванием скалярных составляющих правой и левой частей кватернионного уравнения, а остальные три – это равенство компонент векторных составляющих в некотором ортогональном базисе трехмерного пространства.

Тригонометрическая форма записи кватернионов. Пусть  $A$  – нормированный кватернион. Вводя новые переменные с помощью равенств  $\lambda_0 = \cos \nu$ ,  $\vec{\lambda} = \vec{e} \cdot \sin \nu$ , где  $\vec{e}$  – единичный вектор, коллинеарный вектору  $\vec{\lambda}$ , получаем тригонометрическую форму записи кватерниона

$$A = \cos \nu + \vec{e} \cdot \sin \nu. \quad (1.13)$$

Для ненормированного кватерниона имеем

$$A = |A| \cdot (\cos \nu + \vec{e} \cdot \sin \nu), \quad (1.14)$$

где  $|A| = \sqrt{\|A\|}$  – модуль кватерниона  $A$ .

Форма кватерниона (1.14) аналогична тригонометрической записи комплексных чисел. Из этого представления следует, что любой кватернион однозначно определяется значением модуля  $|A|$ , единичным вектором  $\vec{e}$  и углом  $\nu$ . Выбор же  $\vec{e}$  и  $\nu$  для заданного  $A$  является двухзначным, т. к. одновременная замена знака при  $\vec{e}$  и  $\nu$  на обратный не изменяет кватерниона  $A$ . Заметим также, что если векторная часть  $\vec{\lambda}$  кватерниона  $A$  равна нулю, то  $\sin \nu = 0$ , и тогда  $\vec{e}$  – любой единичный вектор из трехмерного пространства.

Два кватерниона  $A_1$  и  $A_2$  будем называть коллинеарными, если коллинеарны их векторные части, т. е.  $\vec{\lambda}_1 \times \vec{\lambda}_2 = 0$ .

Использование тригонометрической формы кватернионов дает простую формулу для произведения двух коллинеарных кватернионов. Так, если



$$A_1 = |A_1|(\cos \varphi_1 + \vec{e} \sin \varphi_1), A_2 = |A_2|(\cos \varphi_2 + \vec{e} \sin \varphi_2),$$

то для произведения этих кватернионов получаем

$$A_1 \circ A_2 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \vec{e} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (1.15)$$

т. е. при умножении коллинеарных кватернионов аргументы складываются, а модули перемножаются.

Из (1.15) получаем для  $\kappa$ -й степени кватерниона  $A = |A| \cdot (\cos \nu + \vec{e} \cdot \sin \nu)$  следующую формулу:

$$A^k = |A|^k \cdot (\cos k\nu + \vec{e} \sin k\nu), \quad (1.16)$$

которая аналогична формуле Муавра для комплексных чисел.

Последняя формула дает возможность легко находить решения степенных кватернионных уравнений вида

$$X^k = A. \quad (1.17)$$

Представляя  $X$  и  $A$  в тригонометрической форме

$$X = |X| \cdot (\cos \chi + \vec{e} \sin \chi), A = |A| \cdot (\cos \nu + \vec{e} \sin \nu),$$

получаем в качестве (1.17) следующее уравнение:

$$|X|^k \cdot (\cos \kappa\chi + \vec{e} \sin \kappa\chi) = |A| \cdot (\cos \nu + \vec{e} \sin \nu).$$

Отсюда следует

$$|X| = |A|^{\frac{1}{k}}, \quad \vec{e} = \vec{e}, \quad \chi = \frac{\nu + 2\pi \cdot i}{k}, \quad (1.18)$$

$$i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Полученные соотношения определяют  $k$  разных решений уравнения (1.17) в том случае, когда единичный вектор  $\vec{e}$ , входящий в представление кватерниона  $A$ , определен однозначно. Если же векторная часть  $A$  равна нулю, то  $\vec{e}$  – любой единичный вектор. В этом случае (1.18) могут определять бесконечное множество решений, если среди решений (1.18) найдутся такие значения  $\chi$ , для которых  $\sin \chi \neq 0$ .

При  $k=2$  решение уравнения  $X^2 = A$  можно записать в алгебраической форме, если представить  $X$  и  $A$  в виде

$$X = x_0 + \vec{x}, \quad A = \lambda_0 + \vec{\lambda}.$$

Тогда получаем уравнение

$$x_0^2 - |\vec{x}|^2 + 2x_0\vec{x} = \lambda_0 + \vec{\lambda}.$$

С учетом соотношения для нормы  $x_0^2 + |\vec{x}|^2 = |A|$  имеем

$$2x_0^2 = |A| + \lambda_0, \quad 2x_0\vec{x} = \vec{\lambda}.$$

Отсюда следует решение:

$$X = A^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{A + |A|}{\sqrt{\lambda_0 + |A|}}, \text{ если } (\lambda_0 + |A|) > 0. \quad (1.19)$$

Если же  $\lambda_0 + |A| = 0$ , а это возможно только в случае  $A = \lambda_0 \leq 0$ , то решение имеет вид

$$A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-\lambda_0} \cdot \vec{e}, \quad (1.19^*)$$

где  $\vec{e}$  – произвольный единичный вектор.

### Упражнения

1. Показать, что для скалярной и векторной частей произведения векторов справедливы соотношения

$$\text{sqal}(\vec{\lambda}_1 \circ \vec{\lambda}_2 \circ \dots \circ \vec{\lambda}_n) = (-1)^n \text{sqal}(\vec{\lambda}_n \circ \vec{\lambda}_{n-1} \circ \dots \circ \vec{\lambda}_1);$$

$$\text{vect}(\vec{\lambda}_1 \circ \vec{\lambda}_2 \circ \dots \circ \vec{\lambda}_n) = (-1)^{n+1} \text{vect}(\vec{\lambda}_n \circ \vec{\lambda}_{n-1} \circ \dots \circ \vec{\lambda}_1).$$

2. Найти все решения кватернионных уравнений:

a)  $X^2 + A \circ X + M = 0.$

b)  $X \circ A - A \circ X = M.$

c)  $X^n \circ A - A \circ X^m = M,$

где  $m$  и  $n$  – целые числа.

## 2. Кинематика твердого тела

### 2.1. Способы задания положения твердого тела

Твердым телом называется такая система материальных точек, для которой расстояние между любой парой точек не меняется с течением времени.

Из приведенного определения следует, что для векторов  $\vec{r}_J$  и  $\vec{r}_K$ , соединяющих произвольную точку  $O$  тела с точками  $J$  и  $K$ , выполняются условия:

$$\begin{aligned} r_J^2 = \text{const}, r_K^2 = \text{const}, \\ (\vec{r}_J - \vec{r}_K)^2 = r_J^2 + r_K^2 - 2(\vec{r}_J, \vec{r}_K) = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отсюда получаем соотношение

$$(\vec{r}_J, \vec{r}_K) = \text{const}, \quad (2.2)$$

которое описывает условие неизменности скалярного произведения векторов, соединяющих любые пары точек в теле. В силу произвольности точек  $J$  и  $K$  из условия (2.2) следуют все равенства (2.1), поэтому условие (2.2) эквивалентно исходному определению твердого тела.

Отметим, что приведенное определение твердого тела не является полным. Легко убедиться, что всевозможные зеркальные отражения пространства удовлетворяют этому определению, но они не включаются в математическую модель твердого тела. Поэтому данное определение

дополняется условием неизменности смешанного произведения векторов:

$$(\vec{r}_I \times \vec{r}_J, \vec{r}_K) = \text{const.} \quad (2.3)$$

Условия (2.2) и (2.3) полностью определяют математическую модель твердого тела. Из условия (2.2) следует, что если в какой-то момент времени с некоторыми точками тела связать ортонормированный базис  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ , то этот базис будет оставаться ортонормированным в любой последующий момент, а разложение вектора  $\vec{r}_J$  произвольной точки тела в этом базисе неизменно. Условие (2.3) дополнительно означает неизменность взаимной ориентации базисных векторов в том смысле, что правая тройка векторов остается правой, а левая – левой.

Рассмотрим произвольное движение твердого тела относительно некоторой системы отсчета  $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  (рис. 1). Свяжем с телом некоторый базис  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  и зададимся координатами  $r_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) произвольной точки тела в этом базисе. Тогда положение этой точки в системе  $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  в любой момент времени дается соотношением

$$\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r} = \vec{R}_O + \sum_{k=1}^3 r_k \vec{e}_k, \quad (2.4)$$

и в силу неизменности координат  $r_k$  для однозначного его определения достаточно в любой момент времени задать положение базиса  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  относительно базиса  $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ .

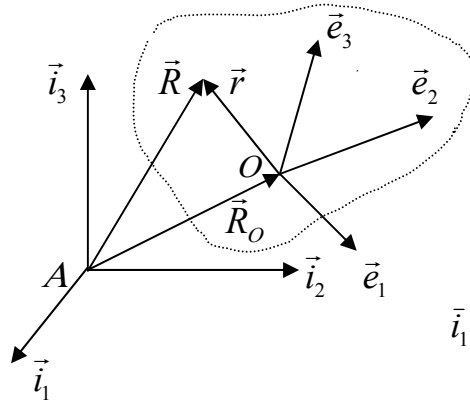


Рис. 1

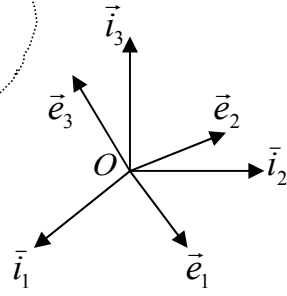


Рис. 2

Таким образом, задача определения положения твердого тела сводится к задаче определения взаимного расположения двух базисов, начала которых в общем случае не совпадают. Введем систему отсчета  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ , оси которой параллельны одноименным осям исходной системы  $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ . Тогда движение базиса  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  относительно исходной системы отсчета  $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  может быть полностью описано движением точки  $O$  (радиус-вектор  $\vec{R}_O$ ) и движением базиса  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  относительно  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  (рис. 2). Последнее представляет собой движение твердого тела с неподвижной точкой  $O$ .

Описанная схема лежит в основе всех существующих способов задания положения твердого тела, а разница в способах заключается только в разном выборе параметров, задающих положение базиса  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  относительно базиса  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ .

В дальнейшем при рассмотрении различных способов задания положения твердого тела с неподвижной точкой  $O$

будем считать базисы  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  и  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  правыми ортонормированными тройками векторов.

Направляющие косинусы  $\alpha_{kj} = (\vec{i}_k, \vec{e}_j)$  представляют собой коэффициенты в разложении ортов  $\vec{e}_j$  базиса  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  по ортам  $\vec{i}_k$  базиса  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ :

$$\vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_{kj} \cdot \vec{i}_k, \quad j=1,2,3.$$

В этом случае произвольное положение твердого тела с неподвижной точкой задается матрицей направляющих косинусов  $\mathbf{A} = \|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^3$ . В силу ортонормированности базисов матрица  $\mathbf{A}$  является ортогональной, т. е. она удовлетворяет условию  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, “ $T$ ” – знак транспонирования. Последнее условие определяет 6 независимых уравнений на коэффициенты  $\alpha_{kj}$ . Поэтому только три из девяти элементов матрицы направляющих косинусов являются независимыми.

Матрица направляющих косинусов удовлетворяет дополнительному условию  $\det(\mathbf{A}) = 1$ , вытекающему из того, что рассматриваемые базисы являются правыми тройками векторов. Для данного способа имеет место взаимно однозначное соответствие между положениями тела и элементами матрицы направляющих косинусов.

Если в начальный момент времени орты связанного с телом базиса совпадают с одноименными ортами системы отсчета, то положение каждой точки тела  $\vec{r}(t)$  будет определяться через ее начальное положение  $\vec{r}(0)$  формулой  $\vec{r}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \vec{r}(0)$ . Отсюда в силу ортогональности матрицы  $\mathbf{A}$  следует, что любое движение твердого тела можно

рассматривать как зависящее от времени ортогональное преобразование в трехмерном пространстве.

Положение твердого тела с неподвижной точкой можно задавать также различными системами углов – Эйлера, Крылова и др. Суть такого описания основывается на том, что два правых ортонормированных базиса  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  и  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  можно совместить последовательными поворотами вокруг трех некопланарных осей на некоторые углы.

Рассмотрим систему углов Эйлера (рис. 3). Пусть базис  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  занимает произвольное положение. Все векторы  $\vec{i}_k$  базиса  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  можно совместить с базисными векторами  $\vec{e}_k$  с помощью следующих трех поворотов:

1. Поворот вокруг оси  $\vec{i}_3$  на угол  $\psi$  до совмещения вектора  $\vec{i}_1$  с линией узлов  $\vec{i}'_1$ , т. е. поворот, переводящий вектор  $\vec{i}_1$  в плоскость векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .
2. Поворот вокруг линии узлов  $\vec{i}'_1$  на угол  $\theta$  до совмещения орта  $\vec{i}_3$  с ортом  $\vec{e}_3$ .
3. Поворот вокруг оси  $\vec{e}_3$  на угол  $\varphi$  до полного совмещения базисов.

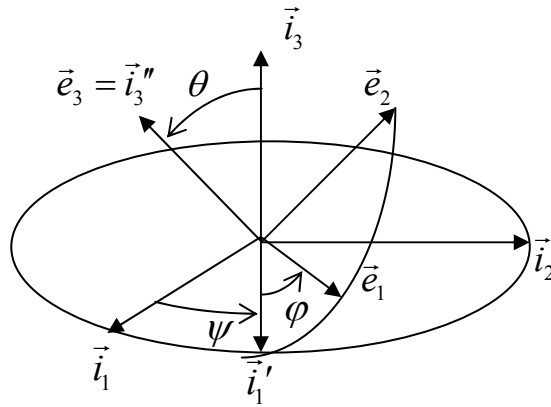


Рис. 3

Совокупность указанных поворотов переводит базис  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  в базис  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  и представляет собой последовательность поворотов на эйлеровы углы  $\psi$  (угол прецессии),  $\theta$  (угол нутации) и  $\varphi$  (угол собственного вращения).

Кватернионный способ.

Теорема 1. Произвольное положение твердого тела с неподвижной точкой  $O$  относительно базиса  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  задается некоторым нормированным кватернионом  $\Lambda$  по формулам

$$\vec{e}_k = \Lambda \circ \vec{i}_k \circ \tilde{\Lambda}; k = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

При этом каждому положению твердого тела соответствуют два значения кватерниона  $\Lambda$ , отличающиеся знаком.

Доказательство. Найдем кватернион  $\Lambda$  из соотношений (2.5), рассматривая их как систему уравнений относительно неизвестного  $\Lambda$ . Так как базисы  $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$  и  $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  являются правыми ортогональными тройками единичных векторов, то имеют место равенства



$$\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{i}_1 \circ \vec{i}_2 = \vec{i}_3, \quad (2.6)$$

в силу которых любое из уравнений (2.5) может быть получено перемножением двух других уравнений. Это означает, что уравнения системы (2.5) зависимы, и решение может быть найдено на базе любых двух ее уравнений.

Будем использовать первые два уравнения системы (2.5).

Предположим сначала, что  $\vec{i}_1 = \vec{e}_1$  и  $\vec{i}_2 = \vec{e}_2$ . Тогда из (2.5) получаем соотношения

$$\|\Lambda\| = 1; \quad \vec{i}_1 \circ \Lambda = \Lambda \circ \vec{i}_1; \quad \vec{i}_2 \circ \Lambda = \Lambda \circ \vec{i}_2,$$

из которых следует, что  $\Lambda$  коммутативен с каждым из векторов  $\vec{i}_1$  и  $\vec{i}_2$ , а это возможно только в случае, если  $\Lambda = \pm 1$ .

Пусть теперь  $\vec{i}_1 \neq \vec{e}_1$ . Будем искать решение  $\Lambda$  в виде произведения двух единичных векторов  $\vec{x}_1$  и  $\vec{x}_2$ :

$$\Lambda = \vec{x}_1 \circ \vec{x}_2, \quad \text{причем } (\vec{x}_2, \vec{i}_1) = 0.$$

В указанных предположениях уравнения приобретают вид

$$\vec{e}_1 = \vec{x}_1 \circ \vec{i}_1 \circ \vec{x}_1; \quad \vec{e}_2 = \vec{x}_1 \circ \vec{x}_2 \circ \vec{i}_2 \circ \vec{x}_2 \circ \vec{x}_1. \quad (2.5^*)$$

Умножая первое уравнение на вектор  $\vec{i}_1$  справа, получаем

уравнение  $(\vec{x}_1 \circ \vec{i}_1)^2 = (\vec{e}_1 \circ \vec{i}_1)$ , из которого на основе формулы (1.19) находим решение  $\vec{x}_1$ :

$$\vec{x}_1 = (\vec{e}_1 \circ \vec{i}_1)^{\frac{1}{2}} \circ (-\vec{i}_1) = \pm \frac{\vec{e}_1 - \vec{i}_1}{|\vec{e}_1 - \vec{i}_1|}; \quad (\vec{e}_1 \neq \vec{i}_1). \quad (2.7)$$

Аналогично из второго уравнения получаем решение  $\vec{x}_2$ :

$$\vec{x}_2 = (\vec{e}'_2 \circ \vec{i}_2)^{\frac{1}{2}} \circ (-\vec{i}_2) = \pm \frac{\vec{e}'_2 - \vec{i}_2}{|\vec{e}'_2 - \vec{i}_2|}; \quad (\vec{e}'_2 \neq \vec{i}_2), \quad (2.8)$$

где  $\vec{e}'_2 = \vec{x}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \vec{x}_1$ .

Теперь нужно убедиться, что выполняются все предположения, использованные при построении решения.

Условие на  $\vec{x}_1$  очевидно выполняется, так как в рассматриваемом случае  $\vec{i}_1 \neq \vec{e}_1$  и решение (2.7) является единичным вектором. Далее, кватернион  $\vec{e}'_2 = \vec{x}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \vec{x}_1$ , входящий в решение  $\vec{x}_2$ , также является единичным вектором, поскольку  $\tilde{\vec{e}}'_2 = -\vec{x}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \vec{x}_1 = -\vec{e}'_2$ . Поэтому для случая  $\vec{e}'_2 \neq \vec{i}_2$  решение  $\vec{x}_2$ , определяемое выражением (2.8), также является единичным вектором, а проверка условия  $(\vec{x}_2, \vec{i}_1) = 0$  сводится к проверке условия  $(\vec{e}'_2, \vec{i}_1) = 0$ . Для проверки этого условия выразим вектор  $\vec{i}_1$  из первого уравнения системы (2.5\*) и вычислим произведение  $(\vec{e}'_2 \circ \vec{i}_1)$ :

$$(\vec{e}'_2 \circ \vec{i}_1) = \vec{x}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \vec{x}_1 \circ \vec{x}_1 \circ \vec{e}_1 \circ \vec{x}_1 = \vec{x}_1 \circ \vec{e}_3 \circ \vec{x}_1.$$

Отсюда следует  $(\vec{e}'_2 \circ \vec{i}_1) \tilde{\phantom{e}} = -(\vec{e}'_2 \circ \vec{i}_1)$ , т. е.  $(\vec{e}'_2, \vec{i}_1) = 0$ .

Предположим теперь, что  $\vec{e}'_2 = \vec{i}_2$ . В этом случае решение (2.8) находится из формулы (1.19\*) и имеет следующий вид:  $\vec{x}_2 = \vec{\xi} \circ (-\vec{i}_2)$ , где  $\vec{\xi}$  – произвольный единичный вектор. В силу исходных предположений из всего множества этих решений нужно выбрать только те, которые являются векторами и удовлетворяют условию  $(\vec{x}_2, \vec{i}_1) = 0$ . Отсюда

следует  $(\vec{\xi}, \vec{i}_2) = 0$ ,  $(\vec{\xi} \times \vec{i}_2, \vec{i}_1) = 0$ , т. е.  $\vec{\xi} = \pm \vec{i}_1$ ,  
 $\vec{x}_2 = \pm \vec{i}_3$ .

Оставшийся нерассмотренным случай  $\vec{i}_1 = \vec{e}_1$ ,  $\vec{i}_2 \neq \vec{e}_2$  сводится к рассмотренному выше случаю заменой индексов.

Из вида полученных решений следует, что решение  $\Lambda$  системы (2.5) всегда является нормированным кватернионом, который имеет 2 значения разных знаков. Теорема доказана.

В дальнейшем условимся считать начальным положением твердого тела такое его положение, когда орты связанного с телом базиса  $OE(O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$  совпадают с одноименными ортами системы отсчета  $OI(O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3)$ . Тогда в соответствии с (2.5) конечное положение  $\vec{r}'$  произвольной точки тела определяется через его начальное положение  $\vec{r}$  формулой

$$\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \tilde{\Lambda}. \quad (2.9)$$

Теорема 2 (теорема Эйлера о конечном повороте). Любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг некоторой оси  $\vec{\varepsilon}$  на некоторый угол  $\mathcal{G}$ . При этом ось  $\vec{\varepsilon}$  конечного поворота коллинеарна векторной части кватерниона  $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$ , а угол  $\mathcal{G}$  конечного поворота определяется формулой  $\mathcal{G} = 2 \arccos \lambda_0$ .

Доказательство. Представим кватернион  $\Lambda$ , задающий положение тела, в тригонометрической форме

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda} = \cos \alpha + \vec{\varepsilon} \cdot \sin \alpha; \quad |\vec{\varepsilon}| = 1 \quad (2.11)$$

и исследуем преобразование (2.9). Дополним вектор  $\vec{\varepsilon}$  единичными векторами  $\vec{\mu}$  и  $\vec{\eta}$  до правой ортогональной тройки  $(\vec{\varepsilon} \circ \vec{\mu} = \vec{\eta})$  таким образом, чтобы вектор  $\vec{r}$  оказался в плоскости векторов  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{\mu}$  (рис. 4). Тогда,

записывая вектор  $\vec{r}$  в виде  $\vec{r} = |\vec{r}| \cdot (\vec{\varepsilon} \cos \psi + \vec{\mu} \sin \psi)$  и используя условие ортогональности  $\vec{\mu}$  и  $\vec{\lambda}$ , получаем  $\vec{\mu} \circ \vec{\lambda} = \Lambda \circ \vec{\mu}$ ,  
 $\vec{r}' = |\vec{r}| \cdot (\Lambda \circ \vec{\varepsilon} \circ \vec{\lambda} \cos \psi + \Lambda \circ \vec{\mu} \circ \vec{\lambda} \sin \psi) =$   
 $= |\vec{r}| \cdot (\vec{\varepsilon} \cos \psi + \Lambda^2 \circ \vec{\mu} \sin \psi) = |\vec{r}| \cdot (\vec{\varepsilon} \cos \psi +$   
 $+ (\vec{\mu} \cos 2\alpha + \vec{\eta} \sin 2\alpha) \sin \psi) = |\vec{r}| \cdot (\vec{\varepsilon} \cos \psi + \vec{\mu}' \sin \psi).$

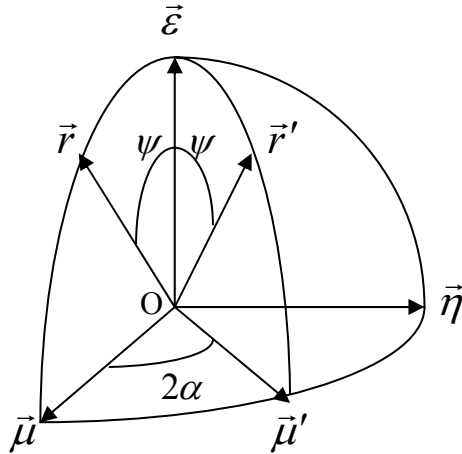


Рис. 4

Из полученного выражения следует, что преобразование (2.9) представляет собой поворот вокруг оси  $\vec{\varepsilon}$  на угол  $\vartheta = 2\alpha = 2 \arccos \lambda_0$ . Теорема доказана.

В дальнейшем на основании на доказанной теореме будем говорить, что кватернион  $\Lambda$  задает поворот из базиса  $OI$  в базис  $OE$ , если этот кватернион связывает векторы этих базисов формулами (2.5). Обратное преобразование задается

обратным кватернионом  $\tilde{\Lambda}$ , поскольку формулы этого преобразования имеют вид  $\vec{i}_k = \tilde{\Lambda} \circ \vec{e}_k \circ \Lambda$ ;  $k = 1, 2, 3$ .

На основании формул преобразования базисов (2.5) можно установить связь между компонентами кватерниона в разных базисах. Пусть положение базиса  $OI'$  относительно базиса  $OI$  задается кватернионом  $\Lambda$ . Рассмотрим некоторый кватернион  $M$  и обозначим через  $\mu_k$  и  $\mu'_k$  его компоненты в базисе  $OI$  и  $OI'$  соответственно. Тогда этот кватернион можно записать в виде следующих двух выражений:

$$M = \mu_0 + \sum_1^3 \mu_k \vec{i}_k = \mu_0 + \sum_1^3 \mu'_k \vec{i}'_k.$$

Из формул преобразования базисов  $\vec{i}'_k = \Lambda \circ \vec{i}_k \circ \tilde{\Lambda}$  имеем

$$M = \mu_0 + \sum_1^3 \mu_k \vec{i}_k = \Lambda \circ (\mu_0 + \sum_1^3 \mu'_k \vec{i}'_k) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ M' \circ \tilde{\Lambda}.$$

Кватернион  $M' = \mu_0 + \sum \mu'_k \vec{i}'_k$  будем называть отображением кватерниона  $M$  из базиса  $OI'$  в базис  $OI$ . В соответствии с данным определением отображение  $M'$  имеет точно такие же компоненты в базисе  $OI$ , какие имеет исходный кватернион  $M$  в базисе  $OI'$  (рис. 5). При этом формула связи между кватернионом и его отображением имеет вид

$$M' = \tilde{\Lambda} \circ M \circ \Lambda. \quad (2.13)$$

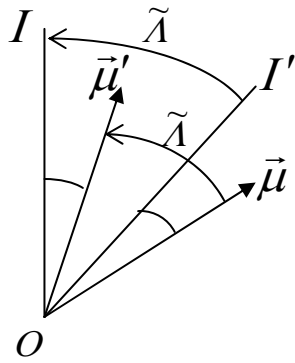


Рис. 5

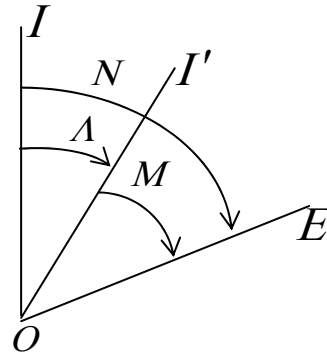


Рис. 6

В соответствии с формулой (2.13) и рис. 5 отображение  $M'$  получается из  $M$  в результате обратного поворота из базиса  $OI'$  в базис  $OI$ . Соотношение (2.13) представляет собой искомую формулу преобразования компонент неизменного кватерниона при замене базиса, поскольку в результате проектирования на базис  $OI$  оно определяет связь между компонентами  $\mu_k$  кватерниона  $M$  в базисе  $OI$  и его компонентами  $\mu'_k$  в базисе  $OI'$ . Заметим, что компоненты кватерниона в разных базисах связаны обратным преобразованием по отношению к преобразованию базисов.

Формулы сложения поворотов.

Пусть кватернион  $\Lambda$  задает поворот из базиса  $OI$  в базис  $OI'$ , а кватернион  $M$  – поворот из базиса  $OI'$  в базис  $OE$  (рис. 6). Для нахождения кватерниона  $N$  результирующего поворота из базиса  $OI$  в базис  $OE$  используем формулы (2.5), в силу которых имеем

$$\vec{i}'_k = \Lambda \circ \vec{i}_k \circ \tilde{\Lambda}; \quad \vec{e}_k = M \circ \vec{i}'_k \circ \tilde{M}; \quad k = 1, 2, 3.$$

Отсюда получаем

$$\vec{e}_k = M \circ A \circ \vec{i}_k \circ \tilde{A} \circ \tilde{M} = N \circ \vec{i}_k \circ \tilde{N}; \quad k = 1, 2, 3,$$

т. е. кватернион  $N$  определяется формулой

$$N = M \circ A. \quad (2.14)$$

В случае  $n$  поворотов, задаваемых кватернионами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , формула сложения поворотов имеет вид

$$A = A_n \circ A_{n-1} \circ \dots \circ A_1. \quad (2.15)$$

Эта формула легко доказывается методом индукции.

Использование формулы (2.15) не вызывает затруднений, когда кватернионы составляющих поворотов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  заданы своими компонентами в одном и том же базисе. В этих случаях по формуле (2.15) вычисляются компоненты результирующего кватерниона в этом же базисе.

Если же кватернионы составляющих поворотов заданы в разных базисах, то необходимо использовать формулы (2.13) для представления всех кватернионов в ортах того базиса, в котором требуется найти результирующий кватернион.

Условимся называть собственным базисом кватерниона  $A$  тот базис, поворот из которого задается этим кватернионом. Компоненты кватерниона  $A$  в его собственном базисе называются параметрами Родрига–Гамильтона и обозначаются  $\lambda_k^*$ . Если, например, кватернион  $A$  задает поворот из базиса  $OI$ , то параметрами Родрига–Гамильтона являются проекции  $A$  на базис  $OI$ , т. е.

$$\lambda_0^* = \lambda_0, \quad \lambda_k^* = \lambda_k^I = (\vec{\lambda}, \vec{i}_k); \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Получим формулу сложения поворотов в параметрах Родрига–Гамильтона.

В рассмотренной задаче сложения двух поворотов (рис. 6) для кватернионов  $A$  и  $N$  параметрами Родрига–Гамильтона являются их компоненты в базисе  $OI$ , а для кватерниона  $M$  – компоненты в базисе  $OI'$ . Поэтому

указанные кватернионы выражаются через параметры Родрига–Гамильтона следующими соотношениями:

$$A = \lambda_0 + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^* \vec{i}_k, \quad N = \eta_0 + \sum_{k=1}^3 \eta_k^* \vec{i}_k, \quad M = \mu_0 + \sum_{k=1}^3 \mu_k^* \vec{i}_k.$$

Используя формулу (2.13), получаем из (2.14) следующее выражение для результирующего кватерниона  $N$ :

$N = A \circ M' = A \circ M^*$ , где  $M^* = \mu_0 + \sum \mu_k^* \vec{i}_k$  – отображение кватерниона  $M$  из его собственного базиса  $OI'$  в базис  $OI$ . В полученной формуле все кватернионы записаны в ортах одного и того же базиса  $OI$ , а их компонентами являются параметры Родрига–Гамильтона. Поэтому данная формула связывает параметры Родрига–Гамильтона результирующего поворота и составляющих поворотов.

Если для кватернионов  $A$  и  $N$  определить их соответствующие отображения  $A^*$  и  $N^*$  на базис  $OI$ , то в силу очевидных равенств  $A^* = A$ ,  $N^* = N$  формула сложения поворотов запишется в следующем виде:

$$N = N^* = A^* \circ M^*. \quad (2.17)$$

В случае  $n$  поворотов формула сложения в параметрах Родрига–Гамильтона имеет вид

$$A = A^* = A_1^* \circ A_2^* \circ \dots \circ A_n^*, \quad (2.18)$$

где  $A_k^*$  – отображение кватерниона  $k$ -о поворота  $A_k$  из его собственного базиса на базис  $OI$ , относительно которого определяется положение тела.

Обратим внимание, что в формуле сложения поворотов (2.18) отображения перемножаются в обратном порядке по отношению к порядку умножения исходных кватернионов.

Используем полученные формулы (2.18) для определения связи между параметрами Родрига–Гамильтона, задающими положение твердого тела, и углами Эйлера (рис. 3).



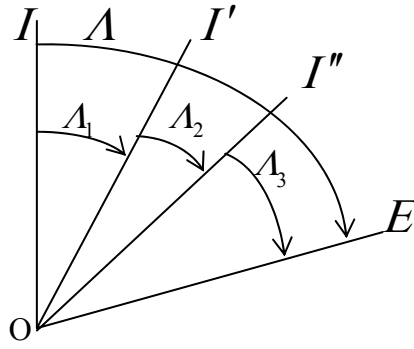


Рис. 7

Конечное положение связанного с телом базиса  $OE$  получается из начального положения  $OI$  в результате трех поворотов (рис. 7). Первым является поворот из положения  $OI$  вокруг оси  $\vec{i}_3$  на угол прецессии  $\psi$ . Кватернион этого поворота  $\Lambda_1$  и его отображение  $\Lambda_1^*$  имеют вид

$$\Lambda_1 = \cos \frac{\psi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\psi}{2} = \Lambda_1^*.$$

Второй поворот осуществляется из положения  $OI'$  вокруг оси  $\vec{i}'_1$  на угол  $\theta$ . Поэтому имеем

$$\Lambda_2 = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{i}'_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad \Lambda_2^* = \cos \frac{\theta}{2} + \bar{i}'_1 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Для третьего поворота, осуществляемого из положения  $OI''$  вокруг оси  $\vec{i}''_3$  на угол  $\varphi$ , получаем

$$\Lambda_3 = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}''_3 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \Lambda_3^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{i}''_3 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Вычислив теперь в соответствии с формулой (2.18)

произведение  $A^* = A_1^* \circ A_2^* \circ A_3^*$ , найдем связь между параметрами Родрига-Гамильтона и углами Эйлера:

$$\begin{aligned} \lambda_0^* &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, \quad \lambda_1^* = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2^* &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad \lambda_3^* = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Соотношения (2.19) дают возможность определить ось и угол конечного поворота твердого тела как функции углов Эйлера, а именно, направление оси конечного поворота по отношению к неподвижному базису  $OI$  определяется компонентами  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$ , а угол конечного поворота вычисляется по формуле

$$\alpha = 2 \arccos(\lambda_0^*) = 2 \arccos \left[ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \right]. \quad (2.20)$$

## 2.2. Угловая скорость твердого тела.

### Кинематические уравнения движения твердого тела. Формулы распределения скоростей и ускорений точек твердого тела

В предыдущем параграфе было установлено, что произвольное положение твердого тела относительно некоторой системы отсчета  $A\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$  может быть задано радиусом-вектором  $\bar{R}_O$  некоторой точки  $O$  этого тела и нормированным кватернионом  $A$ , определяющим ориентацию связанной с телом системы  $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$

относительно системы  $O\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$  с началом в точке  $O$  и оортами, параллельными одноименным оортам исходной системы отсчета  $A\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$  (рис. 1).

Поскольку для произвольной точки тела положение вектора  $\bar{r}$  в связанной с телом системе  $OE$  остается неизменным, т.е. компоненты  $r_k$  в выражении  $\bar{r} = \sum_{k=1}^3 r_k \bar{e}_k$  постоянны, то в силу формулы (2.4) положение  $\bar{R}$  этой точки относительно системы отсчета  $A\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$  задается равенством

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{R}_O + \bar{r} = \bar{R}_O + \sum_{k=1}^3 r_k \bar{e}_k = \\ &= A \circ \left( \sum_{k=1}^3 r_k \bar{i}_k \right) \circ \tilde{A} = \bar{R}_O + A \circ \bar{r}^0 \circ \tilde{A},\end{aligned}$$

где  $\bar{r}^0 = \sum_{k=1}^3 r_k \bar{i}_k$  – постоянный вектор, который является отображением вектора  $\bar{r}$  из связанного с телом базиса  $OE$  в базис  $OI$  и определяет начальное положение рассматриваемой точки тела в системе  $O\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$  (когда базисы  $OE$  и  $OI$  совпадают).

Найдем скорость произвольной точки тела в системе  $A\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$ . Учитывая, что для нормированного кватерниона  $A$  выполняются соотношения

$$A \circ \tilde{A} = 1, \Rightarrow \dot{A} \circ \tilde{A} + A \circ \dot{\tilde{A}} = 0, \quad (2.19)$$

получаем

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \dot{\bar{R}}_O + \dot{\bar{r}} = \bar{V}_O + \dot{A} \circ \bar{r}^0 \circ \tilde{A} + A \circ \bar{r}^0 \circ \dot{\tilde{A}} = \\ &= \bar{V}_O + \dot{A} \circ \tilde{A} \circ \bar{r} - \bar{r} \circ \dot{A} \circ \tilde{A},\end{aligned} \quad (2.20)$$

где  $\bar{V}_O$  – скорость точки  $O$  в системе  $A\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$ , а  $\dot{A}$  – производная по времени от кватерниона  $A$  в этой же системе:

$$\dot{A} = \dot{\lambda}_0 + \sum_1^3 \dot{\lambda}_k \bar{i}_k.$$

Выражение  $\dot{A} \circ \tilde{A}$  является вектором, т.к. в силу (2.19) и очевидной перестановочности операций сопряжения и дифференцирования имеем:

$$(\dot{A} \circ \tilde{A}) = (A \circ \tilde{\dot{A}}) = -(\dot{A} \circ \tilde{A}), \Rightarrow sqal(\dot{A} \circ \tilde{A}) = 0.$$

Поэтому с учетом правил кватернионного умножения векторов формула (2.20) записывается в виде

$$\bar{V} = \bar{V}_O + \dot{r} = \bar{V}_O + 2(\dot{A} \circ \tilde{A}) \times \bar{r} = \bar{V}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (2.21)$$

$$\text{где } \bar{\omega} = 2\dot{A} \circ \tilde{A} \quad (2.22)$$

– вектор угловой скорости твердого тела относительно системы  $A\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$ , или системы  $O\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$  (в силу коллинеарности указанных систем выражения (2.22), вычисленные в этих системах, тождественно совпадают).

Покажем, что вектор угловой скорости не зависит от выбора базиса в теле. Для этого свяжем с телом другой базис  $O'E'$  с началом в точке  $O'$  и осями  $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ . Пусть кватернион  $C$  задает положение базиса  $O'E'$  относительно  $O'E$ . Поскольку взаимная ориентация базисов  $O'E'$  и  $O'E$  не изменяется с течением времени, то отображение  $C^*$  кватерниона  $C$  на базис  $O'I$  будет являться постоянным кватернионом в базисе  $O'I$  ( $\dot{C}^* = 0$ ). Поэтому, записывая кватернион  $A'$ , задающий положение  $O'E'$  относительно  $O'I$ , в виде  $A' = A \circ C^*$ , получаем

$$\bar{\omega}' = 2\dot{A}' \circ \tilde{A}' = 2\dot{A} \circ C^* \circ \tilde{C}^* \circ \tilde{A} = 2\dot{A} \circ \tilde{A} = \bar{\omega}.$$

Угловая скорость тела одинакова также для разных систем отсчета, взаимная ориентация которых остается неизменной. Пусть взаимное положение базисов  $OI$  и  $OI'$  неизменно. Тогда кватернион  $C$ , задающий положение  $OI$  относительно  $OI'$  является постоянным ( $\dot{C} = 0$ ), а производные по времени от любого вектора в этих базисах совпадают. Так как кватернионы  $A$  и  $A'$ , определяющие положение тела относительно  $OI$  и  $OI'$ , связаны равенством  $A' = A \circ C$ , то по аналогии с предыдущим случаем получаем, что угловая скорость тела  $\vec{\omega}'$  относительно базиса  $OI'$  совпадает с угловой скоростью тела  $\vec{\omega}$  относительно базиса  $OI$ .

Таким образом, угловая скорость является дифференциальной характеристикой движения твердого тела как целого и не зависит от выбора каких-либо точек в теле. Поэтому лишены смысла формулировки типа “угловая скорость точки”, или “угловая скорость тела относительно точки”, а можно говорить только об угловой скорости твердого тела относительно какой-то системы отсчета.

Полученный результат составляет содержание теоремы об угловой скорости твердого тела. Теорема утверждает, что при произвольном движении твердого тела всегда существует единственный вектор  $\vec{\omega}$ , который связывает скорости любых двух точек тела формулой (2.21). Угловую скорость можно трактовать также как вектор, с помощью которого производная по времени от радиуса-вектора  $\vec{r}$ , соединяющего любые две точки твердого тела, записывается в виде

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.23)$$

Поясним смысл вектора угловой скорости. Пусть движение тела относительно системы  $O\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$  представляет собой вращение вокруг неподвижной оси  $\bar{\xi}$ . Тогда,

обозначая через  $\varphi$  угол поворота тела вокруг этой оси, получаем

$$A = \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{\xi} \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(-\sin \frac{\varphi}{2} + \bar{\xi} \sin \frac{\varphi}{2})\dot{\varphi}; \quad (\dot{\bar{\xi}} = 0),$$

и в соответствии с формулой (2.22) вектор  $\vec{\omega}$  записывается в виде  $\vec{\omega} = 2\dot{A} \circ \tilde{A} = \bar{\xi}\dot{\varphi}$ , т.е. угловая скорость направлена по оси поворота тела и по величине равна производной по времени от угла поворота.

Чтобы выяснить смысл вектора  $\vec{\omega}$  в случае произвольного движения твердого тела, рассмотрим два бесконечно близких положения связанного с телом базиса  $OE(t_0)$  и  $OE(t_0 + dt)$ . В силу теоремы Эйлера базис  $OE(t_0 + dt)$  получается из базиса  $OE(t_0)$  бесконечно малым поворотом вокруг некоторой оси  $\vec{e}$ , проходящей через точку  $O$ , на бесконечно малый угол  $\alpha$ . Этот поворот задается кватернионом

$$\delta A = \cos \frac{\alpha}{2} + \vec{e} \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

а для  $A(t)$  имеем  $A(t) = \delta A \circ A(t_0)$ . Отсюда на основании формулы (2.22) получаем для угловой скорости выражение

$$\vec{\omega} = 2(\delta A) \circ (\delta A) \tilde{A} = \vec{e} \cdot \dot{\alpha} + \dot{\vec{e}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} - \vec{e} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}).$$

Из этого выражения в силу бесконечной малости угла  $\alpha$  следует  $\vec{\omega} = \vec{e} \cdot \dot{\alpha}$ , т.е. угловая скорость направлена по оси бесконечно малого поворота тела и по величине равна производной по времени от угла бесконечно малого поворота.

Ось бесконечно малого поворота называется мгновенной осью вращения тела. Скорости точек тела, находящихся на

этой оси, равны скорости полюса  $O$  и равны нулю, если этот полюс неподвижен относительно системы отсчета.

Движение твердого тела с угловой скоростью, равной нулю, называется поступательным движением. В этом случае производная  $\dot{A}$ , определяемая из (2.22) уравнением

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \circ A, \quad (2.24)$$

равна нулю, т.е.  $A$  – постоянный кватернион, что соответствует неизменной ориентации связанного с телом базиса  $OE$  относительно базиса  $OI$ . В силу (2.21) скорости всех точек тела при поступательном движении одинаковы.

Уравнения (2.24) являются кинематическими уравнениями вращательного движения твердого тела, записанными в кватернионах, и называются уравнениями Пуассона. Интегрирование этих уравнений дает кватернион  $A(t)$ , определяющий ориентацию тела.

При практическом использовании кинематических уравнений (2.24) кватернион  $A$  целесообразно задавать компонентами в системе отсчета  $OI$ , т.е. параметрами Родрига-Гамидильтона. В этом случае

$$A = \lambda_0 + \sum_1^3 \lambda_k^* \cdot \vec{i}_k, \quad \dot{A} = \dot{\lambda}_0 + \sum_1^3 \dot{\lambda}_k^* \cdot \vec{i}_k.$$

Представляя вектор  $\vec{\omega}$  также его компонентами в базисе

$OI$ , т.е.  $\vec{\omega} = \sum_1^3 \omega_k^I \vec{i}_k$  и выполняя умножение в формуле

(2.24), получим четыре скалярных дифференциальных уравнения, которые связывают параметры Родрига-Гамильтона, задающие положение тела, с компонентами угловой скорости тела в базисе  $OI$ .

Однако во многих практических задачах угловая скорость задается компонентами на связанный с телом базис  $OE$  (например, в системах ориентации космических аппаратов

датчики угловых скоростей измеряют проекции угловой скорости на связанные с аппаратом оси). В этих случаях уравнение (2.24) не может быть непосредственно использовано, т.к.  $\Lambda$  и  $\vec{\omega}$  заданы в разных базисах. Но эта проблема легко решается использованием формул преобразования базисов (2.5), с помощью которых вектор  $\vec{\omega}$  записывается в виде

$$\vec{\omega} = \sum_1^3 \omega_k^E \vec{e}_k = \Lambda \circ \left( \sum_1^3 \omega_k^E \vec{i}_k \right) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \vec{\omega}^E \circ \tilde{\Lambda},$$

где  $\vec{\omega}^E = \sum_1^3 \omega_k^E \vec{i}_k$  – вектор, представляющий собой

отображение вектора  $\vec{\omega}$  из базиса  $OE$  в базис  $OI$ . Подставляя это выражение в (2.24), получим вторую форму кинематических уравнений Пуассона:

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \vec{\omega}^E. \quad (2.25)$$

Поскольку теперь  $\Lambda$  и  $\vec{\omega}^E$  записаны в ортах одного и того же базиса  $OI$ , то уравнение (2.25) связывает параметры Родрига-Гамильтона с компонентами угловой скорости тела на оси связанного с телом базиса  $OE$ .

Обратимся теперь к формуле (2.21). Эта формула называется формулой Эйлера для распределения скоростей точек твердого тела. Дифференцирование ее по времени с учетом (2.23) дает формулу распределения ускорений в твердом теле

$$\vec{W} = \vec{W}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (2.26)$$

где  $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$  – угловое ускорение твердого тела, а  $\vec{r}$  – вектор, соединяющий точку  $O$  с рассматриваемой точкой.

В соответствии с (2.26) ускорение  $\vec{W}$  произвольной точки тела может быть вычислено как сумма ускорения  $\vec{W}_O$



некоторого полюса  $O$ , а также вращательного  $\overline{W}^{ep}$  и осецистремительного  $\overline{W}^{oc}$  ускорения рассматриваемой точки, где

$$\overline{W}^{ep} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \overline{W}^{oc} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Формулы (2.21) и (2.26) являются основными рабочими формулами при решении задач на определение скоростей и ускорений точек твердого тела. Из них следует, что скорость и ускорение любой точки тела могут быть найдены, если известны скорость и ускорение какой-либо одной его точки  $O$ , а также угловая скорость и угловое ускорение тела.

В свою очередь формула (2.21) может быть использована для определения угловой скорости тела по известным скоростям его точек. Заметим при этом, что в общем случае (при пространственном движении твердого тела) скоростей двух точек тела недостаточно для однозначного определения его угловой скорости, т.к. векторное уравнение (2.21), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестного вектора  $\vec{\omega}$ , определяет только два независимых скалярных уравнения (система (2.21) вырождена).

Из формулы (2.21) следует также, что проекции скоростей двух точек твердого тела на направление, соединяющее эти точки, одинаковы. Этот результат получается скалярным умножением на  $\vec{r}$  левой и правой части уравнения (2.21).

Рассмотрим теперь метод сложного движения. Формулировка задачи на сложное движение твердого тела состоит в следующем. Пусть задано движение связанного с твердым телом базиса  $OE$  относительно базиса  $BI'$ , и задано движение базиса  $BI'$  относительно системы отсчета  $AI$  (рис. 8). Требуется найти движение базиса  $OE$  относительно  $AI$ .

В этой задаче движение базиса  $OE$  относительно  $BI'$

называется относительным движением, а движение базиса  $BI'$  относительно  $AI$  – переносным движением тела.

Движение базиса  $BI'$  относительно  $AI$  задается скоростью  $\vec{V}_B$  и ускорением  $\vec{W}_B$  точки  $B$  относительно системы  $AI$ , а также угловой скоростью  $\vec{\omega}^{\text{пер}}$  и угловым ускорением  $\vec{\varepsilon}^{\text{пер}}$  базиса  $BI'$  относительно  $AI$ . Пусть, в свою очередь,  $\vec{V}_O^{\text{отн}}$  и  $\vec{W}_O^{\text{отн}}$  задают скорость и ускорение точки  $O$  в системе  $BI'$ , а  $\vec{\omega}^{\text{отн}}$  и  $\vec{\varepsilon}^{\text{отн}}$  – угловую скорость и угловое ускорение связанного с телом базиса  $OE$  относительно  $BI'$ .

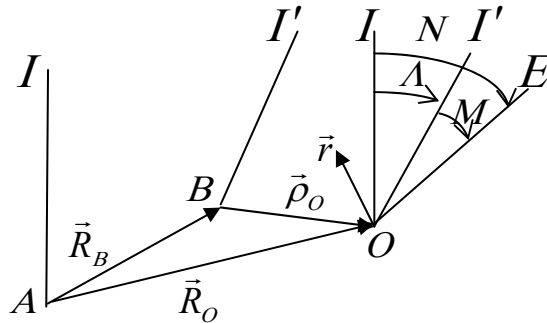


Рис. 8

Чтобы найти движение тела относительно системы отсчета  $AI$ , нужно найти скорость  $\vec{V}_O$  и ускорение  $\vec{W}_O$  точки  $O$  в этой системе, а также найти угловую скорость  $\vec{\omega}$  и угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$  базиса  $OE$  относительно  $AI$ .

Найдем сначала скорость и ускорение точки  $O$  в системе  $AI$ . Записывая вектор  $\vec{\rho}_O$ , определяющий положение точки  $O$  в базисе  $BI'$ , в виде  $\vec{\rho}_O = \sum \rho_O^k \vec{i}'_k$  и дифференцируя

вектор  $\vec{R}_O = \vec{R}_B + \vec{\rho}_O$  по времени в системе  $AI$ , получаем

$$\vec{V}_O = \dot{\vec{R}}_B + \dot{\vec{\rho}}_O = \vec{V}_B + \sum_1^3 \dot{\rho}_O^k \vec{i}'_k + \sum_1^3 \rho_O^k \dot{\vec{i}}'_k \quad (2.27)$$

Замечая далее, что вектор  $\sum_1^3 \dot{\rho}_O^k \vec{i}'_k = \vec{V}_O^{\text{отн}}$  представляет

собой относительную скорость точки  $O$  в системе  $BI'$ , а  $\dot{\vec{i}}'_k = \vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{i}'_k$ , имеем

$$\vec{V}_O = \vec{V}_O^{\text{отн}} + \vec{V}_B + \vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{\rho}_O = \vec{V}_O^{\text{отн}} + \vec{V}_O^{\text{пер}}, \quad (2.28)$$

где  $\vec{V}_O^{\text{пер}} = \vec{V}_B + \vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{\rho}_O$  – переносная скорость точки  $O$ . В соответствии с полученной ранее формулой распределения скоростей в твердом теле (2.21) вектор  $\vec{V}_O^{\text{пер}}$  равен скорости той точки системы  $BI'$ , рассматриваемой как твердое тело, в которой в данный момент находится точка  $O$ . Эта скорость получается “замораживанием” относительного движения точки  $O$  в системе  $BI'$ .

Выражение для ускорения точки  $O$  в системе  $AI$  получается дифференцированием вектора скорости этой точки (2.27) по времени в системе  $AI$ :

$$\begin{aligned} \vec{W}_O &= \vec{W}_B + \sum_1^3 \ddot{\rho}_O^k \vec{i}'_k + 2 \sum_1^3 \dot{\rho}_O^k \dot{\vec{i}}'_k + \sum_1^3 \rho_O^k \frac{d}{dt} (\vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{i}'_k) = \\ &= \left[ \vec{W}_B + \vec{\varepsilon}^{\text{пер}} \times \vec{\rho}_O + \vec{\omega}^{\text{пер}} \times (\vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{\rho}_O) \right] + \\ &+ \sum_1^3 \ddot{\rho}_O^k \vec{i}'_k + 2 \vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{V}_O^{\text{отн}}. \end{aligned}$$

В полученном выражении первое слагаемое, выделенное скобками, дает в соответствии с формулой (2.26) ускорение той точки системы  $BI'$ , как твердого тела, в которой в рассматриваемый момент находится движущаяся

относительно этой системы точка  $O$ . Указанное слагаемое называется переносным ускорением точки  $O$ , обозначается  $\vec{W}_O^{\text{пер}}$  и вычисляется “замораживанием” точки  $O$  в системе  $BI'$ .

Второе слагаемое  $\vec{W}_O^{\text{отн}} = \sum_1^3 \ddot{\rho}_O^k \vec{i}'_k$  представляет собой

относительное ускорение точки  $O$  в системе  $BI'$ , а третье слагаемое  $\vec{W}_O^{\text{кор}} = 2\vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{V}_O^{\text{отн}}$  называется кориолисовым ускорением точки  $O$ . Таким образом, формула для ускорения точки  $O$  записывается в виде:

$$\vec{W}_O = \vec{W}_O^{\text{пер}} + \vec{W}_O^{\text{отн}} + \vec{W}_O^{\text{кор}}. \quad (2.29)$$

Формулы (2.28) и (2.29) дают правило вычисления скоростей и ускорений точек методом сложного движения. Формула (2.29) для ускорений называется формулой Кориолиса.

Чтобы найти угловую скорость  $\vec{\omega}$  твердого тела в системе  $AI$ , запишем скорость произвольной точки тела в этой системе. С одной стороны, в силу формулы распределения скоростей в твердом теле (2.11) скорость точки может быть записана через искомую угловую скорость  $\vec{\omega}$  в виде  $\vec{V} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}$  (рис. 8). С другой стороны, скорость  $\vec{V}$  можно вычислить по правилам сложного движения точки:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}^{\text{пер}} + \vec{V}^{\text{отн}} = \vec{V}_B + \vec{\omega}^{\text{пер}} \times (\vec{\rho}_O + \vec{r}_i) + \\ &+ V_O^{\text{отн}} + \vec{\omega}^{\text{отн}} \times \vec{r} = \vec{V}_B + \vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{\rho}_O + \vec{V}_O^{\text{отн}} + \\ &+ (\vec{\omega}^{\text{пер}} + \vec{\omega}^{\text{отн}}) \times \vec{r} = \vec{V}_O + (\vec{\omega}^{\text{пер}} + \vec{\omega}^{\text{отн}}) \times \vec{r}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности  $\vec{r}$  получаем для угловой скорости тела в системе  $AI$  формулу

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{\text{пер}} + \vec{\omega}^{\text{отн}}. \quad (2.30)$$

Формулу сложения угловых скоростей (2.30) можно установить также, используя формулу (2.22), которая определяет угловую скорость одного базиса относительно другого как функцию кватерниона, задающего взаимную ориентацию этих базисов. Обозначим через  $OI$  и  $OI'$  базисы с началом в точке  $O$  и ортами, параллельными одноименным ортам базисов  $AI$  и  $BI'$ , соответственно (рис.8). Пусть кватернион  $\Lambda$  задает положение базиса  $OI'$  относительно  $OI$ , а кватернионом  $M$  – положение  $OE$  относительно  $OI'$ . Тогда по формуле сложения поворотов (2.17), получаем, что положение базиса  $OE$  относительно  $OI$  определяется кватернионом  $N = \Lambda \circ M^*$ , где  $M^* = \tilde{\Lambda} \circ M \circ \Lambda$  – отображение кватерниона  $M$  из его собственного базиса  $OI'$  в базис  $OI$ . При этом угловая скорость базиса  $OE$  относительно  $OI$  в соответствии с (2.22) записывается в виде

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= 2N \circ \dot{\tilde{N}} = 2(\dot{\Lambda} \circ M^* + \Lambda \circ \dot{M}^*) M^* \circ \tilde{\Lambda} = \\ &= 2\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} + 2\Lambda \circ \dot{M}^* \circ \tilde{M}^* \circ \tilde{\Lambda}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

С другой стороны, заданные угловые скорости переносного и относительного движения имеют следующий вид

$\vec{\omega}^{\text{пер}} = 2\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda}$ ,  $\vec{\omega}^{\text{отн}} = 2\dot{M}_{I'} \circ \tilde{M}$ , где  $\dot{M}_{I'}$  – производная от кватерниона  $M$ , вычисленная в системе  $OI'$ :

$$\begin{aligned} \dot{M}_{I'} &= \dot{\mu}_0 + \sum_1^3 \dot{\mu}_k^* \vec{i}'_k = \Lambda \circ (\dot{\mu}_0 + \sum_1^3 \dot{\mu}_k^* \vec{i}_k) \circ \tilde{\Lambda} = \\ &= \Lambda \circ \dot{M}^* \circ \tilde{\Lambda}, \Rightarrow \vec{\omega}^{\text{отн}} = 2\Lambda \circ \dot{M}^* \circ \tilde{M}^* \circ \tilde{\Lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выражение (2.31) представляет собой формулу сложения угловых скоростей (2.30).

Для вычисления углового ускорения тела  $\vec{\varepsilon}$  относительно системы  $OI$  нужно продифференцировать вектор угловой скорости  $\vec{\omega} = \vec{\omega}^{\text{пер}} + \vec{\omega}^{\text{отн}}$  в системе  $OI$ . При этом следует учитывать, что вектор  $\vec{\varepsilon}^{\text{отн}}$  представляет собой производную от вектора  $\vec{\omega}^{\text{отн}}$ , вычисленную в системе  $OI'$ , т.е. если  $\vec{\omega}^{\text{отн}} = \sum_1^3 \omega_k^{\text{отн}} \vec{i}'_k$ , то  $\vec{\varepsilon}^{\text{отн}} = \sum_1^3 \dot{\omega}_k^{\text{отн}} \vec{i}'_k$ . Поэтому

производная от  $\vec{\omega}^{\text{отн}}$ , вычисленная в системе  $OI$ , равна

$$\dot{\vec{\omega}}^{\text{отн}} = \sum_1^3 \dot{\omega}_k^{\text{отн}} \vec{i}'_k + \sum_1^3 \omega_k^{\text{отн}} \dot{\vec{i}}'_k = \vec{\varepsilon}^{\text{отн}} + \vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{\omega}^{\text{отн}}.$$

Отсюда следует формула для углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$ :

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}^{\text{пер}} + \dot{\vec{\omega}}^{\text{отн}} = \vec{\varepsilon}^{\text{пер}} + \vec{\varepsilon}^{\text{отн}} + \vec{\omega}^{\text{пер}} \times \vec{\omega}^{\text{отн}}. \quad (2.32)$$

Полученные формулы (2.27) – (2.32) дают возможность вычислять все кинематические параметры результирующего движения твердого тела через заданные кинематические параметры переносного и относительного движения.

Исследуем свойства решений кинематических уравнений Пуассона. Вычислим производную по времени от  $\|\Lambda\|$ . Из уравнения (2.24) с учетом вытекающего из этого уравнения следствия  $\dot{\tilde{\Lambda}} = \tilde{\dot{\Lambda}} = -2\tilde{\Lambda} \circ \vec{\omega}$  получаем

$$\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} + \Lambda \circ \tilde{\dot{\Lambda}} = 2\vec{\omega} - 2\vec{\omega} = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (2.24) имеет первый интеграл  $\|\Lambda\| = \text{const}$ .

Пусть  $\Lambda(t)$  и  $\Lambda'(t)$  – два решения уравнения (2.24). Записывая  $\Lambda(t)$  в виде  $\Lambda(t) = \Lambda'(t) \circ M(t)$  и подставляя это решение в уравнение (2.24), получаем

$$\dot{A}' \circ M + A' \circ \dot{M} = 2\vec{\omega} \circ A' \circ M, \quad \dot{A}' = 2\vec{\omega} \circ A'.$$

Отсюда следует  $A' \circ \dot{M} = 0$ , т.е.  $M=C$  – постоянный кватернион. Таким образом, общее решение уравнения (2.24) имеет вид

$$A(t) = A'(t) \circ C, \quad (2.33)$$

где  $A'(t)$  – любое частное решение, а  $C$  – кватернионная константа.

Полученный результат следует трактовать таким образом, что общее решение уравнения (2.24) определяет положение твердого тела относительно любого неподвижного базиса  $OI$ , а положение относительно конкретного базиса  $OI'$  определяется частным решением  $A'(t)$ . При этом взаимная ориентация базисов  $OI$  и  $OI'$  задается постоянным кватернионом  $C$  (рис. 9).

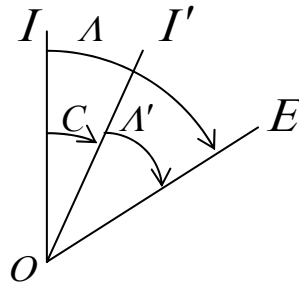


Рис. 9

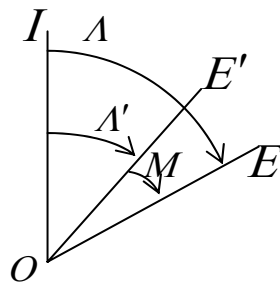


Рис.10

Общее решение (2.33) можно трактовать и таким образом, что оно определяет положение любого связанного с телом базиса  $OE$  относительно системы отсчета  $OI$ , а частное решение  $A'(t)$  описывает положение связанного с телом базиса  $OE'$  (рис.10). При этом в силу формулы сложения поворотов (2.17) имеем  $A(t) = A'(t) \circ M^*$ , где  $M^*$  – отображение кватерниона  $M$  из его собственного базиса

$OE'$  в базис  $OI$ . В силу неизменности взаимной ориентации базисов  $OE'$  и  $OE$  кватернион  $M^*$  является постоянным. Поэтому, полагая  $M^* = C$ , приходим к решению (2.33).

Каждое конкретное решение уравнений Пуассона получается из общего решения (2.33) заданием начальных условий. Если, например, положить  $A(0) = 1$ , то решение  $A(t)$  будет определять текущее положение твердого тела относительно его начального положения в момент  $t = 0$ .

Простейшим движением твердого тела является вращение вокруг неподвижной оси, т.е. когда вектор угловой скорости имеет вид  $\vec{\omega} = \vec{e} \cdot \omega(t)$ , где  $\vec{e}$  – неизменный единичный вектор. В этом случае решение уравнения (2.14), удовлетворяющее условию  $A(0) = 1$ , находится следующим образом

$$A(t) = \cos \frac{\varphi(t)}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi(t)}{2}, \quad \text{где } \varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau.$$

В некоторых случаях проинтегрировать кинематические уравнения Пуассона удастся с помощью метода сложного движения, представляя движение твердого тела в виде комбинации нескольких простых интегрируемых движений.

Рассмотрим для примера случай прецессионного движения твердого тела, определяемый как такое движение твердого тела с неподвижной точкой, при котором некоторая ось  $\vec{e}$  тела совершает движение по поверхности неподвижного кругового конуса (рис. 11). В этом случае, как нетрудно убедиться, вектор угловой скорости твердого тела раскладывается на ось конуса  $\vec{i}$  и ось тела  $\vec{e}$  следующим образом

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1(t) \cdot \vec{i} + \omega_2(t) \cdot \vec{e}.$$

Составляющие  $\omega_1$  и  $\omega_2$  называются, соответственно, угловой скоростью прецессии и угловой скоростью



собственного вращения. Они равны соответствующим производным от углов Эйлера  $\omega_1 = \dot{\Psi}$ ,  $\omega_2 = \dot{\phi}$  (рис.3), если систему отсчета и связанный с телом базис выбрать так, что  $\vec{i}_3 = \vec{i}$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{e}$ . Угол нутации  $\theta$  между осями  $\vec{i}$  и  $\vec{e}$  при этом не меняется.

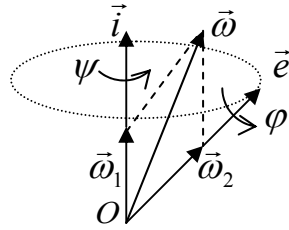


Рис. 11

Если составляющие  $\omega_1$  и  $\omega_2$  постоянны, то такое движение называется регулярной прецессией.

Введем вспомогательный базис  $OI'$ , который вращается относительно неподвижного базиса  $OI$  с

угловой скоростью  $\vec{\omega}_1$ . Тогда положение базиса  $OI'$  относительно  $OI$  задается кватернионом

$$A_1 = \cos \frac{\mathcal{G}_1}{2} + \vec{i} \sin \frac{\mathcal{G}_1}{2}, \quad \mathcal{G}_1 = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau, \quad |\vec{i}| = 1.$$

Связанный с телом базиса  $OE$  движется относительно  $OI'$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}$ . Так как ось  $\vec{e}$  в базисе  $OI'$  неподвижна, то кватернион  $A_2$ , задающий положение базиса  $OE$  относительно  $OI'$ , имеет вид

$$A_2 = \cos \frac{\mathcal{G}_2}{2} + \vec{e} \sin \frac{\mathcal{G}_2}{2}, \quad \mathcal{G}_2 = \int_0^t \omega_2(\tau) d\tau, \quad |\vec{e}| = 1.$$

Применяя теперь формулу сложения поворотов (2.17), находим кватернион  $A$ , задающий положение  $OE$  относительно  $OI$ :

$$A = A_1^* \circ A_2^* = \left( \cos \frac{\mathcal{G}_1}{2} + \vec{i} \sin \frac{\mathcal{G}_1}{2} \right) \circ \left( \cos \frac{\mathcal{G}_2}{2} + \vec{e} \sin \frac{\mathcal{G}_2}{2} \right),$$

где  $\vec{e}^0 = \tilde{A}_1 \circ \vec{e} \circ A_1$  – отображение вектора  $\vec{e}$  из базиса  $OI'$  в базис  $OI$ , представляющее собой начальное положение оси  $\vec{e}$  в момент  $t = 0$ .

Упражнения

1. Пусть  $R = r_0 + \vec{r}$  – некоторый кватернион. Показать, что преобразование  $R' = A \circ R \circ A^{-1}$  не изменяет скалярной части кватерниона  $R$ , а его векторная часть поворачивается вокруг оси  $\vec{\lambda}$  на угол  $\mathcal{G} = 2 \arccos\left(\frac{\lambda_0}{|A|}\right)$ .

2. Показать, что преобразование  $\vec{r}' = \vec{e} \circ \vec{r} \circ \vec{e}$ ,  $|\vec{e}| = 1$  представляет собой зеркальное отражение вектора  $\vec{r}$  относительно плоскости, перпендикулярной  $\vec{e}$ . Показать также, что последовательность двух зеркальных отражений относительно двух плоскостей эквивалентна повороту вокруг линии пересечения этих плоскостей на двойной угол между ними.

3. Перемещение твердого тела с неподвижной точкой задается двумя последовательными поворотами вокруг осей  $\vec{\xi}_1$  и  $\vec{\xi}_2$ . Показать, что перемещение будет тем же самым, если вначале выполнить второй поворот вокруг оси  $\vec{\xi}_2$ , а затем первый вокруг оси  $\vec{\xi}_1'$ , полученной из  $\vec{\xi}_1$  вторым поворотом.

4. С твердым телом связана правая прямоугольная тройка векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Перемещение тела задается тремя последовательными поворотами: вокруг оси  $\vec{e}_1$  на угол  $\alpha_1$ , вокруг оси  $\vec{e}_2$  на угол  $\alpha_2$  и вокруг оси  $\vec{e}_3$  на угол  $\alpha_3$ . Найти ось и угол результирующего поворота твердого тела.

5. Последовательными поворотами вокруг собственных осей тело повернули на угол  $\alpha_1$  вокруг оси  $\vec{e}_1$  и на угол  $\alpha_2$  вокруг оси  $\vec{e}_2$ . Другое тело из того же начального положения повернули сначала вокруг оси  $\vec{e}_2$  на угол  $\alpha_2$ , а затем вокруг оси  $\vec{e}_1$  на угол  $\alpha_1$ . Определить относительное положение тел в параметрах Родрига-Гамильтона.

6. Показать, что из постоянства направления вектора угловой скорости твердого тела в неподвижной системе координат следует постоянство направления этого вектора в связанной с телом системе координат и наоборот.

7. Показать, что если движение твердого тела относительно некоторой системы отсчета является прецессией, то движение этой системы отсчета относительно тела также является прецессией. Найти связь между параметрами этих прецессий.

### 3. Динамика твердого тела.

Геометрия масс твердого тела. Тензор инерции и эллипсоид инерции. Получим формулу для момента импульса (кинетического момента) твердого тела относительно произвольного полюса  $O$ . В соответствии с определением имеем

$$\vec{K}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i, \quad (3.1)$$

где  $\vec{V}_i$  – скорость  $i$ -й точки тела относительно рассматриваемой системы отсчета, а  $\vec{r}_i$  – вектор, соединяющий полюс  $O$  с  $i$ -й точкой тела (рис. 12).

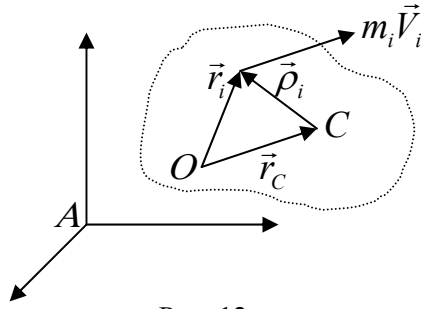


Рис. 12

Обозначим через  $\vec{V}_O$  скорость той точки тела, которая в данный момент совпадает с полюсом  $O$ . Тогда, используя формулу Эйлера для распределения скоростей в твердом теле  $\vec{V}_i = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ , получаем

$$\vec{K}_O = m \cdot \vec{r}_C \times \vec{V}_O + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i), \quad (3.2)$$

где  $m$  – масса тела, а  $\vec{r}_C$  – радиус-вектор центра масс  $C$ .

Если с телом связать некоторый ортонормированный базис  $O \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  и рассматривать  $\vec{r}_i$  и  $\vec{\omega}$  как векторы-столбцы с компонентами  $x_i, y_i, z_i$  и  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , то выражение под знаком суммы можно записать с помощью матричных операций следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) &= \sum_i m_i (\vec{r}_i, \vec{r}_i) \vec{\omega} - m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega}) = \\ &= \sum_i m_i (\vec{r}_i^T \cdot \vec{r}_i \cdot I - \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i^T) \cdot \vec{\omega} = J_O \cdot \vec{\omega}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $I$  – единичная матрица,  $T$  – знак транспонирования, а

$$J_O = \sum_i m_i (\vec{r}_i^T \cdot \vec{r}_i \cdot I - \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i^T) = \begin{vmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{vmatrix} \quad (3.4) -$$

тензор инерции твердого тела относительно выбранного базиса  $O \vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z$ . Элементы этого тензора инерции определяются следующими выражениями:

$$J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = J_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i,$$

$$J_{yy} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad J_{yz} = J_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i,$$

$$J_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad J_{zx} = J_{xz} = -\sum_i m_i z_i x_i.$$

Из приведенных соотношений следует, что тензор инерции является симметричной матрицей, зависящей от расположения точек тела относительно выбранного базиса. Диагональные элементы этой матрицы представляют собой моменты инерции относительно осей  $O\vec{e}_x, O\vec{e}_y, O\vec{e}_z$ , а остальные называются центробежными моментами инерции.

Заметим, что если в определяющем тензор инерции соотношении (3.3) заменить вектор  $\vec{\omega}$  на любой другой вектор  $\vec{\mu}$ , то получим аналогичное равенство:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\mu} \times \vec{r}_i) = J_O \cdot \vec{\mu}. \quad (3.5)$$

Поэтому тензор инерции можно рассматривать как матричный оператор, который задает преобразование любого вектора  $\vec{\mu}$  по формуле (3.5).

Через тензор инерции  $J_O$  можно определить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через

точку  $O$ . Обозначая через  $\vec{e}$  единичный вектор, указывающий направление оси, получаем

$$J_{O\vec{e}} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{e}, \vec{r}_i \times \vec{e}) = \vec{e} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{e} \times \vec{r}_i)$$

Отсюда в силу (3.5) следует формула

$$J_{O\vec{e}} = \vec{e}^T \cdot J_O \cdot \vec{e}. \quad (3.6)$$

Определим закон преобразования тензора инерции при повороте базиса. Поворот от базиса  $OE$  к другому базису  $OE'$  представляет собой ортогональное преобразование, при котором каждый вектор  $\vec{r}_i$  преобразуется в вектор  $\vec{r}'_i$  по формуле  $\vec{r}_i = S \cdot \vec{r}'_i$ , где  $S$  – ортогональная матрица.

Подставляя эти выражения в (3.4), получаем

$$J_O = \sum_i m_i (\vec{r}'_i{}^T S^T \cdot S \vec{r}'_i \cdot I - S \vec{r}'_i \cdot \vec{r}'_i{}^T S^T) = S \cdot J'_O \cdot S^T$$

Отсюда находим искомый закон преобразования тензора инерции твердого тела при повороте базиса:

$$J'_O = S^T \cdot J_O \cdot S. \quad (3.7)$$

Из полученного выражения следует, что при повороте базиса формула преобразования тензора инерции совпадает с формулой преобразования матрицы квадратичной формы  $\vec{r}^T \cdot J_O \cdot \vec{r}$ . Поэтому на основе известного факта из курса линейной алгебры о приводимости любой квадратичной формы к диагональному виду заключаем, для любой точки  $O$  твердого тела существует базис  $O \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$ , в котором тензор инерции твердого тела имеет диагональный вид:

$$J_O = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Оси указанного базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  называются главными осями инерции твердого тела для рассматриваемой точки  $O$ , а моменты инерции  $A, B, C$  относительно главных осей – главными моментами инерции.

Заметим, что направления главных осей инерции твердого тела относительно некоторого базиса определяется собственными векторами тензора инерции, записанного в этом базисе, а главными моментами инерции являются соответствующие собственные числа тензора инерции.

Главные моменты инерции твердого тела положительны (кроме случая, когда тело представляет собой совокупность точек, лежащих на одной прямой, а рассматриваемая точка  $O$  принадлежит этой прямой; в этом случае один из главных моментов инерции равен нулю). Поэтому тензор инерции является положительно-определенной матрицей.

Для каждой точки  $O$  твердого тела вводится понятие эллипсоида инерции, который определяется как множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\vec{r}^T \cdot J_O \cdot \vec{r} = 1. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) определяет поверхность второго порядка, которая действительно является эллипсоидом в силу положительной определенности тензора инерции. При этом главные оси эллипсоида инерции совпадают с главными осями инерции твердого тела для рассматриваемой точки.

Поскольку эллипсоид инерции неподвижен в теле, то анализ движения тела можно свести к анализу движения его эллипсоида инерции. Этот прием используется в некоторых задачах для геометрической интерпретации движения тела.

Определим расстояние  $r_{O\vec{e}}$  от центра эллипсоида до его поверхности в направлении, задаваемом единичным вектором  $\vec{e}$ . Записывая вектор  $\vec{r}$  в виде  $\vec{r} = r_{O\vec{e}} \vec{e}$  и подставляя это выражение в (3.9), получаем с учетом (3.6) следующее соотношение

$$r_{o\vec{e}}^2 \cdot \vec{e}^T \cdot J_o \cdot \vec{e} = 1. \Rightarrow r_{o\vec{e}} = \frac{1}{\sqrt{J_{o\vec{e}}}}, \quad (3.10)$$

т.е. размер эллипсоида в заданном направлении обратно пропорционален квадратному корню от момента инерции твердого тела относительно этого направления.

Определим теперь закон преобразования тензора инерции при параллельном переносе базиса. При этом рассмотрим случай, когда первый базис  $C \vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z$  имеет начало в центре масс твердого тела, а положение параллельного ему базиса  $O \vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z$  задано вектором  $\vec{\rho}_O = -\vec{r}_C$  (рис. 12), определяющим положение точки  $O$  в базисе  $C \vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z$ .

Тогда, обозначая через  $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \vec{\rho}_O$  радиус-вектор  $i$ -й точки тела в базисе  $C \vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z$ , получаем из (3.4):

$$J_o = \sum_i m_i (\vec{\rho}_i^T \cdot \vec{\rho}_i \cdot I - \vec{\rho}_i \cdot \vec{\rho}_i^T) + m (\vec{\rho}_O^T \cdot \vec{\rho}_O \cdot I - \vec{\rho}_O \cdot \vec{\rho}_O^T) - \sum_i m_i (\vec{\rho}_i^T \cdot \vec{\rho}_O \cdot I - \vec{\rho}_i \cdot \vec{\rho}_O^T) - \sum_i m_i (\vec{\rho}_O^T \cdot \vec{\rho}_i \cdot I - \vec{\rho}_O \cdot \vec{\rho}_i^T).$$

Последние две суммы в полученном выражении равны нулю в силу определения центра масс твердого тела, а первая сумма является по определению тензором инерции твердого тела относительно центрального базиса  $C \vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z$ . Поэтому формула преобразования тензора инерции при параллельном переносе базиса из центра масс приобретает вид

$$J_o = J_C + m (\vec{\rho}_O^T \cdot \vec{\rho}_O \cdot I - \vec{\rho}_O \cdot \vec{\rho}_O^T). \quad (3.11)$$

Полученный результат уместно назвать теоремой Гюйгенса-Штейнера для тензора инерции, поскольку из (3.11) следует известная теорема Гюйгенса-Штейнера для осевых моментов инерции. Формулу (3.11) легко запомнить, если обратить внимание, что второе слагаемое в этой



формуле представляет собой тензор инерции точки с массой  $m$ , находящейся в положении  $O$ .

Вернемся теперь к вычислению кинетического момента твердого тела. Из соотношений (3.2) и (3.3) получаем, что кинетический момент твердого тела относительно произвольного полюса  $O$  определяется следующей формулой:

$$\vec{K}_O = m\vec{r}_C \times \vec{V}_O + J_O \cdot \vec{\omega}. \quad (3.12)$$

Если точка  $O$  твердого тела неподвижна или совпадает с центром инерции, то формула (3.12) приобретает вид

$$\vec{K}_O = J_O \cdot \vec{\omega}. \quad (3.13)$$

Обозначая через  $p, q, r$  – проекции угловой скорости твердого тела на главные оси инерции  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , получаем из (3.13) следующее выражение для кинетического момента тела относительно неподвижной точки или центра инерции:

$$\vec{K}_O = Ap\vec{e}_1 + Bq\vec{e}_2 + Cr\vec{e}_3. \quad (3.14)$$

Для вычисления кинетической энергии твердого тела рассмотрим сначала случай, когда некоторая точка  $O$  тела неподвижна в системе отсчета. Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_i m_i (\vec{V}_i, \vec{V}_i) = \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i, \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= \vec{\omega}, \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega}^T \cdot \vec{K}_O = \vec{\omega}^T \cdot J_O \cdot \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем для кинетической энергии твердого тела с неподвижной точкой  $O$  следующую формулу

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot J_O \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad (3.15)$$

где  $A, B, C$  – главные моменты инерции твердого тела для неподвижной точки  $O$ , а  $p, q, r$  – проекции угловой скорости твердого тела на главные оси инерции.

Кинетическая энергия твердого тела может быть найдена также по теореме Кенига, в соответствии с которой

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + T^{отн},$$

где  $T^{отн}$  – кинетическая энергия тела относительно системы Кенига (системы с началом в центре масс тела, движущейся поступательно относительно исходной системы отсчета). Поскольку движение твердого тела относительно системы Кенига представляет собой движение с неподвижной точкой  $C$ , то применяя формулу (3.15), получаем

$$T = \frac{1}{2} m \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot J_C \cdot \vec{\omega}, \quad (3.16)$$

где  $J_C$  – тензор инерции твердого тела для центра масс.

Динамические уравнения твердого тела. Динамические уравнения твердого тела легко получить из теоремы об изменении кинетического момента, которая в любой инерциальной системе отсчета имеет следующий вид

$$\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O + m \vec{V}_C \times \vec{V}_O^{пол}, \quad (3.17)$$

где  $\vec{M}_O$  – момент внешних сил относительно полюса  $O$ , а  $\vec{V}_C$  и  $\vec{V}_O^{пол}$  – скорость центра масс и скорость полюса относительно рассматриваемой системы отсчета. Если полюс неподвижен в системе отсчета или совпадает с центром масс, теорема принимает упрощенный вид:

$$\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O. \quad (3.18)$$

С другой стороны для случая, когда полюс  $O$  совпадает с неподвижной точкой тела или с центром инерции, для кинетического момента относительно этого полюса имеет место формула (3.13), которая в главных осях инерции имеет вид (3.14). Подставляя эту формулу в (3.18), получаем

$$A\dot{p}\vec{e}_1 + B\dot{q}\vec{e}_2 + C\dot{r}\vec{e}_3 + A\dot{p}\vec{e}_1 + B\dot{q}\vec{e}_2 + C\dot{r}\vec{e}_3 = \vec{M}_O.$$

Единичные векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  главных осей инерции жестко связаны с твердым телом. Поэтому их производные выражаются через угловую скорость тела формулами  $\dot{\vec{e}}_k = \vec{\omega} \times \vec{e}_k$ . С учетом этого последнее уравнение переписывается в виде

$$A\dot{p}\vec{e}_1 + B\dot{q}\vec{e}_2 + C\dot{r}\vec{e}_3 + \vec{\omega} \times \vec{K}_O = \vec{M}_O.$$

Проектируя это уравнение на главные оси инерции  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , получаем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= M_1 \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= M_2 \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= M_3, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где  $A, B, C$  – главные моменты инерции тела для рассматриваемой точки  $O$ ,  $p, q, r$  – проекции угловой скорости тела на главные оси инерции, а  $M_1, M_2, M_3$  – проекции момента сил относительно точки  $O$  на главные оси инерции.

Обратим внимание, что динамические уравнения Эйлера (3.19) получены для случая, когда рассматриваемая точка  $O$  твердого тела остается неподвижной в инерциальной системе отсчета или совпадает с центром масс твердого тела. Поэтому полученные на основе этих уравнений результаты для движения тела с неподвижной точкой будут распространяться и на движение тела относительно системы Кенига с началом в центре масс, движущейся поступательно относительно инерциальной системы отсчета.

Динамические уравнения (3.19) связывают в дифференциальной форме угловую скорость твердого тела с моментом действующих на тело сил. В совокупности с кинематическими уравнениями, записанными в той или иной

форме, они образуют замкнутую систему уравнений вращательного движения твердого тела. Интегрирование этой системы дает закон движения твердого тела в зависимости от момента действующих на тело сил и начальных условий движения.

Рассмотрим сначала случай Эйлера, который определяется условием  $\vec{M}_O = 0$ , и называется движением твердого тела по инерции. В этом случае правые части в динамических уравнениях Эйлера равны нулю, и эти уравнения имеют два интеграла движения (закона сохранения). Один является следствием сохранения кинетического момента и имеет вид

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K_O^2 = const.$$

Второй описывает сохранение кинетической энергии:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T = const.$$

Приведенные два закона сохранения позволяют выразить две компоненты угловой скорости через третью, затем подставить полученные выражения в соответствующее уравнение Эйлера и получить решение для компонент угловой скорости в виде квадратуры. Далее полученное решение для угловой скорости подставляется в кинематические уравнения, решение которых в рассматриваемом случае тоже удается свести к квадратурам.

Таким образом, в рассматриваемом случае Эйлера уравнения вращательного движения твердого тела интегрируются при любых начальных условиях. Однако получаемое при этом решение является достаточно сложным для понимания закономерностей движения твердого тела, поскольку оно представляется сложным образом через эллиптические интегралы. Для восполнения указанного недостатка используются геометрические интерпретации рассматриваемого движения, наиболее известными из которых являются геометрические интерпретации Пуансо и Мак-Куллага. Указанные интерпретации основываются на

использовании записанных выше законов сохранения и подробно изложены в монографии В.Ф.Журавлева «Основы теоретической механики».

Анализ движения твердого тела существенно упрощается, если имеет место динамическая симметрия твердого тела, под которой понимается равенство двух главных моментов инерции твердого тела:  $A = B \neq C$ . В этом случае вектор угловой скорости твердого тела всегда можно разложить на направление кинетического момента  $\vec{K}_O$  и направление оси динамической симметрии  $\vec{e}_3$  следующим образом

$$\vec{\omega} = \frac{A(p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2) + Cr\vec{e}_3 + (A - C)r\vec{e}_3}{A} \Rightarrow$$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{K}_O}{A} + \frac{(A - C)}{A}r\vec{e}_3, \quad (3.20)$$

а скорость оси симметрии подчиняется уравнению

$$\dot{\vec{e}}_3 = \vec{\omega} \times \vec{e}_3 = \frac{\vec{K}_O}{A} \times \vec{e}_3. \quad (3.21)$$

В рассматриваемом случае Эйлера вектор кинетического момента сохраняется и по величине и по направлению. Не меняется также и проекция  $r$  угловой скорости тела на ось динамической симметрии, что следует из третьего уравнения системы (3.19), которое в рассматриваемом случае приобретает вид  $C\dot{r} = 0$ . Наконец, остается постоянным угол  $\theta$  между осью динамической симметрии и вектором кинетического момента, поскольку выполняется равенство

$$\vec{K}_O, \vec{e}_3 = Cr = |\vec{K}_O| \cdot \cos \theta = const.$$

Из установленных фактов заключаем, что исследуемое движение представляет собой регулярную прецессию вокруг направления кинетического момента (рис. 13), параметры которой определяются соотношениями

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\vec{K}_O}{A}, \quad \vec{\omega}_2 = \frac{A-C}{A} r \vec{e}_3, \quad \cos \theta = \frac{Cr}{|\vec{K}_O|}.$$

Данное движение твердого тела представляется в виде комбинации двух вращений. Первым является вращение вокруг неподвижного направления кинетического момента с постоянной угловой скоростью прецессии  $\vec{\omega}_1$ . Второе представляет собой вращение вокруг неподвижной в теле оси динамической симметрии с постоянной по величине угловой скоростью собственного вращения  $\vec{\omega}_2$ .

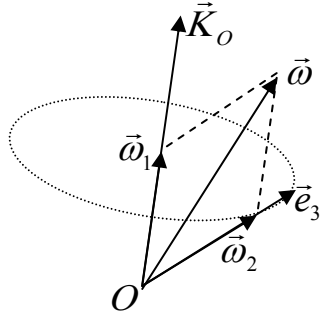


Рис. 13

В большинстве прикладных задач, связанных с движением динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, главным является вопрос о движении оси динамической симметрии  $\vec{e}_3$ , которую в дальнейшем будем обозначать символом  $\vec{e}$  без индекса.

Для получения уравнения движения оси динамической симметрии обозначим через  $\vec{\omega}_\perp$  экваториальную составляющую угловой скорости твердого тела, т.е.  $\vec{\omega}_\perp = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$ . Тогда имеем  $\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e} = \vec{\omega}_\perp \times \vec{e}$ ,

откуда в силу ортогональности  $\vec{\omega}_\perp$  и  $\vec{e}$  получаем  $\vec{\omega}_\perp = \vec{e} \times \dot{\vec{e}}$ , а вектор кинетического момента тела относительно неподвижной точки (или центра масс) записывается в виде

$$\vec{K}_O = A\vec{\omega}_\perp + Cr\vec{e} = A \cdot \vec{e} \times \dot{\vec{e}} + H \cdot \vec{e}, \quad H = Cr.$$

Отсюда по теореме об изменении кинетического момента получаем уравнение движения оси динамической симметрии:

$$A \cdot \vec{e} \times \ddot{\vec{e}} + H \cdot \dot{\vec{e}} + \dot{H} \cdot \vec{e} = M_O. \quad (3.22)$$

Полученное уравнение, как и динамические уравнения Эйлера, применимо как для движения твердого тела с неподвижной точкой  $O$ , так и для его движения относительно системы Кенига, движущейся поступательно относительно инерциальной системы отсчета. В последнем случае движение центра масс тела относительно инерциальной системы может быть совершенно произвольным, т.е. уравнения движения твердого тела относительно системы Кенига не зависят от движения центра масс тела и совпадают с уравнениями движения твердого тела с неподвижной точкой  $C$ .

Рассмотрим теперь случай Лагранжа, в котором изучается движение динамически симметричного тела (волчка) с неподвижной точкой в однородном поле тяжести (рис. 14). При этом предполагается, что центр тяжести волчка лежит на оси симметрии на расстоянии  $l$  от неподвижной точки  $O$ .

Для этого случая уравнение (3.22) принимает вид

$$A \cdot \vec{e} \times \ddot{\vec{e}} + H \cdot \dot{\vec{e}} + \dot{H} \cdot \vec{e} = mgl \cdot \vec{i} \times \vec{e}. \quad (3.22^*)$$

Это уравнение имеет следующие интегралы движения:

$$H = Cr = const,$$

$$A \cdot \vec{e} \times \dot{\vec{e}}, \vec{i} + H \cdot \vec{e}, \vec{i} = \vec{K}_O, \vec{i} = const. \quad (3.23)$$

$$A \cdot (\vec{e} \times \dot{\vec{e}})^2 + 2mgl \cdot \vec{i}, \vec{e} = 2T' + 2\Pi = const.$$

Первый из записанных интегралов движения получается скалярным умножением уравнения (3.22\*) на  $\vec{e}$  и означает неизменность проекции кинетического момента на ось симметрии.

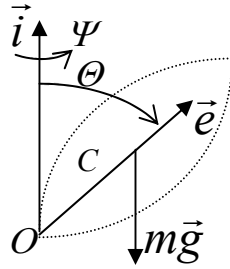


Рис. 14

Второй получается скалярным умножением уравнения (3.22\*) на  $\vec{i}$  и означает неизменность проекции кинетического момента на вертикаль. Третье соотношение описывает закон сохранения полной энергии и получается скалярным умножением уравнения (3.22\*) на  $\vec{e} \times \dot{\vec{e}}$ . При этом в нем фигурирует только та часть  $T'$  кинетической энергии волчка, которая отвечает экваториальной составляющей угловой скорости  $\vec{\omega}_{\perp}$ :

$$2T' = A\omega_{\perp}^2 = A(\vec{e} \times \dot{\vec{e}})^2 = A(\dot{\vec{e}})^2.$$

Эта часть кинетической энергии может изменяться во время движения волчка, в то время как слагаемое  $Cr^2$  неизменно.

С учетом первого из интегралов (3.23) уравнение движения оси волчка принимает вид

$$A \cdot \vec{e} \times \ddot{\vec{e}} + H \cdot \dot{\vec{e}} = mgl \cdot \vec{i} \times \vec{e}. \quad (3.22^*)$$

Интегралы движения (3.23) будем использовать для анализа движения оси динамической симметрии. Константы в правых частях уравнений (3.23) определяются начальными условиями движения.



Положение оси  $\vec{e}$  зададим углами  $\theta$  и  $\Psi$  (рис. 14), где  $\theta$  – угол отклонения оси  $\vec{e}$  от вертикали (угол нутации), а  $\Psi$  – угол поворота вокруг вертикали (угол прецессии).

Рассмотрим случай, когда волчок начинает движение из положения  $\theta_0$ , а ось  $\vec{e}$  неподвижна ( $\dot{\vec{e}}(0) = 0$ ). Тогда интегралы движения (3.23) запишутся в виде

$$\begin{aligned} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2 \sin^2 \theta) &= 2mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta), \\ A\dot{\Psi} \sin^2 \theta &= H(\cos \theta_0 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.23^*)$$

Выразив  $\dot{\Psi}$  из второго уравнения и подставив в первое, получим уравнение движения по углу нутации:

$$\alpha^2 \dot{u}^2 + (\cos \theta_0 - u)^2 - \beta(1 - u^2)(\cos \theta_0 - u) = 0, \quad (3.24)$$

где  $u = \cos \theta$ ,  $\alpha = \frac{A}{H}$ ,  $\beta = \frac{2Amgl}{H^2}$ .

Из этого уравнения следует, что движение может происходить только для тех значений угла  $\theta$ , которые удовлетворяют неравенству

$$(\cos \theta_0 - u)^2 - \beta(1 - u^2)(\cos \theta_0 - u) \leq 0. \quad (3.25)$$

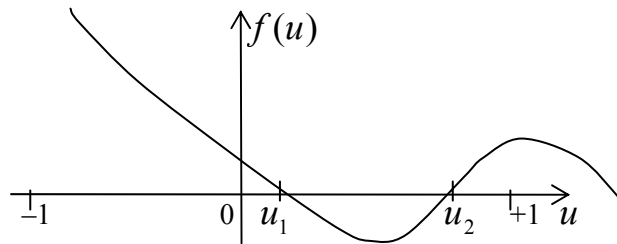


Рис. 15

Левая часть полученного неравенства представляет собой многочлен третьей степени относительно  $u = \cos \theta$ ,

график которого изображен на рис. 15. На отрезке  $[-1,+1]$  возможных значений  $u$  многочлен имеет два вещественных корня, один из которых  $u_2 = \cos\theta_0$  соответствует наибольшему значению  $u$ , а второй корень  $u_1$ , отвечающий наименьшему значению  $u$ , является левым корнем уравнения

$$u_1 = \cos\theta_0 - \beta \cdot (1 - u_1^2). \quad (3.26)$$

На границах отрезка  $[u_1, u_2]$  скорости  $\dot{u}$  и  $\dot{\theta}$  равны нулю, а во всех внутренних точках этого отрезка отличны от нуля. При этом для второй производной на границах отрезка выполняются неравенства  $\ddot{u}(u_2) < 0$ , а  $\ddot{u}(u_1) > 0$ . Поэтому движение волчка происходит таким образом, что косинус угла нутации периодически изменяется между минимальным значением  $u_1$  и максимальным значением  $u_2$ .

Поскольку в силу (3.23) угловая скорость прецессии  $\dot{\psi}$  является однозначной функцией угла  $\theta$ , то она также является периодической функцией с тем же самым периодом, что и для угла  $\theta$ . Поэтому поведение оси волчка имеет вид, изображенный на рис. 16,а траекторией конца единичного вектора  $\vec{e}$  на единичной сфере. В верхних точках заострения траектории ось останавливается, а в нижних точках траектории скорость оси максимальна и обусловлена только угловой скоростью прецессии, поскольку в этих точках  $\dot{\theta}(u_1) = 0$ .

Если начальные условия движения задать так, что при  $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \dot{\Psi}(0) \neq 0$ , то получающиеся при этом траектории оси динамической симметрии изображены на рис. 16, в и 16, с. В случае в), который соответствует условию  $\dot{\Psi}(0) > 0$ , траектория является гладкой кривой, причем для каждой точки этой траектории скорость прецессии положительна. В случае с), для которого  $\dot{\Psi}(0) < 0$ , траектория является петлеобразной, а скорость прецессии во время движения меняет знак, так что в нижних точках траектории скорость прецессии положительна, а в верхних точках отрицательна.

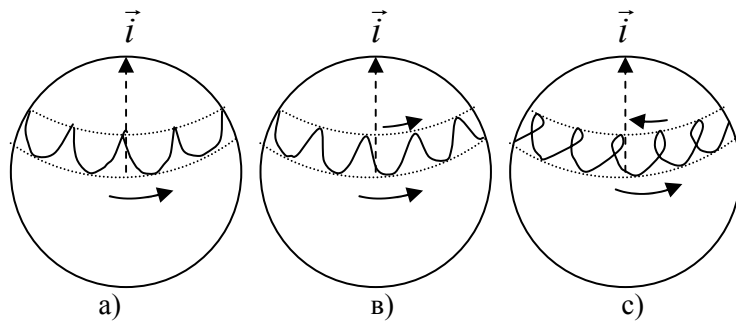


Рис. 16

Для начальных условий, заданных соотношениями

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \dot{\Psi}(0) = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4Amgl \cos \theta_0}}{2A \cos \theta_0},$$

траектория оси симметрии превращается в окружность на единичной сфере, соответствующую углу нутации  $\theta = \theta_0$ . При этих условиях скорость прецессии остается постоянной

$\dot{\Psi}(t) = \dot{\Psi}(0)$ , а движение волчка представляет собой регулярную прецессию вокруг вертикали.

Неравенство (3.25) позволяет определить условие устойчивости вертикального положения волчка. В этом случае  $\cos \theta_0 = 1$  и неравенство (3.25) принимает вид

$$(1 - \cos \theta)^2 (1 - \beta(1 + \cos \theta)) \leq 0.$$

Отсюда следует, что при выполнении условия  $2\beta \leq 1$ , т.е.  $H^2 \geq 4mgl$  неравенство выполняется только при  $\cos \theta = 1$ , т.е. единственно возможным является вертикальное положение волчка.

Более детально можно проанализировать движение «быстрого» волчка, который определяется условием  $\beta \ll 1$ , т.е.  $H^2 \gg 2mgl$ . Предполагая снова, что волчок начинает движение из состояния покоя ( $\dot{\theta} = 0, \dot{\Psi} = 0$ ), получаем, что нижняя граница значений  $u = \cos \theta$  приближенно оценивается величиной  $u_1 \approx \cos \theta_0 - \beta \sin^2 \theta_0$ , т.е. движение происходит в узком диапазоне значений угла нутации, определяемом неравенством

$$\cos \theta_0 - \beta \sin^2 \theta_0 \leq \cos \theta \leq \cos \theta_0.$$

Дифференцируя уравнение (3.24) по времени с последующим сокращением на  $\dot{u}$  и отбрасывая члены второго порядка малости, получаем линеаризованное уравнение

$$\alpha^2 \ddot{u} + (u - \cos \theta_0) + \frac{1}{2} \beta \sin^2 \theta_0 = 0.$$

Отсюда с учетом начальных условий получаем

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \beta \sin^2 \theta_0 \left( \cos \frac{H}{A} t - 1 \right).$$

На основе полученного решения из второго уравнения системы (3.23\*) находим приближенное решение для угловой скорости прецессии:

$$\dot{\psi} = \frac{H\beta}{2A} \left( 1 - \cos \frac{H}{A} t \right) = \frac{mgl}{H} \left( 1 - \cos \frac{H}{A} t \right).$$

Из последнего уравнения следует, что среднее значение угловой скорости прецессии дается равенством  $H\hat{\psi} = mgl$ , а среднее движение оси волчка определяется уравнением

$$H \cdot \hat{\dot{\mathbf{e}}} = mgl \cdot \vec{i} \times \vec{e} = \vec{M}_O. \quad (3.27)$$

Соотношение (3.27) объясняет основное допущение приближенной теории «быстрого» волчка (гироскопа), в соответствии с которым кинетический момент гироскопа считается сосредоточенным на оси симметрии ( $\vec{K}_O \approx H \cdot \vec{e}$ ). Это предположение эквивалентно отбрасыванию первого слагаемого в уравнении (3.22\*), определяющем движение оси симметрии. В результате получается, что скорость оси симметрии направлена по моменту действующих сил и определяется уравнением (3.27). Однако из проведенного анализа ясно, что уравнение (3.27) описывает только среднее движение оси гироскопа, поскольку в отдельные моменты времени скорость оси может существенно отличаться от величины, определяемой уравнением (3.27).

Мы проанализировали движение «быстрого» волчка для случая, когда в начальный момент времени скорость оси волчка равна нулю. Результаты остаются в силе и при ненулевой начальной скорости оси волчка, если эта скорость удовлетворяет сильному неравенству  $A|\dot{e}(0)| \ll H$ . Это условие очевидно означает, что в начальный момент времени экваториальная составляющая кинетического момента мала по сравнению с его осевой составляющей.

Соотношение (3.27) объясняет присущее быстрому гироскопу свойство гироскопической «жесткости», которая проявляется в том, что при малых значениях возмущающего момента ось чувствительности гироскопа (ось симметрии) остается практически неподвижной. На этом свойстве основано применение свободного гироскопа (т.е. гироскопа с тремя степенями свободы) в качестве указателя неизменного направления в инерциальном пространстве.