ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Научно-образовательный центр
«БИОСОВМЕСТИМЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ПОКРЫТИЯ МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ»
Белгородского государственного университета

Согласованно	Утверждаю
Зам. руководителя НОЦ по УР	Декан МСФ
____________к.ф.-м.н. Беленко В.А.	________________Р.И. Дедюх
________________________2006 г.	____________________2006 г.

Различные варианты метода прогонки

Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Теплофизические основы высокотемпературных технологий в машиностроении» для студентов 5 курса, обучающихся по направлению 150900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», специализации 151001.01 «Технология автоматизированного производства», 150917 «Физика высоких технологи в машиностроении»

Томск 2006

УДК 519.6

Различные варианты метода прогонки.

Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Теплофизические основы высокотемпературных технологий в машиностроении» для студентов 5 курса, обучающихся по направлению 150900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», специализации 151001.01 «Технология автоматизированного производства», 150917 «Физика высоких технологи в машиностроении»

Составитель
д.ф.-м.н., профессор кафедры ФВТМ ____________________ А.Г. Князева

Методические указания рассмотрены и рекомендованы методическим семинаром кафедры «Физика высоких технологий в машиностроении»
« 21 » ноября 2006 г, протокол № 4 .

Зав. кафедрой ФВТМ
проф., д.ф.–м.н. ____________________ С.Г. Псахье

Система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

$$a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -f_i \qquad (1)$$

$$a_i \neq 0\,,\; b_i \neq 0\,;$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1$$

$$u_0 = \kappa_1 u_1 + \mu_1\,;\; u_N = \kappa_2 u_{N-1} + \mu_2 \qquad (2)$$

К системе (1) с условиями (2) часто сводится разностная аппроксимация задач математической физики. В матричной форме имеем

$$\mathbf{Au} = \mathbf{F} \qquad (3)$$

$$\mathbf{u} = \left(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, u_N\right)$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & -\kappa & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_i & -c_i & b_i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\kappa_2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Vmatrix} \mu_1 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ \ldots \\ -f_{N-1} \\ -f_N \\ \mu_2 \end{Vmatrix}$$

В случае граничных условий первого рода имеем матрицу размером $\left(N-1\right)\times\left(N-1\right)$; в случае граничных условий второго и третьего рода – матрицу размером $\left(N+1\right)\times\left(N+1\right)$.

Системы уравнений типа (1) или (3) удобно решать методом прогонки.

Правая прогонка

Предположим, что имеет место соотношение

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (4)$$

где α_{i+1}, β_{i+1} – прогоночные коэффициенты, которые пока не определенны.

$$u_{i-1} = \alpha_i u_i + \beta_i \qquad (5)$$

Подставляя (5) в уравнение (1), получаем

$$a_i\left(\alpha_i u_i + \beta_i\right) - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -f_i$$

или

$$u_i\left(a_i\alpha_i - c_i\right) + b_i u_{i+1} = -\left(f_i + a_i\beta_i\right).$$

Следовательно

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad \beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - a_i\alpha_i} \qquad (6)$$

Используем условие в нулевой точке и уравнение (5) для $i = 1$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \kappa_1 u_1 + \mu_1 \\ u_0 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \kappa_1\,,\; \beta_1 = \mu_1 \qquad (7)$$

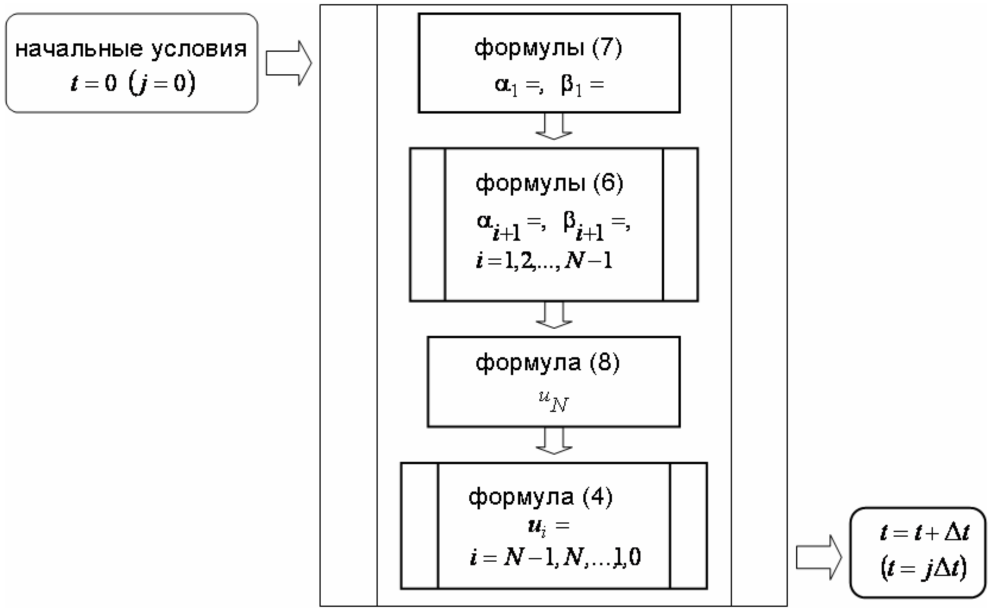
Зная α_1, β_1 последовательно определяем все коэффициенты α_i, β_i вплоть до точки N.

Используем условия в N – ой точке и уравнение (5) для $i = 1$

$$\left.\begin{aligned} u_N &= \kappa_2 u_{N-1} + \mu_2 \\ u_{N-1} &= \alpha_N u_N + \beta_N \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_N = \frac{\mu_2 + \kappa_2\beta_N}{1 - \kappa_2\alpha_N} \qquad (8)$$

На этом заканчивается прямая прогонка. Обратная прогонка использует уравнение (5) для $i = N-1, N-2, \ldots.1, 0$.

Алгоритм решения можно представить схематически:



– В случае обыкновенного дифференциального уравнения решение закончено.

– В случае нестационарной задачи (уравнения с частными производными) процедура повторяется.

Формулы прогонки можно применять, если знаменатели дробей (6) и (8) не обращаются в нуль, что выполняется, если

$$|c_i| \ge |a_i| + |b_i|, \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \tag{9}$$

$$|\kappa_1| \le 1; \ |\kappa_2| \le 1; \ |\kappa_1 + \kappa_2| < 2$$

Левая прогонка

Предположим, что имеет место соотношение

$$u_{i+1} = \xi_{i+1} u_i + \eta_{i+1} \tag{10}$$

Тогда

$$a_i u_{i-1} + (b_i \xi_{i+1} - c_i) u_i + b_i \eta_{i+1} = -f_i$$

Следовательно

$$\xi_i = \frac{a_i}{c_i - b_i \xi_{i+1}}, \quad \eta_i = \frac{\eta_{i+1} b_i + f_i}{c_i - b_i \xi_{i+1}} \tag{11}$$

$$i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1$$

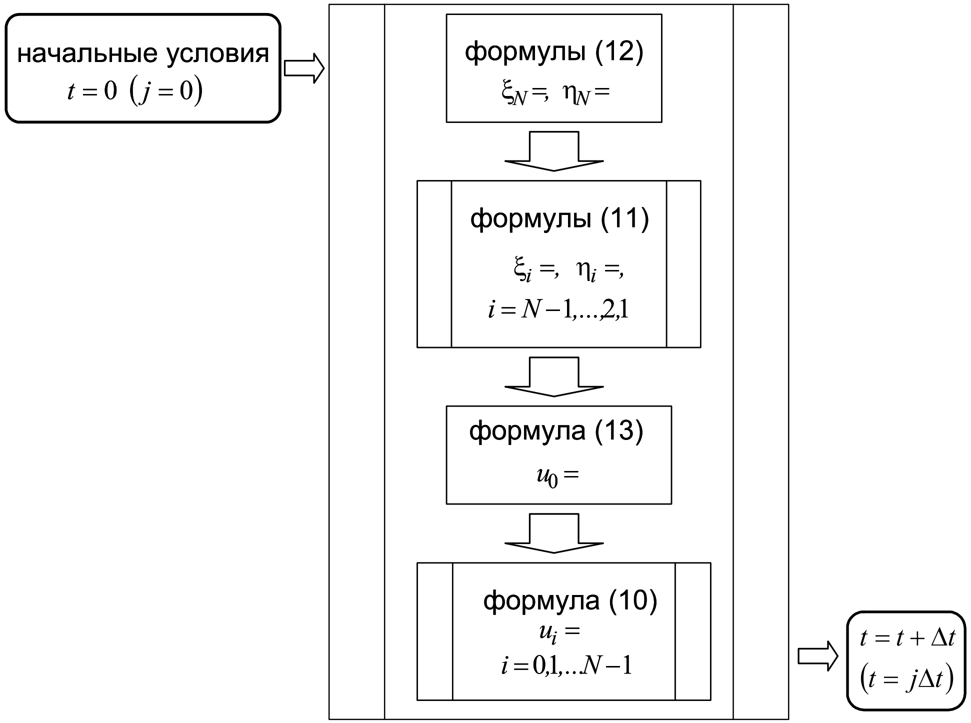
$$\left.\begin{aligned} u_N &= \kappa_2 u_{N-1} + \mu_2 \\ u_N &= \xi_N u_{N-1} + \eta_N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \xi_N = \kappa_2, \quad \eta_N = \mu_2 \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \kappa_1 u_1 + \mu_1 \\ u_1 &= \xi_1 u_0 + \eta_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ u_0 = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_1}{1 - \kappa_1 \xi_1} \tag{13}$$

Прямая прогонка включает условия (12), расчет прогоночных коэффициентов (11); обратная прогонка – условие (13) и расчет искомой функции (10).

В частном случае задач теплопроводности первый алгоритм (правая прогонка) удобен, если источник тепла действует на границе $x = 0$ (слева); вторая – если источник действует на поверхности $x = L$ (справа).

Схематически алгоритм решения можно представить:



Метод встречных прогонок

Обозначим прогоночные коэффициенты как α_i, β_i в области $0 \le i \le i_0 + 1$ и ξ_i, η_i – в области $i_0 \le i \le N$.

Формулы правой и левой прогонок остаются в силе.

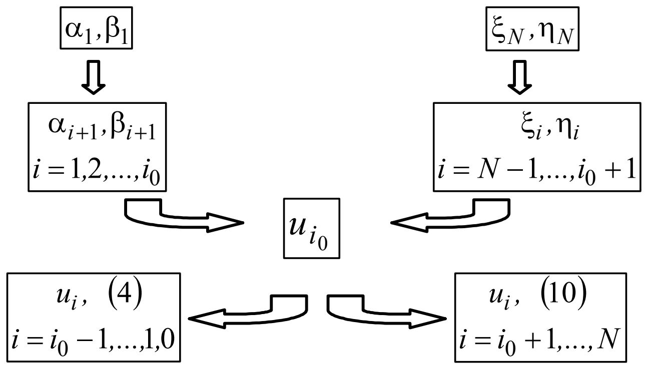
В точке i_0 производится сопряжение решений в форме (4) и (10)

$$\left.\begin{aligned} u_{i_0} &= \alpha_{i_0+1} u_{i_0+1} + \beta_{i_0+1} \\ u_{i_0+1} &= \xi_{i_0+1} u_{i_0} + \eta_{i_0+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ u_{i_0} = \frac{\beta_{i_0+1} + \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0+1}}{1 - \alpha_{i_0+1}\xi_{i_0+1}}. \qquad (14)$$

Формула (14) имеет смысл, так как хотя бы одна из величин $\left|\xi_{i_0+1}\right|$ или $\left|\alpha_{i_0+1}\right|$ меньше 1 (в силу условий (9)). Следовательно,

$$1 - \alpha_{i_0+1}\xi_{i_0+1} > 0.$$

Алгоритм решения в схематической форме



– Метод удобен, когда требуется найти значение функции лишь в одной точке.

– Имеет место распараллеливание алгоритмов.

Потоковый вариант метода прогонки

Применяется для задач с сильно меняющимися коэффициентами (задач гидродинамики, теплопроводности, магнитной гидродинамики с коэффициентами, зависящими от термодинамических свойств среды).

Рассмотрим разностную задачу (1) с коэффициентами специального вида:

$$a_i u_{i-1} - c_i u_i + a_{i+1} u_{i+1} = -f_i; \qquad (15)$$

$$i = 1,2,\dots,N-1,$$

где

$$a_i \neq 0;\ \ c_i = a_{i+1} + a_i + d_i;\ \ d_i > 0, \quad 0 \le a_i \le \infty \qquad (16)$$

$$u_0 = \kappa_1 u_1 + \mu_1; \quad u_N = \kappa_2 u_{N-1} + \mu_2$$

$$\kappa_1 \le 1,\ \ \kappa_2 > 0; \quad \kappa_1 + \kappa_2 < 2 \qquad (17)$$

Для этой задачи формулы правой прогонки принимают вид:

$$u_i = \dot\alpha_{i+1} u_{i+1} + \dot\beta_{i+1}; \qquad (18)$$

$$\dot\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\dot\alpha_i} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+1} + a_i\left(1-\dot\alpha_i\right) + d_i};$$

$$\dot\beta_{i+1} = \frac{a_i\dot\beta_i + f_i}{c_i - \dot a_i \alpha_i} = \frac{\alpha_{i+1}\left(a_i\dot\beta_i + f_i\right)}{a_{i+1}}; \qquad (19)$$

$$i = 1,2,\dots,N-1.$$

Вводим новую функцию – поток

$$w_i = a_i\left(u_{i-1} - u_i\right) \qquad (20)$$

Тогда из (15) и (16) получаем

$$w_i - w_{i+1} - d_i u_i = -f_i; \qquad (21)$$

$$i = 1,2,\dots,N-1$$

$$\begin{cases} a_1\left(1-\kappa_1\right)u_1 + w_1 = a_1\mu_1 \\ a_N\left(1-\kappa_2\right)u_N - \kappa_2 w_N = a_N\mu_2 \end{cases} \qquad (22)$$

Из (20) находим

$$u_i = u_{i+1} + \frac{w_{i+1}}{a_{i+1}}.$$

Подставив это равенство в (18), найдем

$$a_{i+1}\left(1-\dot\alpha_{i+1}\right)u_{i+1} + w_{i+1} = a_{i+1}\dot\beta_{i+1}$$

или

$$\begin{aligned} &\alpha_i u_i + w_i = \gamma_i, \\ &\alpha_{i+1} u_{i+1} + w_{i+1} = \gamma_{i+1}, \end{aligned} \qquad (23)$$

где

$$\begin{aligned} &\alpha_i = a_i\left(1-\dot\alpha_i\right),\ \gamma_i = a_i\dot\beta_i; \\ &\alpha_{i+1} = a_{i+1}\left(1-\dot\alpha_{i+1}\right),\ \gamma_{i+1} = a_{i+1}\dot\beta_{i+1}; \end{aligned} \qquad (24)$$

Из (21) находим $u_i = \dfrac{f_i + w_i - w_{i+1}}{d_i}$ и подставляем в (23):

$$\boxed{w_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + d_i} w_{i+1} + \frac{d_i\gamma_i + \alpha_i f_i}{\alpha_i + d_i}} \qquad (25)$$

Это и есть рекуррентная формула для вычисления потока w_i.

Чтобы найти рекуррентные формулы для коэффициентов α_i, γ_i, подставляем (19) в (24). В результате получаем:

$$\boxed{\alpha_{i+1} = \frac{\alpha_i + d_i}{1 + \left(\alpha_i + d_i\right)/a_{i+1}}} \qquad \boxed{\alpha_{i+1} = \frac{a_{i+1}\left(\alpha_i + d_i\right)}{a_{i+1} + \left(\alpha_i + d_i\right)}} \qquad (26)$$

$$\boxed{\gamma_{i+1} = \frac{\gamma_i + f_i}{1 + \left(\alpha_i + d_i\right)/a_{i+1}}} \qquad \boxed{\gamma_{i+1} = \frac{a_{i+1}\left(\gamma_i + f_i\right)}{a_{i+1} + \left(\alpha_i + d_i\right)}} \qquad (27)$$

а) б)

Формулами а) нужно пользоваться при $a_i >> 1$; формулами б) – при условии $a_i < 1$.

При выполнении условий (17) из (25) – (27) следует, что всегда обеспечивается устойчивость вычисления потока, так как

$$\alpha_i \geq 0, \quad \frac{\alpha_i}{\alpha_i + d_i} < 1.$$

Граничное условие:

$$\begin{cases} a_1(1-\kappa_1)u_1 + w_1 = a_1\mu_1 \\ \alpha_1 u_1 + w_1 = \gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 = a_1(1-\kappa_1), \\ \gamma_1 = a_1\mu_1 \end{matrix}} \tag{28}$$

Для определения u_i можно воспользоваться формулой (18), которая с учетом (24) принимает вид:

$$\boxed{u_i = \left(1 - \frac{\alpha_{i+1}}{a_{i+1}}\right)u_{i+1} + \frac{\gamma_{i+1}}{a_{i+1}}, \quad a_i >> 1}, \tag{29,а}$$

или формулой

$$\boxed{u_i = \frac{a_{i+1}}{a_{i+1} + \alpha_i + d_i}u_{i+1} + \frac{\gamma_i + f_i}{a_{i+1} + \alpha_i + d_i}, \quad \alpha_i < 1}, \tag{29,б}$$

которая получается из (18) и (19).

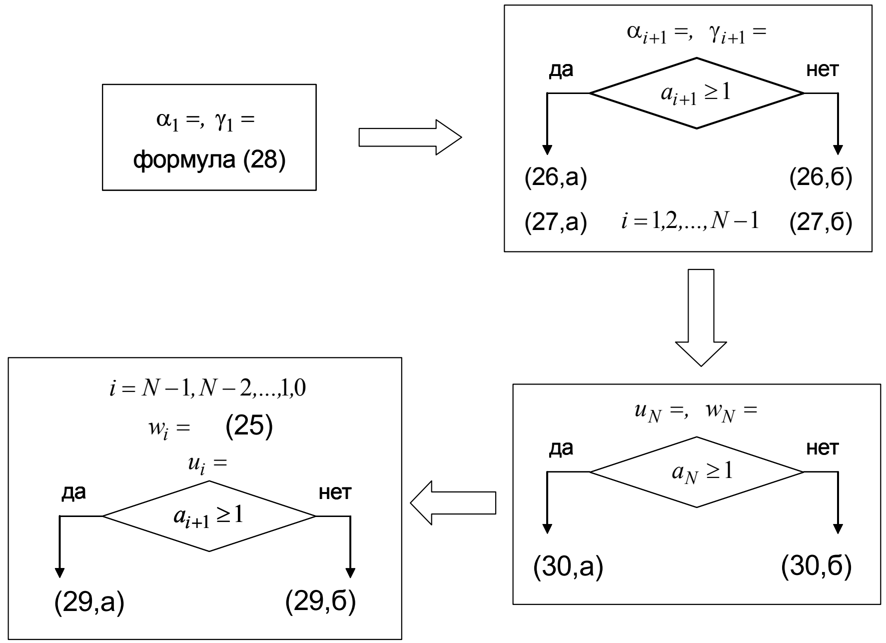
Второе граничное условие необходимо, чтобы пользоваться формулами (25) и (29). С помощью второго условия (17) и первого (23) для $i = N$ находим

$$\boxed{\begin{aligned} u_N &= \frac{\mu_N + \gamma_N \kappa_2 / a_N}{(1-\kappa_2) + \kappa_2 \alpha_N / a_N}, \\ w_N &= \frac{\gamma_N(1-\kappa_2) - \alpha_N \mu_2}{(1-\kappa_2) + \kappa_2 \alpha_N / a_N} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} u_N &= \frac{a_N \mu_N + \gamma_N \kappa_2}{a_N(1-\kappa_2) + \kappa_2 \alpha_N}, \\ w_N &= \frac{\gamma_N a_N(1-\kappa_2) - \alpha_N a_N \mu_2}{a_N(1-\kappa_2) + \kappa_2 \alpha_N} \end{aligned}} \tag{30}$$

а) $a_N >> 1$ $\qquad\qquad$ б) $a_N < 1$

Знаменатели этих выражений всегда положительны (это следует из (17)).

Схематический алгоритм решения



Существенная потеря точности при вычислении потока при использовании обычной прогонки была одной из причин введения функции w_i в качестве дополнительной искомой функции и вычисления его по рекуррентному соотношению (25)

Циклическая прогонка

Используется для нахождения периодического решения $u_{i+N} = u_i$ разностного уравнения (или системы разностных уравнений). Подобные задачи возникают при приближенном решении уравнений с частными производными в цилиндрической и сферической областях.

При решении трехчленных уравнений вида

$$a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -f_i$$

с условиями

$$a_{i+N} = a_i,\ b_{i+N} = b_i,\ \mathrm{c}_{i+N} = c_i,\ f_{i+N} = f_i$$

возникает алгебраическая задача:

$$\begin{cases} a_1 u_N - c_1 u_1 + b_1 u_2 = -f_1; \\ a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -f_i; \qquad i = 2,3,\ldots,N-1 \\ a_N u_{N-1} - c_N u_N + b_N u_{N+1} = -f_N, \end{cases} \tag{31}$$

$$a_i > 0, b_i > 0, c_i > a_i + b_i \tag{32}$$

Решение системы (31) ищем в виде:

$$u_i = p_i + u_N q_i, \tag{33}$$

где

$$p_i = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1},$$
$$q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1} \tag{34}$$

Непосредственной подстановкой (34) в (33) можно убедиться, что равенство (33) эквивалентно следующему:

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1} + u_N \gamma_{i+1} \tag{35}$$

или

$$u_{i-1} = \alpha_i u_i + \beta_i + u_N \gamma_i .$$

Подставляем последнее соотношение в общее уравнение системы (31) и группируем слагаемые. В результате придем к рекуррентным уравнениям для прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \gamma_{i+1} = \frac{a_i \gamma_i}{c_i - \alpha_i a_i} \tag{36}$$

Граничные условия.

Из (31) и (35) имеем:

$$\begin{cases} c_1 u_1 = b_1 u_2 + f_1 + a_1 u_N, \\ u_1 = \alpha_2 u_2 + \beta_2 + \gamma_2 u_N \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1},\ \beta_2 = \frac{f_1}{c_1},\ \gamma_2 = \frac{a_1}{c_1} \tag{37}$$

Из (33), (35) и условия периодичности $u_{i+N} = u_i$ находим:

$$u_{N+1} = u_1 = p_1 + u_N q_1,$$

$$u_N = \alpha_{N+1} u_{N+1} + \beta_{N+1} + u_N \gamma_{N+1}.$$

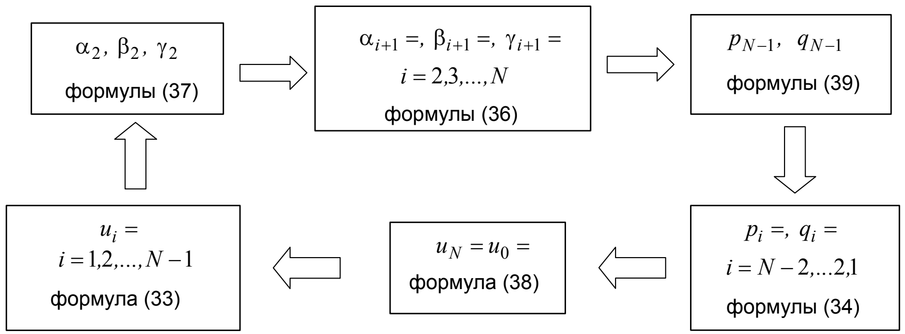
Следовательно,

$$u_N = \frac{p_1 \alpha_{N+1} + \beta_{N+1}}{1 - \gamma_{N+1} - q_1 \alpha_{N+1}} \tag{38}$$

Имеется дополнительное соотношение:

$$\begin{cases} u_{N-1} = p_{N-1} + u_N q_{N-1} \\ u_{N-1} = \alpha_N u_N + \beta_N + u_N \gamma_N \end{cases} \Rightarrow p_{N-1} = \beta_N,\ \ q_{N-1} = \alpha_N + \gamma_N \tag{39}$$

Схематический алгоритм решения



Матричная прогонка.

Система уравнений (1) является частным случаем задачи

$$\mathbf{A}_i\mathbf{u}_{i-1} - \mathbf{C}_i\mathbf{u}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_{i+1} = -\mathbf{F}_i, \qquad (40)$$

$$i = 1,2,....,N-1;$$

$$\mathbf{C}_0\mathbf{u}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_0; \qquad (41)$$

$$-\mathbf{A}_N\mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{C}_N\mathbf{u}_N = \mathbf{F}_N, \qquad (42)$$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}$ – векторы размерности M_i; $\mathbf{C}_i$ – квадратная матрица размерности $M_i \times M_i$; $\mathbf{A}_i$ – прямоугольная матрица размерности $M_i \times M_{i-1}$; $\mathbf{B}_i$ – прямоугольная матрица размерности $M_i \times M_{i+1}$.

По аналогии с методом обычной прогонки решение задачи (40) – (42) ищется в виде:

$$\mathbf{u}_i = \boldsymbol{\alpha}_{i+1}\mathbf{u}_{i+1} + \boldsymbol{\beta}_{i+1}; \qquad (43)$$

$$i = N-1, N-2,...,1,0,$$

где $\boldsymbol{\alpha}_i$ – прямоугольная матрица размерности $M_{i-1} \times M_i$; $\boldsymbol{\beta}_i$ – вектор размерности M_{i-1}.

Из (43), (40) аналогично предыдущему получаем формулы для определения прогоночных коэффициентов

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_{i+1} = \left(\mathbf{C}_i - \mathbf{A}_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)^{-1}\mathbf{B}_i \\ \boldsymbol{\beta}_{i+1} = \left(\mathbf{C}_i + \mathbf{A}_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)^{-1}\left(\mathbf{F}_i + \mathbf{A}_i\boldsymbol{\beta}_i\right) \end{cases} \qquad (44)$$

Граничные условия (41) и (42) дают:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0; \; \boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{F}_0 \qquad (45)$$

$$\mathbf{u}_N = \left(\mathbf{C}_N - \mathbf{A}_N\boldsymbol{\alpha}_N\right)^{-1}\left(\mathbf{A}_N\boldsymbol{\beta}_N + \mathbf{F}_N\right) = \boldsymbol{\beta}_N.$$

Метод матричной прогонки устойчив по отношению к случайной ошибке, то есть $\|\boldsymbol{\alpha}_i\| \le 1$, $i = 1,2,...,N$, если выполнены условия

$$\left\|\mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0\right\| \le 1; \; \left\|\mathbf{C}_N^{-1}\mathbf{A}_N\right\| \le 1; \; \left\|\mathbf{C}_i^{-1}\mathbf{A}_i\right\| + \left\|\mathbf{C}_i^{-1}\mathbf{B}_i\right\| \le 1;$$

$$1 \le i \le N-1.$$

Причем хотя бы одно из этих условий должно выполняться как строгое неравенство.

Различные варианты метода прогонки.

Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Теплофизические основы высокотемпературных технологий в машиностроении» для студентов 5 курса, обучающихся по направлению 150900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», специализации 151001.01 «Технология автоматизированного производства», 150917 «Физика высоких технологи в машиностроении»

Составитель д.ф.-м.н., профессор кафедры ФВТМ А.Г. Князева

Подписано к печати
Формат $60 \times 84/16$. Бумага офисная
Плоская печать. Усл. печ.л. 1.25 .
Уч.–изд.л. . Тираж 120 экз.
Заказ № . Цена свободная.
ИПФ ТПУ. Лицензия ЛТ № 1 от 18.07.94.
Ротапринт ТПУ. 634034, Томск, пр. Ленина 30