

И.А. Котельников, Г.В. Ступаков

Лекции по физике плазмы

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

И.А. Котельников, Г.В. Ступаков

Лекции по физике плазмы

Учебное пособие

Новосибирск
1996

УДК 933
ВВК В333

Котельников И.А., Ступаков Г.В. Лекции по физике плазмы: Учеб. пособие для студентов физического факультета НГУ / Новосиб. ун-т. Новосибирск, 1996. 136 с.

Учебное пособие содержит конспективное изложение курса «Введение в физику плазмы», который читается в осеннем семестре для студентов третьего курса физического факультета, специализирующихся на кафедре физики плазмы. Основное внимание уделяется движению частиц в электромагнитном поле и кинетике плазмы, включая теорию элементарных процессов: кулоновских столкновений, ионизации, рекомбинации, перезарядки и излучения. Магнитная гидродинамика и теория волн в плазме, обычно входящие во вводные курсы по физике плазмы, рассматриваются в отдельных семестровых курсах лекций «Магнитная гидродинамика» и «Волны в плазме», читаемых вслед за «Введением в физику плазмы».

Уровень изложения рассчитан на студентов, прослушавших курсы по электродинамике, молекулярной физике и знакомых с основами квантовой механики и статистической физики.

Рецензент
профессор Б.А. Князев

Печатается по решению редакционно-издательского совета НГУ.

© Новосибирский
государственный
университет, 1996

Оглавление

Предисловие	5
1 Общие сведения о плазме	7
2 Дебаевская экранировка	15
3 Степень ионизации плазмы	20
4 Кулоновские столкновения	26
5 Релаксация энергии и импульса в плазме	30
6 Элементарные процессы в плазме	39
7 Движение заряженных частиц	45
8 Адиабатические инварианты	58
9 Кинетическое уравнение	65
10 Магнитная гидродинамика	77
11 Волны в плазме	85
12 Плазма в пробкаторне	86
13 Кинетические коэффициенты	87
14 Перенос плазмы в магнитном поле	96
15 Излучение из плазмы	105

16 Критерий Лоусона	117
Ответы к задачам и упражнениям	124
Список литературы	135

Предисловие

Настоящее учебное пособие содержит конспективное изложение курса «Введение в физику плазмы», который читается в осеннем семестре для студентов третьего курса физического факультета, специализирующихся на кафедре физики плазмы Новосибирского государственного университета. Основное внимание уделяется движению частиц в электромагнитном поле и кинетике плазмы, включая теорию элементарных процессов: кулоновских столкновений, ионизации, рекомбинации, перезарядки и излучения. Магнитная гидродинамика и теория волн в плазме, обычно входящие во вводные курсы по физике плазмы, рассматриваются в отдельных семестровых курсах лекций «Магнитная гидродинамика» и «Волны в плазме», читаемых вслед за «Введением в физику плазмы».

Содержание учебного пособия отражает более чем двадцатилетний опыт преподавания вводного курса на кафедре физики плазмы Новосибирского государственного университета. Структура курса была заложена академиком Д.Д. Рютовым; в разное время лекции читали Д.Д. Рютов, Б.Н. Брейзман, Г.В. Ступаков, С.В. Лебедев, И.А. Котельников. В нынешнем виде курс излагается около десяти лет, его основу составил конспект лекций одного из авторов пособия (Г.В.С.). При подготовке настоящего издания было добавлено большое количество иллюстраций и задач. Часть задач предназначена для самостоятельного решения студентами, другие обычно служат темами для семинарских занятий. Некоторые из задач очень просты (так по крайней мере кажется их составителям) — эти задачи формулируются по ходу лекции и предназначены, главным образом, для того, чтобы заострить внимание слушателей на какой-то стороне обсуждаемого явления. К наиболее сложным задачам приведены решения или даны ответы.

Уровень изложения рассчитан на студентов, прослушавших курсы по электродинамике, механике и молекулярной физике. Параллель-

но с изучением начал физики плазмы студенты физического факультета НГУ слушают курс квантовой механики, а статистическую физику изучают ещё позднее, поэтому некоторые лекции по физике плазмы включают в себя минимальные сведения из этих курсов.

Курс рассчитан примерно на 32 занятия — по одной лекции и по одному семинару в неделю в течение полугодического семестра (некоторые лекции из представленных в пособии длятся более двух часов). Для получения зачета по семинарским занятиям студенты обязаны представить решения примерно десяти задач средней трудности, отобранных преподавателем для этой цели. Эти задачи также вошли в учебное пособие. Оценка за курс проставляется по результатам устного экзамена, где студентам предлагается в течение часа решить одну «многоходовую» задачу, подготовить развернутый ответ по одной из лекций (причем разрешено использовать любую литературу и конспекты лекций), а также ответить на дополнительные вопросы экзаменатора (уже без конспекта).

На протяжении многих лет авторы имели возможность обсуждать содержание настоящего курса со своими коллегами Б.Н. Брейzmanом, Г.Е. Векштейном, С.В. Лебедевым, В.В. Мирновым, Д.Д. Рютовым. Всем им они выражают свою искреннюю благодарность.

Авторы
Академгородок, Новосибирск — Cupertino, CA
7 ноября 1998 г.

Лекция 1

Общие сведения о плазме. Идеальность. Вырождение. Квазинейтральность

Плазмой называется квазинейтральный газ заряженных частиц. В наиболее распространенном случае плазма состоит из электронов и положительно заряженных ионов. В плазме могут присутствовать также нейтральные атомы: если их доля значительна, плазма называется *частично* (или *не полностью*) *ионизованной*. Если доля нейтральных атомов пренебрежимо мала, то мы имеем дело с *полностью ионизованной* плазмой. Понятие квазинейтральности подробнее мы обсудим ниже; пока же достаточно сказать, что плазма квазинейтральна, если число положительных зарядов в ней равно числу отрицательных, так что в целом электрический заряд равен нулю.

Термин «плазма» был введен в работе Ленгмюра и Тонкса в 1929 г. в связи с исследованием процессов в электронных лампах, наполненных ионизованным газом. Сейчас бы мы сказали, что Ленгмюр и Тонкс исследовали разряд в газе низкого давления. Когда к газовому промежутку прикладывается высокое напряжение, происходит пробой: газ частично ионизуется, и образовавшиеся электроны и ионы, двигаясь в направлении разнополярных электродов, создают разрядный ток. В наше время газовый разряд можно повсеместно наблюдать в лампах дневного света, а также в сварочных дугах и грозových разрядах.

Зарождение современной физики плазмы относится к началу 50-х гг., когда была выдвинута идея создания термоядерного реактора на основе управления реакциями синтеза, протекающими при взрыве водородной бомбы. Собственно после того как в 1952 и 1953 гг. в США и СССР были проведены испытательные взрывы первых водородных бомб, и были начаты работы по мирному применению энергии реакций синтеза. Мы рассмотрим эти реакции в заключительной лекции курса и увидим, что для их осуществления вещество с химическими элементами, вступающими в реакции синтеза, необходимо нагреть до

температуры несколько сот миллионов градусов — поэтому эти реакции часто называют термоядерными. При столь высокой температуре любое вещество неизбежно превращается в плазму. Задача нагрева и удержания такой плазмы и явилась причиной быстрого роста научных исследований в области физики плазмы.

Другим стимулятором развития физики плазмы выступают астрофизические исследования. Нередко можно слышать, что 99% вещества во Вселенной находится в состоянии плазмы. Возможно, эта оценка сильно преувеличена, так как во Вселенной имеется так называемая скрытая масса, природа которой в настоящее время не ясна. Однако несомненно, что звезды и их атмосферы, газовые туманности и значительная доля межзвездного газа представляют собой плазму. Если выйти за пределы земной атмосферы, то сразу же придется столкнуться с плазмой радиационных поясов Земли и плазмой солнечного ветра.

В природе встречается не только электрон-ионная плазма. В атмосфере пульсаров существует *электрон-позитронная* плазма, в которой положительный заряд несут позитроны. В полупроводниках вводят понятие *электронно-дырочной* плазмы, состоящей из свободных электронов и положительно заряженных «дырок». Мы ограничимся изучением свойств исключительно электрон-ионной плазмы.

Даже если Вселенная действительно почти целиком состоит из плазмы, то в повседневной жизни наши встречи с ней ограничиваются всего несколькими примерами: вспышка молнии, мягкое свечение северного сияния, проводящий газ внутри флуоресцентной трубки или неоновой рекламы. В земных условиях наиболее естественный способ создать плазму состоит в том, чтобы нагреть газ до такой температуры, при которой кинетическая энергия движения частиц будет больше или хотя бы сравнима с энергией ионизации атома. При этом в результате межчастичных столкновений электроны срываются с атомных орбит, и образуется смесь свободных электронов и ионов (а также неионизованных нейтральных атомов).

В физике плазмы температуру T принято измерять в энергетических единицах, отождествляя её с энергией kT , где $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана. Удобной единицей измерения температуры является электронвольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 11\,600^\circ \text{ К.}$$

Рассмотрим плазму с температурой T , плотность которой равна n частиц в кубическом сантиметре. При большой плотности n суще-

ственными становятся квантовые эффекты, тогда как относительно разреженная плазма может описываться классической теорией. Получим условие, когда плазма может считаться *классической*.

При температуре T характерный импульс частиц плазмы равен \sqrt{mT} , где m — масса частиц. Соответствующая длина волны де Бройля примерно равна

$$\lambda_B \sim \frac{\hbar}{\sqrt{mT}}, \quad (1.1)$$

где $\hbar = 4,14 \cdot 10^{-15}$ эВ·сек — постоянная Планка. Если λ_B мала по сравнению с межчастичным расстоянием $n^{-1/3}$, то из волн де Бройля можно составить пакеты, размер которых будет мал по сравнению с $n^{-1/3}$ и которые будут двигаться квазиклассически. В переводе с языка квантовой физики на язык классической физики эти пакеты отождествляются с частицами. Следовательно, условие квазиклассичности плазмы означает, что $\lambda_B \ll n^{-1/3}$. С учетом соотношения (1.1) его можно записать в виде

$$T \gg \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m}. \quad (1.2)$$

Это неравенство нарушается раньше для электронов, чем для ионов, так как масса m входит в (1.2) в знаменатель.

Важной характеристикой плазмы является относительная роль электростатического взаимодействия заряженных частиц друг с другом. Оценим грубо энергию электростатического взаимодействия W_E для классической плазмы и сравним её со средней кинетической энергией частиц W_K . Последняя равна по порядку величины температуре плазмы,

$$W_K \sim T, \quad (1.3)$$

тогда как

$$W_E \sim \frac{1}{2} \frac{e^2}{n^{-1/3}}, \quad (1.4)$$

где $n^{-1/3}$ есть среднее расстояние между частицами. Множитель $1/2$ при грубой оценке не имеет большого значения, но он подчеркивает, что $e^2/n^{-1/3}$ есть энергия взаимодействия *двух* частиц. Если выполнено условие

$$T \gg e^2 n^{1/3}, \quad (1.5)$$

то говорят об *идеальной* плазме. В идеальной плазме кулоновское взаимодействие частиц мало, и во многих задачах им можно вообще пренебречь. Термодинамические свойства такой плазмы мало отличаются от свойств идеального газа. Плазма, для которой выполнено неравенство, обратное (1.5), называется *неидеальной*.

Для *квантовой* (или *вырожденной*) плазмы, температура T которой мала по сравнению с $\hbar^2 n^{2/3}/m$, критерий идеальности изменяется. Хотя выражение (1.4) для энергии электростатического взаимодействия сохраняет силу, кинетическая энергия частиц теперь не равна температуре плазмы: согласно квантовой физике кинетическая энергия не равна нулю даже при абсолютном нуле температуры. Кинетическую энергию можно оценить, если заметить, что в одной точке не может находиться более двух электронов (один со спином «вверх», другой со спином «вниз»). Поэтому при среднем расстоянии между частицами $n^{-1/3}$ получается, что каждый электрон заперт в ящик с размерами $\Delta x \sim n^{-1/3}$. По принципу неопределенности, частица, локализованная в интервале Δx , должна иметь импульс $p \sim \hbar/\Delta x$ и, следовательно, должна иметь кинетическую энергию $W_K = p^2/2m$. Собирая все эти оценки вместе, находим, что

$$W_K \sim \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m}. \quad (1.6)$$

Эта величина по порядку величины совпадает с энергией Ферми вырожденного электронного газа. Условие идеальности $W_K \gg W_E$ для квантовой плазмы принимает вид

$$n \gg n_* = \left(\frac{me^2}{\hbar^2} \right)^3. \quad (1.7)$$

Неравенства (1.2), (1.5) и (1.7) выделяют в плоскости переменных n , T четыре области (рис. 1.1). Это область классической идеальной плазмы (1), классической неидеальной плазмы (2), квантовых неидеальной (3) и идеальной (4) плазм. Все четыре области имеют одну общую точку, в которой

$$n \sim n_* = \left(\frac{me^2}{\hbar^2} \right)^3 = a_B^{-3} = 6,75 \cdot 10^{24} \text{ см}^{-3},$$

$$T \sim T_* = \frac{1}{2} e^2 n_*^{1/3} = \frac{me^4}{2\hbar^2} = R_y = 13,6 \text{ эВ},$$

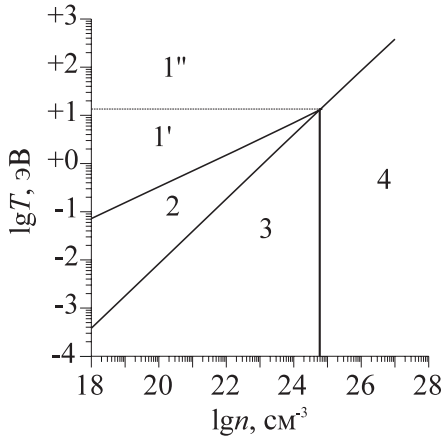


Рис. 1.1. Классификация плазмы: 1 — идеальная классическая плазма (1' — низкотемпературная, 1'' — высокотемпературная); 2 — неидеальная классическая плазма; 3 — неидеальная квантовая плазма; 4 — идеальная квантовая плазма

где $a_B = \hbar^2/me^2$ обозначает боровский радиус, а $Ry = me^4/2\hbar^2$ — энергия основного состояния в атоме водорода. Для ориентировки в порядках величин в табл. 1.1 приведены некоторые типичные параметры плазм, встречающихся в природе. Иногда плазму подразделяют на *низкотемпературную* ($T < 10$ эВ) и *высокотемпературную* ($T \gg 10$ эВ). Хотя такое деление в значительной степени условно, оно отражает тот факт, что высокотемпературная водородная плазма является полностью ионизованной, тогда как в низкотемпературной плазме обычно важным является учет наличия нейтральных частиц.

Вернемся к понятию квазинейтральности. Рассмотрим плазму, в единице объема которой находится n электронов и столько же однозарядных ионов. Представим, что вследствие теплового движения частиц в области размера l произошло разделение зарядов и самопроизвольно возникла разность плотности электронов и ионов. В результате появится электрическое поле, потенциал ϕ которого определяется из уравнения Пуассона

$$\Delta\phi = -4\pi e\delta n. \quad (1.8)$$

Для грубой оценки можно положить $\Delta\phi \approx \delta\phi/l^2$, где $\delta\phi$ — перепад потенциала на масштабе l . Из (1.8) находим

$$\delta\phi \approx 4\pi e\delta n l^2. \quad (1.9)$$

Величина $e\delta\phi$ не может быть существенно больше кинетической энергии частиц T , так как в противном случае потенциал будет тормозить заряды и препятствовать их разделению. По этой причине

Таблица 1.1

	n , см ⁻³	T , эВ
Термоядерный реактор	10^{15}	10^4
Токамак	$10^{12} \div 10^{14}$	$100 \div 10^4$
Открытая ловушка	$10^{12} \div 10^{14}$	$10 \div 10^3$
Пинч	10^{16}	10^2
Газовый разряд	$10^6 \div 10^{12}$	2
Лазерная плазма	$10^{20} \div 10^{24}$	$10^2 \div 10^3$
Солнечная корона	10^6	200
Солнечная атмосфера	10^{14}	1
Ионосфера Земли	$10^5 \div 10^6$	0,1
Солнечный ветер	5	$10 \div 50$
Межзвёздный газ	1	$0,01 \div 1$

$e\delta\phi \sim T$, что при учете (1.9) дает

$$\frac{\delta n}{n} \sim \frac{T}{4\pi n e^2 l^2}. \quad (1.10)$$

Вводя определение дебаевского радиуса

$$r_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}}, \quad (1.11)$$

мы можем сказать, что плазма будет квазинейтральной, если ее размер L велик по сравнению с r_D . В этом случае относительные разность в плотности электронов и ионов на масштабе L мала:

$$\frac{\delta n}{n} \sim \frac{r_D^2}{L^2}. \quad (1.12)$$

Если же L сравнимо с r_D , то такой газ, по существу, не является плазмой, а представляет собой скопление отдельных заряженных частиц. Другой вывод, который следует из формулы (1.12), состоит в том, что если размер плазмы сравним с дебаевским радиусом, $L \sim r_D$, то плазма является существенно не квазинейтральной, $\delta n \sim n$.

При вычислении величины дебаевского радиуса полезно пользо-

ваться «практической» формулой:

$$r_D [\text{см}] = 740 \sqrt{\frac{T [\text{эВ}]}{n [\text{см}^{-3}]}}.$$

► **Задача 1.1**

Вычислить r_D для параметров, приведенных в табл. 1.1.

Если в плазме есть разные сорта ионов, характеризующиеся зарядовыми числами Z_a и плотностью n_a , то условие квазинейтральности плазмы очевидно принимает следующий вид:

$$n_e = \sum_a n_a Z_a.$$

► **Задача 1.2**

Оценить дебаевский радиус r_D для плазмы, состоящей из электронов и ионов с зарядом $Z \gg 1$.

Дебаевский радиус характеризует пространственный масштаб, на котором происходит разделение зарядов в плазме. Характерным временным масштабом существования флуктуаций плотности в объемчике с размером r_D является величина

$$t \sim \frac{r_D}{v_{Te}} \sim \left(\frac{T}{4\pi n e^2} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{T} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{m_e}{4\pi n e^2} \right)^{1/2},$$

где v_{Te} — тепловая скорость электронов, а m_e — масса электрона. За это время в область размера r_D прилетят новые электроны, которые «замажут» возникшую там флуктуацию. Величина t^{-1} , имеющая размерность частоты, называется электронной *плазменной* или *ленгмюровской* частотой и обозначается ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}}. \quad (1.13)$$

В практических единицах

$$\omega_p [\text{с}^{-1}] = 5,6 \cdot 10^4 \sqrt{n [\text{см}^{-3}]}. \quad (1.14)$$

Если флуктуация плотности возникла в объемчике с размером $l \gg r_D$, тепловое движение не успевает её замазать за время ω_p^{-1} . В этом

случае возникают ленгмюровские колебания. Они сопровождаются изменением плотности электронов с периодом $2\pi/\omega_p$ вокруг среднего значения, равного плотности ионов.

Рассмотрим плоский слой электронов, который движется вдоль оси x перпендикулярно своей плоскости. Если этот слой сдвинулся вправо на расстояние $x - x_0$ от своего начального положения x_0 (когда плотность электронов была однородна и равна плотности ионов n_0), то слева от слоя возникнет избыток положительного заряда с величиной $en_0(x - x_0)$ на единицу площади слоя, так как при своем движении слой «обнажает» ионный остов, остающийся слева от него. В результате возникнет электрическое поле $E_x = 4\pi en_0(x - x_0)$, которое будет тормозить электроны в слое, стремясь вернуть их в исходное положение. Приравнявая ускорение электрона в слое (помноженное на массу) к возвращающей силе $-eE_x$, получим уравнение движения электрона

$$m\ddot{x} = -4\pi e^2 n_0(x - x_0). \quad (1.14)$$

Это уравнение действительно описывает колебательное движение электрона с ленгмюровской частотой $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m}$ около его исходного положения (см. задачу).

► Задача 1.3

В момент времени $t = 0$ электроны плазмы приобрели скорость $v_x = v_0 \cos(kx_0)$, где x_0 — начальная координата электрона. Считая ионы неподвижными, а начальное распределение плотности электронов однородным и равным n_0 , описать движение электронов.

Ответ. Электроны совершают колебательное движение с частотой $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m}$ около точки старта: $x = x_0 + (v_0 / \omega_p) \cos(kx_0) \sin(\omega_p t)$, $v_x = v_0 \cos(kx_0) \cos(\omega_p t)$. Указанное решение имеет смысл, если $v_0 < \omega_p / k$. При $v_0 > \omega_p / k$ существует такой момент времени, когда плотность электронов $n = n_0 / \frac{\partial x}{\partial x_0}$ формально становится бесконечной; при этом происходит «опрокидывание волны», а движение электронов становится двухпоточковым.

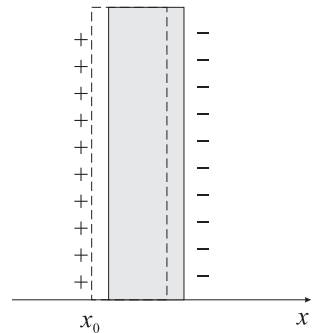


Рис. 1.2. Колебания слоя электронов

Лекция 2

Дебаевская экранировка. Энергия кулоновского взаимодействия частиц в плазме

Кулоновское взаимодействие зарядов в плазме проявляется в отталкивании разноименно заряженных частиц и притяжении зарядов разного знака. В результате вблизи положительного заряда увеличивается концентрация отрицательно заряженных частиц, которые экранируют положительный заряд. Из-за такой экранировки потенциал исходного заряда убывает с расстоянием гораздо быстрее, чем по закону Кулона. Аналогичная картина имеет место и вблизи отрицательного заряда.

Для того чтобы описать эффект экранировки количественно, представим, что в плазму помещен сторонний заряд q , и найдем распределение потенциала ϕ вблизи него. Электроны и ионы плазмы (последние считаются однозарядными) распределяются в потенциале ϕ по закону Больцмана

$$n_s = n_0 \exp\left(-\frac{e_s \phi}{T_s}\right), \quad (2.1)$$

где $s = e, i$, а n_0 — плотность частиц вдали от пробного заряда, где плазма является квазинейтральной. В формуле (2.1) мы учли возможное отличие температуры электронов T_e от температуры ионов T_i . Будем предполагать, что $|e_s \phi| \ll T_s$, тогда экспоненту в (2.1) можно разложить в ряд Тейлора

$$\exp\left(-\frac{e_s \phi}{T_s}\right) \approx 1 - \frac{e_s \phi}{T_s}, \quad (2.2)$$

что дает для возмущения плотности δn следующее выражение:

$$\delta n = n_i - n_e = -n_0 e \phi \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_e} \right), \quad (2.3)$$

где $e = e_i = -e_e$ обозначает элементарный заряд.

Подставим возмущение плотности (2.3) в уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta n = \frac{\varphi}{r_D^2}, \quad (2.4)$$

где дебаевский радиус r_D теперь определяется по формуле

$$\frac{1}{r_D^2} = 4\pi e^2 n_0 \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_e} \right). \quad (2.5)$$

То, что мы обозначили через r_D в лекции 1 (формула (1.11)), фактически относилось только к одной компоненте плазмы; из (2.5) видно, что при учете обеих компонент складываются величины r_D^{-2} .

Будем искать сферически симметричное решение уравнения (2.4), $\varphi = \varphi(r)$. При этом уравнение (2.4) принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\varphi}{r_D^2}.$$

Легко найти его решение, обращающееся в нуль при $r \rightarrow \infty$:

$$\varphi = \frac{\mathcal{A}}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right). \quad (2.6)$$

Константа \mathcal{A} определяется из того условия, что при $r \rightarrow 0$ мы должны получить неэкранированный кулоновский потенциал q/r . Значит, $\mathcal{A} = q$, и поэтому

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right). \quad (2.7)$$

Потенциал (2.7) при больших r убывает значительно быстрее, чем неэкранированный кулоновский потенциал q/r (рис. 2.1).

► Задача 2.1

Пользуясь выражением (2.7), оценить минимальное расстояние r_* , на котором еще можно разлагать экспоненту в формуле (2.1). Убедиться, что для идеальной плазмы r_* меньше, чем межчастичное расстояние.

Если в плазме есть несколько сортов заряженных частиц, то дебаевский радиус будет определяться следующей формулой (ср. с (2.5)):

$$\boxed{\frac{1}{r_D^2} = \sum_s \frac{4\pi e^2 Z_s^2 n_s}{T_s}}. \quad (2.8)$$

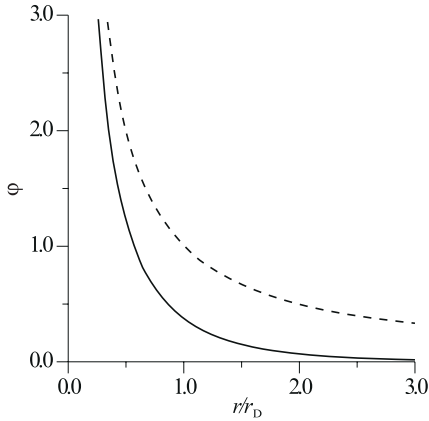


Рис. 2.1. Дебаевский (сплошная линия) и кулоновский (пунктир) потенциал в единицах q/r_D

Вернемся к выражению (2.6). Потенциал $\phi(r)$ складывается из потенциала пробного заряда q/r и потенциала экранирующего облака зарядов плазмы ϕ_{scr} . Последний может быть найден как разность

$$\phi_{\text{scr}} = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right) - \frac{q}{r}. \quad (2.9)$$

Переходя к пределу $r \rightarrow 0$ в (2.9), найдем, что вблизи частицы $\phi_{\text{scr}}(0) = -q/r_D$ — это потенциал, который создают все остальные заряды плазмы в точке, где находится пробный заряд. Зная $\phi_{\text{scr}}(0)$, можно найти энергию взаимодействия пробного заряда с плазмой как $q\phi_{\text{scr}}(0)$; она равна

$$q\phi_{\text{scr}}(0) = -\frac{q^2}{r_D}. \quad (2.10)$$

До сих пор речь шла о пробном заряде, помещенном в плазму. Однако все сказанное выше справедливо и в отношении тех зарядов, из которых состоит сама плазма. В результате мы приходим к заключению, что каждый плазменный заряд окружен экранирующим облаком, а поле, которое он создает, с учетом экранировки экспоненциально спадает с расстоянием в соответствии с формулой (2.7).

Более того, можно найти и энергию взаимодействия плазменных зарядов друг с другом. Для этого, согласно (2.10), необходимо просуммировать квадраты всех зарядов и результат разделить на величину дебаевского радиуса. Однако, как легко понять, при таком вычислении взаимодействие каждой пары зарядов мы учтем дважды —

один раз при умножении первого заряда на потенциал, который создает второй заряд в точке нахождения первого, а второй раз при умножении второго заряда на потенциал, который создает первый заряд в точке нахождения второго. Поэтому правильный ответ получается дополнительным делением результата на 2. Таким образом, для энергии w в единице объема находим

$$w = -\frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{r_D} (Z_s e)^2 n_s. \quad (2.11)$$

Для плазмы с однозарядными ионами эта формула принимает вид

$$w = -\frac{ne^2}{r_D}. \quad (2.12)$$

Энергия $W_E = w/2n$, приходящаяся на одну частицу, равна

$$W_E = -\frac{e^2}{2r_D} = -\frac{T}{12N_D}, \quad (2.13)$$

где мы ввели число частиц $N_D = \frac{4}{3}\pi r_D^3 n$ в сфере Дебая.

Условие малости энергии электростатического взаимодействия по сравнению с кинетической энергией частиц, $|W_E| \ll T$, приводит к неравенству

$$N_D \gg 1. \quad (2.14)$$

Выражая N_D через плотность и температуру плазмы,

$$N_D \sim T^{3/2} n^{-1/2} e^{-3},$$

легко убедиться, что неравенство (2.14) эквивалентно условию идеальности плазмы (1.5).

Полезно обратить внимание, что вычисленная энергия кулоновского взаимодействия частиц в плазме $W_E = -e^2/2r_D$ вовсе не совпадает с грубой оценкой этой энергии $W_E \sim e^2 n^{1/3}$, которой мы пользовались на предыдущей лекции при классификации плазмы. В идеальной плазме величина e^2/r_D значительно меньше, чем $e^2/n^{-1/3}$. Однако это не влияет на классификацию видов плазмы, так как на границе между идеальной и неидеальной плазмами $r_D \sim n^{-1/3}$. В неидеальной плазме $N_D \ll 1$ и по-прежнему $W_E \sim e^2 n^{1/3}$. Интересно, что классическая плазма тем более идеальна (т.е. отношение W_E/W_K тем меньше), чем

меньше плотность плазмы, тогда как в квантовой плазме электростатическое взаимодействие тем менее существенно, чем выше её плотность.

Для ориентировки в порядке величин оценим N_D для плазмы с параметрами $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $T = 100 \text{ эВ}$. Для такой плазмы $r_D = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, $N_D = 1,7 \cdot 10^5$.

► **Задача 2.2**

Плотность ионов в плазме как функция координат имеет вид ступеньки: она равна n_0 при $x < 0$ и $n_0 + n$ при $x > 0$, причем $n \ll n_0$. Найти распределение потенциала и плотности электронов, если электронная температура равна T .

► **Задача 2.3**

Найти условие идеальности лоренцевской плазмы, состоящей из электронов и многократно ионизованных ионов с зарядом $Z \gg 1$.

Лекция 3

Степень ионизации термодинамически равновесной плазмы. Формула Саха

Наиболее естественный способ создания плазмы состоит в том, чтобы нагреть газ до высокой температуры. При этом частицы газа, обладая высокой кинетической энергией, при столкновениях с нейтральными атомами срывают электроны с атомных орбит, газ ионизуется и возникает плазма. Ясно, что степень ионизации газа зависит от температуры T , но как? Универсальный ответ можно дать, если предположить, что нагретый ионизованный газ находится в термодинамически равновесном состоянии. При этом можно воспользоваться методами статистической физики и рассмотреть процесс ионизации как химическую реакцию, потребовав минимума термодинамического потенциала в состоянии равновесия. Мы воспользуемся более наглядным, хотя и не столь строгим подходом. Для определенности будем рассматривать ионизацию атомарного водорода (при интересующих нас температурах молекулы водорода диссоциируют).

Пусть первоначально в объеме V имеется N_{a0} атомов. В результате ионизации возникнет N_i ионов и столько же электронов, $N_e = N_i$; через N_a обозначим количество оставшихся атомов, $N_a = N_{a0} - N_i$.

Рассмотрим одно атомное ядро (протон). Если около него находится связанный электрон, то мы имеем атом, в противном случае это ион. В соответствии с общими принципами статистической физики вероятность w_k того, что электрон находится в состоянии с энергией ϵ_k , равна

$$w_k = \mathcal{A} \exp\left(-\frac{\epsilon_k}{T}\right), \quad (3.1)$$

где \mathcal{A} — некоторая нормировочная константа. Отрицательным значениям энергии, $\epsilon_k < 0$, отвечают связанные состояния, а энергия $\epsilon_k > 0$ соответствует свободному движению. Как известно, энергия связанных состояний в атоме водорода определяется формулой

$$\epsilon_k = -\frac{me^4}{2\hbar^2 k^2}, \quad (3.2)$$

где k принимает целые значения, $k = 1, 2, \dots$. Для упрощения вычислений мы будем учитывать только самый нижний уровень, $k = 1$. В таком приближении электрон либо имеет энергию $\varepsilon = -I$, где $I = Ry \equiv me^4/2\hbar^2 = 13,6$ эВ, либо находится в непрерывном спектре с $\varepsilon_k > 0$. Величина I называется *потенциалом ионизации* атома водорода.

Найдем величину \mathcal{A} , потребовав, чтобы полная вероятность электрону иметь какую-нибудь энергию равнялась единице,

$$\sum_k w_k = 1. \quad (3.3)$$

Это дает

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[\sum_k \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right) \right]^{-1} \\ &= \left[\exp\left(\frac{I}{T}\right) + \sum_{\varepsilon_k > 0} \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Состояния с $\varepsilon_k > 0$ образуют непрерывный спектр, поэтому сумму по положительным значениям энергии в (3.4) надо заменить на интеграл. Совершая такую замену, мы воспользуемся квазиклассическим приближением, согласно которому каждому энергетическому состоянию электрона соответствует элементарная ячейка фазового пространства¹, объем которой $d^3p d^3r$ равен $(2\pi\hbar)^3$:

$$\sum_{\varepsilon_k > 0} \rightarrow \int \frac{d^3p d^3r}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Кроме того, мы пренебрежем энергией взаимодействия свободного электрона с ядром, поскольку в большей части состояний непрерывного спектра эта энергия оказывается относительно малой. Тогда энергия ε свободного электрона равна $p^2/2m$, что позволяет легко вычи-

¹Мы уточним это утверждение в конце лекции.

слить возникающий интеграл

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon_k > 0} \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right) &= \int \frac{d^3 p d^3 r}{(2\pi\hbar)^3} e^{-p^2/2mT} \\
&= \frac{v}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 dp e^{-p^2/2mT} \\
&= \frac{4\pi v}{(2\pi\hbar)^3} (2mT)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2}}_{=\sqrt{\pi}/4} \\
&= \frac{vm^3/2 T^{3/2}}{2^{3/2} \pi^{3/2} \hbar^3}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

В результате интегрирования по $d^3 r$ в выражение (3.5) вошел объем v , доступный одному свободному электрону. Вообще говоря, каждый свободный электрон может находиться в любой точке объема V , занятого плазмой. Однако при подсчете вероятности найти электрон рядом с заданным ядром не важно, какой именно из полного набора N_e свободных электронов есть тот самый электрон. Поэтому нетрудно догадаться, что в качестве v нужно взять объем, равный отношению полного объема плазмы к количеству свободных электронов, $v = V/N_e = n_e^{-1}$. Введем также обозначение $\lambda_B = \sqrt{2\pi\hbar}/\sqrt{mT}$ для длины волны де Бройля. Тогда результат вычисления нормировочной константы записывается в компактном виде

$$\mathcal{A} = \left(e^{I/T} + 1/\lambda_B^3 n_e \right). \tag{3.6}$$

Вероятность w_a того, что рассматриваемый протон является ядром нейтрального атома (т.е. вблизи него находится электрон в связанном состоянии), равна

$$w_a = \frac{e^{I/T}}{e^{I/T} + 1/\lambda_B^3 n_e},$$

а вероятность w_i того, что соответствующий электрон ушел в непрерывный спектр (а, следовательно, атом ионизован), равна

$$w_i = 1 - w_a = \frac{1/\lambda_B^3 n_e}{e^{I/T} + 1/\lambda_B^3 n_e}.$$

Их отношение даёт отношение плотностей ионов и электронов в плазме

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{w_i}{w_a} = \frac{e^{-I/T}}{\lambda_B^3 n_e}. \quad (3.7)$$

Отсюда мы находим формулу, выражающую плотности ионов, электронов и атомов через температуру плазмы — формулу Саха:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{e^{-I/T}}{\lambda_B^3}. \quad (3.8)$$

Теперь настало время сделать важное уточнение, которого мы намеренно избегали ранее, чтобы не переусложнять расчет.

У каждого электрона, иона или атома есть еще внутренние степени свободы. Например, электрон имеет спин, который может быть направлен либо «вверх», либо «вниз». Учет внутренних степеней свободы (т.е. спина) не меняет энергию уровней свободного электрона, и на одном энергетическом уровне одновременно могут находиться два электрона. В этом случае говорят, что уровни *вырождены*. Это обстоятельство учитывают, вводя статвес электрона g_e . Как мы видим, $g_e = 2$. Поэтому в формуле (3.8) нужно под n_e в действительности понимать величину n_e/g_e , так как мы занизили плотность электронов в два раза. Точно так же статвес имеют ион и атом. В окончательном виде формула Саха выглядит так:

$$\boxed{\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-I/T}}{\lambda_B^3} \equiv K(T)}. \quad (3.9)$$

Входящая в правую часть функция температуры $K(T)$ называется *константой равновесия*.

Определим степень ионизации плазмы α как отношение

$$\alpha = \frac{N_i}{N_{a0}}$$

и обозначим через n_{a0} плотность ядер, $n_{a0} = N_{a0}/V$. Тогда

$$n_e = n_i = \alpha n_{a0}, \quad n_a = (1 - \alpha)n_{a0},$$

и из формулы Саха находим

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{g_i g_e}{g_a} \frac{e^{-I/T}}{\lambda_B^3 n_{a0}}. \quad (3.10)$$

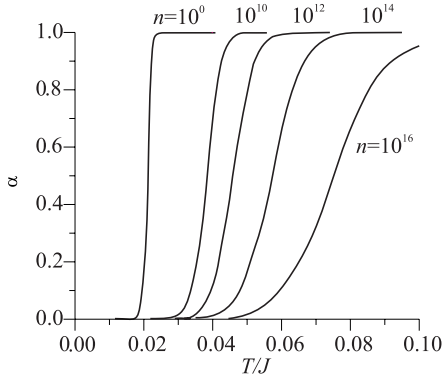


Рис. 3.1. Степень ионизации термодинамически равновесной водородной плазмы при различных значениях плотности (указана на рис. в единицах см^{-3}). Статвес атома водорода g_a в основном состоянии равен произведению статвесов электрона и протона: g_e и g_i

Качественная зависимость $\alpha(T)$ имеет вид, изображенный на рис. 3.1. При малых температурах α равно нулю, при больших — единице, а переход плавно осуществляется при некоторой температуре T_* . На первый взгляд, могло бы показаться, что T_* должно по порядку величины равняться энергии ионизации I . При этом средней кинетической энергии частиц как раз хватает, чтобы осуществить ионизацию. На самом деле оказывается, что $T_* \ll I$. Это связано с тем, что перед экспонентой в (3.10) стоит очень большой множитель, равный по порядку величины кубу отношения среднего расстояния между частицами $n^{-1/3}$ к дебройлевской длине волны электронов $\hbar/(mT)^{1/2}$. Для примера приведем численные значения для плазмы с плотностью $n_{a0} = 10^{15} \text{ см}^{-3}$. При $T = I = 13,6 \text{ эВ}$ множитель перед экспонентой в (3.10) равен $6 \cdot 10^7$, а это означает, что при такой температуре величина α уже очень близка к единице:

$$1 - \alpha = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Легко проверить, что $\alpha = 0,5$ при $T = 0,065 I = 0,9 \text{ эВ}$.

Обсудим теперь, какую ошибку мы сделали, пренебрегши уровнями, соответствующими возбужденным состояниям в атоме водорода. Поскольку, как мы установили, ионизация происходит при $T \ll I$, а расстояние от основного до первого возбужденного уровня равно $\frac{3}{4}I$, то вероятность электрону перейти даже в первое возбужденное состояние, пропорциональная $\exp[-\frac{3}{4}I/T]$, очень мала. Другими словами, электрон «предпочитает» перейти в непрерывный спектр, вместо того чтобы «сесть» на следующий уровень. Причина такого поведения заключается в том, что количество уровней в непрерывном спектре

очень велико, и хотя вероятность находиться на каждом из них относительно мала, суммарная вероятность попасть на какой-то уровень непрерывного спектра оказывается значительной уже при $T \ll I$.

► **Задача 3.1**

Оценить степень ионизации межзвездной плазмы (см. табл. 1.1), предположив, что она описывается формулой Саха.

► **Задача 3.2**

Водород плотностью 10^{17} см^{-3} нагрет до температуры 1 эВ . Для того чтобы увеличить проводимость получившейся плазмы, в неё добавляют примесь калия. Какова должна быть доля примесных атомов, чтобы число свободных электронов увеличилось в 2 раза? Энергия ионизации калия равна $4,3 \text{ эВ}$, а его основное состояние двукратно вырождено.

► **Задача 3.3**

Пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием, найти статвес атома водорода, находящегося на k -м энергетическом уровне.

► **Задача 3.4**

Статвес атома, находящегося на k -м энергетическом уровне, равен $2k^2$, поэтому сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \exp(-\epsilon_k/T)$, представляющая вероятность электрону находиться в связанном состоянии, формально расходится. Означает ли это, что пренебрежение вкладом уровней с $k \rightarrow \infty$ при выводе формулы Саха ошибочно?

Лекция 4

Кулоновские столкновения. Кулоновский логарифм

Во многих процессах в плазме определяющую роль играют кулоновские столкновения между заряженными частицами. Мы начнём изучение кулоновских столкновений с рассмотрения следующей задачи: на кулоновский центр заряда Z_2e налетает поток j частиц с зарядом Z_1e (рис. 4.1). Вычислим силу, действующую на рассеивающий центр.

Пусть ρ обозначает прицельное расстояние налетающей частицы. Через колечко площадью $2\pi\rho d\rho$ в единицу времени пролетает $2\pi\rho d\rho j$ частиц. Каждая частица отклоняется на угол θ , зависящий от прицельного расстояния ρ , и передаёт рассеивающему центру продольный импульс

$$\Delta p_{\parallel} = mv(1 - \cos\theta).$$

Искомая сила F будет направлена вдоль скорости налетающего потока частиц и равна импульсу, передаваемому рассеивающему центру в единицу времени,

$$F = \int_0^{\infty} jmv(1 - \cos\theta)2\pi\rho d\rho = mvj\sigma_{\text{тр}}, \quad (4.1)$$

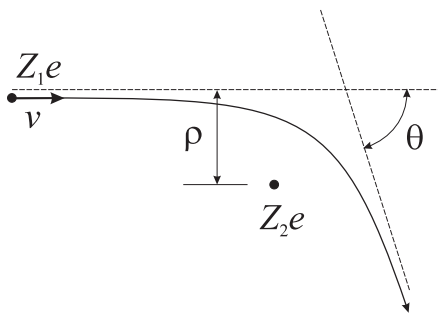


Рис. 4.1. Траектория заряда Z_1e , рассеивающегося на неподвижном кулоновском центре Z_2e

где

$$\sigma_{\text{тр}} = 2\pi \int_0^{\infty} (1 - \cos\theta) \rho d\rho. \quad (4.2)$$

Параметр $\sigma_{\text{тр}}$ называется *транспортным сечением* и имеет смысл площади поперечного сечения, которое имел бы рассеивающий центр, если бы он полностью поглощал импульс падающих на него частиц.

Для того чтобы вычислить интеграл (4.2), необходимо знать зависимость θ от ρ . Эта зависимость легко находится в приближении далеких пролетов, т.е. когда прицельное расстояние настолько велико, что угол θ можно считать малым, $\theta \ll 1$. В таком приближении можно также считать, что частица движется по прямой с постоянной скоростью v , и найти изменение ее поперечного импульса, проинтегрировав перпендикулярную к траектории составляющую кулоновской силы по времени:

$$\begin{aligned} \Delta p_{\perp} &= mv\theta = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_1 Z_2 e^2 \rho}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\rho v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\rho v}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\theta = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{m\rho v^2}. \quad (4.3)$$

Кстати, точная формула Резерфорда, дающая зависимость θ от ρ при любых ρ , ненамного сложнее (4.3):

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m\rho v^2}. \quad (4.4)$$

Возвращаясь к интегралу (4.2), заметим (и это будет подтверждено результатом), что основной вклад в него будут вносить большие расстояния, где как раз и справедливо приближение далеких пролетов. Пользуясь разложением

$$1 - \cos\theta = \frac{1}{2} \theta^2$$

и формулой (4.3), из (4.2) находим

$$\sigma_{\text{тр}} = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2 v^4} \int \frac{d\rho}{\rho}. \quad (4.5)$$

Как видно, написанный интеграл логарифмически расходится на нижнем и верхнем пределах. Расходимость при малых ρ связана с тем, что здесь нарушается использованное нами приближение далёких пролётов. Этой расходимости не возникло, если бы мы пользовались точным выражением (4.4). Исправить положение можно, заменив нижний предел интегрирования в (4.5) на минимальное расстояние ρ_{\min} , при котором еще можно пользоваться нашим приближением. Поскольку интеграл (4.5) зависит от нижнего предела только логарифмически, то точное значение ρ_{\min} не очень существенно. В качестве ρ_{\min} можно выбрать то прицельное расстояние, при котором происходит рассеяние на угол порядка $\pi/2$:

$$\rho_{\min} \sim \frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2}. \quad (4.6)$$

Расходимость при больших значениях ρ носит более глубокую причину. Она связана с тем обстоятельством, что кулоновский потенциал слишком медленно убывает с расстоянием. Однако, как мы уже знаем, на самом деле в плазме потенциал заряда экранируется, так что на расстояниях, больших чем дебаевский радиус r_D , поле спадает экспоненциально. Учет этого обстоятельства приводит к тому, что прицельные расстояния, большие r_D , фактически не вносят вклада в (4.5), и поэтому в качестве верхнего предела ρ_{\max} в интеграле можно взять величину r_D :

$$\rho_{\max} \sim \left(\frac{T}{4\pi n e^2} \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

Точное значение отношения ρ_{\max}/ρ_{\min} не очень существенно, поскольку оно входит под знаком логарифма (по этой причине мы не учитывали также, что на самом деле поле заряда в плазме является не кулоновским, а «экранированным кулоном»; учёт этого обстоятельства дал бы множитель порядка единицы под знаком логарифма).

Величину

$$\Lambda = \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \quad (4.8)$$

называют кулоновским логарифмом. Важно отметить, что под знаком логарифма в (4.8) стоит большое число. Действительно, положим для оценки $v^2 = 3T/m$, $Z_1 = Z_2 = 1$, тогда

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \frac{3T^{3/2}}{2\pi^{1/2} e^3 n^{1/2}} \sim N_D \gg 1.$$

Для плазмы с $T = 100$ эВ, $n = 10^{14}$ см $^{-3}$ находим

$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = 1,5 \cdot 10^6, \quad \Lambda = 14,3.$$

Обычно в качестве Λ берут число 10–15.

Итак, для величины $\sigma_{\text{тр}}$ мы получаем выражение

▼ 16.10.98

$$\sigma_{\text{тр}} = \frac{4\pi\Lambda Z_1^2 Z_2^2 e^4}{m^2 v^4}. \quad (4.9)$$

Это сечение падает обратно пропорционально квадрату энергии налетающих частиц $E = mv^2/2$. Принимая $Z_1 = Z_2 = 1$ и $\Lambda = 15$, получим практическую формулу ▲

$$\sigma_{\text{тр}} \simeq \frac{10^{-12}}{E^2[\text{эВ}]} \text{см}^2. \quad (4.10)$$

Литература: [10, §1, 2]; [1, §1.4]; [16, гл.2, §10.1].

► **Задача 4.1**

Электрон, имеющий на бесконечности скорость v , налетает на другой электрон, первоначально неподвижный. Какую энергию приобретёт второй электрон после столкновения? Прицельный параметр равен ρ . Найдите среднюю энергию, переданную неподвижному электрону, если налетающий электрон с равной вероятностью может пролететь через любую точку в круге, соответствующем прицельным расстояниям $0 < \rho < R$.

► **Задача 4.2**

Найти транспортное сечение рассеяния ультрарелятивистского электрона на неподвижном кулоновском центре.

► **Задача 4.3**

Оценить поправку к транспортному сечению, связанную с близкими столкновениями ($\rho \leq \rho_{\min}$).

► **Задача 4.4**

Полупространство $x > 0$ занято однородной плазмой, которая удерживается магнитным полем. В плазму по нормали к её границе влетает нейтральный атом и сразу же ионизуется. Считая магнитное поле однородным, найти координату x иона после его полного торможения. Первоначальный ларморовский радиус иона ρ_0 . Угловым рассеянием пренебречь. Частота столкновений значительно меньше циклотронной частоты.

Лекция 5

Релаксация импульса и энергии. Динамика установления равновесной функции распределения. Выравнивание электронной и ионной температур. Проводимость плазмы, убегание электронов

Полученное в предыдущей лекции выражение для транспортного сечения позволяет найти скорость, с которой идет обмен импульсом и энергией между частицами в плазме.

Начнем наше рассмотрение с простейшей задачи: пучок быстрых электронов влетает в холодную плазму. Учтем сначала только столкновения электронов пучка с ионами плазмы. Из-за большой массы и малой тепловой скорости ионы можно считать бесконечно тяжелыми и покоящимися. В результате мы приходим к постановке задачи, в точности совпадающей с той, что рассмотрена в лекции 4.

Пусть n обозначает плотность ионов. Со стороны пучка на ионы, находящиеся в единичном объеме, действует сила (см. (4.1))

$$mvj\sigma_{\text{тр}}n.$$

В силу третьего закона Ньютона точно такая же сила действует на единицу объема падающего пучка в противоположном направлении. Разделив ее на плотность пучка n_b , найдем силу F , действующую на одну частицу пучка:

$$F = -mvj\sigma_{\text{тр}}n/n_b = -n\sigma_{\text{тр}}v m v. \quad (5.1)$$

Под действием этой силы пучок будет тормозиться, т. е. его направленная скорость v будет уменьшаться:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = -n\sigma_{\text{тр}}v v. \quad (5.2)$$

Пользуясь этой формулой, нужно ясно понимать, что уменьшение направленной скорости пучка не связано с потерей энергии электрона-

ми, поскольку их рассеяние происходит на неподвижных тяжелых ионах. Средняя скорость пучка изменяется вследствие того, что электроны в результате столкновений начинают двигаться под углом к исходному направлению движения пучка. Нетрудно оценить, как растет со временем средний квадрат угла рассеяния θ . Поскольку при рассеянии на малый угол θ продольная скорость электрона изменяется на величину $\Delta v = v(\cos\theta - 1) \approx -v\theta^2/2$, то уменьшению продольной скорости, описываемому уравнением (5.2), соответствует нарастание среднего квадрата угла:

$$\frac{d\langle\theta^2\rangle}{dt} = 2\nu\sigma_{\text{тр}}n \quad (5.3)$$

(усреднение, обозначенное угловыми скобками, производится по всем электронам пучка). Выражение (5.3) справедливо до тех пор, пока среднеквадратичный угол рассеяния мал по сравнению с единицей, т.е. $\langle\theta^2\rangle^{1/2} \ll 1$.

Из уравнений (5.2) и (5.3) видно, что характерное время τ торможения и углового рассеяния по порядку величины равно $\tau = (n\sigma_{\text{тр}}v)^{-1}$; величину, обратную τ , называют *частотой столкновений* (электронов с ионами в рассматриваемом случае) и обозначают через ν :

$$\nu_{ei} = n\sigma_{\text{тр}}v. \quad (5.4)$$

Пользуясь выражением (4.10), получим практическую формулу для частоты электрон-ионных столкновений

$$\nu_{ei} = 6 \cdot 10^{-5} \frac{n[\text{см}^{-3}]}{E^{3/2}[\text{эВ}]} \text{сек}^{-1}. \quad (5.5)$$

Произведение $\nu\tau$, которое имеет смысл пути, проходимого электроном в направлении движения пучка за время торможения, называется *длиной свободного пробега* и обозначается через λ :

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma_{\text{тр}}} = \frac{10^{12}E^2[\text{эВ}]}{n[\text{см}^{-3}]} \text{см}. \quad (5.6)$$

Естественно, что такие понятия, как длина пробега, частота столкновений и транспортное сечение, можно ввести не только для частиц пучка, но и для частиц плазмы. Нужно только представить, что на рассеивающий центр налетают частицы с разными скоростями и усреднить по распределению скоростей. Например, для максвелловского

распределения скоростей среднее значение E^2 равно $\frac{15}{4}T^2$ (см. задачу 5.3). Поэтому числовые коэффициенты в практических формулах для усредненных значений $\sigma_{\text{тр}}$, v_{ei} и λ отличаются в 2–3 раза от формул (4.10), (5.6) и (5.5):

$$\boxed{\overline{\sigma_{\text{тр}}} \simeq \frac{3 \cdot 10^{-13}}{T^2 [\text{эВ}]} \text{ см}^2}, \quad (4.10')$$

$$\boxed{\overline{v_{ei}} = 3 \cdot 10^{-5} \frac{n [\text{см}^{-3}]}{T^{3/2} [\text{эВ}]} \text{ сек}^{-1}}. \quad (5.5')$$

$$\boxed{\overline{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{12} T^2 [\text{эВ}]}{n [\text{см}^{-3}]} \text{ см}}. \quad (5.6')$$

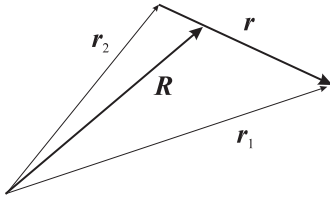


Рис. 5.1. Радиус вектор \mathbf{R} и разность $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ для сталкивающихся частиц

движения

Обратимся теперь к анализу столкновений электронов пучка с электронами плазмы. Для этого нам придется обобщить задачу о столкновении двух заряженных частиц на случай, когда частицы имеют произвольные массы. Будем считать, что поток частиц с зарядом $Z_1 e$ и массой m_1 налетает на покоящуюся (в начальный момент) частицу с зарядом $Z_2 e$ и массой m_2 . Чтобы описать рассеяние частиц сорта 1, надо решить уравнение

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = Z_1 Z_2 e^2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad (5.7)$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 обозначают радиус-вектор частицы 1 и 2 соответственно. Для этого перейдем в систему центра масс, задаваемую радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

и введем разность

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

так что

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$$

(см. рис. 5.1). Учитывая, что центр масс движется с постоянной скоростью, $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, получим

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = m_{12} \ddot{\mathbf{r}} = Z_1 Z_2 e^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (5.8)$$

где $m_{12} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса. Мы будем называть частицу массы m_{12} приведенной частицей. Её положение задается вектором \mathbf{r} . Согласно уравнению (5.8) движение частицы 1 можно найти, решив задачу о движении приведенной частицы, причем сила, действующая на реальную частицу 1, совпадает с силой, действующей на приведенную частицу. Если воспользоваться тем, что скорость этой частицы на бесконечности есть v , то мы получим, что сила, действующая на приведенные частицы (а, следовательно, и на частицы 1), равна

$$F = m_{12} v^2 \sigma_{\text{тр}} n = m_{12} v^2 \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4 \Lambda}{m_{12}^2 v^4} n = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4 \Lambda}{m_{12} v^2} n. \quad (5.9)$$

По сравнению с рассеянием на бесконечно тяжелых центрах отличие в силе проявляется только в том, что массу падающих частиц надо заменить на m_{12} . Для электрон-электронных столкновений $m_{12} = m_e/2$, и по порядку величины сила, действующая на пучок электронов со стороны электронов плазмы, равна силе, действующей со стороны ионов.

Принципиальное отличие электрон-электронных столкновений от рассеяния на «бесконечно» тяжелых ионах состоит в том, что теперь происходит передача энергии от электронов пучка к электронам плазмы.

Чтобы подсчитать скорость передачи энергии, заметим, что приведенная частица рассеивается на неподвижном центре и поэтому энергию не теряет. Ее скорость \mathbf{r} после рассеяния по абсолютной величине равна начальной скорости v . Рассмотрим процесс столкновения реальных частиц сначала в системе центра масс. Она движется со скоростью $\mathbf{v}_{\text{ц.м.}} = \mathbf{R} = m_1 \mathbf{v} / (m_1 + m_2)$ относительно лабораторной. Поскольку в этой системе скорость частицы 1 связана со скоростью приведенной частицы соотношением

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_1 + m_2},$$

то величина скорости частицы 1 после столкновения не меняется, а значит, обмена энергии между сталкивающимися частицами в этой системе не происходит. Переходя в лабораторную систему, мы должны заключить, что найденная выше сила F в единицу времени совершает работу, равную

$$Fv_{ц.м.} = Fv \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

забирая энергию от пучка 1 и передавая ее плазменным электронам 2. Скорость изменения энергии частиц пучка в $W = -Fv_{ц.м.}$ находим, используя найденную выше формулу для силы F :

$$W = -\frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4 \Lambda n}{m_2 v}. \quad (5.10)$$

Переписав это выражение в виде

$$W = -\frac{m_1}{m_2} m_1 v^2 \cdot n \cdot v \cdot \frac{4\pi e_1^2 e_2^2 \Lambda n}{m_1^2 v^4},$$

его можно интерпретировать так, что при $m_1 \ll m_2$ в каждом столкновении (частота которых равна $nv\sigma$) передается доля энергии порядка m_1/m_2 . Таким образом, при электрон-электронных столкновениях передается значительная часть энергии налетающей частицы, а при электрон-ионных столкновениях — лишь её малая доля.

Выше мы получили формулы для F и W в случае, когда пучок движется сквозь холодную плазму. Возникает вопрос, как они изменятся, если температура плазмы не равна нулю? Очевидно, что если температура плазмы настолько мала, что тепловая скорость частиц плазмы v_T много меньше скорости частиц пучка, то выражения для F и W практически не изменятся. Если же $v \lesssim v_T$, надо провести усреднение по скоростям частиц плазмы. Мы ограничимся нахождением силы F только в предельном случае $v_T \ll v$.

Выберем группу частиц в плазме, скорость которых равна v' . Число таких частиц dn равно

$$dn = f(v') d^3 v',$$

где $f(v)$ обозначает функцию распределения частиц, а $f(v')d^3 v'$ есть вероятность частице иметь скорость v' . Сила трения частиц пучка о выбранную группу частиц плазмы равна

$$d\mathbf{F} = -\frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 \Lambda e^4 n}{m_{12}} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f(v') d^3 v'.$$

Теперь надо просуммировать эту силу по всем скоростям v' , что сводится к вычислению интеграла

$$I = \int \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f(v') d^3v'. \quad (5.11)$$

В случае, когда $f(v)$ — изотропная функция распределения, интеграл легко вычислить, воспользовавшись следующей электростатической аналогией. Если интерпретировать \mathbf{v} и \mathbf{v}' как радиус-векторы в пространстве координат, то интеграл (5.11) будет равен электрическому полю, создаваемому сферически симметрическим распределением зарядов с плотностью $f(v)$. Как известно, поле сферически симметричного распределения зарядов на расстоянии v от центра равно заряду внутри сферы радиуса v , деленному на v^2 . Поэтому

$$I = \frac{v}{v^3} \int_0^v f(v') 4\pi v'^2 dv'.$$

«Заряд», внешний по отношению к сфере $v' \leq v$, поле не создает. Так как мы предполагаем, что $v \ll v_T$, то последний интеграл приближенно равен $f(0) \times 4\pi v^3/3$. Для максвелловской функции распределения

$$f(v') = \left(\frac{m_2}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_2 v'^2}{2T}\right)$$

находим, что

$$I = \frac{\sqrt{2}v}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_2}{T}\right)^{3/2}.$$

Следовательно, сила трения, усредненная по максвелловскому распределению, в пределе $v \ll v_T$ равна

$$F = -\frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \frac{Z_1^2 Z_2^2 \Lambda n e^4}{m_{12}} \left(\frac{m_2}{T}\right)^{3/2} v. \quad (5.12)$$

В результате мы получили выражения для силы трения F в двух предельных случаях, $v \gg v_T$ и $v \ll v_T$. Подобным образом можно было бы получить и выражение для W в пределе $v \ll v_T$.

Представим теперь, что в начальный момент электроны и ионы характеризуются неравновесными функциями распределения, отличными от максвелловских. Вследствие кулоновских столкновений функции распределения будут «максвеллизироваться».

Обозначим через W_e и W_i среднюю энергию, соответственно приходящуюся первоначально на один электрон и ион. Быстрее всего происходит релаксация распределения электронов вследствие e - e столкновений. За несколько таких столкновений электроны придут в термодинамическое равновесие с температурой $T_e = 2W_e/3$ (полная энергия электронного газа при этом не изменится). Время установления равновесия в электронном газе τ_1 примерно равно времени межэлектронных столкновений:

$$\tau_1 \sim \tau_{ee}. \quad (5.13)$$

Далее произойдет установление равновесия в ионном газе за время порядка ион-ионных столкновений,

$$\tau_2 \sim \tau_{ii} \sim \sqrt{\frac{M}{m}} \tau_{ee}, \quad (5.14)$$

при этом температура ионов станет равной $T_i = 2W_i/3$. Самый медленный процесс — это выравнивание электронной и ионной температур. Оценим время выравнивания τ_3 , пользуясь формулой (5.10) для W и считая налетающими частицами электроны,

$$T_e = \frac{T_e}{\tau_3} \sim \frac{\Lambda n e^4}{M v_{Te}} \sim \frac{m}{M} \frac{T_e}{\tau_{ee}},$$

или

$$\tau_3 \sim \frac{M}{m} \tau_{ee}. \quad (5.15)$$

Применим развитые выше представления к задаче о протекании тока через плазму. Ток является откликом плазмы на внешнее электрическое поле \mathbf{E} . Под его действием прежде всего начинают ускоряться электроны, как самые легкие частицы. В результате возникнет сила трения \mathbf{F} со стороны ионов, которая в конечном итоге должна скомпенсировать электрическую силу,

$$e\mathbf{E} + \mathbf{F} = 0. \quad (5.16)$$

Обозначим через u среднюю направленную скорость электронов, установившуюся в результате баланса между \mathbf{E} и \mathbf{F} . Усреднив силу (5.12) по распределению электронов, нетрудно установить, что при $u \ll v_{Te}$ сила трения пропорциональна u :

$$\mathbf{F} \sim mu\nu_{ei},$$

причем частоту столкновений $\nu_{ei} \sim n\sigma_{\text{тр}}v_{Te}$ и сечение $\sigma_{\text{тр}} \sim \Lambda e^4/T_e^2$ следует оценивать по тепловой скорости электронов. Полезно отметить, что скорость u относится только к *средней* направленной скорости движения электронов, тогда как *случайная* составляющая скорости будет равна v_{Te} . При усреднении по промежутку времени, за который происходит много столкновений, случайная составляющая силы обращается в нуль, и остается только часть, направленная против скорости u . Если же скорость направленного движения электронов превысит их тепловую скорость, $u \gg v_{Te}$, то частоту столкновений ν_{ei} надо оценивать по скорости направленного движения u , тогда

$$F \propto u^{-2}.$$

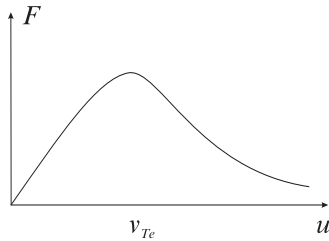


Рис. 5.2. Сила трения как функция скорости u

ра:

Как видно из рис. 5.2, сила F , рассматриваемая как функция u , достигает максимального значения F_{max} , равного по порядку величины $mv_{Te}\nu_{ei}$, при $u \sim v_{Te}$. Если $E > F_{\text{max}}/e = E_{\text{Dr}}$, сила трения не может компенсировать электрическую силу ни при какой скорости электронов. В результате электроны будут безостановочно ускоряться. Этот эффект называют «убеганием» электронов. Минимальное электрическое поле, которое приводит к «убеганию», называется *полем Драйсера*,

$$E_{\text{Dr}} \sim \frac{\Lambda ne^3}{T_e} \sim \Lambda \frac{e}{r_D^2}. \quad (5.17)$$

Важно понимать, что поле Драйсера есть критическое поле для ухода в «просвист» основной группы электронов, имеющих скорость порядка тепловой. Однако даже при $E < E_{\text{Dr}}$ в плазме имеются электроны (так называемые максвелловские хвосты), скорость которых значительно превышает тепловую скорость, $v \gg v_{Te}$. Сила трения, действующая на эти электроны? мала, и они будут ускоряться даже в поле, меньшем чем E_{Dr} .

Для малых полей, $E \ll E_{\text{Dr}}$, можно найти проводимость плазмы, выразив плотность тока j через электрическое поле E :

$$j = neu = ne \frac{eE}{mv} = \frac{\omega_p^2}{4\pi\nu} E,$$

откуда следует, что

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{\omega_p^2}{4\pi\nu}. \quad (5.18)$$

Литература: [1, §1.4]; [10, §18–20]; [14, §6–12]; [16, гл.2, §10.1].

► **Задача 5.1**

Найти время замедления термоядерных α -частиц в плазме с плотностью $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и температурой $T = 10 \text{ кэВ}$.

► **Задача 5.2**

Оценить длину свободного пробега электронов с энергией 1 МэВ через плазму с плотностью $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Можно ли нагреть плазму релятивистским пучком за счет только кулоновских столкновений?

► **Задача 5.3**

Показать, что средние значения v^2 и v^4 для максвелловского распределения скоростей равны соответственно $3T/m$ и $15T^2/m^2$.

► **Задача 5.4**

Вычислить силу трения при произвольном соотношении скорости частиц пучка и тепловой скорости частиц плазмы. Функцию распределения частиц плазмы считать максвелловской. Результат выразить через функцию ошибок $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dx \exp(-x^2)$.

► **Задача 5.5**

Найти W при $v \ll v_T$.

Лекция 6

Элементарные процессы в плазме: ионизация электронами, тройная рекомбинация, фотоионизация, фоторекомбинация, перезарядка. Корональное равновесие. Формула Эльверта

В термодинамически равновесной плазме степень ионизации однозначно определяется температурой T и плотностью n и может быть вычислена по формуле Саха. Однако часто приходится иметь дело с плазмой, которая не находится в термодинамическом равновесии, и тогда важным становится анализ *элементарных процессов*, т.е. процессов, протекающих при столкновении атомов, ионов, электронов и фотонов.

Изучение элементарных процессов начнём с рассмотрения ионизации атома *электронным ударом* (на примере атома водорода):



Прежде всего следует определить сечение процесса. Для этого рассмотрим столкновение двух электронов, один из которых первоначально покоился (связанный электрон). Снова воспользуемся приближением далёких пролётов (рис. 6.1). Вычислим энергию ϵ , которую приобретёт покоящийся электрон после столкновения. Обозначая через w_{\perp} ускорение атомного электрона в направлении, перпендикулярном к скорости налетающего электрона, а через v_{\perp} его скорость в том же направлении, имеем

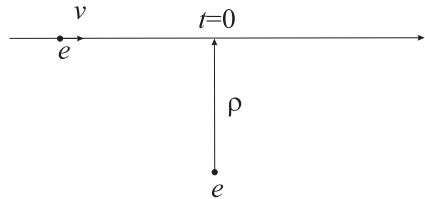


Рис. 6.1. Приближение далёких пролётов при вычислении ионизации электронным ударом

$$w_{\perp} = \frac{e^2}{m} \frac{\rho}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}},$$

$$v_{\perp} = \frac{e^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{e^2}{mv\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2e^2}{mv\rho},$$

▼ Глава будет переписана заново

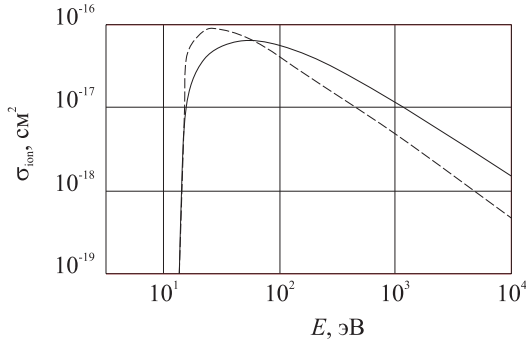


Рис. 6.2. Сечение ионизации атома водорода электронным ударом. Сплошная линия — экспериментальное сечение, пунктирная — вычисленное по формуле Томсона

$$\varepsilon = \frac{mv_{\perp}^2}{2} = \frac{2e^4}{mv^2\rho^2} = \frac{e^4}{W\rho^2},$$

где ρ — прицельное расстояние, v — продольная скорость налетающего электрона, а $W = mv^2/2$ — его энергия. Из выписанных выше уравнений находим

$$\rho^2 = \frac{e^4}{W\varepsilon},$$

что дает для дифференциального сечения рассеяния следующее соотношение

$$d\sigma = |2\pi\rho d\rho| = \frac{\pi e^4}{W\varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (6.1)$$

Атом будет ионизован, если энергия ε , переданная атомному электрону, превысит потенциал ионизации I , $I \leq \varepsilon$. С другой стороны, ясно, что ε не может быть больше, чем энергия налетающего электрона, $\varepsilon \leq W$. Интегрируя дифференциальное сечение ионизации $d\sigma$ в пределах от I до W , найдем полное сечение ионизации σ_i ,

$$\sigma_i = \frac{\pi e^4}{W^2 I} (W - I). \quad (6.2)$$

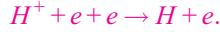
Эта формула называется формулой Томсона. Максимальное сечение достигается при $W \approx 2I$ и приблизительно равно $\sigma_{\max} \approx \pi e^4 / 4I^2 = \pi a_{\text{Б}}^2 \approx 10^{-16} \text{ см}^2$. Полученная формула довольно точно отражает характер зависимости σ_i от энергии налетающего электрона, в частности, из нее следует, что при больших энергиях $\sigma_i \propto W^{-1}$. Квантовая теория предсказывает более медленное убывание сечения ионизации, $\sigma_i \propto$

$\ln(W)/W$ при $W \gg I$, и лучше согласуется с экспериментальными данными, как следует из рис. 6.2. ▲

Величина $n_a \langle \sigma_i v_e \rangle$, усредненная по распределению электронов, дает число ионов, которое производит один электрон в единицу времени. Скорость роста числа электронов в единице объема описывается уравнением

$$\frac{dn_e}{dt} = n_e n_a \langle \sigma_i v_e \rangle. \quad (6.3)$$

Если электронов становится много, начинает играть роль обратный процесс *тройной рекомбинации*, который состоит в том, что когда два электрона сталкиваются с ионом, один из них садится на уровень дискретного спектра, а второй улетает, унося выделившуюся энергию:



Найдем слагаемое в уравнении кинетики ионизации, которое отвечает за этот процесс. Число столкновений электронов в единице объема равно $n_e^2 \langle \sigma_* v_e \rangle$, где σ_* — соответствующее сечение. Однако к рекомбинации приводят только столкновения вблизи иона, в области, где потенциальная энергия взаимодействия с ионом порядка кинетической энергии электронов. Число таких столкновений в единице объема в $n_i V_*$ раз меньше полного числа столкновений (V_* — объем рекомбинации вблизи иона). В результате мы приходим к выводу, что количество актов рекомбинации в единице объема будет равно $\beta n_e^2 n_i$, где $\beta = V_* \langle \sigma_* v_e \rangle$ — *константа скорости рекомбинации*, зависящая от температуры электронов. Таким образом,

$$\frac{dn_e}{dt} = n_e n_a \langle \sigma_i v_e \rangle - \beta n_e^2 n_i. \quad (6.4)$$

Вместо того чтобы вычислять β , исходя из динамики столкновения, как это было сделано выше для сечения ионизации σ_i , мы можем оценить его с помощью формулы Саха. В полном термодинамическом равновесии плотность электронов не меняется со временем, $n_e = 0$, и из уравнения (6.4) следует, что

$$\beta = \frac{n_i}{n_e n_a} \langle \sigma_i v_e \rangle. \quad (6.5)$$

С другой стороны, мы знаем, что в термодинамическом равновесии плотность электронов задается уравнением Саха (3.9). Из формул

(6.5) и (3.9) следует, что константа скорости рекомбинации β связана с константой равновесия $K(T)$ и сечением ионизации σ_i :

$$\beta = \frac{\langle \sigma_i v_e \rangle}{K(T)}. \quad (6.6)$$

Существует и другой канал рекомбинации — *фоторекомбинация*. Он состоит в том, что электрон при столкновении с ионом переходит в связанное состояние, а выделившаяся энергия уносится фотоном:



Число актов рекомбинации в единице объема можно найти, если разделить мощность *рекомбинационного излучения* из плазмы на энергию ионизации I . Рекомбинационное излучение из плазмы будет рассмотрено в лекции 15. Забегая вперед, мы воспользуемся уравнением (15.11) для мощности рекомбинационного излучения, что дает для скорости фоторекомбинации следующее выражение:

$$\left(\frac{dn_e}{dt} \right)_{\text{фоторек}} = \frac{P_{\text{рек}}}{I} = \gamma n_i n_e,$$

где (для водорода)

$$\gamma \approx \frac{4 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{T[\text{эВ}]}} \text{ см}^3/\text{сек}. \quad (6.7)$$

Наконец, существует и обратный к фоторекомбинации процесс — *фотоионизация*, состоящий в том, что фотон налетает на атом и ионизует его:



Скорость этого процесса пропорциональна произведению плотности фотонов и атомов,

$$\left(\frac{dn_e}{dt} \right)_{\text{фотоион}} = \mu n_a,$$

где плотность фотонов мы включили в коэффициент μ .

В результате с учетом всех процессов уравнение кинетики ионизации принимает вид

$$\boxed{\frac{dn_e}{dt} = n_e n_a \langle \sigma_i v_e \rangle - \beta n_e^2 n_i + \mu n_a - \gamma n_e n_i}. \quad (6.8)$$

В термодинамическом равновесии число квантов в единице объема есть функция температуры T . При этом можно установить связь между μ и γ , пользуясь принципом *детального равновесия*, который требует обращения в нуль попарно суммы первого и второго, а также третьего и четвертого слагаемых,

$$\mu = \gamma \frac{n_e n_i}{n_a} = \gamma K(T). \quad (6.9)$$

Обычно в лабораторных условиях излучение не заперто и плотность квантов много меньше термодинамически равновесной плотности фотонов, что делает скорость фоторекомбинации пренебрежимо малой, $\mu \ll n_e \langle \sigma_i v_e \rangle$. В не очень плотной плазме можно также пренебречь и тройной рекомбинацией по сравнению с фоторекомбинацией. Сравнение второго и четвертого членов в уравнении (6.8) дает условия возможности такого пренебрежения:

$$n_e \ll \gamma / \beta \sim 10^{17} \left[\frac{T}{\text{Ry}} \right]^{7/2} \text{ см}^{-3}. \quad (6.10)$$

В условиях, когда выполняется неравенство (6.10), равновесная концентрация электронов и ионов определяется *формулой Эльверта*

$$\alpha = \frac{n_i}{n_a} = \frac{\langle \sigma_i v_e \rangle}{\gamma}. \quad (6.11)$$

Это так называемое *корональное равновесие*, получившее свое название по той причине, что оно осуществляется в солнечной короне. Степень ионизации в корональном равновесии не зависит от плотности плазмы.

Упомянем еще один важный элементарный процесс в плазме — *резонансную перезарядку*. Он состоит в том, что атом, пролетая вблизи иона, передает ему свой электрон:



Если атом был быстрый, а ион медленный, то в результате получится быстрый ион и медленный атом. Поскольку в этом процессе электрон переходит с атомного уровня на такой же атомный уровень у другого ядра, то процесс носит резонансный характер, а сечение его очень велико. При сравнительно низкой энергии сталкивающихся частиц оно примерно в 20 раз больше площади поперечного сечения атома πa_B^2 .

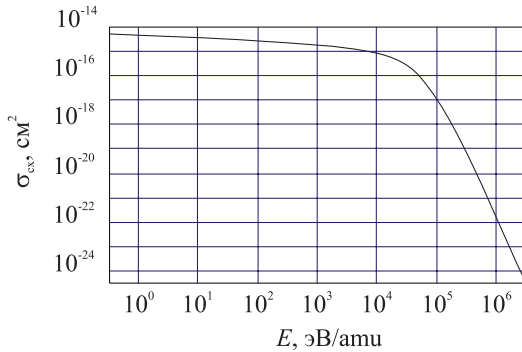


Рис. 6.3. Сечение резонансной перезарядки атома водорода на ионе водорода в зависимости от энергии налетающего атома в расчете на один нуклон

Если относительная скорость v атома и иона превышает скорость вращения электрона в атоме $v_a = \sqrt{2I/m}$, резонансный характер взаимодействия теряется, а сечение перезарядки быстро уменьшается с ростом энергии (рис. 6.3).

Литература: [7, §10, 11, 16, 17]; [8, §2, 3, 6, 8, 10]; [16, гл.2, §7; гл.3, §1; гл.5, §2, 3, 6].

► **Задача 6.1**

Вычислить $\langle \sigma_i v_e \rangle$ при $T \ll I$, усреднив сечение ионизации (6.2) по максвелловской функции распределения электронов.

► **Задача 6.2**

Почему (при каких условиях) ионизация ионным ударом не существенна?

► **Задача 6.3**

Вычислить константу скорости тройной рекомбинации β .

► **Задача 6.4**

Оценить сечение резонансной перезарядки $\sigma_{сх}$ на атоме водорода при $v \ll v_a$.



Лекция 7

Движение частиц в электрическом и магнитном полях. Дрейфовое приближение. Электрический, градиентный и центробежный дрейфы. Сохранение магнитного момента

До сих пор при изучении плазмы мы не обращали внимание, что она обычно находится в магнитном поле. Магнитное поле существенным образом влияет на многие свойства плазмы, искривляя траектории движения заряженных частиц. В этой лекции мы изучим движение отдельной заряженной частицы в магнитном поле.

Начнем с однородного магнитного поля. Из уравнения движения

$$m \mathbf{v} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \quad (7.1)$$

следует, что $v_{\parallel} = \text{const}$, $v^2 = \text{const}$. Первое из этих соотношений получается, если обе части уравнения (7.1) умножить скалярно на \mathbf{B} , второе — если умножить на \mathbf{v} ; при этом правая часть уравнения обращается в ноль.

Вводя вектор

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e\mathbf{B}}{mc},$$

запишем уравнение движения в виде

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}]. \quad (7.2)$$

Поскольку $v = \text{const}$, ясно, что это уравнение описывает вращение вектора \mathbf{v} . Так как неизменна проекция v_{\parallel} скорости на вектор $\boldsymbol{\Omega}$, очевидно, что вектор \mathbf{v} вращается вокруг направления $\boldsymbol{\Omega}$. Скорость углового вращения равна $-\boldsymbol{\Omega}$, причем знак минус здесь связан с выбором правила правого винта при определении направления вращения относительно направления магнитного поля (рис. 7.1).

Траектория частицы представляет собой спираль радиуса

$$\rho = \frac{mv_{\perp}c}{|e|B} = \frac{v_{\perp}}{|\boldsymbol{\Omega}|}.$$

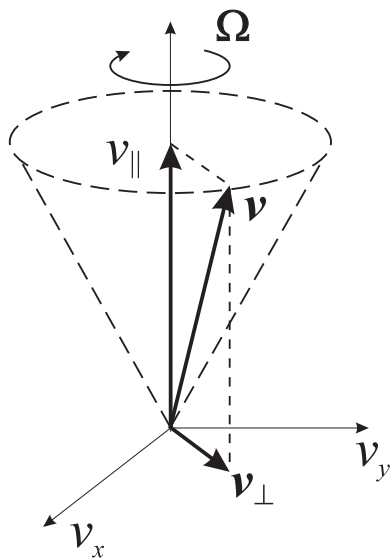


Рис. 7.1. Вращение вектора скорости частицы происходит вокруг направления вектора Ω

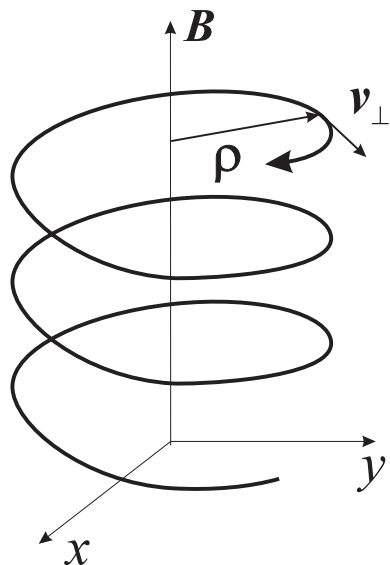


Рис. 7.2. Спиральная траектория частицы в магнитном поле

Удобно ввести вектор ρ , проведенный из ларморовского центра к частице; для него имеем выражение

$$\rho = -\frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \mathbf{h}], \quad (7.3)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля, а частота $\Omega = eB/mc$ вычисляется с учётом знака заряда частицы e .

Теперь представим, что магнитное поле неоднородно и что кроме него есть электрическое поле \mathbf{E} . Уравнения движения в этом случае записываются в виде:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (7.4)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \Omega]. \quad (7.5)$$

Найти точное решение этих уравнений удастся только в редких исключительных случаях. Оказывается, однако, что относительно просто описать движение частицы можно в практически важном пределе, когда масштаб изменения электрического и магнитного полей ℓ велик по сравнению с ларморовским радиусом частицы:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\ell} \ll 1.$$

Неоднородность магнитного поля и наличие электрического поля приводят к тому, что наряду с движением вдоль силовой линии и быстрым вращением по ларморовской окружности частица медленно дрейфует (перемещается) с одной силовой линии на другую. Наша задача состоит в том, чтобы вывести уравнения, которым подчиняется такое медленное движение в рамках дрейфовой теории.

Перейдем к выводу. Введем формально радиус-вектор \mathbf{R} ведущего центра ларморовской спирали:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \rho = \mathbf{r} + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \mathbf{h}],$$

причём условимся, что в этом определении¹ \mathbf{R} величины Ω и \mathbf{h} следует вычислять в точке с радиус вектором \mathbf{r} , где находится частица в данный момент времени. Вычислим $\dot{\mathbf{R}}$:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{\Omega} [\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{h}] + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \dot{\mathbf{h}}] - \frac{\Omega}{\Omega^2} [\mathbf{v}, \mathbf{h}].$$

¹В литературе встречаются также иные варианты выбора вектора \mathbf{R} .

Подставив (7.4) и (7.5) в предыдущее уравнение, получим

$$\mathbf{R} = \mathbf{v} + \frac{1}{\Omega} \left\{ \frac{e}{m} [\mathbf{E}, \mathbf{h}] + \Omega [[\mathbf{v}, \mathbf{h}], \mathbf{h}] \right\} + \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \mathbf{h}] - \frac{\Omega}{\Omega^2} [\mathbf{v}, \mathbf{h}].$$

Заметив, что $[[\mathbf{v}, \mathbf{h}], \mathbf{h}] = -\mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathbf{h})\mathbf{h} = -\mathbf{v}_\perp$, перепишем последнее уравнение в виде

$$\mathbf{R} = \underbrace{v_\parallel \mathbf{h}}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{e}{m\Omega} [\mathbf{E}, \mathbf{h}]}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \mathbf{h}]}_{\text{III}} - \underbrace{\frac{\Omega}{\Omega^2} [\mathbf{v}, \mathbf{h}]}_{\text{IV}}. \quad (7.6)$$

Уравнение (7.6) является точным — при его выводе мы не делали никаких приближений. Величина \mathbf{R} содержит в себе как осциллирующие (с частотой Ω) члены, которые при усреднении по времени обращаются в нуль, так и плавную составляющую, не обращающуюся в нуль при усреднении. Чтобы выделить скорость дрейфа, нужно усреднить это уравнение по быстрым осцилляциям.

Начнем с первого члена $\text{I} = v_\parallel \mathbf{h}$. Он не содержит малого параметра ε , т.е. $v_\parallel \mathbf{h} = O(1)$. Будем стремиться к тому, чтобы все поля вычислялись в точке \mathbf{R} , где в данный момент времени расположен ведущий центр, и разложим вектор \mathbf{h} в ряд Тейлора вблизи этой точки:

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) \simeq \mathbf{h}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\rho}\nabla)\mathbf{h}(\mathbf{R}).$$

Последний член здесь имеет порядок ε . Такой же порядок малости, как мы увидим, имеет скорость дрейфа. Однако при усреднении по быстрым осцилляциям последний член исчезает, так как $\langle \boldsymbol{\rho} \rangle = 0$. Поэтому

$$\langle \text{I} \rangle = v_\parallel \mathbf{h}(\mathbf{R}).$$

Второй член $\text{II} = \frac{e}{m\Omega} [\mathbf{E}, \mathbf{h}]$ уже мал, так как электрическое поле в хорошо проводящей плазме обычно не может быть очень большим. Поэтому в аргументах \mathbf{E} , \mathbf{h} , Ω для усреднения достаточно заменить \mathbf{r} на \mathbf{R} :

$$\langle \text{II} \rangle = \frac{c}{B^2(\mathbf{R})} [\mathbf{E}(\mathbf{R}), \mathbf{B}(\mathbf{R})].$$

Перейдём к третьему члену $\text{III} = \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, \mathbf{h}]$. В нём

$$\mathbf{h} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{h}.$$

Будем считать, что магнитное поле не зависит от времени. Тогда частная производная по времени равна нулю, и мы получаем

$$\overline{\text{III}} = \frac{1}{\Omega} [\mathbf{v}, (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{h}].$$

Чтобы выполнить усреднение в последнем уравнении, перейдём к индексным обозначениям, выразив векторное произведение через абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга $e_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\overline{\text{III}}_{\alpha} = \frac{1}{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta} v_{\gamma} \frac{\partial h_{\gamma}}{\partial x_{\nu}}.$$

Это выражение содержит малую производную $\frac{\partial h_{\gamma}}{\partial x_{\nu}}$, поэтому с необходимой нам точностью порядка ε можно считать, что Ω и h_{ν} вычисляются в точке \mathbf{R} ; при этом усреднять следует только $v_{\beta} v_{\gamma}$:

$$\langle \overline{\text{III}}_{\alpha} \rangle = \frac{1}{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial h_{\gamma}}{\partial x_{\nu}} \langle v_{\beta} v_{\gamma} \rangle.$$

Результат усреднения $\langle v_{\beta} v_{\gamma} \rangle$ не должен изменяться при любом повороте вокруг направления \mathbf{h} . Поэтому тензор $\langle v_{\beta} v_{\gamma} \rangle$ должен выражаться через инвариантные тензоры $\delta_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta\gamma}$, которые не меняются вообще при любом повороте (оказывается, что все другие инвариантные тензоры выражаются через эти два), и компоненты вектора \mathbf{h} . Легко проверить, что наиболее общее выражение для $\langle v_{\beta} v_{\gamma} \rangle$, которое можно составить из имеющихся в нашем распоряжении тензоров, имеет вид

$$\langle v_{\beta} v_{\gamma} \rangle = \mathbb{A} \delta_{\beta\gamma} + \mathbb{B} h_{\beta} h_{\gamma} + \mathbb{C} e_{\beta\gamma\mu} h_{\mu}.$$

Очевидно, что константа \mathbb{C} должна быть равна нулю, так как $v_{\beta} v_{\gamma}$ не изменяется при изменении знака \mathbf{h} . Коэффициенты \mathbb{A} и \mathbb{B} найдём, составив свертки $\langle v_{\beta} v_{\gamma} \rangle$ с $\delta_{\beta\gamma}$ и $h_{\beta} h_{\gamma}$. При этом мы получим два уравнения:

$$v^2 = 3\mathbb{A} + \mathbb{B},$$

$$v_{\parallel}^2 = \mathbb{A} + \mathbb{B}.$$

Решив их, находим

$$\langle v_{\beta} v_{\gamma} \rangle = \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \{ \delta_{\beta\gamma} - h_{\beta} h_{\gamma} \} + v_{\parallel}^2 h_{\beta} h_{\gamma},$$

что даёт

$$\langle \overline{\text{III}}_{\alpha} \rangle = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} e_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \frac{\partial h_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} - h_{\beta} h_{\gamma} \frac{\partial h_{\gamma}}{\partial x_{\nu}} \right\} + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} e_{\alpha\beta\gamma} h_{\beta} h_{\gamma} \frac{\partial h_{\gamma}}{\partial x_{\nu}}.$$

Вернувшись к векторным обозначениям, имеем

$$\langle \overline{III} \rangle = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \{ \text{rot } \mathbf{h} - [\mathbf{h}, (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h}] \} + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h}, (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h}].$$

Выражение в фигурных скобках можно упростить, если заметить, что

$$\begin{aligned} [\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{h}] &= \nabla \underbrace{\frac{h^2}{2}}_{=0} - (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h} \\ &= -(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{h} - [\mathbf{h}, (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h}] &= \text{rot } \mathbf{h} + [\mathbf{h}, [\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{h}]] \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{h} \text{rot } \mathbf{h}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle \overline{III} \rangle = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \mathbf{h}(\mathbf{h} \text{rot } \mathbf{h}) + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h}, (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h}].$$

Переходя к последнему члену $\overline{IV} = -\frac{\Omega}{\Omega^2} [\mathbf{v}, \mathbf{h}]$, имеем

$$\Omega = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\Omega = (\mathbf{v}\nabla)\Omega.$$

Дальнейшие вычисления проводим аналогично изложенному выше:

$$\begin{aligned} \langle \overline{IV} \rangle &= -\left\langle \frac{1}{\Omega^2} v_{\nu} \frac{\partial\Omega}{\partial x_{\nu}} e_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta} h_{\gamma} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial\Omega}{\partial x_{\nu}} e_{\alpha\beta\gamma} h_{\gamma} \langle v_{\nu} v_{\beta} \rangle \\ &= -\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial\Omega}{\partial x_{\nu}} e_{\alpha\beta\gamma} h_{\gamma} \left\{ \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \delta_{\beta\nu} + (v_{\parallel}^2 - \frac{1}{2} v_{\perp}^2) h_{\beta} h_{\nu} \right\}. \end{aligned}$$

Так как $e_{\alpha\beta\gamma} h_{\beta} h_{\gamma} = [\mathbf{h}, \mathbf{h}]_{\alpha} = 0$, в итоге получаем:

$$\overline{IV} = -\frac{v_{\perp}^2}{2\Omega^2} [\nabla\Omega, \mathbf{h}].$$

Собирая теперь все члены вместе, находим

$$\mathbf{R} = \left(v_{\parallel} + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \mathbf{h} \text{rot } \mathbf{h} \right) \mathbf{h} + \frac{c}{B} [\mathbf{E}, \mathbf{h}] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h}, (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega B} [\mathbf{h}, \nabla B]. \quad (7.8)$$

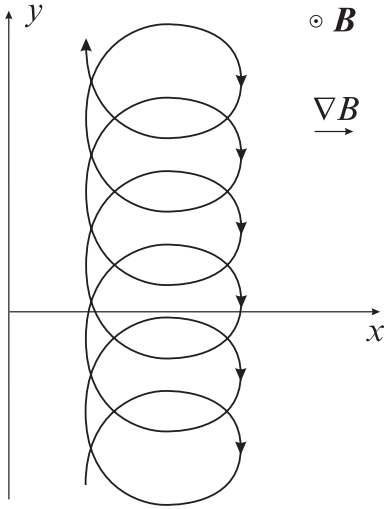


Рис. 7.3. Градиентный дрейф в неоднородном магнитном поле

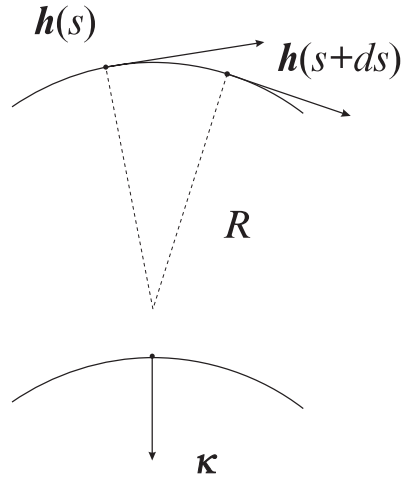


Рис. 7.4. К вычислению радиуса кривизны силовой линии

В первом слагаемом поправка к $v_{||}$ мала по параметру ϵ , ею обычно пренебрегают. Последние три члена описывают дрейфы: *электрический*, *центробежный* и *градиентный*.

Смысл электрического дрейфа известен из теории движения заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях: если перейти в систему координат, движущуюся со скоростью

$$\boxed{v_E = c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2}}, \quad (7.9)$$

то там электрическое поле исчезает, а частица движется только по ларморовской спирали.

Смысл градиентного дрейфа

$$\boxed{v_{\text{град}} = \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \left[\mathbf{h}, \frac{\nabla B}{B} \right]} \quad (7.10)$$

поясняет такой пример. Пусть имеется магнитное поле B_z , направленное вдоль оси z и возрастающее в направлении x . Как видно из рис. 7.3,

частица, движущаяся в таком поле, правую часть своей траектории, расположенную в области более сильного поля, проходит по окружности радиуса, меньшего чем в левой части траектории. В результате на каждом ларморовском обороте возникает нескомпенсированное смещение вдоль оси y , приводящее к дрейфу в этом направлении.

Прежде чем переходить к интерпретации центробежного дрейфа заметим, что $(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h}$ есть вектор кривизны магнитных силовых линий:

$$(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{h} = \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial s} = \boldsymbol{\kappa}. \quad (7.11)$$

Как следует из построения на рис. 7.4, вектор $\boldsymbol{\kappa}$ направлен по нормали к силовой линии \mathbf{n} , а его длина обратно пропорциональна радиусу кривизны: $|\boldsymbol{\kappa}| = \mathcal{R}^{-1}$. С помощью вектора кривизны формулу для скорости центробежного дрейфа можно записать в следующем виде:

$$\boxed{v_{\text{ц.др.}} = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h}, \boldsymbol{\kappa}]}, \quad (7.12)$$

который позволяет усмотреть аналогию с электрическим дрейфом (7.9). Действительно, сопоставим электрической силе $\mathbf{f}_E = e\mathbf{E}$ центробежную силу $\mathbf{f}_{\text{ц.др.}} = -\frac{mv_{\parallel}^2}{\mathcal{R}}\mathbf{n}$. Если заменить в формуле (7.9) для скорости электрического дрейфа \mathbf{E} на $\mathbf{f}_{\text{ц.др.}}/e$, то получим уравнение (7.12):

$$v_{\text{ц.др.}} = \frac{c}{B} \left[\frac{\mathbf{f}_{\text{ц.др.}}}{e}, \mathbf{h} \right] = -\frac{mc}{eB} v_{\parallel}^2 \left[\frac{\mathbf{n}}{\mathcal{R}}, \mathbf{h} \right] = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h}, \boldsymbol{\kappa}].$$

Следовательно, центробежный дрейф можно интерпретировать как дрейфовое движение в скрещенном магнитном и «центробежном» полях.

Центробежный дрейф направлен по вектору *бинормали* $\mathbf{b} = [\mathbf{h}, \mathbf{n}]$. Он, как и градиентный дрейф, зависит от знака заряда частицы, тогда как электрический дрейф не зависит от e .

В вакуумном магнитном поле, когда $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, направления центробежного и градиентного дрейфов совпадают. Чтобы доказать это, используем тождество

$$[\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{h}] = -\boldsymbol{\kappa},$$

следующее из (7.7) и (7.11). Замечаем также, что

$$\text{rot } \mathbf{h} = \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{B} \underbrace{\text{rot } \mathbf{B}}_{=0} + \left[\nabla \frac{1}{B}, \mathbf{B} \right]$$

и далее

$$[\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{h}] = - \left[\mathbf{h}, \left[\frac{\nabla B}{B}, \mathbf{h} \right] \right] = - \frac{\nabla B}{B} + \mathbf{h} \left(\mathbf{h} \frac{\nabla B}{B} \right).$$

Следовательно,

$$[\mathbf{h}, \nabla B] = B[\mathbf{h}, \boldsymbol{\kappa}].$$

В результате градиентный и центробежный дрейфы объединяются в единый блок:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{град}} + \mathbf{v}_{\text{ц.др.}} &= \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{\Omega} [\mathbf{h}, \boldsymbol{\kappa}] \\ &= \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{\Omega \mathcal{R}} [\mathbf{h}, \mathbf{n}]. \end{aligned}$$

Подводя итоги этой части лекции, приведём уравнение для скорости движения ведущего центра частицы в окончательном виде:

$$\boxed{\mathbf{R} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B} [\mathbf{E}, \mathbf{h}] + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} [\mathbf{h}, \boldsymbol{\kappa}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega B} [\mathbf{h}, \nabla B]}. \quad (7.13)$$

Напомним, что при выводе этого уравнения мы считали поля \mathbf{E} , \mathbf{B} не зависящими от времени. Однако можно показать, что поправки к скорости дрейфа, обусловленные нестационарностью полей, малы, если поля изменяются незначительно за период ларморовского вращения частицы, т.е. $T^{-1} \ll \Omega$, где T — характерное время изменения электрических и магнитных полей. Иллюстрацией этого утверждения могут служить решения задач 7.2 и 7.3 о скорости *поляризованного дрейфа*.

Помимо полей \mathbf{E} , \mathbf{B} в уравнение (7.13) входят продольная и поперечная скорости частицы v_{\parallel} и v_{\perp} . Чтобы замкнуть систему уравнений движения частицы в дрейфовом приближении, необходимо вывести ещё два уравнения для изменения во времени этих величин. Мы выведем эти уравнения в низшем порядке разложения по параметру ϵ , характеризующем неоднородность системы. При этом мы будем предполагать, что поля \mathbf{E} и \mathbf{B} могут медленно изменяться со временем.

Вычислим $\frac{d}{dt} v^2$. Для этого умножим уравнение движения (7.5) на \mathbf{v} :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2 = \mathbf{v} \mathbf{v} = \mathbf{v} \left(\frac{e}{m} \mathbf{E} + \Omega [\mathbf{v}, \mathbf{h}] \right) = \frac{e}{m} \mathbf{v} \mathbf{E}.$$

Усредняя по быстрому вращению, учтем, что

$$\langle \mathbf{v} \rangle = v_{||} \mathbf{h}.$$

В результате получим уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2 = \frac{e}{m} v_{||} \mathbf{h} \mathbf{E}, \quad (7.14)$$

где \mathbf{h} и \mathbf{E} надо вычислять в точке \mathbf{R} . Из него следует, что работу над частицей производит продольное электрическое поле.

Теперь вычислим $v_{||}$:

$$v_{||} = \frac{d}{dt} (\mathbf{h} \mathbf{v}) = \mathbf{v} \mathbf{h} + \mathbf{v} \dot{\mathbf{h}} = \frac{e}{m} \mathbf{E} \mathbf{h} + \mathbf{v} \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{h} \right).$$

Членом с $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$ можно пренебречь, а последний член необходимо усреднить:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{h} \rangle &= \langle v_{\alpha} v_{\beta} \rangle \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \\ &= \left(\frac{v_{\perp}^2}{2} \delta_{\alpha\beta} + \frac{2v_{||}^2 - v_{\perp}^2}{2} h_{\alpha} h_{\beta} \right) \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \\ &= \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{2v_{||}^2 - v_{\perp}^2}{2} h_{\beta} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \frac{h^2}{2}}_{=0} \\ &= \frac{v_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = \operatorname{div} \frac{\mathbf{B}}{B} = \underbrace{\operatorname{div} \frac{\mathbf{B}}{B}}_{=0} - \frac{\mathbf{B} \nabla B}{B^2} = -\frac{\mathbf{h} \nabla B}{B}.$$

В результате находим

$$v_{||} = \frac{e}{m} \mathbf{E} \mathbf{h} - \frac{1}{2} v_{\perp}^2 (\mathbf{h} \nabla B) / B.$$

Вместо этого уравнения обычно пользуются уравнением для $\frac{d}{dt} v_{\perp}^2$:

$$\frac{d}{dt} \frac{v_{\perp}^2}{2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_{||}^2}{2} \right) = \frac{1}{2} v_{\perp}^2 v_{||} \frac{\mathbf{h} \nabla B}{B}.$$

Здесь $v_{||}(\mathbf{h}\nabla B)$ можно рассматривать как $\frac{dB}{dt}$ вдоль траектории ведущего центра, так как в стационарном поле

$$\frac{dB}{dt} = \underbrace{\frac{\partial B}{\partial t}}_{=0} + \mathbf{R}\nabla B = v_{||}(\mathbf{h}\nabla B).$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}v_{\perp}^2 = \frac{v_{\perp}^2}{B} \frac{dB}{dt}.$$

Перепишав последнее уравнение в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{v_{\perp}^2}{B} = 0,$$

приходим к выводу об инвариантности *магнитного момента* частицы

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const}.$$

Хотя мы проводили вычисления в низшем порядке по параметру ϵ , можно, немного подправив определение μ , показать, что магнитный момент асимптотически сохраняется во всех порядках по ϵ . Более того, магнитный момент сохраняется также в нестационарном электромагнитном поле, если только частота ω изменения полей значительно меньше циклотронной частоты, $\omega \ll \Omega$, т.е. магнитный момент является *адиабатическим инвариантом*. Доказательство последнего утверждения мы оставляем для самостоятельной работы (см. задачи 7.4 и 7.5).

Возвращаясь к уравнению для $\frac{d}{dt}v^2$, необходимо отметить, что в переменном магнитном поле оно требует уточнения.

Во-первых, вместо $v_{||}\mathbf{h}$ в (7.14) нужно подставить скорость ведущего центра \mathbf{R} . Во-вторых, в нестационарном поле добавляется ещё одно слагаемое:

▼ 16.10.98

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}v^2 = \frac{e}{m} \mathbf{E}\mathbf{R} + \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (7.15)$$

▲

Смысл дополнительного слагаемого прост: оно описывает работу вихревого электрического поля вдоль ларморовской орбиты. Так как появление этого слагаемого не связано с неоднородностью системы, достаточно рассмотреть однородное поле, медленно изменяющееся по

абсолютной величине. Соответствующим выбором системы отсчёта можно добиться того, что продольная скорость частицы будет равна нулю, $v_{||} = 0$. В этой системе отсчёта частица движется по замкнутой окружности. Возникающее при изменении B вихревое электрическое поле за период вращения совершает работу

$$e \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = e \oint \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \simeq e\pi\rho^2 n \text{rot } \mathbf{E},$$

где единичный вектор n составляет правый винт с направлением вращения, т.е. направлен по $-\Omega$. Работа, совершаемая за единицу времени равна

$$\begin{aligned} \frac{|\Omega|}{2\pi} e n \text{rot } \mathbf{E} \pi\rho^2 &= -\Omega \text{rot } \mathbf{E} \frac{e\rho^2}{2} \\ &= -\frac{eB}{mc} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \right) \frac{e}{2} \left(\frac{mv_{\perp}c}{eB} \right)^2 \\ &= \mu \frac{\partial B}{\partial t}. \end{aligned}$$

Эта работа идёт на изменение полной энергии $\frac{1}{2}mv^2$ и может быть использована для нагрева плазмы (см. задачу 7.6).

Литература: [12, §1, 2, 3, 10], [1, §1.2], [5, гл. 3, §1–5].

► Задача 7.1

Заряженная частица движется в скрещенных магнитном и электрическом полях, причём магнитное поле постоянно, $B_z = B$, а электрическое поле промодулировано, так что $E_y = E \cos(ky)$. Найти скорость дрейфа, не предполагая, что ларморовский радиус частицы ρ мал.

► Задача 7.2

Найти скорость дрейфа заряженной частицы в однородном магнитном и медленно меняющемся во времени электрическом полях.

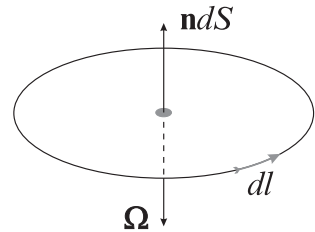


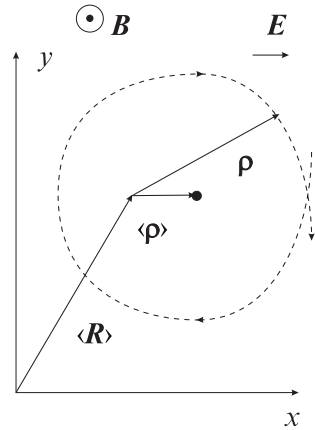
Рис. 7.5. Гиромагнитный эффект — изменение энергии частицы при медленном изменении магнитного поля

► **Задача 7.3**

Найти скорость поляризационного дрейфа, интегрируя уравнения движения частицы в однородном магнитном поле $B_z = B$ и медленно меняющемся электрическом поле $E_x = E(t)$, которое первоначально отсутствовало, $E(0) = 0$.

► **Задача 7.4**

Согласно общим теоремам аналитической механики, интеграл по замкнутой траектории $\oint P dQ$, где P и Q — канонические импульсы и координата частицы, является адиабатическим инвариантом. Вычислив интеграл по замкнутой ларморовской окружности частицы в однородном магнитном поле, доказать, что $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ является адиабатическим инвариантом.



► **Задача 7.5**

Повторить доказательство сохранения магнитного момента, приведённое в лекции, не предполагая, что $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$.

► **Задача 7.6**

(Гирорелаксационный нагрев.) Плазма помещена в магнитное поле, изменяющееся с периодом $2(\tau_1 + \tau_2)$ (рис. 7.7), причём $\Omega^{-1} \ll \tau_2 \ll \nu^{-1} \ll \tau_1$, где ν — частота кулоновских столкновений. В течение первого промежутка времени τ_1 магнитное поле равно B_0 , затем линейно нарастает до значения $B_1 = (1 + \alpha)B_0$ за время τ_2 . В течение второго промежутка времени τ_1 магнитное поле поддерживается на уровне B_1 , а затем линейно уменьшается до исходного значения B_0 за время τ_2 . Найти изменение средней энергии частиц плазмы за период изменения магнитного поля.



Рис. 7.7. К решению задачи 7.6

► **Задача 7.7**

Продолжая предыдущую задачу, указать, каким условиям должны удовлетворять интервалы τ_1 и τ_2 , чтобы осуществить селективный гирорелаксационный нагрев а) ионов, б) электронов.

Лекция 8

Адиабатические инварианты. Траектории частиц в пробкотроне

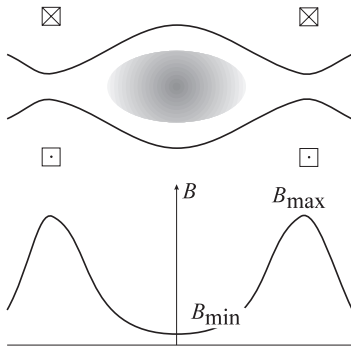


Рис. 8.1. Плазма, захваченная между магнитными пробками изображен профиль магнитного поля на оси; такова же качественно зависимость $B(s)$ на силовых линиях, близких к оси.

В качестве примера применения результатов дрейфовой траектории рассмотрим, как движется заряженная частица в *пробкотроне*, т.е. в ловушке с «магнитными пробками». Магнитными пробками принято называть те области пространства, занятого магнитным полем, где оно достигает максимального значения. В простейшем случае пробкотронная конфигурация магнитного поля создается двумя кольцевыми катушками с током. Магнитное поле имеет минимум между катушками и максимумо непосредственно под ними. На рис. 8.1

Сначала рассмотрим движение ведущего центра частицы в нулевом приближении по параметру $\varepsilon = \rho/\ell$, т.е. пренебрежем дрейфом. Если радиус катушек b порядка расстояния между ними, то характерный масштаб изменения магнитного поля в этой задаче $\ell \sim b$. Имеем

$$\mathbf{R} = v_{\parallel} \mathbf{h}, \quad \varepsilon = \frac{mv^2}{2} = \text{const}, \quad \mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const}.$$

У частицы, стартующей из минимума поля, по мере движения в пробку составляющая скорости v_{\perp} , перпендикулярная направлению магнитного поля, нарастает, а v_{\parallel} уменьшается, пока частица не остановится в точке, где $v_{\parallel} = 0$, повернет и начнет двигаться обратно. *Точка остановки* определяется условием

$$\varepsilon = \mu B.$$

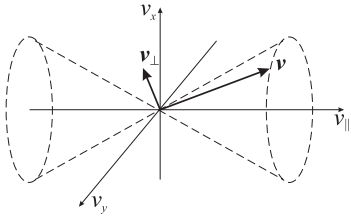


Рис. 8.2. Конус потерь в пространстве скоростей

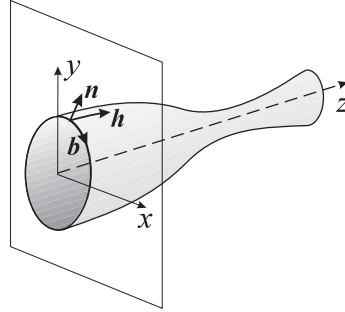


Рис. 8.3. Дрейф заряженной частицы в пробкотроне

Следовательно, там $B = \epsilon/\mu$. Если обозначить через v_0 полную скорость частицы и через $v_{\perp 0}$ её поперечную составляющую в точке минимума поля B_{\min} на силовой линии, то

$$B = \frac{v_0^2}{v_{\perp 0}^2} B_{\min} = \frac{B_{\min}}{\sin^2 \theta},$$

где мы ввели *pitch-угол* θ в пространстве скоростей, причем $v_{\perp 0} = v_0 \sin \theta$.

Важной характеристикой пробкотрона является *пробочное отношение* $K = B_{\max}/B_{\min}$. Частицы, для которых

$$\sin^2 \theta < \sin^2 \theta_K = B_{\min}/B_{\max} \equiv K^{-1},$$

не удерживаются в ловушке. В пространстве скоростей эти частицы лежат в *конусе потерь* (рис. 8.2).

Выше мы считали, что частица остается всё время на одной и той же силовой линии. Сделаем теперь следующий шаг по параметру ϵ и учтем дрейф частицы:

$$\mathbf{v}_{\text{dr}} = \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega \mathcal{R}} [\mathbf{h}, \mathbf{n}] + \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega B} [\mathbf{h}, \nabla B].$$

В пробкотроне, создаваемом кольцевыми катушками, силовая линия плоская, а скорость дрейфа \mathbf{v}_{dr} направлена по азимуту (рис. 8.3). Следовательно, частица медленно дрейфует в азимутальном направлении (медленно, так как $v_{\text{dr}} \sim \epsilon v$), быстро осциллируя между пробками. Траектория ведущего центра покрывает *дрейфовую оболочку*, которая в

осесимметричном пробкотроне представляет собой поверхность вращения, образованную вращением силовой линии вокруг оси пробкотрона.

Чтобы найти дрейфовую оболочку в общем случае, не обязательно решать дрейфовые уравнения движения. Поэтому вновь обратимся к уравнениям движения в нулевом приближении по параметру ϵ , но теперь включим в них электрическое поле:

$$\mathbf{R} = v_{\parallel} \mathbf{h}, \quad \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = eE_{\parallel} v_{\parallel}, \quad \mu = 0.$$

Преобразуем эти уравнения к гамильтоновой форме.

Первое уравнение запишем в виде

$$s = v_{\parallel}, \tag{8.1}$$

где s — координата вдоль силовой линии.

Во втором уравнении учтем, что

$$\frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} = v_{\parallel} v_{\parallel} + v_{\perp} v_{\perp},$$

а $v_{\perp} v_{\perp}$ выразим из третьего уравнения $\mu = 0$:

$$v_{\perp} v_{\perp} = \frac{1}{2} v_{\perp}^2 B/B.$$

Далее заметим, что в нулевом приближении

$$B = \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla B = v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s}.$$

Таким образом, из уравнения сохранения энергии находим

$$mv_{\parallel} v_{\parallel} = eE_{\parallel} v_{\parallel} - v_{\parallel} \mu \frac{\partial B}{\partial s}.$$

Вводя продольный импульс $p_{\parallel} = mv_{\parallel}$ и функцию

$$\Psi = - \int^s E_{\parallel} ds$$

окончательно получим

$$p_{\parallel} = -e \frac{\partial \Psi}{\partial s} - \mu \frac{\partial B}{\partial s}. \tag{8.2}$$

Легко убедиться, что уравнения (8.1) и (8.2) гамильтоновы. Действительно, их можно переписать в виде

$$s = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{||}},$$

$$p_{||} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s},$$

где

$$\mathcal{H}(s, p_{||}) = \frac{p_{||}^2}{2m} + e\psi + \mu B$$

есть гамильтониан одномерной системы, соответствующей колебаниям частицы вдоль силовой линии между точками остановки.

Представим теперь, что гамильтониан медленно изменяется со временем вследствие изменения электрического и магнитного полей: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(s, p_{||}, t)$. «Медленность» означает, что характерное время изменения T велико по сравнению с периодом продольных колебаний:

$$T \gg \ell/v.$$

Тогда, как известно из механики, сохраняется адиабатический инвариант

▼ 16.10.98

$$I_{||} = \int v_{||} ds = \int \sqrt{2m(\mathcal{H} - e\psi - \mu B)} ds.$$

Его называют *продольным адиабатическим инвариантом*. ▲

Чтобы пояснить, как пользоваться полученным выражением для продольного адиабатического инварианта, сначала рассмотрим случай, когда изменение во времени ψ и B связано с нестационарностью задачи. Обозначив текущее значение гамильтониана через ϵ (это просто есть величина энергии частицы), заметим, что

$$I_{||} = I_{||}(\epsilon, \mu, t).$$

Соответственно условие $I_{||} = \text{const}$ позволяет найти, как меняется со временем энергия частицы $\epsilon = \epsilon(I_{||}, \mu, t)$, если известны значения адиабатических инвариантов μ и $I_{||}$.

Более важным является другое применение $I_{||}$. Оно позволяет найти дрейфовую оболочку в случае, когда магнитное поле не обладает аксиальной симметрией (например, если катушки сплюснуты).

Пусть поля стационарны, так что $\epsilon = \text{const}$, но теперь учтем, что в результате дрейфа частица переходит с одной силовой линии на другую, и это приводит к изменению во времени ψ и B . Можно записать, что

$$\psi = \psi(\bar{x}, \bar{y}, s), \quad B = B(\bar{x}, \bar{y}, s),$$

где \bar{x}, \bar{y} — координаты пересечения силовой линии с некоторой плоскостью (выбор плоскости зависит только от соображений удобства). Тогда

$$I_{||} = I_{||}(\epsilon, \mu, \bar{x}, \bar{y}),$$

и условие сохранения $I_{||}$ дает зависимость \bar{y} от \bar{x} , т.е. форму сечения дрейфовой оболочки выбранной плоскостью $\bar{x}\bar{y}$. При этом, правда, следует убедиться, что характерное время изменения средних (за период продольных колебаний) значений ψ и B велико по сравнению с ℓ/v . Это действительно так, поскольку $\ell/v_{\text{dr}} \sim \ell/\epsilon v$.

Наконец, упомянем о *третьем адиабатическом инварианте* Φ . Представим, что в предыдущей задаче теперь ещё ψ и B медленно изменяются во времени, причем характерное время изменения значительно больше, чем ℓ/v_{dr} . При этом энергия ϵ более не сохраняется, но остается постоянным новый адиабатический инвариант, равный магнитному потоку, проходящему внутри дрейфовой оболочки:

$$\Phi = \int_{S_{\text{dr}}} B dS.$$

Его сохранение позволяет найти зависимость энергии от времени $\epsilon(t)$, так как поток Φ есть функция трех величин ϵ, μ и $I_{||}$, а последние две есть адиабатические инварианты, величина которых также неизменна.

Литература: [1, §2.3].

► Задача 8.1

В «катушке Гельмгольца» расстояние между витками с током равно их диаметру. Вычислить пробочное отношение на оси.

▼ 16.10.98

► Задача 8.2

В пробочном магнитном поле захвачен пучок заряженных частиц, имеющих одинаковое значение энергии и питч-угла. По какому закону изменится плотность пучка вдоль силовой линии, если известно, что пучок

отражается в точке, где $V = V_*$, а плотность пучка в минимуме поля B_0 равна n_0 ?

► **Задача 8.3**

Найти форму конуса потерь в случае, когда в плазме имеется продольное электрическое поле. Для простоты принять, что потенциал Ψ почти всюду равен Ψ_0 и лишь непосредственно вблизи магнитных пробок скачком обращается в нуль. В обычных условиях $\Psi_0 > 0$. Отдельно рассмотреть случай электронов и положительно заряженных ионов.

► **Задача 8.4**

Найти, за какое время протон с энергией 5кэВ совершит полный оборот вокруг Земли в её магнитном поле. Рассмотреть случай, когда составляющая скорости вдоль магнитного поля равна нулю и протон стартует с силовой линии, максимальное удаление которой от центра Земли равно 20000км . Принять, что поле Земли создается диполем, расположенным в её центре, а его величина равна $8 \cdot 10^{10}\text{Гс м}^3$.

► **Задача 8.5**

Электрон с энергией 1эВ движется в поле прямого тока $I = 1\text{кА}$ на расстоянии $r = 5\text{см}$ от проводника. Найти направление и величину дрейфовой скорости электрона, если егоpitch-угол равен 60° . На сколько увеличится расстояние r , если ток в проводнике медленно увеличить в два раза?

► **Задача 8.6**

(Механизм ускорения Ферми.) Протон из космических лучей захвачен в ловушку с пробочным отношением $K = 5$. В начальный момент энергия частицы равна $W = 1\text{кэВ}$, причем в минимуме магнитного поля $\theta = 45^\circ$. Пробки сближаются со скоростью $V = 10\text{км/сек}$. До какой энергии разгонится протон, прежде чем покинет систему?

► **Задача 8.7**

Шарик движется со скоростью $v_{||}$ между двумя твердыми стенками, попеременно упруго отскакивая от них. Стенки медленно сближаются, и расстояние между ними $\ell(t)$ медленно уменьшается, так что за промежуток времени T между двумя последовательными отскоками оно уменьшается на величину $\Delta\ell \ll v_{||}T$. Чему равен продольный адиабатический инвариант? Во сколько раз изменится скорость, если расстояние между стенками сократится вдвое?

► **Задача 8.8**

Во сколько раз изменится скорость в предыдущей задаче, если сближение стенок происходит неравномерно, так что в момент удара шарика в стенку её скорость равна нулю? Объяснить, почему не сохраняется адiabатический инвариант, даже если $\Delta\ell \ll v_{\parallel}T$.

Лекция 9

Кинетическое уравнение с самосогласованным полем. Интеграл столкновений (на примере плазмы с $Z \gg 1$). H-теорема

Наиболее полным является описание плазмы с помощью кинетического уравнения. В кинетической теории каждый сорт частиц в плазме характеризуется функцией распределения

$$f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Функция f определяется таким образом, что величина $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v$ имеет смысл числа частиц в элементарном объёмчике $d^3r d^3v$ шестимерного *фазового пространства*; другими словами, функция распределения есть плотность частиц в этом пространстве. Шестимерный вектор $\mathbf{R}_6 = \{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$ является радиус-вектором частицы в фазовом пространстве, а его производная по времени $\mathbf{V}_6 = \{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$ имеет смысл шестимерной скорости.

Очевидно, что интеграл по всему объёму плазмы и по всем скоростям равен полному числу частиц данного сорта N :

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Плотность частиц выражается через функцию распределения следующим образом:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

а плотность тока равна

$$\mathbf{j} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v}.$$

Уравнение, которому подчиняется функция f , легко вывести по аналогии с уравнением непрерывности для плотности частиц $n(\mathbf{r}, t)$ в обычном трёхмерном пространстве.

► **Задача 9.1**

Получить уравнение непрерывности для плотности частиц n , предполагая, что в каждой точке пространства \mathbf{r} все частицы движутся с одинаковой скоростью \mathbf{u} .

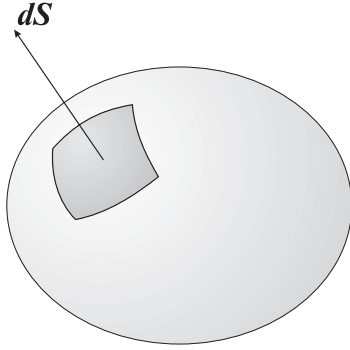


Рис. 9.1. К выводу уравнения непрерывности

Функция распределения f удовлетворяет шестимерному уравнению непрерывности, поскольку f — это плотность частиц в шестимерном фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_6(\mathbf{V}_6 f) = 0. \quad (9.1)$$

Здесь введено обозначение

$$\text{div}_6(\mathbf{V}_6 f) = \frac{\partial}{\partial x} x f + \frac{\partial}{\partial y} y f + \frac{\partial}{\partial z} z f + \frac{\partial}{\partial v_x} v_x f + \frac{\partial}{\partial v_y} v_y f + \frac{\partial}{\partial v_z} v_z f$$

Используя уравнения движения

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \right),$$

легко проверить, что $\text{div}_6 \mathbf{V}_6 = 0$, а, следовательно,

$$\text{div}_6(\mathbf{V}_6 f) = \mathbf{V}_6 \nabla_6 f = \mathbf{v} \nabla f + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}.$$

► **Задача 9.2**

Доказать равенство $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = 0$.

Вынося \mathbf{V}_6 из-под оператора дифференцирования div_6 в уравнении (9.1), получим кинетическое уравнение:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0}. \quad (9.2)$$

Строго говоря, электрическое и магнитное поля в полученном уравнении наряду с медленно меняющейся (в пространстве и во времени) компонентой содержат также микрополя, соответствующие столкновениям частиц. Микрополя заметно отличны от нуля на расстояниях порядка среднего расстояния между частицами. Однако описание системы частиц при помощи функции распределения предполагает, что в любом объёмчике $d^3r d^3v$ шестимерного фазового пространства содержится много частиц. Поэтому уравнение (9.2) следует усреднить по объёмчикам, включающим в себя достаточно много частиц. В первом приближении для такого усреднения достаточно просто пренебречь микрополем. Оставшуюся «среднюю» часть электрического и магнитного полей принято по-прежнему обозначать через \mathbf{E} и \mathbf{B} . При этом кинетическое уравнение формально сохраняет свой вид (9.2), однако оно уже не учитывает эффект столкновений частиц. «Среднее» поле называют самосогласованным, так как оно включает в себя поле, создаваемое «средней» плотностью заряда и «средним» током в плазме. Это поле подчиняется уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (9.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (9.4)$$

где

$$\rho = \sum_a \int f_a d^3v, \quad \mathbf{j} = \sum_a \int \mathbf{v} f_a d^3v,$$

а индекс ‘ a ’ обозначает сорт частиц. Кинетическое уравнение (9.2) с самосогласованным полем называется *уравнением Власова*.

Уравнение Власова имеет простой смысл. Если $\frac{\partial f}{\partial t}$ оставить в левой стороне, а все другие члены перенести вправо, то уравнение можно интерпретировать так: изменение f в данной точке пространства вызвано приходом в неё частиц из других точек и с другими скоростями:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{r} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}.$$

Другую интерпретацию уравнению (9.2) можно придать, заметив, что его левая часть составляет полную производную $\frac{df}{dt}$, т.е. скорость изменения функции распределения f в точке, движущейся вместе с ча-

стицей. Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= [f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}, t + dt) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)]/dt \\ &= [dt \frac{\partial f}{\partial t} + d\mathbf{r}\nabla f + d\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}]/dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{r}\nabla f + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}.\end{aligned}$$

Условие $df/dt = 0$ означает, что поток частиц в фазовом пространстве несжимаем; как мы видели, несжимаемость есть следствие тождества $\text{div}_6 \mathbf{V}_6 = 0$. Отметим аналогию с гидродинамическим уравнением непрерывности (16.11). Если $\text{div} \mathbf{u} = 0$, то

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{u}) = \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla n = \frac{dn}{dt} = 0.$$

Попробуем теперь учесть столкновения частиц.

Столкновения приводят к скачкообразному изменению скорости, которое в фазовом пространстве выглядит как переброс частиц из одной точки фазового пространства $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1\}$ в другую $\{\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2\}$, причём $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. Такие перескоки можно описать, добавив в правую часть уравнения Власова (9.2) дополнительный член

$$\frac{df_a}{dt} = \sum_b \text{St}_{ab}, \quad (9.5)$$

где суммирование идёт по всем сортам частиц, а отдельное слагаемое St_{ab} называется *интегралом столкновений* частиц сорта 'a' с частицами сорта 'b'. Интеграл столкновений имеет смысл числа частиц, которые появляются (исчезают) в единицу времени в единице шестимерного объёма фазового пространства.

Мы ограничимся выводом интеграла столкновений для лоренцевской плазмы. Так принято называть плазму, состоящую из электронов и бесконечно тяжёлых холодных ионов с зарядом $Z \gg 1$. При $Z \gg 1$ рассеянием электронов на электронах можно пренебречь по сравнению с их рассеянием на ионах.

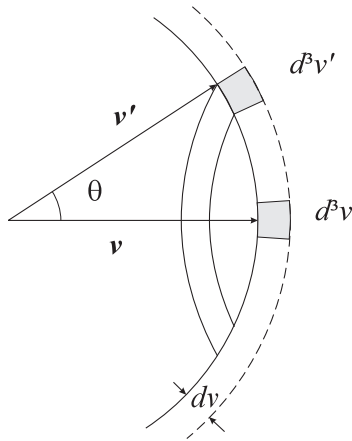
Рассмотрим точку \mathbf{v} в пространстве скоростей и объёмчик d^3v в окрестности этой точки (рис. 9.2). При рассеянии частицы выбывают из этого объёмчика, а также попадают в него из других областей пространства скоростей. Найдём вероятность

$$dw = w(\mathbf{v}, \mathbf{v}') d^3v',$$

с которой частица, имевшая скорость v , в результате рассеяния приобретёт скорость v' и попадёт в объёмчик d^3v' . Так как рассеяние на бесконечно тяжёлых ионах является упругим, абсолютная величина скорости не меняется, $v' = v$. Учтём этот факт, в явном виде выделив в w дельта-функцию

$$w(v, v') = w(v, \theta) \delta(v - v') / v^2, \quad (9.6)$$

где θ — угол рассеяния. Так как при рассеянии изменяется только направление скорости электрона, достаточно вычислить вероятность электрону рассеяться в заданный телесный угол $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, который связан с d^3v' соотношением $d^3v' = v^2 dv' d\Omega$. Эту вероятность легко связать с дифференциальным сечением рассеяния в телесный угол $d\Omega$.



Мы знаем (см. (4.3)), что частица с зарядом Z_1e , налетающая со скоростью v на кулоновский центр с зарядом Z_2e на прицельном расстоянии ρ , рассеивается на угол

$$\theta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mathcal{E} \rho},$$

где $\mathcal{E} = m_1 v^2 / 2$, а угол рассеяния предполагается малым, $\theta \ll 1$. Дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$ в телесный угол $d\Omega$ находим как площадь сегмента кольца $d\varphi \rho d\rho$, пролетая внутри которого, электрон рассеивается в интервал углов от θ до $\theta + d\theta$ и от φ до $\varphi + d\varphi$:

$$d\sigma = d\varphi \rho d\rho = \frac{(Z_1 Z_2 e^2)^2}{\mathcal{E}^2 \theta^3} d\varphi d\theta.$$

Если поток электронов через единичную площадку обозначить через j , то число электронов, рассеивающихся на одном кулоновском центре в единицу времени, равно $j d\sigma$. Число электронов, рассеивающихся в единицу объёма, в n_i раз больше и равно $j d\sigma n_i$. Поделив это число на плотность электронов в потоке $n_e = j/v$, получим вероятность отдельному электрону ($Z_1 = 1$) рассеяться в телесный угол в единицу времени на ионе с зарядом $Z_2 = Z$:

$$w(v, \theta) d\Omega = v d\sigma n_i = \frac{(Ze^2)^2}{\mathcal{E}^2 \theta^3} n_i v d\varphi d\theta.$$

Так как для малых углов $d\Omega \simeq \theta d\theta d\varphi$, отсюда находим w :

$$w(v, \theta) = \frac{(Ze^2)^2}{E^2 \theta^4} n_i v. \quad (9.7)$$

Так как w не зависит от знака θ , можно утверждать, что

$$w(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = w(\mathbf{v}', \mathbf{v}). \quad (9.8)$$

Соотношение (9.8) является следствием обратимости движения во времени и справедливо для любых видов рассеивающих потенциалов.

Переходя к выводу интеграла столкновений, условимся для краткости не указывать несущественные для дальнейшего аргументы r и t функции распределения f . Тогда число частиц в элементе d^3v пространства скоростей (в расчёте на единицу объёма) запишется в виде $f(\mathbf{v})d^3v$. За время Δt оно изменится на величину

$$\Delta[f(\mathbf{v})d^3v] = \Delta f(\mathbf{v})d^3v. \quad (9.9)$$

Изменение равно разности между приходом частиц в объёмчик d^3v из других областей пространства скоростей и уходом из него.

Число ушедших частиц находим как произведение числа частиц $f(\mathbf{v})d^3v$ в объёмчике на полную вероятность $\Delta t \cdot \int w(\mathbf{v}, \mathbf{v}')d^3v'$ одной частице рассеяться за время Δt :

$$f(\mathbf{v})d^3v \cdot \Delta t \cdot \int w(\mathbf{v}, \mathbf{v}')d^3v'. \quad (9.10)$$

Число частиц, пришедших в объёмчик d^3v из другого объёмчика d^3v' , равно произведению числа частиц $f(\mathbf{v}')d^3v'$ в объёмчике d^3v' на вероятность $\Delta t \cdot w(\mathbf{v}', \mathbf{v})d^3v$, с какой одна частица за время Δt попадёт из d^3v' в d^3v . Полное число пришедших частиц находим, интегрируя по d^3v' :

$$d^3v \cdot \Delta t \cdot \int w(\mathbf{v}', \mathbf{v})f(\mathbf{v}')d^3v'. \quad (9.11)$$

Приравнявая (9.9) к разности (9.11) и (9.10), после деления на $\Delta t d^3v$ получим

$$\frac{df}{dt} = \int w(\mathbf{v}', \mathbf{v})f(\mathbf{v}')d^3v' - \int w(\mathbf{v}, \mathbf{v}')f(\mathbf{v})d^3v'.$$

Теперь воспользуемся симметрией w относительно своих аргументов и малостью угла рассеяния, вследствие чего изменение скорости частицы $\mathbf{u} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ также мало:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \int w(\mathbf{v}, \mathbf{v}') [f(\mathbf{v}') - f(\mathbf{v})] d^3 v' \\ &\simeq \int w(\mathbf{v}, \theta) \left(u_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} + \frac{1}{2} u_\alpha u_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Так как функция f в этом уравнении не зависит от переменных интегрирования, её можно вынести за знак интегрирования. Вводя обозначения

$$A_\alpha = \int w u_\alpha d\Omega, \quad (9.13)$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int w u_\alpha u_\beta d\Omega, \quad (9.14)$$

перепишем уравнение (9.12) в виде

$$\frac{df}{dt} = A_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} + A_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}. \quad (9.15)$$

Вектор A_α есть среднее значение вектора u_α , а тензор $A_{\alpha\beta}$ есть среднее значение тензора $u_\alpha u_\beta / 2$. Поскольку имеется единственное выделенное направление — направление вектора \mathbf{v} , результат усреднения можно выразить только через компоненты вектора \mathbf{v} и инвариантных тензоров $\delta_{\alpha\beta}$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$; напомним, что инвариантным называется тензор, компоненты которого не изменяются при повороте системы координат. Следовательно,

$$A_\alpha = \mathbb{A} \frac{v_\alpha}{v}, \quad (9.16)$$

$$A_{\alpha\beta} = \mathbb{B} \delta_{\alpha\beta} + \mathbb{C} \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} + \mathbb{D} e_{\alpha\beta\gamma} \frac{v_\gamma}{v}. \quad (9.17)$$

Очевидно, что $\mathbb{D} = 0$, так как $A_{\alpha\beta}$ не изменяется при замене \mathbf{v} на $-\mathbf{v}$.

Коэффициент \mathbb{A} найдём, умножив (9.13) на \mathbf{v}/v :

$$\mathbb{A} = A_\alpha v_\alpha / v = \frac{1}{v} \int w \mathbf{u} \mathbf{v} d\Omega.$$

Учитывая соотношение $\mathbf{u} \mathbf{v} = -u^2/2$, следующее из закона сохранения энергии $m_1(\mathbf{v} + \mathbf{u})^2/2 = m_1 v^2/2$, перепишем \mathbb{A} в виде

$$\mathbb{A} = -\frac{1}{2v} \int w u^2 d\Omega. \quad (9.18)$$

Коэффициенты \mathbb{B} и \mathbb{C} легко найти, составив свёртки уравнения (9.17) с $\delta_{\alpha\beta}$ и $v_\alpha v_\beta / v^2$:

$$A_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = 3\mathbb{B} + \mathbb{C}, \quad (9.19)$$

$$A_{\alpha\beta} \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} = \mathbb{B} + \mathbb{C}. \quad (9.20)$$

Левые части полученных уравнений вычисляем, используя (9.14):

$$A_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = A_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \int w u^2 d\Omega = -v\mathbb{A}, \quad (9.21)$$

$$A_{\alpha\beta} \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} = \frac{1}{2v^2} \int w (uv)^2 d\Omega = \frac{1}{8v^2} \int w u^4 d\Omega. \quad (9.22)$$

Таким образом, вычисление коэффициентов \mathbb{A} , \mathbb{B} и \mathbb{C} сводится к вычислению средних значений u^2 и u^4 . Второе из них значительно меньше первого, так как $u \propto \theta$, а $\theta \ll 1$. Поэтому можно пренебречь членом $A_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta / v^2$ в (9.20). Тогда

$$\mathbb{B} = -\mathbb{C} = -\frac{1}{2} v\mathbb{A}(v).$$

В результате из уравнения (9.15) получаем

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \mathbb{A} \frac{v_\alpha}{v} \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} - \frac{1}{2} v\mathbb{A} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} \\ &= -\frac{1}{2} v\mathbb{A} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\alpha}. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} &= \frac{v_\beta}{v^2} \frac{\partial v_\alpha}{\partial v_\beta} + \frac{v_\alpha}{v^2} \frac{\partial v_\beta}{\partial v_\beta} - 2 \frac{v_\alpha v_\beta}{v^3} \frac{\partial v}{\partial v_\beta} \\ &= \frac{v_\beta}{v^2} \delta_{\alpha\beta} + \frac{3v_\alpha}{v^2} - 2 \frac{v_\alpha v_\beta v_\beta}{v^4} \\ &= \frac{2v_\alpha}{v^2}. \end{aligned}$$

Вводя вектор

$$\mathbf{F} = \nabla_v f - \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{v} \nabla_v f) = \nabla_{v\perp} f,$$

полученное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{2} v\mathbb{A} \operatorname{div}_v \mathbf{F}. \quad (9.23)$$

Вектор \mathbf{F} отличается от ∇f тем, что из последнего вычтена «радиальная» компонента ∇f . В сферической системе координат в пространстве скоростей $\{v, \theta, \phi\}$ оператор $\operatorname{div}_v \mathbf{F}$ выражается через угловую часть $\Delta_{\theta, \phi} f$ лапласиана:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_v \mathbf{F} &= \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) \\ &= \frac{1}{v^2} \Delta_{\theta, \phi} f. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Чтобы завершить вывод интеграла столкновений, нам осталось вычислить коэффициент \mathbb{A} . Для этого подставим (9.6), (9.7) в (9.18) и учтём, что $u \simeq v\theta$:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= -\frac{1}{2v} \int d\Omega w u^2 \simeq -\frac{1}{2v} \int 2\pi \theta d\theta n_i v \frac{(Ze^2)^2}{\mathcal{E}^2 \theta^4} v^2 \theta^2 \\ &= -\frac{\pi(Ze^2)^2 n_i v^2}{\mathcal{E}^2} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{\pi(Ze^2)^2 n_i v^2}{\mathcal{E}^2} \ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Здесь вновь возник кулоновский логарифм $\Lambda = \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} = \ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}$. Собирая все коэффициенты, окончательно получаем

$$\boxed{\operatorname{St}_{ei} = \frac{2\pi e^4 Z^2 n_i \Lambda}{m_e^2 v^3} \Delta_{\theta, \phi} f}. \quad (9.26)$$

Интеграл столкновений обладает некоторыми общими свойствами, очевидными из его физического смысла как числа частиц, появляющихся в единицу времени в единице объёма пространства скоростей. Поскольку полное число частиц при рассеянии сохраняется, то

$$\int d^3 v \operatorname{St}_{ab} = 0. \quad (9.27)$$

Вследствие сохранения энергии и импульса сталкивающихся частиц имеем

$$\int d^3 v m_a v \operatorname{St}_{ab} + \int d^3 v m_b v \operatorname{St}_{ba} = 0, \quad \int d^3 v m_a v \operatorname{St}_{aa} = 0, \quad (9.28)$$

$$\int d^3 v \frac{m_a v^2}{2} \operatorname{St}_{ab} + \int d^3 v \frac{m_b v^2}{2} \operatorname{St}_{ba} = 0, \quad \int d^3 v \frac{m_a v^2}{2} \operatorname{St}_{aa} = 0. \quad (9.29)$$

► Задача 9.3

Проверить выполнение этих условий для лоренцевской плазмы (импульс электронов не сохраняется).

Исходные динамические уравнения, использованные при выводе интеграла столкновений, обратимы по времени, однако кинетическое уравнение с интегралом столкновений не инвариантно относительно изменения направления t . Это утверждение известно как H-теорема Л. Больцмана. Он доказал, что существует функционал S от функции распределения f , такой, что $S \geq 0$ для любой функции f , удовлетворяющей кинетическому уравнению. Функционал S называют энтропией, а современная формулировка H-теоремы состоит в том, что энтропия замкнутой системы не убывает со временем. Применительно к рассматриваемому случаю лоренцевской плазмы замкнутой системой можно считать электронный газ, поскольку функция распределения «бесконечно» тяжелых ионов вообще никак не изменяется. Энтропия идеального электронного газа вычисляется по формуле

$$S = \int [1 - \ln f] f d^3 r d^3 v = \int f \ln \frac{e}{f} d^3 r d^3 v. \quad (9.30)$$

Вычислим dS/dt . Подставляя в

$$\frac{dS}{dt} = - \int \frac{\partial f}{\partial t} \ln(f) d^3 r d^3 v$$

производную $\partial f/\partial t$ из кинетического уравнения, получим

$$S = \int d^3 r d^3 v \ln(f) \left\{ \mathbf{v} \nabla f + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} - \text{St} \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках проинтегрируем с помощью теоремы Гаусса, учитывая, что $f = 0$ за пределами объёма, занятого плазмой:

$$\begin{aligned} \int d^3 r d^3 v \ln(f) \mathbf{v} \nabla f &= \int d^3 r d^3 v \ln(f) \text{div} \mathbf{v} f \\ &= - \int d^3 r d^3 v \mathbf{v} f \nabla \ln(f) = - \int d^3 r d^3 v \mathbf{v} \nabla f \\ &= - \int d^3 r d^3 v \text{div} \mathbf{v} f = 0. \end{aligned}$$

Точно такая же процедура по отношению к переменной \mathbf{v} покажет, что

$$\int d^3 r d^3 v \ln(f) \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

В итоге остаётся только член, содержащий интеграл столкновений:

$$S = - \int d^3 r d^3 v \ln(f) \text{St}.$$

Дальнейшие вычисления проведём для лоренцевского интеграла столкновений

$$\text{St}_{ei} = \text{const} \operatorname{div}_v \frac{\mathbf{F}}{v}, \quad \mathbf{F} = \nabla_{v\perp} f.$$

Явный вид const нам не понадобится, важно только, что $\text{const} > 0$. Используя уже отработанную технологию преобразования интегралов, получаем

$$\begin{aligned} S &= -\text{const} \int d^3 r d^3 v \ln(f) \operatorname{div}_v \frac{\mathbf{F}}{v} \\ &= \text{const} \int d^3 r d^3 v \frac{\mathbf{F} \nabla_v f}{vf} \\ &= \text{const} \int d^3 r d^3 v \frac{(\nabla_{v\perp} f)^2}{vf} \geq 0. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Мы доказали, что в лоренцевской плазме энтропия возрастает. В общем случае утверждение о возрастании энтропии справедливо для столкновений внутри одного сорта частиц (электронов с электронами или ионов с ионами). Что касается перекрёстных столкновений, то они могут приводить к уменьшению энтропии одной из компонент за счёт увеличения энтропии другой. Суммарная энтропия тем не менее будет возрастать:

$$\sum_a S_a = - \int d^3 r d^3 v \sum_{ab} \ln(f_a) \text{St}_{ab} \geq 0.$$

Важность H-теоремы состоит в том, что она указывает направление релаксации. Так как энтропия максимальна в термодинамически равновесном состоянии, то столкновения максвеллизуют функцию распределения плазмы. Тот факт, что равновесной функцией распределения является максвелловская, непосредственно не следует из наших вычислений для случая лоренцевской плазмы, так как мы пренебрегли обменом энергией. Однако из (9.31) видно, что равновесная функция распределения должна быть изотропна, так как $S = 0$ только при $\nabla_{v\perp} f \equiv 0$.

► Задача 9.4

Найти стационарное решение уравнения Власова в дрейфовом приближении.

► **Задача 9.5**

Показать, что плотность и давление плазмы на фиксированной силовой линии зависят только от величины магнитного поля B .

► **Задача 9.6**

Вычислить плотность и давление плазмы, в которой распределение ионов описывается функцией распределения $f = N\delta(\mu - \epsilon/B_*)\delta(\epsilon - \epsilon_0)$, где N — нормировочная константа, B_* — магнитное поле в точке остановки частиц, а ϵ_0 — энергия ионов. Для простоты принять, что $\Phi = 0$ (плазма с холодными электронами).

► **Задача 9.7**

Пучок ионов с энергией 100 кэВ тормозится в плазме с электронной температурой 100 эВ. Начальный угловой разброс ионов пучка пренебрежимо мал. Оценить угловую ширину пучка $\Delta\theta$ после того, как ионы потеряют половину начальной энергии.

Литература: [5, гл. 6, §1-4, 6, 7].

Лекция 10

Моменты кинетического уравнения. Уравнения двухжидкостной гидродинамики. Приближение одножидкостной магнитной гидродинамики

На предыдущей лекции мы получили кинетическое уравнение для функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ с интегралом столкновений. Оно даёт наиболее строгое и универсальное описание процессов, происходящих в плазме. Однако найти его решение удастся далеко не всегда, а, главное, во многих случаях бывает достаточно ограничиться более простым описанием.

Рассмотрим типичную ситуацию, когда макроскопические параметры плазмы изменяются медленно по сравнению со временами электрон-электронных и ион-ионных столкновений, $\tau \gg \tau_{ee}$, $\tau \gg \tau_{ii}$. Тогда локально в каждом небольшом объёмчике плазмы кулоновские столкновения частиц приводят к максвеллизации функций распределения в электронном и ионном газах:

$$f = f_{\text{м}} \equiv n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T} \right). \quad (10.1)$$

Существенно, однако, что параметры n , T и \mathbf{u} , характеризующие максвелловское распределение, меняются в пространстве и во времени:

$$\begin{aligned} n &= n(\mathbf{r}, t), \\ T &= T(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Распределение, при котором хотя бы один из параметров n , T или \mathbf{u} не есть константа, называют *локальным термодинамическим равновесием*. Оно устанавливается за время столкновений между частицами одного сорта.

Состояние плазмы в локальном термодинамическом равновесии не является полностью равновесным. Релаксация к *полному термодинамическому равновесию*, при котором плотность n , температура T и

скорость \mathbf{u} плазмы не зависят ни от координат, ни от времени, происходит за время, значительно большее времени электрон-электронных или ион-ионных столкновений. Одно из существенных отличий между полным и локальным термодинамическими равновесиями состоит в том, что при полном равновесии температура всех сортов частиц одинакова, т.е. $T_e = T_i$, так же как одинакова и их скорость, $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i$, а при локальном равновесии температуры и скорости компонент плазмы, вообще говоря, различны. Ясно поэтому, что для установления полного термодинамического равновесия требуется по крайней мере время порядка времени ион-электронных столкновений $\tau_{ie} \gg \tau_{ii} \gg \tau_{ee}$. Что касается плотности, то она должна удовлетворять условию квазинейтральности даже при локальном равновесии. Соответственно, для плазмы с многозарядными ионами имеем $n_e = Zn_i$.

Отсутствие полного термодинамического равновесия обычно связано с тем, что на плазму действуют внешние силы, выводящие её из равновесия. При наличии таких сил полное термодинамическое равновесие может быть вообще не достижимо.

Если плазма находится в состоянии локального термодинамического равновесия, использование кинетического уравнения для её описания является избыточным. В этом случае достаточно установить, как будут меняться во времени и пространстве n , T и \mathbf{u} . Соответствующая система уравнений даёт *гидродинамическое* описание движения плазмы. Перейдём к выводу гидродинамических уравнений, причём будем предполагать вначале, что строго $f = f_M$. Последнее предположение в действительности означает, что мы пренебрегаем *процессами переноса* плотности, температуры и скорости, т.е. соответственно процессами *диффузии, теплопроводности и вязкости*. Строго говоря, процессы переноса отсутствуют лишь в однородной плазме, когда плотность n , температура T и скорость \mathbf{u} не зависят от координат, а единственным признаком отсутствия полного термодинамического равновесия является неравенство температур электронов и ионов ($T_e \neq T_i$), а также их скоростей ($\mathbf{u}_e \neq \mathbf{u}_i$). При наличии неоднородности процессы переноса обычно идут довольно медленно, и поэтому на достаточно коротком промежутке времени ими в первом приближении можно пренебречь. Так мы и поступим сейчас, отложив их рассмотрение до следующей лекции.

Введём обозначение

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{n} \int f_M d^3v(\dots)$$

и заметим, что

$$\begin{aligned}\langle 1 \rangle &= \frac{1}{n} \int f_M d^3 v = 1, \\ \langle \mathbf{v} \rangle &= \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f_M d^3 v = \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Величины $\langle \dots \rangle$ называют моментами функции распределения. Для дальнейшего удобно выделить хаотическую составляющую скорости $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Очевидно, что

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = 0, \quad \left\langle m \frac{v'^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} T.$$

Будем исходить из кинетического уравнения, записанного в дивергентной форме:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} f_a + \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) f_a = \operatorname{St}_{ab} + \operatorname{St}_{aa}. \quad (10.2)$$

Как мы условились на предыдущей лекции, индексы ‘ a ’ и ‘ b ’ могут принимать значения ‘ e ’ либо ‘ i ’, причём, если $a = i$, то $b = e$ и наоборот.

Найдём первый момент кинетического уравнения, т.е. умножим уравнение (10.2) на $d^3 v$ и вычислим трёхмерный интеграл. Интегралы столкновений St_{aa} и St_{ab} выпадут, так как число частиц при кулоновских столкновениях сохраняется, и мы получим уравнение непрерывности

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \mathbf{u} = 0}, \quad (10.3)$$

так как интеграл от третьего слагаемого в (10.2) также равен нулю (надо воспользоваться теоремой Остроградского-Гаусса и преобразовать этот интеграл к интегралу по бесконечно удалённой поверхности в пространстве скоростей). Для краткости мы опускаем индекс ‘ a ’ у величин n и \mathbf{u} в уравнениях, которые в равной степени справедливы для всех сортов частиц.

Теперь вычислим второй момент кинетического уравнения: умножим его на $m_a \mathbf{v}$ и проинтегрируем по $d^3 v$; при этом St_{aa} выпадет в силу сохранения импульса в столкновениях частиц одного сорта. Получим

$$m \frac{\partial}{\partial t} n u_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \Pi_{\alpha\beta} - e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{B}] \right)_\alpha n = R_\alpha, \quad (10.4)$$

где $\Pi_{\alpha\beta} = n\langle mv_{\alpha}v_{\beta}\rangle$ — плотность потока импульса частиц сорта ‘ a ’,

$$\mathbf{R} = m \int v \text{St}_{ab} d^3v = m \int v' \text{St}_{ab} d^3v \quad (10.5)$$

— сила, действующая на компоненту a со стороны компоненты b . Вновь мы опустили индекс ‘ a ’ у величин m , e , \mathbf{R} , $\Pi_{\alpha\beta}$, чтобы не загромождать формулы. Отметим сразу, что вследствие сохранения суммарного импульса сталкивающихся частиц

$$\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i. \quad (10.6)$$

Чтобы записать уравнение движения в стандартной форме, выделим в $\Pi_{\alpha\beta}$ перенос импульса, связанный с макроскопическим движением:

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta} &= mn\langle(u_{\alpha} + v'_{\alpha})(u_{\beta} + v'_{\beta})\rangle = \\ &= mn u_{\alpha} u_{\beta} + mn\langle v'_{\alpha} v'_{\beta}\rangle \\ &= mn u_{\alpha} u_{\beta} + \frac{1}{3} mn\langle v'^2\rangle \delta_{\alpha\beta} \\ &= mn u_{\alpha} u_{\beta} + p \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

где $p = nT$. Пользуясь преобразованием

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n u_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} n u_{\alpha} u_{\beta} &= n \frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha} + n u_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} u_{\alpha} + \\ &+ u_{\alpha} \underbrace{\left(\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} n u_{\beta} \right)}_{=0}, \end{aligned}$$

запишем окончательно уравнение движения в виде

$$\boxed{mn \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + ne\mathbf{E} + ne \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right] + \mathbf{R}}, \quad (10.7)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)$ — конвективная производная. В правой части здесь стоят силы, действующие на единицу объема компоненты плазмы.

► Задача 10.1

Вычислить силу трения (10.5), используя лоренцевский интеграл столкновений (9.26) и предполагая, что распределение электронов описывается «сдвинутой» функцией распределения Максвелла (10.1). Учтеть, что $u \ll v_{Te}$.

Пока мы вывели два уравнения, куда входят три неизвестные величины n , p , u . Чтобы замкнуть систему уравнений, требуется ещё одно (скалярное) уравнение — *уравнение переноса тепла*. Оно получится, если умножить кинетическое уравнение на $mv^2/2$ и проинтегрировать по d^3v . При этом в правой части останется только член

$$\begin{aligned} \int \frac{mv^2}{2} \text{St}_{ab} d^3v &= \int \frac{m}{2} (\mathbf{u} + \mathbf{v}')^2 \text{St}_{ab} d^3v \\ &= \mathbf{u} \mathbf{R} + \int \frac{m}{2} v'^2 \text{St}_{ab} d^3v, \end{aligned} \quad (10.8)$$

описывающий обмен энергией между компонентами. Слагаемое $\mathbf{u} \mathbf{R}$ соответствует работе силы \mathbf{R} , а слагаемое

$$Q \equiv \int \frac{m}{2} v'^2 \text{St}_{ab} d^3v \quad (10.9)$$

есть количество теплоты, получаемой частицами ‘ a ’ от частиц сорта ‘ b ’ в единицу времени в единице объёма. Теплопередача отсутствует, $Q = 0$, если $T_a = T_b$ (напомним, что пока мы пренебрегаем процессами переноса). Теплопередача также равна нулю в случае лоренцевского интеграла столкновений, который не описывает передачу энергии от электронов к ионам.

Мы не будем проводить детального вывода уравнения переноса тепла, так как окончательный результат может быть получен из простых физических соображений (впрочем, см. задачу 10.4).

Если вообще пренебречь столкновениями и принять, что $\text{St}_{ab} = 0$, то, как мы видели в предыдущей лекции, сохраняется энтропия замкнутой системы. При отсутствии столкновений замкнутой системой можно считать не только всю плазму в целом, но и любую «жидкую частицу», состоящую из фиксированного набора частиц. Если обозначить через s энтропию единицы объёма

$$s = \int f \ln \frac{e}{f} d^3v, \quad (10.10)$$

то s/n будет энтропией на одну частицу, а уравнение, описывающее её сохранение, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{s}{n} = 0. \quad (10.11)$$

► Задача 10.2

Вычислить s для максвелловской функции распределения.

Фактически условие $d(s/n)/dt = 0$ сводится к уравнению адиабаты

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{n^\gamma} = 0 \quad (10.12)$$

с $\gamma = 5/3$.

Чтобы учесть столкновения, достаточно вспомнить, что согласно первому началу термодинамики

$$dS = \frac{dQ}{T},$$

где dS — изменение энтропии системы, а dQ — подведённое к ней тепло. В расчёте на одну частицу изменение энтропии за единицу времени равно $d(s/n)/dt$, а подведённое тепло складывается из двух слагаемых: $Q/n - eEu$, где Q определено формулой (10.9). Второе слагаемое в этой формуле, $-eEu$, описывает джоулев нагрев, т.е. тепловую мощность, выделяемую в плазме при протекании электрического тока. Мощность uR , соответствующая работе силы R , расходуется на изменение кинетической энергии «жидкой частицы» и не вызывает изменения энтропии. Следовательно,

$$\boxed{nT \frac{d}{dt} \frac{s}{n} = Q - neEu}. \quad (10.13)$$

Это и есть искомое уравнение переноса тепла. Поскольку, как мы видели, в пределе бесконечно тяжёлых ионов $Q = 0$, то часто теплообменом между электронами и ионами можно вообще пренебречь и для хорошо проводящей плазмы пользоваться уравнением адиабаты (10.12).

► Задача 10.3

Кажется, что уравнение переноса тепла в форме (10.13) не инвариантно относительно перехода в движущуюся систему координат, так как при замене $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{U}$ в правой части уравнения появляется дополнительный член $-neE\mathbf{U}$. Объяснить парадокс.

Итак, мы получили систему уравнений двухжидкостной гидродинамики. Одну из взаимопроникающих «жидкостей» составляют электроны, другую — ионы. Часто бывает достаточно ещё более грубого приближения, когда плазма рассматривается как сплошная среда. Это так называемое приближение одножидкостной гидродинамики.

Для вывода уравнений одножидкостной гидродинамики введём *массовую плотность* и *гидродинамическую скорость*

$$\rho = m_e n + m_i n \simeq m_i n, \quad (10.14)$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho} (m_e n \mathbf{u}_e + m_i n \mathbf{u}_i) \simeq \mathbf{u}_i. \quad (10.15)$$

Тогда уравнение непрерывности для ионов можно переписать в виде закона сохранения массы

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0}. \quad (10.16)$$

Далее сложим уравнения движения электронов и ионов, учтём, что $\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i$, и пренебрежём в суммарном уравнении инерцией электронов. В результате получим

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}]}, \quad (10.17)$$

где

$$\mathbf{j} = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

— плотность тока, $p = p_i + p_e$ — давление, а $\frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}]$ — сила пондеромоторного взаимодействия тока в плазме с магнитным полем (отношенная к единице объёма). Последнее уравнение в системе получим, сложив уравнения

$$nT_i \frac{d}{dt} \ln \frac{T_i^{3/2}}{n} = Q_i - neE\mathbf{u}_i$$

и

$$nT_e \frac{d}{dt} \ln \frac{T_e^{3/2}}{n} = Q_e + neE\mathbf{u}_e,$$

следующие из (10.13) и (16.14). Учитывая, что $Q_e = -Q_i$, после несложных преобразований получаем искомое уравнение

$$\boxed{n(T_i + T_e) \frac{d}{dt} \ln \frac{(T_i + T_e)^{3/2}}{n} = -\mathbf{j} \mathbf{E}}. \quad (10.18)$$

Правая часть этого уравнения описывает джоулев нагрев. Для быстрых движений, когда скорость относительного движения $u_i - u_e$ ионной и электронной «жидкостей» значительно меньше массовой скорости V джоулевым нагревом часто пренебрегают и вместо (10.18) пользуются уравнением адиабаты

$$\frac{d p}{d t} \rho^\gamma = 0 \quad (10.18')$$

с показателем адиабаты $\gamma = \frac{5}{3}$.

Уравнения (10.16), (10.17) и (10.18) составляют систему уравнений *одножидкостной магнитной гидродинамики*. Интересно, что электрическое поле выпало из полученной системы уравнений. Обычно его находят, используя ту или иную разновидность закона Ома. Мы обсудим этот вопрос в лекции №14.

Литература: [17].

► **Задача 10.4**

Вывести уравнение (10.13), вычислив момент кинетического уравнения (10.2) с весом $mv^2/2$.

► **Задача 10.5**

Система уравнений (10.16), (10.17), (10.18) не содержит параметров, характеризующих столкновения между частицами. Означает ли это, что её можно использовать для описания бесстолкновительной плазмы?

Лекция 11

Волны в плазме. Ленгмюровские волны. Ионно-звуковые волны. Затухание Ландау

(тэү эпов эд оТ)

Лекция 12

**Удержание плазмы в классическом пробкотроне.
Амбиполярный потенциал**

(тэү эпов эд оТ)

Лекция 13

Понятие о методе Чепмена-Энскога для нахождения коэффициентов переноса

На прошлой лекции мы вывели уравнения двухжидкостной гидродинамики для полностью ионизованной плазмы, предполагая, что функция распределения частиц всех сортов является локально максвелловской. Однако, если система неоднородна, функция распределения отличается от максвелловской, и это отличие связано с процессами переноса: вязкостью, теплопроводностью и диффузией, которые направлены на то, чтобы вернуть систему в состояние полного термодинамического равновесия. Процессы переноса можно описать в рамках обычной гидродинамики. Соответствующие уравнения для краткости называют *уравнениями переноса*. В применении к газам они были выведены приблизительно в течение одного года (1916-1917) независимо С. Чепменом и Д. Энскогом, причем разными способами. Формулировка теории Чепменом была основана скорее на интуиции, нежели на дедукции, тогда как в трактовке Энскога большее внимание уделялось математической форме и изяществу. С. Чепмен и Т. Каулинг в своей книге, вышедшей в 1939 году, вычислили некоторые коэффициенты переноса для плазмы в магнитном поле. Удивительным образом описание процессов переноса незамагниченной плазмы оказалось более сложной задачей, нежели для плазмы в магнитном поле. Завершил построение полной системы уравнений *классического* переноса в плазме С.И. Брагинский, придумав в конце 50-х годов оригинальный способ «препарирования» интеграла столкновений, основанный на малости отношений масс электрона и иона. Не имея возможности в полной мере изложить теорию С.И. Брагинского, мы рассмотрим только некоторые из процессов переноса, обусловленных кулоновскими столкновениями частиц в полностью ионизованной плазме. Теорию *неклассического* переноса, связанного с усилением флуктуаций электромагнитного поля в плазме из-за раскачки разного рода неустойчивостей, до сих пор нельзя считать завершенной. Мы кратко обсудим один пример

неклассической диффузии на следующей лекции.

Если характерное время процессов переноса велико по сравнению со временем столкновений частиц, то отличие функции распределения от максвелловской мало:

$$f = f_M + \delta f, \quad \delta f \ll f_M, \quad (13.1)$$

где

$$f_M = n \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T_e} \right). \quad (10.1)$$

Разделение функции распределения f на максвелловский «остов» f_M и «возмущение» δf неоднозначно. Для устранения этой неоднозначности потребуем, чтобы n , T и \mathbf{u} , входящие в f_M , определялись по *точной* функции распределения

$$n = \int f d^3v, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f d^3v, \quad T = \frac{m}{3n} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f d^3v. \quad (13.2)$$

При этом поправка δf обладает следующими свойствами:

$$\int \delta f d^3v = 0, \quad \int \mathbf{v} \delta f d^3v = 0, \quad \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \delta f d^3v = 0. \quad (13.3)$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в плазме с однородной плотностью n есть градиент электронной температуры, направленный вдоль оси z , т.е. $\nabla T_e = e_z dT_e/dz$. Будем считать, что магнитное поле отсутствует, а ионы вследствие их большой массы покоятся. Предположим, что через плазму не протекает ток, так как она изолирована от внешних проводников; тогда электронная компонента также находится в покое, так что её средняя скорость равна нулю: $\mathbf{u}=0$. Для этого необходимо чем-то уравновесить градиент электронного давления $\nabla p_e = n \nabla T_e$. Это можно сделать, наложив на плазму электрическое поле $\mathbf{E} = E e_z$, которое должно удерживать электроны. Если плазма изолирована, электрическое поле создаётся зарядами, скапливающимися на её поверхности. Величина этого поля будет найдена ниже, а пока только зафиксируем тот факт, что в проводнике (каковым является плазма), электрическое поле возникает даже при отсутствии тока, если имеется градиент температуры (эффект Зеебека).

Запишем кинетическое уравнение для электронной функции распределения, учитывая, что наша задача стационарна и, следовательно,

$\partial f / \partial t = 0$:

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v_z} = \text{St} = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta}. \quad (13.4)$$

Мы воспользовались лоренцевским интегралом столкновений, ввели обозначение $A = 2\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda / m^2$ и учли, что в силу симметрии задачи искомая функция f не зависит от азимутального угла. Заметим, что величина A/v^3 в (13.4) имеет смысл частоты электрон-ионных столкновений. Для краткости мы опускаем индекс ‘ e ’ у некоторых параметров, характеризующих электроны и их функцию распределения, в частности, вместо e_e просто пишем e , подразумевая, что $e < 0$. ▲

Подставим теперь в уравнение (13.4) функцию (13.1). При этом в правой части останется только δf (так как f_M при $u = 0$ не зависит от ϑ), а в левой части мы пренебрежем δf по сравнению с членами, содержащими f_M :

$$v_z \frac{\partial f_M}{\partial z} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f_M}{\partial v_z} = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial \delta f}{\partial \vartheta}. \quad (13.5)$$

Раскрывая производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_M}{\partial v_z} &= -\frac{mv_z}{T_e} f_M = -\frac{mv \cos \vartheta}{T_e} f_M, \\ \frac{\partial f_M}{\partial z} &= -\frac{3}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} f_M + \frac{mv^2}{2T_e^2} \frac{\partial T_e}{\partial z} f_M = \frac{1}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} \left(\frac{mv^2}{T_e} - 3 \right) f_M, \end{aligned}$$

уравнение (13.5) запишем в виде

$$\frac{v}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} \left(\frac{mv^2}{T_e} - 3 \right) f_M \cos \vartheta - \frac{eE v \cos \vartheta}{T_e} f_M = \frac{A}{v^3} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial \delta f}{\partial \vartheta}. \quad (13.6)$$

Будем искать его решение по методу разделения переменных, предположив, что $\delta f = \Phi(v) \cos \vartheta$. Нетрудно проверить, что при таком выборе δf правая часть последнего уравнения равна $-2(A/v^3)\delta f$, поэтому $\cos \vartheta$ сокращается, и мы находим уравнение на функцию $\Phi(v)$:

$$\Phi(v) = -\frac{v^3}{2A} \left[\frac{v}{2T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} \left(\frac{mv^2}{T_e} - 3 \right) - \frac{eE v}{T_e} \right] f_M. \quad (13.7)$$

Потребуем теперь выполнения второго условия в (13.3). (Нетрудно проверить, что другие два интеграла в (13.3) обращаются в нуль.)

Вследствие азимутальной симметрии задачи достаточно рассмотреть только z -компоненту этого векторного соотношения:

$$\int \delta f v_z d^3 v = 0,$$

или

$$\int \Phi(v) v \cos^2 \vartheta d^3 v = 0.$$

При усреднении по телесному углу $\langle \cos^2 \vartheta \rangle = 1/3$, так что последнее условие сводится к

$$\int \Phi(v) v d^3 v = 0. \quad (13.8)$$

Подставляя сюда функцию (13.7), мы сможем легко вычислить величину возникающего в плазме электрического поля. Воспользовавшись стандартными интегралами

▼ 16.10.98

$$\int f_M v^5 d^3 v = 48 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{T_e}{m} \right)^{5/2}, \quad \int f_M v^7 d^3 v = 384 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{T_e}{m} \right)^{7/2},$$

из уравнения (13.8) получаем

▲

$$\frac{1}{2} \frac{\partial T_e}{\partial z} (384 - 3 \cdot 48) = 48 e E$$

или

$$e E = \frac{5}{2} \frac{\partial T_e}{\partial z} \quad (13.9)$$

Мы предполагали, что плазма находится в равновесии, и в итоге нашли поле E , которое требуется для того, чтобы это условие выполнялось. Как мы сейчас покажем, из соотношения (13.9) следует, что со стороны ионов на электроны действует некоторая сила R_{Te} . Действительно, запишем сумму сил, действующих на электроны:

$$-\frac{\partial p_e}{\partial z} + n e E + R_{Te} = 0.$$

Подставляя сюда величину электрического поля из (13.9) и соотношение $\partial p_e / \partial z = n \partial T_e / \partial z$, находим, что

$$R_{Te} = -\frac{3}{2} n \frac{\partial T_e}{\partial z}.$$

Эта сила действует на электроны со стороны ионов и носит название *термосилы*, поскольку она обусловлена градиентом электронной температуры. В векторных обозначениях выражение для термосилы имеет вид

$$\mathbf{R}_{Te} = -\frac{3}{2}n\nabla T_e. \quad (13.10)$$

Происхождение термосилы связано с нетривиальной зависимостью частоты столкновений электронов с ионами от скорости сталкивающихся частиц. В результате оказывается, что электроны, приходящие в некоторую точку плазмы из более нагретой области, испытывают меньшее торможение об ионы, чем электроны, приходящие из области с меньшей электронной температурой. В результате возникает результирующая сила трения, направленная против градиента температуры. Удивительно то, что термосила не зависит от частоты столкновений. Однако этот парадоксальный результат можно легко объяснить (см. задачу 13.3). В силу закона сохранения импульса противоположная по направлению сила действует на ионы со стороны электронов.

► **Задача 13.1**

Записать уравнение движения ионной «жидкости» с учётом термосилы. Можно ли считать, что ионы действительно покоятся?

Полная сила \mathbf{R} , действующая на электроны со стороны ионов, складывается из термосилы (13.10) и силы трения (см. задачу 13.5), пропорциональной разности средних скоростей ионов и электронов:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_u. \quad (13.11)$$

Кроме термосилы с помощью δf мы можем найти электронный поток тепла:

$$\mathbf{q} = \int \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f d^3v. \quad (13.12)$$

В нашей задаче этот поток направлен вдоль оси z и обусловлен только поправкой δf ,

$$q_z = \int \frac{mv^2}{2} v \cos \vartheta \delta f d^3v.$$

При его вычислении после подстановки δf нам потребуется ещё один стандартный интеграл

$$\int f_M v^9 d^3v = 3840 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{T_e}{m}\right)^{9/2}.$$

В результате получим ▲

$$q_z = -32 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n}{A} \left(\frac{T_e}{m}\right)^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial z}. \quad (13.13)$$

Коэффициент пропорциональности между потоком тепла q_z и градиентом электронной температуры $\partial T_e / \partial z$ (взятый со знаком «минус») называется *коэффициентом электронной теплопроводности* и обозначается через κ ,

$$\kappa = \frac{128}{3\pi} \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e},$$

где время τ_e определено в (16.13).

В векторной записи

$$\mathbf{q}_T = -\kappa \nabla T. \quad (13.14)$$

Здесь индекс T подчеркивает, что вычисленный поток тепла связан с градиентом температуры. Перенос тепла приводит к увеличению энтропии и должен быть учтен в уравнении передачи тепла (10.13) прибавлением дополнительного члена, так как при выводе уравнения (10.13) мы пренебрегали процессами переноса. Хотя это несложно сделать (см. задачу 13.8), на практике часто используют более простое уравнение, которое мы сейчас получим.

Рассмотрим маленький объемчик плазмы ΔV . Очевидно, что внутренняя энергия плазмы, заключенной в нем, равна $\int_{\Delta V} \frac{3}{2} n T dV$. Поскольку в рассматриваемом нами случае плазма покоится, а ток отсутствует, то единственным каналом изменения этой энергии служит теплоперенос через границу объемчика, обусловленный градиентом температуры. Поэтому изменение энергии плазмы в выделенном объемчике за единицу времени равно потоку тепла через границу объема:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \frac{3}{2} n T dV = - \oint \mathbf{q} d\mathbf{S}.$$

Знак минус здесь связан с тем, что вектор $d\mathbf{S}$ направлен по внешней нормали к границе объемчика, так что положительное значение потока тепла $\oint \mathbf{q} d\mathbf{S}$ соответствует убыли внутренней энергии плазмы. Поскольку объемчик покоится, производную d/dt можно внести под знак

интеграла (не дифференцируя пределы интегрирования), при этом она превращается в частную производную $\partial/\partial t$. Правую часть уравнения преобразуем по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\Delta V} dV \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} nT = - \int_{\Delta V} dV \operatorname{div} \mathbf{q}.$$

Так как объемчик можно взять сколь угодно малым (но вмещающим достаточно много частиц), в последнем уравнении должны быть равны не только интегралы, но и подынтегральные выражения. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} nT = \operatorname{div}(\kappa \nabla T).$$

Если плотность постоянна (как в рассматриваемом случае), обе части последнего уравнения можно поделить на n . Получившееся в результате уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \operatorname{div}(\chi \nabla T) \quad (13.15)$$

называют *уравнением теплопроводности*. Входящий сюда коэффициент $\chi = \kappa / (\frac{3}{2}n)$ называют *коэффициентом температуропроводности* в отличие от *коэффициента теплопроводности* κ . По порядку величины

$$\chi \sim v_T^2 / \nu \sim v_T \lambda. \quad (13.16)$$

Уравнение (13.15) известно также под названием *уравнения диффузии*, так как аналогичное уравнение (с другим коэффициентом χ) описывает изменение концентрации мельчайших частиц твердого вещества в жидкости в процессе броуновского движения. Из уравнения теплопроводности следует, что за время t тепло распространяется на расстояние

$$l \sim \sqrt{\chi t}.$$

Литература: [17].

► Задача 13.2

Исходя из выражения (13.7), оценить величину δf и показать, что $\delta f / f_M \sim \lambda / L$, где $\lambda \sim v_{Te} / \nu_e$ — длина свободного пробега, а $L \sim T_e / |\nabla T_e|$ — масштаб, на котором изменяется температура.

► **Задача 13.3**

Показать, что в плазме с градиентом электронной температуры на электроны действует сила трения, даже если поток электронов в среднем равен нулю, и оценить её величину.

▼ 16.10.98

► **Задача 13.4**

Используя метод предыдущей задачи, оценить коэффициент теплопроводности.

▲

► **Задача 13.5**

Вычислить силу трения электронов об ионы R_e при заданной средней скорости u электронов относительно ионов.

► **Задача 13.6**

Вычислить поток тепла, связанный с относительным движением электронов и ионов.

► **Задача 13.7**

(Задача о пьяном пешеходе.) Пьяный пешеход ν раз в единицу времени делает шаг длиной λ . Он движется вдоль прямой дороги, но с равной вероятностью каждый новый шаг может сделать как вперед, так и назад. Оценить, на какое расстояние от начального положения удалится пешеход за время t .

▼ 16.10.98

► **Задача 13.8**

Обобщить уравнение переноса тепла (10.13) на случай, когда имеется градиент температуры (учесть теплопроводность).

▲

► **Задача 13.9**

Для случая $\chi = \text{const}$ найти решение уравнения теплопроводности в безграничной среде с начальным условием $T(t=0) = T_0 \delta(x)$, где $\delta(x)$ — одномерная дельта-функция. Вычислить ширину профиля температуры на половинной высоте.

► **Задача 13.10**

Для степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры $\chi = \beta T^n$ найти закон, по которому обращается в нуль температура вблизи границы области, до которой в данный момент распространилось тепло от некоторого произвольного источника.

► **Задача 13.11**

Рассмотреть перенос импульса ионами в плазме с неоднородным профилем средней скорости $\mathbf{u}_i = e_y u_y(x)$. Оценить силу вязкого сопротивления σ_{xy} , действующую в направлении y на единицу площади поверхности, нормаль к которой ориентирована вдоль оси x . Оценить коэффициент ионной вязкости η , определив его из соотношения $\sigma_{xy} = \eta \frac{du_y}{dx}$.

► **Задача 13.12**

Оценить, во сколько раз электронная теплопроводность больше ионной, а ионная вязкость больше электронной.

Лекция 14

Перенос плазмы в магнитном поле. Коэффициенты диффузии и температуропроводности. Амбиполярная диффузия. Бомовская диффузия. Эффект Холла. Обобщенный закон Ома

Ранее мы обсудили, к чему приводит отклонение функции распределения от максвелловской, а также вычислили коэффициент теплопроводности и термосилу в плазме без магнитного поля. Сейчас мы займемся рассмотрением процессов переноса в *замагниченной* плазме, где ларморовский радиус частиц меньше длины свободного пробега.

Начнем с рассмотрения процесса диффузии поперек магнитного поля. Пусть магнитное поле направлено по оси z ,

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z,$$

и есть градиент плотности, направленный по оси x ,

$$n = n(x).$$

Относительно температуры ионов и электронов будем считать, что они постоянны.

Запишем уравнения движения электронов и ионов в гидродинамическом приближении, причем отбросим в них инерционные члены, поскольку скорость движения, вызываемого диффузией, обычно мала и силы инерции не играют существенной роли:

$$\begin{aligned} -T_e \nabla n - en\mathbf{E} - \frac{en}{c}[\mathbf{u}_e, \mathbf{B}] + \mathbf{R} &= 0, \\ -T_i \nabla n + en\mathbf{E} + \frac{en}{c}[\mathbf{u}_i, \mathbf{B}] - \mathbf{R} &= 0. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Здесь надо сделать замечание относительно силы трения \mathbf{R} . Мы ее вычисляли для плазмы без магнитного поля:

$$\mathbf{R} = m_e \nu_e n (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \tag{14.2}$$

В замагниченной плазме для движений вдоль магнитного поля эта формула сохраняет силу, а для движений перпендикулярно полю в ней меняется только численный коэффициент. Ниже мы будем изучать только движения поперек магнитного поля, поэтому сохраним формулу (14.2) в неизменном виде, включив численный коэффициент в определение частоты столкновений ν_e .

Спроецируем уравнения (14.1) на ось x и учтем, что $R_x = 0$, поскольку, как мы увидим, скорости электронов и ионов в направлении x одинаковы:

$$\begin{aligned} -T_e \frac{dn}{dx} - enE_x - \frac{en}{c} u_{ey} B &= 0, \\ -T_i \frac{dn}{dx} + enE_x + \frac{en}{c} u_{iy} B &= 0. \end{aligned}$$

Складывая, находим:

$$en(u_{iy} - u_{ey}) = \frac{c}{B} \frac{dn}{dx} (T_i + T_e).$$

Следовательно,

$$R_y = \frac{m_e c \nu_e}{eB} (T_i + T_e) \frac{dn}{dx}.$$

Теперь y -компонента любого из уравнений движения (14.1) дает

$$\frac{en}{c} u_x B - enE_y + R_y = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_x &= c \frac{E_y}{B} - \frac{cR_y}{enB} \\ &= c \frac{E_y}{B} - \frac{m_e c^2 \nu_e}{e^2 B^2 n} (T_i + T_e) \frac{dn}{dx}. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое соответствует электрическому дрейфу. Однако обычно $E_y = 0$, так как наличие электрического поля вдоль оси y означало бы, что к плазме приложено напряжение. Полагая $E_y = 0$ и умножая u_x на плотность плазмы, находим диффузионный поток:

$$nu_x = -\nu_e \frac{m_e c^2}{e^2 B^2} (T_i + T_e) \frac{dn}{dx}.$$

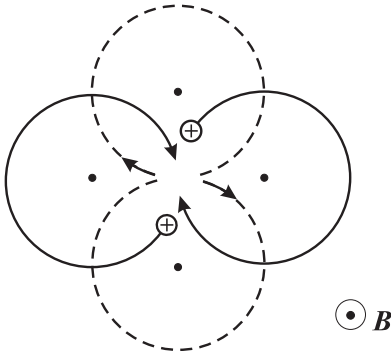


Рис. 14.1. Сдвиг ведущих центров двух тождественных частиц при их столкновении под углом 90°

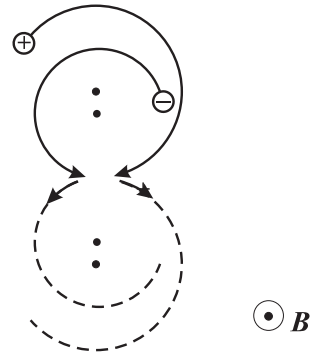


Рис. 14.2. Сдвиг ведущих центров противоположно заряженных частиц при лобовом столкновении

Он одинаков для ионов и электронов, т.е. *диффузия* в рассматриваемой задаче оказалась автоматически *амбиполярной*. Поток электронов равен потоку ионов, как и должно быть для сохранения квазинейтральности. Как видно из приведенного вывода, к выравниванию потоков приводит электрическое поле E_x . Коэффициент диффузии равен

$$D = \frac{v_e(T_i + T_e)}{\Omega_e^2 m_e},$$

где Ω_e — циклотронная частота электронов. По порядку величины $D_e \sim \rho_{He}^2 v_e$, что соответствует простой физической картине: при каждом столкновении с ионом, сопровождающемся рассеянием на угол порядка 90° , электрон смещается случайным образом на расстояние порядка ларморовского радиуса ρ_{He} . Формально оцененный коэффициент диффузии ионов $D_i \sim \rho_{Hi}^2 v_i$ в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз больше, но из-за амбиполярного эффекта истинная скорость диффузии определяется наиболее медленно диффундирующей компонентой, т.е. электронами. При этом нужно подчеркнуть важную особенность — диффузия обусловлена только перекрестными столкновениями электронов с ионами, а столкновения между частицами одного сорта не приводят к диффузии¹.

¹Точнее, поправка к коэффициенту диффузии из-за столкновений частиц с одинаковым отношением e/m существенно меньше вычисленной.

► **Задача 14.1**

Используя рис. 14.1 и 14.2, пояснить, почему столкновения одинаковых частиц не приводят к диффузии. Учтены ли столкновения одинаковых частиц в уравнениях (14.1)?

Теперь обсудим, как магнитное поле влияет на теплопроводность. В плазме без магнитного поля, как показано на предыдущей лекции, ▼ 16.10.98

$$\mathbf{q}_{Te} = -\kappa \nabla T_e, \quad \kappa \sim n v_{Te}^2 / \nu_e \sim n \lambda \nu_{Te}.$$

Здесь $\lambda \sim v_T / \nu$ — длина пробега частиц (примерно одинакова для ионов и электронов). Ионная теплопроводность в $\sqrt{m_i / m_e}$ раз меньше электронной, поэтому вдоль магнитных силовых линий перенос тепла осуществляется, главным образом, электронами, а коэффициент температуропроводности $\chi \sim \kappa / n$ по порядку величины равен $v_T^2 / \nu \sim \lambda^2 \nu$. Такая оценка соответствует простой физической картине явления, которую мы уже обсуждали выше на примере диффузии частиц поперек магнитного поля. Различие состоит только в том, что при каждом «акте» столкновения в плазме без магнитного поля частица смещается на расстояние порядка длины пробега $\lambda = v_T / \nu$, тогда как в плазме с магнитным полем и в направлении поперек магнитного поля смещение происходит на меньшее расстояние порядка ларморовского радиуса. Исходя из этих наблюдений, мы можем легко оценить температуропроводность замагниченной плазмы: ▲

$$\chi_e \sim \rho_{He}^2 \nu_e, \quad \chi_i \sim \rho_{Hi}^2 \nu_i.$$

Ионная теплопроводность поперек магнитного поля больше ионной в $\sqrt{m_i / m_e}$ раз.

Обратим внимание, что коэффициенты поперечного переноса (так для краткости называют коэффициенты D , χ_e , χ_i) обратно пропорциональны квадрату магнитного поля, $D \propto B^{-2}$. Однако долгое время (до начала 60-х годов) в экспериментах не удавалось создать условия, при которых бы реализовывалась эта зависимость. Обобщив результаты экспериментов с газовыми разрядами, выполненных в конце 40-х годов, Бом предложил простую (хотя и не разделяемую всеми физиками) теорию, которая предсказывает следующую зависимость коэффициента диффузии от параметров плазмы:

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{cT}{eB}. \quad (14.3)$$

Позднее стало ясно, что в плазме, где коэффициенты переноса порядка бомовских, обязательно имеются интенсивные колебания (турбулентная плазма), которые значительно увеличивают эффективную частоту рассеяния частиц, так что формула Бома дает верхний предел на величину коэффициентов переноса.

При увеличении частоты рассеяния коэффициенты поперечного переноса в замагниченной плазме увеличиваются пропорционально частоте столкновений. Но так происходит до тех пор, пока v_e или v_i не превысит циклотронную частоту для соответствующей компоненты плазмы, т.е. Ω_e или Ω_i . При дальнейшем увеличении частоты рассеяния длина пробега становится меньше ларморовского радиуса, и мы возвращаемся к случаю незамагниченной плазмы, когда $\chi \sim v_T^2/v$ (здесь надо приписать индексы e и i соответственно для электронов и ионов, а $D \sim \chi_i$). Поскольку в незамагниченной плазме коэффициенты переноса только уменьшаются с ростом частоты столкновений, ясно, что они максимальны при $v \sim \Omega$. Полагая $v \sim \Omega$, находим, что $\chi \sim v_T^2/\Omega \sim \rho_H^2 \Omega \sim cT/eB$. С точностью до коэффициента $1/16$ эта оценка совпадает с формулой Бома.

В завершение лекции займемся вопросом о проводимости плазмы. Мы уже вычисляли проводимость плазмы без магнитного поля:

$$\sigma = \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi v_e} = \frac{ne^2}{mv_e}.$$

В присутствии магнитного поля такая проводимость сохраняется вдоль магнитного поля, так как при $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ магнитное поле не влияет на движение заряженных частиц. Рассмотрим случай, когда поле \mathbf{E} приложено перпендикулярно \mathbf{B} .

Если поле меняется достаточно быстро со временем, то можно считать, что ионы покоятся, $\mathbf{u}_i = 0$, и написать уравнения движения электронов:

$$-en\mathbf{E} - \frac{en}{c}[\mathbf{u}_e, \mathbf{B}] + \mathbf{R} = 0. \quad (14.4)$$

Пусть поле направлено вдоль оси x . Учтем, что $\mathbf{R} = -nm_e v_e \mathbf{u}_e$, $\mathbf{j} = -en\mathbf{u}_e$. Тогда, расписывая последнее уравнение по компонентам, после умножения на $e/m_e v_e$ имеем

$$\begin{aligned} -\sigma E_x + \frac{\Omega_e}{v_e} j_y + j_x &= 0, \\ -\frac{\Omega_e}{v_e} j_x + j_y &= 0, \end{aligned}$$

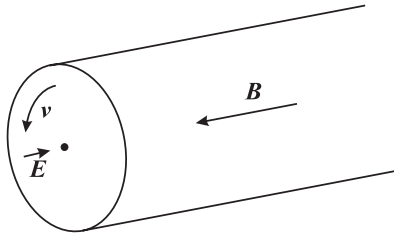


Рис. 14.3. Эффект Холла в цилиндрической плазме

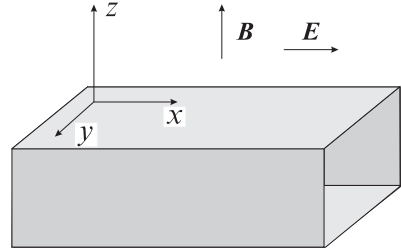


Рис. 14.4. Эффект Холла в плоском слое плазме

Из этих уравнений находим:

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + \frac{\Omega_e^2}{v_e^2}} E_x \equiv \sigma_{xx} E_x,$$

$$j_y = \frac{\frac{\Omega_e}{v_e} \sigma}{1 + \frac{\Omega_e^2}{v_e^2}} E_x \equiv \sigma_{yx} E_x.$$

Отсюда видно, что поле E_x вызывает также ток j_y . Появление в магнитном поле «косого» тока, перпендикулярного как направлению магнитного так и направлению электрического полей составляет суть *эффекта Холла*. В достаточно сильном магнитном поле $\Omega_e \gg v_e$. Поэтому $\sigma_{xx} \propto B^{-2}$, а $\sigma_{yx} \propto B^{-1}$.

Теперь рассмотрим случай стационарного электрического поля. Результат сильно зависит от наличия границ плазмы. Ионы теперь нельзя считать покоящимися. Пусть, к примеру, плазма имеет форму цилиндра (рис. 14.3), а поле направлено по радиусу, $\mathbf{E} = E e_r$. Тогда в пренебрежении инерцией произойдет следующее. Плазма раскрутится и начнет вращаться со скоростью

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}, \mathbf{B}],$$

так что электрическая сила будет уравновешена силой Лоренца. Поскольку $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i$, то $\mathbf{R} = 0$ и $\mathbf{j} = 0$. Отсутствие тока при наличии электрического поля означает, что плазма фактически оказывается непроводящим диэлектриком. Вычислим диэлектрическую проницаемость плазмы ϵ , исходя из того, что плотность энергии в диэлектрике w равна $\epsilon E^2 / 8\pi$. Это с одной стороны, а с другой, энергия складывается из

энергии электрического поля и кинетической энергии частиц плазмы:

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{E^2}{8\pi} + n \frac{m_i u_i^2}{2} = \\
 &= \frac{E^2}{8\pi} + \frac{m_i n c^2 E^2}{2B^2} = \\
 &= \frac{E^2}{8\pi} \left(1 + \frac{4\pi\rho c^2}{B^2} \right) = \frac{E^2}{8\pi} \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right) = .
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varepsilon = 1 + \frac{c^2}{v_A^2},$$

где мы ввели обозначение $v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ для так называемой *альфвеновской скорости*.

Наконец, если имеется ограниченная область плазмы в виде плоского плазменного канала (рис. 14.4), то движение вдоль оси y невозможно (возникнет градиент плотности по y , который обратит v_y в нуль). Тогда из уравнения

$$-enE_x + m_e n_e (u_{ix} - u_{ix}) = 0$$

находим

$$j_x = \sigma E_x,$$

где по-прежнему $\sigma = ne^2/m_e \nu_e$, $j_x = en(u_{ix} - u_{ex})$. Магнитное поле, как оказывается, не влияет на ток.

В рамках одножидкостной магнитной гидродинамики на основе уравнения (14.4) записывают *обобщенный закон Ома*. Если учесть, что $\mathbf{u}_e = \mathbf{V} - \mathbf{j}/en$ (в обозначениях из лекции №10), а $\mathbf{R} = nm_e \nu_e \mathbf{j}/en$, из (14.4) получим

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{1}{enc}[\mathbf{j}, \mathbf{B}]. \quad (14.5)$$

Последнее слагаемое в правой части соответствует эффекту Холла. При изучении быстрых движений плазмы, когда скорость относительного движения компонент плазмы \mathbf{j}/en мала по сравнению со скоростью плазмы \mathbf{V} эффектом Холла можно пренебречь:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}.$$

Ещё более простую форму закон Ома принимает в приближении идеально проводящей плазмы, когда формально можно считать, что $\sigma \rightarrow \infty$. В этом случае $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{V}, \mathbf{B}]$.

Литература: [9, гл.3, §3.4]; [17, §3], [3, гл. 5].

► **Задача 14.2**

Предполагая, что турбулентность неизбежна, оценить, каким должен быть радиус плазмы с температурой $T = 10$ кэВ, помещенной в магнитное поле $B = 5$ Тл, чтобы время её удержания не было меньше 1 сек.

► **Задача 14.3**

Может ли коэффициент диффузии быть больше боровского?

► **Задача 14.4**

Используя метод, развитый в задаче 13.3, показать, что при наличии градиента температуры ∇T , перпендикулярного магнитному полю \mathbf{B} , возникает термосила, перпендикулярная как ∇T , так и \mathbf{B} , т.е. $\mathbf{R}_{Te} = -\Delta n_e[\mathbf{h}, \nabla T_e]$. Оценить коэффициент \mathbb{A} .

► **Задача 14.5**

Продолжая предыдущую задачу, показать, что при наличии градиента температуры ∇T , перпендикулярного магнитному полю \mathbf{B} , возникает поток тепла в направлении, противоположном ∇T . Оценить, во сколько раз соответствующий коэффициент теплопроводности меньше, чем коэффициент теплопроводности вдоль магнитного поля (последний равен коэффициенту теплопроводности незамагниченной плазмы).

► **Задача 14.6**

Продолжая предыдущую задачу, показать, что при наличии градиента температуры ∇T , перпендикулярного магнитному полю \mathbf{B} , возникает «косой» поток тепла в направлении $[\mathbf{h}, \nabla T_e]$. Оценить, во сколько раз соответствующий коэффициент теплопроводности меньше, чем коэффициент теплопроводности вдоль магнитного поля.

► **Задача 14.7**

Записать тензор проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ плазмы в магнитном поле, исходя из его определения $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$ и результатов вычисления тока в плазме с учетом эффекта Холла.

► **Задача 14.8**

Вывести обобщенный закон Ома, исходя из уравнения (14.4), дополненного градиентом электронного давления ∇p_e и термосилой.

Лекция 15

Излучение из плазмы: тормозное, рекомбинационное, циклотронное. Пробег излучения

Излучение является одним из основных каналов потерь энергии из плазмы. Спектр излучения слабоионизованной плазмы является линейчатым: в нём доминируют линии излучения неионизованных атомов и недиссоциировавших молекул. По мере увеличения температуры плазмы степень ионизации увеличивается, а интенсивность линейчатого излучения ослабевает. Полностью ионизованная плазма излучает в сплошном спектре. Мы рассмотрим два основных типа излучения со сплошным спектром: тормозное и рекомбинационное. Тормозное излучение возникает при рассеянии заряженных частиц друг на друге. Напомним, что рассеянием называется столкновение частиц, при котором число и состав взаимодействующих частиц не меняются в процессе столкновения. Рекомбинационное излучение сопровождает процесс рекомбинации, когда в результате столкновения электрона с ионом образуется нейтральный атом или степень ионизации многозарядного иона понижается.

Оценим мощность излучения при столкновении электрона с ионом, имеющим заряд Ze . Так как тепловая скорость электронов обычно значительно больше тепловой скорости ионов, ион можно считать неподвижным. Для начала предположим, что искривлением траектории электрона можно пренебречь (рис. 15.1), так как он пролетает на достаточно большом расстоянии от иона:

$$\rho \gg 2Ze^2/m_e v^2. \quad (15.1)$$

Тогда ускорение электрона в поле иона равно

$$w = \frac{Ze^2/m_e}{\rho^2 + v^2 t^2}.$$

Смысл используемых обозначений объяснён в лекции 4. Энергия, из-

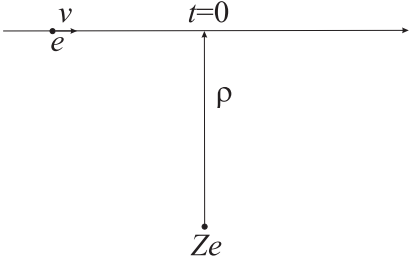


Рис. 15.1. Излучение при далёких пролётах

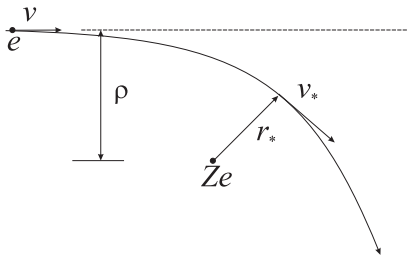


Рис. 15.2. Излучение при близких пролётах

лучаемая электроном в единицу времени, вычисляется по формуле дипольного излучения:

$$J = \frac{2}{3} \frac{e^2 w^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6 / m_e^2 c^3}{(\rho^2 + v^2 t^2)^2}.$$

Из-за большой массы иона его излучением можно пренебречь, поэтому полная энергия, излученная за время пролёта, равна

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt J = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^2} \\ &= \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v \rho^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v \rho^3}. \end{aligned}$$

▼ 16.10.98

Однородный поток электронов с плотностью n_e , налетающих на ион со скоростью v , в единицу времени энергию

$$P_1 = \int 2\pi \rho d\rho \cdot n_e v \cdot \Delta \mathcal{E} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e}{m_e^2 c^3} \int \frac{d\rho}{\rho^2}. \quad (15.2)$$

Так как P_1 не зависит от скорости налетающих электронов, более строгий кинетический расчет, учитывающий различие скоростей электронов, привёл бы к тому же результату (15.2). ▲

Интеграл в формуле (15.2) расходится на нижнем пределе, но эта расходимость формальная, так как ясно, что электрон не может излучить энергию больше его кинетической энергии $m_e v^2/2$. На первый взгляд может показаться, что причиной расходимости является

использованное нами приближение далёких пролётов, когда траектория электрона считается прямолинейной. Однако мы увидим, что ещё более сильная расходимость возникает, если учесть искривление его траектории. Истинную причину возникших трудностей вскрывает квантовая теория. Согласно её постулатам, прицельное расстояние ρ определено с точностью порядка длины волны де-Бройля λ_B . Действительно, механический момент электрона (относительно иона) $m_e v \rho$ не может быть меньше кванта \hbar (если электрон не находится в связанном состоянии на атомарной орбите), поэтому

$$\rho \geq \hbar / m_e v = \lambda_B. \quad (15.3)$$

Правильный по порядку величины результат можно получить, «обрезав» интегрирование в (15.2) на нижнем пределе на значении прицельного параметра $\rho = \lambda_B$:

▼ 16.10.98

$$P_1 \sim \frac{Z^2 e^6 n_e}{m_e^2 c^3 \lambda_B}. \quad (15.4)$$

Приближение далёких пролётов (15.1) совместимо с неравенством (15.3) при условии ▲

$$\frac{\hbar v}{Ze^2} > 1.$$

Оно соответствует случаю, когда энергия электронов больше энергии ионизации:

$$\frac{m_e v^2}{2} > \frac{m_e e^4}{2 \hbar^2} Z^2 = 13,6 \text{ эВ} Z^2. \quad (15.5)$$

▼ 16.10.98

Мощность, которая излучается из единицы объёма, получается умножением P_1 на число ионов n_i в единице объёма плазмы: ▲

$$P \sim \frac{Z^2 e^6 n_e n_i v}{m_e^2 c^3 \hbar}. \quad (15.6)$$

Частоту излучения легко оценить с помощью следующих рассуждений. Пролетая на расстоянии ρ , электрон излучает импульс длиной ρ/v ; соответственно частота излучения ω приблизительно равна v/ρ . Подставляя $\rho \sim \lambda_B \sim \hbar/m_e v$, приходим к выводу, что энергия фотона $\hbar\omega$ порядка кинетической энергии электрона:

$$\hbar\omega \sim m_e v^2 \sim T_e.$$

Точная теория предсказывает, что в плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям максимум спектра излучения соответствует фотонам с энергией примерно $2T_e$.

► **Задача 15.1**

Оценить число фотонов, излученных в единицу времени из единицы объема.

Так как при излучении электрон теряет почти всю свою кинетическую энергию, он может захватиться на атомарную орбиту. Однако для электрона с энергией значительно большей энергии ионизации вероятность рекомбинации мала. Действительно, чтобы оказаться захваченным на n -ый уровень, электрон должен излучить фотон с энергией

$$\frac{m_e v^2}{2} + \frac{m_e e^4 Z^2}{2 \hbar^2 n^2} \leq \hbar \omega \leq \frac{m_e v^2}{2} + \frac{m_e e^4 Z^2}{2 \hbar^2 (n-1)^2}. \quad (15.7)$$

Учитывая, что $\omega \sim v/\rho$, отсюда находим интервал значений прицельного параметра, соответствующих рекомбинации. При условии (15.5) среднее значение ρ в этом интервале определяется величиной кинетической энергии электрона

$$\frac{\hbar v}{\rho} \sim \frac{m_e v^2}{2}$$

и примерно равно длине волны де Бройля λ_B . Ширина интервала $\Delta\rho$ определяется разностью уровней энергии связанного электрона в атоме:

$$\frac{\hbar v}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{m_e e^4 Z^2}{2 \hbar^2 n^3}.$$

Следовательно, мощность рекомбинационного излучения составляет долю порядка $\Delta\rho/\rho \sim e^4 Z^2 / \hbar^2 v^2$ от полной мощности излучения (15.6), причем рекомбинация сопровождается в основном захватом электрона на основной уровень $n = 1$. Эта доля мала в высокотемпературной плазме, где для большинства электронов выполнено условие (15.5). Таким образом, в высокотемпературной плазме излучение является преимущественно тормозным. Проведя усреднение в формуле (15.6) по функции распределения электронов (которое соответствует замене скорости v на тепловую скорость $v_{Te} \sim \sqrt{T_e/m_e}$) легко найти мощность тормозного излучения

$$P_{\text{торм}} = \mathbb{A} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i T_e^{1/2}}{m_e^{3/2} c^3 \hbar}. \quad (15.8)$$

Точный расчёт даёт значение численного коэффициента в этой формуле $\mathbb{A} = 7,7$. Практическая формула имеет вид

▼ 16.10.98

$$P_{\text{торм}} = 1,69 \cdot 10^{-25} Z^2 n_e n_i \sqrt{T_e [\text{эВ}]} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{сек}}. \quad (15.9)$$

Тормозное излучение может быть использовано для *диагностики плазмы*, а именно для измерения температуры и плотности. Температура электронов определяется из анализа спектра, а плотность плазмы — из измерения мощности излучения. ▲

Тормозное излучение вследствие электрон-электронных столкновений мало, так как при столкновении одинаковых частиц дипольное излучение отсутствует, а мощность излучения в следующих порядках мультипольного разложения быстро уменьшается по мере увеличения порядка мультипольности.

► **Задача 15.2**

Доказать, что при столкновении частиц с одинаковым отношением величины заряда к массе, мощность дипольного излучения равна нулю.

► **Задача 15.3**

Оценить мощность квадрупольного тормозного излучения при электрон-электронных столкновениях и сравнить её с мощностью тормозного излучения при электрон-ионных столкновениях.

Оценку мощности рекомбинационного излучения получим, умножив (15.6) на $e^4 Z^2 / \hbar^2 v^2$ и заменив v на v_{Te} :

▼ 16.10.98

$$P_{\text{рек}} \sim \frac{Z^4 e^{10} n_e n_i}{m_e c^3 v_{Te} \hbar^3}. \quad (15.10)$$

Практическая формула с правильным численным коэффициентом имеет вид ▲

$$P_{\text{рек}} = 5 \cdot 10^{-24} Z^4 n_e n_i / \sqrt{T_e [\text{эВ}]} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{сек}}. \quad (15.11)$$

Вследствие сильной зависимости от Z рекомбинационное излучение существенно возрастает при загрязнении плазмы тяжёлыми примесями.

Рассмотрим теперь случай

$$\frac{m_e v^2}{2} < \frac{m_e e^4}{2 \hbar^2} Z^2, \quad (15.12)$$

обратный неравенству (15.5), когда в процессе излучения главную роль играют близкие столкновения с заметным искривлением траектории электрона (см. рис. 15.2).

Обозначим через r_* расстояние между электроном и ионом в момент наибольшего сближения. В этот момент скорость электрона достигает своего максимального значения v_* . Энергию, излученную при пролете, можно оценить, умножив мощность излучения в момент максимального сближения

$$J \sim \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 r_*^4}$$

на его длительность r_*/v_* :

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v_* r_*^3}. \quad (15.13)$$

Параметры v_* и r_* выразим через скорость электрона «на бесконечности» v и прицельное расстояние ρ , воспользовавшись законами сохранения энергии и момента импульса:

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{m_e v_*^2}{2} - \frac{Z e^2}{r_*}, \quad (15.14)$$

$$m_e v \rho = m_e v_* r_*. \quad (15.15)$$

Предположив, что $v_* \gg v$ (иначе мы вернемся к приближению прямой траектории), из уравнения (15.14) выразим $v_* \simeq \sqrt{2Ze^2/m_e r_*}$ через r_* . Подставив это соотношение в уравнение (15.15), находим расстояние минимального сближения

$$r_* = \rho \left(\frac{2Ze^2}{m_e v^2 \rho} \right)^{-1},$$

а затем и максимальную скорость

$$v_* = v \left(\frac{2Ze^2}{m_e v^2 \rho} \right).$$

Входящий в эти формулы параметр $2Ze^2/m_e v^2 \rho$ следует считать большим, $2Ze^2/m_e v^2 \rho \gg 1$. Подставив r_* и v_* в (15.13), выразим $\Delta \mathcal{E}$ через ρ и v :

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3 v \rho^3} \left(\frac{2Ze^2}{m_e v^2 \rho} \right)^2. \quad (15.16)$$

Если плотность электронов n_e , а их скорость v , то на одном ионе в единицу времени будет излучаться энергия

▼ 16.10.98

$$P_1 = \int 2\pi\rho d\rho \cdot n_e v \cdot \Delta E \sim \frac{Z^2 e^6 n_e}{m_e^2 c^3 v} \int \frac{d\rho}{\rho^2} \left(\frac{2Ze^2}{m_e v^2 \rho} \right)^2. \quad (15.17)$$

Обрезав интегрирование на нижнем пределе на прицельном расстоянии ρ порядка λ_B и умножив результат на n_i , получим оценку, совпадающую с оценкой мощности рекомбинационного излучения из единицы объёма (15.10). Это совпадение не случайно, так как в низкотемпературной плазме, где энергия большинства электронов меньше энергии ионизации, т.е. удовлетворяет условию (15.12), излучение со сплошным спектром по преимуществу является рекомбинационным. Действительно, кинетическая энергия налетающего электрона значительно меньше энергии ионизации, тогда как энергия, уносимая фотоном, примерно равна ей, поскольку

$$\hbar\omega \sim \frac{\hbar v_*}{r_*} \sim \frac{\hbar v}{\lambda_B} \left(\frac{Ze^2}{m_e v^2 \lambda_B} \right)^2 \sim \frac{m_e e^4 Z^2}{\hbar^2}.$$

Тормозному излучению соответствуют фотоны с энергией $\hbar\omega \leq m_e v^2/2$. Приравнявая $m_e v^2/2$ и $\hbar v_*/r_* \sim (\hbar v/\rho)(Ze^2/m_e v^2 \rho)^2$, найдём прицельное расстояние для тормозного излучения:

$$\rho \sim \lambda_B \left(\frac{Z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} \right)^{1/3}.$$

Обрезав интеграл в (15.17) на этом расстоянии, можно оценить мощность тормозного излучения. Она совпадает с оценкой (15.8). Таким образом, оценки мощности тормозного и рекомбинационного излучения, полученные в приближении далёких пролетов, верны в общем случае.

Прежде чем отождествлять вычисленную мощность, излученную из единицы объёма плазмы, с потерями энергии, надо убедиться, что излученные фотоны покидают плазму, а не поглощаются в ней. Процесс тормозного поглощения является обратным по отношению к тормозному поглощению: фотон сталкивается со свободным электроном, когда тот находится вблизи иона (тройное столкновение) и поглощается электроном.

Вычислим длину, на которой поглощается электромагнитная волна в плазме. Это можно сделать на языке классической физики. Пусть

амплитуда волны равна E , а её частота ω . Электроны колеблются в поле такой волны со скоростью

$$v = \frac{eE}{m_e\omega}.$$

Их кинетическая энергия в единице объёма равна

$$n_e \frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{n_e e^2 E^2}{m_e \omega^2} = \frac{E^2}{8\pi} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (15.18)$$

За счёт столкновений с ионами направленное движение электронов изотропизируется, а их энергия (15.18) превращается в тепло, причём скорость диссипации энергии пропорциональна частоте электрон-ионных столкновений v_{ei} . Учитывая, что поток энергии в волне равен¹ $cE^2/8\pi$, и выбирая ось x в направлении распространения волны, получим уравнение

$$\frac{d}{dx} c \frac{E^2}{8\pi} = -v_{ei} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E^2}{8\pi}.$$

Его решением является экспоненциально убывающая функция

$$\frac{E^2}{8\pi} = \frac{E_0^2}{8\pi} e^{-x/\ell},$$

где

$$\ell = \frac{c}{v_{ei}} \frac{\omega^2}{\omega_p^2}$$

есть искомая длина пробега излучения. Подставляя сюда формулу

$$v_{ei} = n_i v \sigma_{\text{Тр}},$$

следует учесть, что формула (4.9) для транспортного сечения $\sigma_{\text{Тр}} = \blacktriangledown 16.10.98$ $4\pi\Lambda Z_1^2 Z_2^2 e^4 / m^2 v^4$ относится к случаю далеких пролетов, когда прицельный параметр ρ порядка дебаевского радиуса r_D . При далеких пролетах излучаются или поглощаются электромагнитные волны с низкой частотой, $\omega \sim v/\rho \ll T/\hbar$. Фотоны с энергией $\hbar\omega \sim T_e$ поглощаются при близких пролетах. Соответствующее сечение примерно в Λ раз меньше. Полагая, что $v \sim v_{Te}$ и $\hbar\omega \sim T_e$, получаем \blacktriangle

¹Мы предполагаем, что $\omega \gg \omega_p$; электромагнитные волны с частотой ниже плазменной не могут распространяться в плазме без магнитного поля.

$$\ell \sim \frac{cm_e^{3/2} T_e^{7/2}}{n_e n_i Z^2 e^6 \hbar^2}. \quad (15.19)$$

Точные вычисления дают

$$\ell = 2,5 \cdot 10^{37} \frac{(T_e[\text{эВ}])^{7/2}}{n_e[\text{см}^{-3}] n_i[\text{см}^{-3}] Z^2} \text{см}. \quad (15.20)$$

Длина пробега излучения даже в сравнительно плотной и холодной плазме очень велика. Например, для водородной плазмы с $T_e = 10$ эВ, $n_e = n_i = 10^{15} \text{см}^{-3}$ имеем $\ell = 8 \cdot 10^{10} \text{см}$. Поэтому лабораторная плазма прозрачна для излучения. Непрозрачны для излучения ядра звёзд.

Пусть L — характерный линейный размер излучающего тела. Обозначим через S мощность излучения, отнесённую к единице поверхности и установив зависимость S от L . При $L \ll \ell$ мощность S пропорциональна размеру тела L :

$$S \sim \frac{PL^3}{L^2} \sim PL.$$

При $L \gg \ell$ излучение выходит только из поверхностного слоя толщины порядка ℓ :

$$S \sim P\ell.$$

Если подставить в качестве P мощность тормозного излучения, то получим:

$$S \sim \frac{T^4}{c^2 \hbar^3}.$$

С точностью до численного коэффициента этот результат совпадает с законом Стефана-Больцмана, согласно которому поток мощности излучения абсолютно чёрного тела равен

$$S = \frac{\pi^2}{60} \frac{T^4}{c^2 \hbar^3}.$$

Реальная картина излучения усложняется конкуренцией между излучением с непрерывным спектром и излучением в дискретных линиях испускания атомов и молекул, а также убыванием температуры к поверхности излучающего тела из-за радиационного остывания.

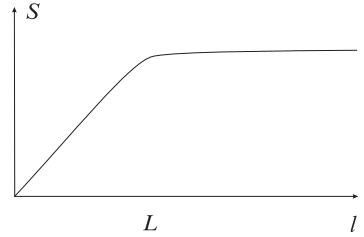


Рис. 15.3. Мощность излучения на единицу поверхности излучающего тела

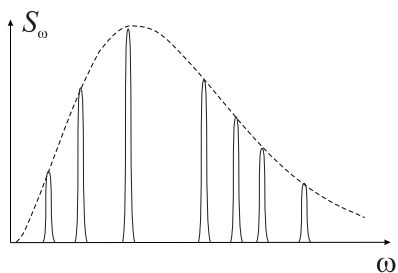


Рис. 15.4. Спектр излучения нагретого тела, совершенно прозрачного в непрерывном спектре, но непрозрачного в линиях. Пунктирная линия соответствует планковскому спектру излучения черного тела при данной температуре

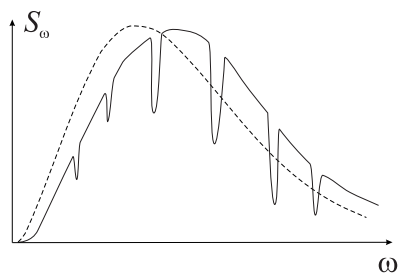


Рис. 15.5. Спектр излучения тела с температурой, уменьшающейся к поверхности. Малые частоты поглощаются сильнее, чем большие. Пунктиром показан планковский спектр, отвечающий средней эффективной температуре излучения. В спектре вырезаны линии селективного поглощения. Поток излучения в центрах линий равен планковскому потоку, отвечающему температуре поверхности

Обычно в линейчатом спектре сосредоточена лишь малая доля мощности излучения, поэтому распределение температуры в излучающем слое зависит, главным образом, от характеристик непрерывного спектра. Длина пробега линейчатого излучения обычно значительно меньше, чем вычисленная выше длина пробега излучения в непрерывном спектре. В результате этого тело, прозрачное в непрерывном спектре, испускает линейчатый спектр (см. рис. 15.4). Напротив, в спектре излучения непрозрачного тела имеются линии поглощения (см. рис. 15.5), так как линейчатое излучение выходит только из тонкого приповерхностного слоя, где температура тела ниже, чем в глубине тела, где формируется излучение с непрерывным спектром.

В заключение этой лекции обсудим роль *циклотронного излучения*. Оно возникает, если в плазме имеется магнитное поле. Электроны, вращающиеся по ларморовскому кружку, излучают гармоники циклотронной частоты:

$$\omega = l\Omega_e = l \frac{eB}{m_e c}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Легко подсчитать полную интенсивность излучения в дипольном приближении. Так как $w = \Omega_e v_{\perp}$, из формулы дипольного излучения получаем

$$P_{\text{цикл}} = \frac{2e^2}{3c^3} (\Omega_e v_{\perp})^2 n_e = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2 T_e n_e}{m_e c^5}.$$

Мощность циклотронного излучения может быть очень значительной для термоядерной плазмы. Формально она может быть больше мощности, выделяемой в термоядерных реакциях (см. лекцию 16). Однако в плотной плазме первые гармоники ($l = 1, 2, 3$) сильно поглощаются и не выходят из неё. В результате излучаются только более высокие гармоники, а их интенсивность на два порядка меньше, чем по нашей оценке. Кроме того, циклотронное излучение относительно длинноволновое. Воспользовавшись практической формулой

$$\Omega_e = 1,8 \cdot 10^7 B [\text{Гс}] \text{сек}^{-1},$$

легко подсчитать, что $\Omega_e = 9 \cdot 10^{11} \text{сек}^{-1}$ при $B = 50 \text{кГс}$, а длина волны равна $\lambda = 2\pi c / \Omega_e = 2 \text{см}$. Такое излучение (в отличие от тормозного) хорошо отражается металлическими стенками и может быть возвращено в плазму.

Литература: [1, §1.8], [7, гл.V, §1–4], [8, §6,7], [9, §7.8].

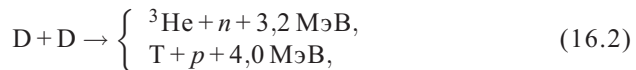
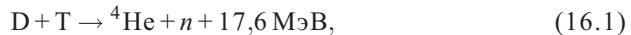
► **Задача 15.4**

Оценить длину пробега циклотронного излучения.

Лекция 16

Ядерные реакции синтеза. Кулоновский барьер. Критерий Лоусона

Началом современной физики плазмы принято считать 1952 г., когда была выдвинута идея создания термоядерного реактора, в котором должны быть осуществлены управляемые реакции синтеза, протекающие при взрыве водородной бомбы. Главными реакциями синтеза с участием изотопов легких атомов являются следующие:



причём вероятность двух каналов реакции $D + D$ примерно одинакова. Такие же или аналогичные реакции синтеза осуществляются в звездах. Здесь D обозначает дейтерий, т.е. изотоп водорода ${}^2\text{H}$ с атомным весом 2, ядро которого помимо протона p содержит ещё «лишний» нейтрон n . Как и основной изотоп водорода H , дейтерий стабилен. Он содержится в обычной воде в виде молекул тяжелой воды D_2O . Хотя на 6500 молекул H_2O приходится всего одна молекула D_2O , энергия, которую можно извлечь из литра морской воды, если выделить весь дейтерий и «сжечь» его в термоядерном реакторе, в 300 раз больше теплотворной способности литра бензина. Так что запасы энергии дейтерия на Земле практически бесконечны, даже если сопоставлять их с энергией, использованной человеческой цивилизацией за все время ее существования. Тритий T , являющийся третьим изотопом водорода ${}^3\text{H}$, радиоактивен. Его период полураспада 12,4 года. Поэтому его запасы отсутствуют. Тритий производят, облучая литий быстрыми нейтронами:



Образовавшийся медленный нейтрон может прореагировать с другим природным изотопом лития:



В результате получается положительный выход энергии (примерно 2,5 МэВ), а на один быстрый нейтрон выходит более одного тритона. Заметим, что энергия в реакциях синтеза выделяется в виде кинетической энергии продуктов реакций. Так например, в реакции (16.1) α -частица (т.е. ${}^4\text{He}$) уносит энергию 3,5 МэВ, а нейтрон — 14,1 МэВ.

Реакции (16.2) и (16.1) в конечном итоге ведут к появлению радиоактивных продуктов, которые образуются во вторичных реакциях с участием термоядерных нейтронов в стенках реактора. Этого недостатка лишена реакция синтеза дейтерия с легким изотопом гелия ${}^3\text{He}$:



На Земле ${}^3\text{He}$ практически отсутствует, однако он обнаружен на поверхности Луны. Если термоядерная энергетика когда-нибудь станет реальностью, вероятно, она будет основана именно на реакции (16.4).

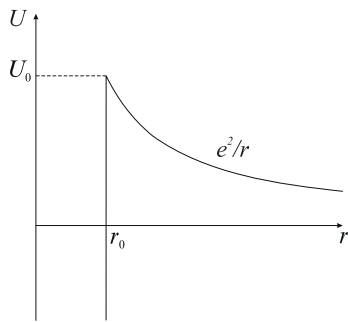


Рис. 16.1. Кулоновский барьер
ше высоты кулоновского барьера:

Проблемы на пути достижения Управляемой Термоядерной Реакции (сокращенно: УТС) не исчерпываются одной только геологией (или лунологией). Для того чтобы реакция слияния двух ядер осуществилась, нужно ядра сблизить на расстояние порядка $r_0 \simeq 10^{-13}$ см, на котором начинают действовать ядерные силы. На больших расстояниях действуют силы кулоновского отталкивания. Для преодоления кулоновского барьера (см. рис. 16.1) сталкивающиеся ядра должны иметь кинетическую энергию больше

$$U_0 = \frac{e^2}{r_0} \sim 1 \text{ МэВ}.$$

На самом деле даже в ядрах звёзд температура плазмы значительно меньше этой величины, тем не менее реакции синтеза идут. Дело в том, что реакция синтеза оказывается возможной при любой энергии

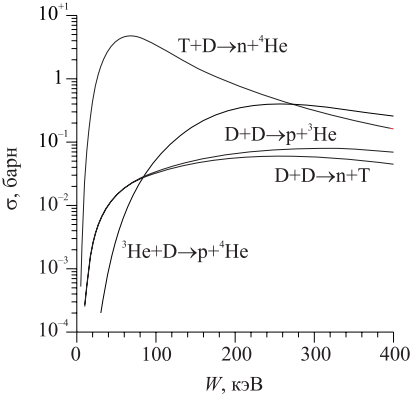


Рис. 16.2. Сечение реакций синтеза

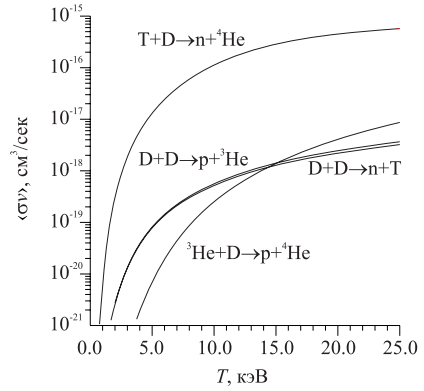


Рис. 16.3. Скорость реакций синтеза

сталкивающихся ядер из-за квантового эффекта подбарьерного перехода. Впрочем, сечение реакции экспоненциально мало, если энергия \mathcal{E} мала по сравнению с U_0 . Оно пропорционально $\mathcal{E}^{-1} \exp(-\text{const}/\sqrt{\mathcal{E}})$.

Важным является факт, что при энергии \mathcal{E} до 10 кэВ сечение σ_{DT} реакции $D + T$ примерно на два порядка больше сечения реакции $D + D$. Для $D + T$ реакции максимум сечения приходится на энергию тритона $\mathcal{E} \simeq 100$ кэВ (в пересчете на случай, когда дейтрон покоится). Максимум сечения $\sigma_{DT\text{max}} \simeq 5 \text{ барн} = 5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ также существенно больше значения $\pi r_0^2 \sim 3 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2$, которое можно было бы ожидать из простой оценки по величине радиуса действия r_0 ядерных сил. Такая аномалия связана с тем, что реакция $D + T$ носит резонансный характер, и слияние ядер происходит через образование долгоживущего «кластера».

Зная сечение реакции, нетрудно вычислить число реакций g в единице объёма в единицу времени. Для равнокомпонентной смеси D и T , $n_D = n_T = \frac{1}{2}n$, оно равно

$$g = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma_{DT} v \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по функции распределения дейтронов и тритонов, а $v = |v_T - v_D|$ — относительная скорость реагирующих частиц. Так как при энергии \mathcal{E} в несколько килоэлектронвольт сечение есть сильно растущая функция \mathcal{E} , основной вклад в среднее $\langle \sigma_{DT} v \rangle$ вносят надтепловые частицы с энергией в несколько раз превышающей температуру T (в случае максвелловской функции

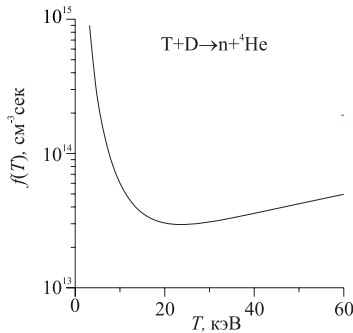
распределения).

Получим условие положительного выхода термоядерной реакции. Термином *положительный выход* характеризуют ситуацию, когда мощность, выделяемая в термоядерной реакции, превышает потери энергии из плазмы.

Если бы частицы удалось удерживать достаточно долго, чтобы они смогли все прореагировать, то единственным неустранимым каналом потерь энергии было бы тормозное излучение. Чтобы не допустить остывания плазмы, мощность, равную мощности тормозных потерь $P_{\text{торм}}$, пришлось бы подводить извне. Поскольку $P_{\text{торм}} \propto n^2$, то отношение $P_{\text{яд}}/P_{\text{торм}}$ является функцией только температуры. Условие

$$P_{\text{яд}}/P_{\text{торм}} > 1$$

выполняется при $T > 3$ кэВ (а при $T = 10$ кэВ это отношение равно 60). Однако реально невозможно избавиться от потерь частиц.



Введем время жизни частицы в плазме τ . Тогда за единицу времени из единицы объёма уносится мощность, равная $3nT/\tau$ ($\frac{3}{2}T$ выносит ион и столько же электрон). Условие положительного выхода

$$P_{\text{яд}} = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma_{\text{DT}} v \rangle \mathcal{E}_{\text{DT}} > \frac{3nT}{\tau},$$

(где $\mathcal{E}_{\text{DT}} = 17,6$ МэВ) даёт

Рис. 16.4. График функции (16.5)

$$n\tau > \frac{12T}{\langle \sigma_{\text{DT}} v \rangle \mathcal{E}_{\text{DT}}} \equiv f(T). \quad (16.5)$$

Функция $f(T)$ имеет минимум, так как при малых T быстро уменьшается $\langle \sigma_{\text{DT}} v \rangle$, а при больших T растёт числитель (см. рис. 16.4). Как видно из графика функции $f(T)$ (см. рис. 16.4), её минимальное значение $f_{\text{min}} = 3 \cdot 10^{13}$ сек/см³ достигается при температуре $T_{\text{min}} = 23,6$ кэВ. Это очень высокая температура. С практической точки зрения снижение температуры плазмы в 2–3 раза может иметь очень важное значение. Поэтому считается, что выгодно уменьшить T , несмотря на то, что при этом возрастёт $n\tau$. Обычно в качестве ориентира выбирают температуру

$$\boxed{T = 10 \text{ кэВ}}, \quad (16.6)$$

при которой $f = 10^{14}$ сек/см³. Тогда условие (16.5) приводится к неравенству

$$\boxed{n\tau > 10^{14} \text{ сек/см}^3}, \quad (16.7)$$

которое в совокупности с (16.6) называется *критерием Лоусона*.

Нужно понимать условность проведенных расчетов. С одной стороны, мы пренебрегали к.п.д. термоядерной электростанции, считая, что вся выделившаяся в реакторе термоядерная энергия переходит в полезную. С другой стороны, мы считали, что $3nT/\tau$ теряется безвозвратно, тогда как часть её может быть рекуперирована. Отметим также, что если энергия теряется из плазмы быстрее чем, частицы, то в критерии Лоусона должно стоять время удержания энергии τ_E . Наконец, помимо критерия Лоусона, есть ещё одно важное понятие — *зажигание термоядерной реакции*. Зажигание наступает, когда выделяемая в плазме энергия α -частиц (если иметь в виду D + T реакцию) компенсирует утечку тепла из плазмы. Тогда реакция синтеза может идти без применения внешних источников нагрева плазмы — нужно только обеспечить удаление «остывших» продуктов реакции синтеза и замещение израсходованного «горючего» материала.

Начиная изучение физики плазмы, мы отмечали (см. первую лекцию), что её становление как науки в значительной степени было связано с проблемой осуществления управляемой термоядерной реакции. Строго говоря, эта задача не решена до сих пор, и большинство исследований в физике плазмы до сих пор связано с разработкой промышленного термоядерного реактора. О масштабах проводимых исследований некоторое представление дает рис. 16.5, где изображена схема крупнейшего токамака JET, сооруженного в 80-х гг. объединением европейских стран. Теоретические основы токамаков были разработаны в 1951 г. Е.И. Таммом и А.Д. Сахаровым, правда, свое изобретение они называли по-иному, и лишь несколько лет спустя И.Н. Головин придумал ему название ТОКАМАК как сокращение от слов Тороидальная камера с магнитной катушкой. Всего было предложено около десятка различных схем удержания и нагрева плазмы, причем не исключено, что главное изобретение на этом пути всё еще впереди. Лидирующим направлением в настоящее время является токамак. Первый токамак был построен в 1955 г., и долгое время токамаки существовали только в СССР. Лишь после 1968 г., когда английские ученые со своей аппаратурой померяли температуру плазмы на

Рис. 16.5. Крупнейший в мире токамак JET

токамаке Т-3, построенном в Институте атомной энергии им. И.В. Курчатова под руководством Л.А. Арцимовича, и подтвердили, что там достигнута температура 10 млн градусов, в мире начался настоящий бум токамаков. В 1993 г. на европейском токамаке JET в импульсном режиме в термоядерных реакциях достигнута мощность 2 МВт, а полтора года спустя на американской установке TFTR выделено уже 10 МВт. Этого еще недостаточно для осуществления самоподдерживающейся управляемой термоядерной реакции, тем не менее цель уже близка.

Литература: [9, §1.1, 1.2], [11, §2, 4]

► **Задача 16.1**

Используя числовые параметры, приведенные в лекции, сформулировать критерий зажигания $D+T$ реакции.

► **Задача 16.2**

Найти тепловой поток на стенку трубы, внутри которой удерживается термоядерная DT -плазма с плотностью $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и температурой $T = 10 \text{ кэВ}$. Радиус трубы R .

► **Задача 16.3**

Можно ли получить положительный энергетический выход, облучая пучком тритонов, ускоренных до высокой энергии, мишень из льда тяжёлой воды?

Ответы к задачам и упражнениям

- 1.2 [Указание:] учесть, что при $l \sim r_D$, $\delta n \sim n$ величина $Ze\delta\phi$ порядка T .
- 2.3 Воспользовавшись формулами (2.8) и (2.11), находим, что энергия электростатического взаимодействия на единицу объёма w примерно равна

$$w \approx -\sqrt{\pi}Z^3 e^3 n_i^{3/2} / T^{1/2} = -\sqrt{\pi}Z^{3/2} e^3 n_e^{3/2} / T^{1/2}.$$

Кинетическая энергия плазмы в единице объёма близка к $\frac{3}{2}n_e T$, так как $n_e \gg n_i$. В идеальной плазме она должна быть больше энергии электростатического взаимодействия, т.е. $T \gg Ze^2 n_e^{1/3}$. Это условие может быть записано в виде $N_D \gg 1$, где $N_D \sim n_e r_D^3$ — число частиц в дебаевской сфере (примерно равное числу электронов), а $r_D \approx \sqrt{4\pi Ze^2 n_e / T}$ — полный дебаевский радиус. ▲

- 3.3 Внутренними степенями свободы атомов, ионов и электронов являются пространственная ориентация спина и орбитального момента. Вращательные моменты измеряются в единицах \hbar . Измеренный в этих единицах спин обозначают через S , а орбитальный момент — через L . Эти моменты складываются по правилам квантовой механики, давая полный момент количества движения J , который может принимать значения от $|L - S|$ до $L + S$ через единицу. Состояние с моментом J имеет статвес $2J + 1$, так как проекция вектора J на произвольное направление (направление, задаваемое измерительным прибором) пробегает целочисленные значения от $-J$ через 0 до $+J$. Нетрудно подсчитать, что полное число различных квантовых состояний с заданными значениями

L и S равно $(2L+1)(2S+1)$. Орбитальный момент электрона на k -м энергетическом уровне может иметь целочисленные значения от 0 до $k-1$. Вычисляя сумму $g = \sum_{L=0}^{k-1} (2L+1)(2S+1)$ и учитывая, что спин электрона S равен $\frac{1}{2}$, находим искомую величину статвеса: $g = 2k^2$. При заданном состоянии электронной оболочки атома ядро (протон) может находиться в двух состояниях, так как его спин также равен $\frac{1}{2}$. Поэтому, строго говоря, величину g следовало бы умножить на $g_p = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$. Однако при определении статвеса атома степени свободы ядра обычно не учитываются.

- 3.4 Если температура низка в сравнении с потенциалом ионизации, то члены ряда быстро уменьшаются по величине и после немногих первых членов становятся пренебрежимо малыми. Таким образом, возникает впечатление, что ряд сходится, по крайней мере, при не слишком высокой температуре. Однако ряд в действительности является асимптотическим. Так называются ряды, первые члены которых быстро уменьшаются, но полная сумма ряда тем не менее расходится. Практически всегда пользуются тем, что называется асимптотической сходимостью, т.е. берут сумму первых нескольких членов, практически не зависящую в некоторых пределах от числа взятых членов. Физическое обоснование такого способа обращения с формально расходящимся рядом в данном случае состоит в том, что расходимость возникает только для изолированного атома в бесконечном объеме. При $k \rightarrow \infty$ бесконечно увеличивается радиус электронной орбиты, $r_k = a_B k$. Следовательно, в результате взаимодействия с соседними атомами число уровней оказывается конечным.

4.4 [Ответ.] ρ_0/π .

6.1 [Ответ.] $\langle \sigma_i v_e \rangle = 8\sqrt{2\pi T/m} a_B^2 \exp(-I/T)$.

6.3 ... Используя (6.6), (3.9) и решение задачи 6.1, находим

▼ 16.10.1998

$$\beta = 64\pi^2 \alpha c a_B^5 \frac{I}{T},$$

где $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры. ▲

- 6.4 Движение ядер можно рассматривать классически, так как длина волны де Бройля, соответствующая ядрам, мала вследствие их большой массы. Более того, движение ядер можно считать прямолинейным, даже если их энергия меньше энергии ионизации.

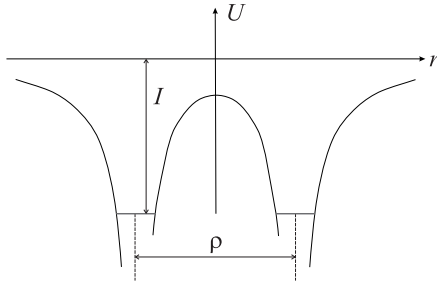


Рис. 16.6. Потенциальная энергия в поле двух протонов

Рассмотрим ион, пролетающий со скоростью v на расстоянии ρ от неподвижного атома. Предположим, что ρ значительно больше радиуса орбиты электрона в атоме a_B . Тем не менее, согласно законам квантовой механики, вероятность обнаружить атомарный электрон на расстоянии ρ от атома не равна нулю, хотя и мала. Этот эффект называется подбарьерным прохождением, так как чтобы удалиться от ядра атома, электрону нужно пройти под барьером, высота которого приблизительно равна потенциалу ионизации I (рис. 16.6). Вероятность подбарьерного просачивания на расстояние ρ оценивается как $\mathcal{P} \sim \exp(-2\sqrt{2I/m\rho}/\hbar) = \exp(-2\rho/a_B)$. Время, в течение которого атом и ион находятся на минимальном расстоянии ρ друг от друга, примерно равно $\Delta t \sim \rho/v$. Время обращения электрона вокруг ядра атома равно $\tau \sim a_B/v_a$. Следовательно, за время сближения иона с атомом электрон $\Delta t/\tau$ раз может оказаться вблизи траектории пролетающего иона. Каждый раз вероятность такого события равна \mathcal{P} . Оказавшись ближе к иону, чем к ядру атома, электрон захватывается на атомарную орбиту иона, а ион становится атомом. Таким образом, вероятность перезарядки на заданном расстоянии ρ по порядку величины равна

$$P \sim \mathcal{P}\Delta t/\tau \sim (\rho v_a/a_B v) \exp(-2\rho/a_B). \quad (16.8)$$

Для небольших ρ эта формула не применима, так как там формально $P > 1$. Это означает, что электрон много раз успевает перейти от одного ядра к другому. Следовательно, вместо (16.8) можно использовать вероятность перезарядки, равную $1/2$. Приравняв (16.8) к $1/2$, получим максимальное расстояние $\rho_{сх}$, на котором процесс обмена электроном между ядрами ещё возможен: $\rho_{сх} \sim a_B \ln(v_a/v)$. Тогда сечение перезарядки оценивается по

формуле

$$\sigma_{\text{сх}} \sim \pi \rho_{\text{сх}}^2 \sim \pi a_{\text{Б}}^2 \ln^2(v_a/v). \quad (16.9)$$

7.1 [Ответ:] Она равна $v_x = c \frac{E}{B} J_0(k\rho) \cos(kY)$, где J_0 — функция Бесселя первого рода, ρ — ларморовский радиус частицы, а Y — координата ведущего центра. При $k\rho \ll 1$ в первом приближении $J_0(k\rho) \simeq 1$, поэтому оказывается, что частица дрейфует со скоростью электрического дрейфа $v_E = cE/B$, которая не зависит от ρ . Однако учет следующего члена в разложении функции Бесселя $J_0(k\rho) \simeq 1 - (k\rho)^2/4$, сколь бы мал он ни был, показывает, что скорость дрейфа различна для электронов и ионов, поскольку из-за разницы масс они обычно имеют разную величину ларморовского радиуса ρ . В результате электрический дрейф в неоднородном электрическом поле приводит к разделению зарядов. Это явление называется эффектом конечного ларморовского радиуса и приводит к важным последствиям для устойчивости плазмы.

7.2 Повторив с небольшими дополнениями вывод, приведённый в лекции, нетрудно установить, что «ведущий центр» частицы дрейфует со скоростью

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \mathbf{v}_E = c[\langle \mathbf{E} \rangle, \mathbf{h}]/B,$$

где $\langle \mathbf{E} \rangle$ — среднее значение \mathbf{E} за период циклотронного вращения частицы. Однако скорость дрейфа частицы $\langle \mathbf{v} \rangle$ не равна скорости «ведущего центра» $\langle \mathbf{R} \rangle$, поскольку $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{R} \rangle + \langle \boldsymbol{\rho} \rangle$. Причина несовпадения скоростей очень проста. Как видно из рис. 7.6, центр ларморовской окружности, по которой движется частица, в действительности расположен в точке $\langle \mathbf{R} \rangle + \langle \boldsymbol{\rho} \rangle$, которая не совпадает с $\langle \mathbf{R} \rangle$, если $\langle \boldsymbol{\rho} \rangle \neq 0$. В нашем случае

$$\langle \boldsymbol{\rho} \rangle = -\frac{1}{\Omega} [v_E, \mathbf{h}].$$

Вычислив $\langle \boldsymbol{\rho} \rangle$, находим, что в переменном электрическом поле скорость дрейфа частицы по сравнению с \mathbf{R} содержит дополнительный член:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{h}]}{B} + \frac{c}{B\Omega} [[\mathbf{h}, \mathbf{E}], \mathbf{h}].$$

В медленно меняющемся поле он значительно меньше первого, ▲

▼ 16.10.98

однако в отличие от него зависит от массы (через посредство частоты Ω). Поэтому в переменном поле электроны и ионы дрейфуют с разной скоростью. В результате плазма поляризуется, а вычисленный нами дополнительный член есть скорость поляризационного дрейфа:

$$\boxed{v_{\text{пол.др.}} = \frac{c}{B\Omega} [[\mathbf{h}, \mathbf{E}], \mathbf{h}]} \quad (16.10)$$

7.3 Запишем уравнения движения частицы, пренебрегая переменной частью магнитного поля, так как при нерелятивистских скоростях движения соответствующая добавка к силе Лоренца заведомо мала по сравнению с электрической частью силы:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{e}{m} E + v_y \Omega, \\ v_y &= -v_x \Omega. \end{aligned}$$

Сложим эти два уравнения, предварительно домножив первое на $\exp(i\Omega t)$, а второе на $i \exp(i\Omega t)$. Получившееся уравнение

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) e^{i\Omega t} = \frac{e}{m} E e^{i\Omega t}$$

легко интегрируется при произвольной зависимости $E(t)$:

▼ 16.10.98

$$v_x + iv_y = (v_{x0} + iv_{y0}) e^{-i\Omega t} + \frac{e}{m} \int_0^t dt' E(t') e^{i\Omega(t'-t)}.$$

Если $E(t)$ изменяется незначительно за период вращения частицы $2\pi/\Omega$, интеграл можно приближенно выразить через текущее значение $E(t)$, проинтегрировав несколько раз по частям: ▲

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' E(t') e^{i\Omega(t'-t)} &= \frac{e^{i\Omega(t'-t)}}{i\Omega} E(t') \Big|_0^t - \int_0^t \frac{dt'}{i\Omega} \frac{dE(t')}{dt'} e^{i\Omega(t'-t)} \\ &= \frac{E(t)}{i\Omega} - \frac{e^{i\Omega(t'-t)}}{(i\Omega)^2} \frac{dE(t')}{dt'} \Big|_0^t + \int_0^t \frac{dt'}{(i\Omega)^2} \frac{d^2 E(t')}{dt'^2} e^{i\Omega(t'-t)} \\ &= \frac{E(t)}{i\Omega} - \frac{1}{(i\Omega)^2} \frac{dE(t)}{dt} + \dots \end{aligned}$$

Каждый новый член возникающего ряда содержит дополнительный малый множитель $\frac{1}{\Omega}$ по сравнению с предыдущим. Удержав

два первых члена ряда и отделив вещественную часть уравнения от мнимой, находим

$$v_x = v_{x0} \cos(\Omega t) + v_{y0} \sin(\Omega t) + \frac{c}{B\Omega} \frac{dE}{dt},$$

$$v_y = v_{y0} \cos(\Omega t) - v_{x0} \sin(\Omega t) - c \frac{E}{B}.$$

Осциллирующие слагаемые здесь описывают ларморовское вращение. Последнее слагаемое в правой части первого уравнения есть скорость поляризационного дрейфа, а последнее слагаемое во втором уравнении есть скорость электрического дрейфа.

- 7.6 В течение коротких промежутков времени происходит изменение поперечной энергии частицы $W_{\perp} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2$ пропорционально изменению величины магнитного поля B , так как $\mu = W_{\perp}/B = \text{const}$. В течение длинных промежутков вследствие кулоновских столкновений происходит выравнивание поперечной W_{\perp} и продольной $W_{\parallel} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ энергий. Величины W_{\perp} , W_{\parallel} и $W = W_{\perp} + W_{\parallel}$ в моменты времени, соответствующие окончанию очередного интервала, указаны в таблице:

t	W_{\perp}	W_{\parallel}	W
τ_1	$\frac{2}{3}W_0$	$\frac{1}{3}W_0$	W_0
$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{2}{3}W_0(1 + \alpha)$	$\frac{1}{3}W_0$	$W_0(1 + \frac{2\alpha}{3})$
$2\tau_1 + \tau_2$	$\frac{2}{3}W_0(1 + \frac{2\alpha}{3})$	$\frac{1}{3}W_0(1 + \frac{2\alpha}{3})$	$W_0(1 + \frac{2\alpha}{3})$
$2\tau_1 + 2\tau_2$	$\frac{2}{3}W_0(1 + \frac{2\alpha}{3})/(1 + \alpha)$	$\frac{1}{3}W_0(1 + \frac{2\alpha}{3})$	W_1

Складывая W_{\perp} и W_{\parallel} в последней строке таблицы, находим, что

$$W_1 = \frac{(1 + 2\alpha/3)(1 + \alpha/3)}{1 + \alpha} W_0.$$

При $\alpha \ll 1$ изменение энергии частицы за период равно $\Delta W = W_1 - W_0 \approx \frac{2}{9}\alpha^2 W_0$. Поскольку частота кулоновских столкновений ионов и электронов существенно различна, подбором длительности интервалов τ_1 и τ_2 можно обеспечить селективный нагрев электронов или ионов.

- 9.1 Выделим произвольный неподвижный объём (рис. 9.1). В нём содержится $\int n d^3r$ частиц. При отсутствии процессов распада

или слияния частиц (например, в результате химических реакций) изменение их числа $\frac{d}{dt} \int n d^3 r$ может быть связано только с потоком частиц $\oint n \mathbf{u} d\mathbf{S}$ через границу объёма. Приравняв этот поток к изменению числа частиц, получим

$$\frac{d}{dt} \int n d^3 r = - \oint n \mathbf{u} d\mathbf{S}.$$

Знак минус в правой части этого равенства связан с тем, что вектор элемента поверхности $d\mathbf{S}$ направлен по внешней нормали к границе объёма. Производную по времени в левой части равенства можно внести под знак интеграла, поскольку выделенный объём неподвижен; при этом полную производную по времени нужно заменить на частную, чтобы подчеркнуть, что переменную интегрирования r не нужно дифференцировать. В правой части равенства интеграл по поверхности преобразуется в интеграл по объёму при помощи теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\int \frac{\partial n}{\partial t} d^3 r = - \int \operatorname{div}(n\mathbf{u}) d^3 r.$$

Так как правая и левая части полученного соотношения равны для произвольного объёма, должны быть равны также подынтегральные выражения. Следовательно,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{u}) = 0. \quad (16.11)$$

9.3 [Указание.] Интеграл столкновений удобно записать в виде

$$\operatorname{St}_{ei} = \operatorname{const} v^{-1} \operatorname{div}_v \mathbf{F} = \operatorname{const} \operatorname{div}_v (\mathbf{F}/v),$$

учитывая, что $\mathbf{F}\mathbf{v} = 0$.

9.4 Общим решением стационарного уравнения Власова ($\partial f/\partial t = 0$) является любая функция, зависящая от интегралов движения. В дрейфовом приближении интегралами движения являются $\epsilon = \frac{mv^2}{2} + e\phi$ — энергия частицы в электростатическом поле с потенциалом ϕ , $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$ — магнитный момент, $J_{\parallel} = \int \sqrt{(2/m)(\epsilon - \mu B - e\phi)} ds$ — продольный адиабатический инвариант. Поэтому $f = f(\epsilon, \mu, J_{\parallel})$.

9.5 Учитывая, что $d^3 v = 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = 2\pi(Bd\mu/m)(d\epsilon/mv_{\parallel})$, получаем для плотности электронов и ионов следующее выражение:

$$n_{e,i} = \frac{2\sqrt{2}\pi B}{m_{e,i}^{3/2}} \int \frac{f_{e,i} d\epsilon d\mu}{\sqrt{\epsilon - \mu B - e_{e,i}\phi}}.$$

Отсюда следует, что $n_{e,i} = n_{e,i}(B, \Phi)$. Из уравнения квазинейтральности $e_e n_e + e_i n_i = 0$ заключаем, что $\Phi = \Phi(B)$, а следовательно, $n_{e,i} = n_{e,i}(B)$. Очевидно, что продольное и поперечное давление в плазме также зависят только от B :

$$p_{\parallel} = \sum_{e,i} \int d^3 v m_{e,i} v_{\parallel}^2 f_{e,i} = \sum_{e,i} \frac{4\sqrt{2}\pi B}{m_{e,i}^{3/2}} \int \sqrt{\epsilon - \mu B - e_{e,i}\Phi} f_{e,i} d\epsilon d\mu,$$

$$p_{\perp} = \sum_{e,i} \int d^3 v \frac{m_{e,i} v_{\perp}^2}{2} f_{e,i} = \sum_{e,i} \frac{2\sqrt{2}\pi B^2}{m_{e,i}^{3/2}} \int \frac{\mu f_{e,i} d\epsilon d\mu}{\sqrt{\epsilon - \mu B - e_{e,i}\Phi}}.$$

9.7 [Указание.] Учтеть, что при столь большой разнице между энергией ионов и температурой электронов первые тормозятся в основном на электронах, а рассеиваются на ионах.

10.1 Выполнив интегрирование в формуле (10.5), в результате простых вычислений получаем

$$\mathbf{R}_{ue}^{(0)} = -\frac{m_e n_e \mathbf{u}_e}{\tau_e}, \quad (16.12)$$

где

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \frac{n_i Z^2 e^4 \Lambda}{m_e^{1/2} T_e^{3/2}}. \quad (16.13)$$

Здесь индекс u у обозначения силы \mathbf{R} указывает, что её происхождение связано с относительным движением электронов и ионов. Мы увидим на следующей лекции, что \mathbf{R} содержит ещё одно слагаемое, пропорциональное градиенту температуры. Там же мы получим точное решение, включающее отыскание функции распределения электронов для случая лоренцевской плазмы (точная формула для \mathbf{R}_{ue} отличается от $\mathbf{R}_{ue}^{(0)}$ числовым коэффициентом $3\pi/32 \simeq 0.29$).

10.2 [Ответ:]

$$s = n \left(\ln \frac{T^{3/2}}{n} + \text{const} \right). \quad (16.14)$$

10.4 Вычислив момент кинетического уравнения с весом $mv^2/2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm\mathbf{u}^2}{2} + \frac{3}{2}nT \right) + \text{div} \left(\frac{nm\mathbf{u}^2}{2} + \frac{5}{2}nT \right) \mathbf{u} = Q + \mathbf{u}\mathbf{R}. \quad (16.15)$$

Слагаемые, содержащие производные от $nm\mathbf{u}^2/2$, преобразуем, сначала используя уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{nm\mathbf{u}^2}{2} + \operatorname{div} \frac{nm\mathbf{u}^2}{2} \mathbf{u} = n \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{m\mathbf{u}^2}{2} + \mathbf{u} \nabla \frac{m\mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{m\mathbf{u}^2}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{u} \right)}_{=0},$$

а затем соотношение

$$n \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{m\mathbf{u}^2}{2} + \mathbf{u} \nabla \frac{m\mathbf{u}^2}{2} \right) = -\mathbf{u} \nabla p + \mathbf{u} \mathbf{R} + ne \mathbf{E} \mathbf{u},$$

следующее из уравнения движения (10.7) после умножения скалярно на \mathbf{u} . В результате из (16.15) получаем

$$\frac{3}{2} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla p \right] = -ne \mathbf{E} \mathbf{u} - \frac{5}{2} p \operatorname{div} \mathbf{u} + Q.$$

В уравнении непрерывности (10.3) выполним почленное дифференцирование в $\operatorname{div} n\mathbf{u}$:

$$\left[\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla n \right] = -n \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Теперь сложим последние два уравнения, умножив первое на $1/p$, а второе — на $-5/2n$. Так как согласно (16.14) $d(s/n) = 3dp/2p - 5dn/2n$, в результате получим искомое уравнение (10.13).

- 13.3 Пусть электроны и ионы в среднем покоятся, так что через произвольное сечение $z = z_0$ слева направо и справа налево в единицу времени проходит в точности одинаковое число электронов $j \sim n_e v_{Te}$. Со стороны ионов на эти потоки действуют силы трения R_+ и R_- соответственно, причём $R_{\pm} \sim m_e j v_{\pm}$. Так как частота столкновений ν_{\pm} зависит от температуры, результирующая сила $R_T = R_+ + R_-$ не равна нулю, если $\partial T_e / \partial z \neq 0$. Учитывая, что в точку $z = z_0$ попадают электроны в среднем с расстояний порядка $\lambda \sim v_{Te} / \nu$, из области $z > z_0$ будут приходить электроны с энергией примерно на $\lambda \partial T_e / \partial z$ большей энергии электронов, приходящих из области $z < z_0$. Поэтому результирующая сила по порядку величины равна

$$R_T \sim \frac{\lambda}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} m_e j \nu \sim \frac{m_e v_{Te}^2}{T_e} n_e \frac{\partial T_e}{\partial z} \sim n_e \frac{\partial T_e}{\partial z}.$$

Она направлена против градиента температуры.

13.5 Ищем решение уравнения (13.5) с $\frac{\partial f_M}{\partial z} = 0$ (так как плазма теперь однородна) в виде

$$\delta f = \Phi(v) \cos \vartheta,$$

причём условимся, что f_M есть максвелловская функция с $\mathbf{u} = 0$, а поток частиц описывает поправка δf к функции распределения. Иными словами, используем калибровку

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} \delta f d^3 v. \quad (16.16)$$

В данной задаче она удобнее, чем (13.3). Домножив (13.5) на $v \cos \theta$ и проинтегрировав по $d^3 v$, получим уравнение

$$-e \mathbf{E} n_e = \mathbf{R}, \quad (16.17)$$

где

$$\mathbf{R} = m \int d^3 v \frac{A}{v^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \delta f}{\partial \theta} = -\frac{8\pi m A}{3} \int_0^\infty dv \Phi(v). \quad (16.18)$$

Исключив в уравнении (13.5) электрическое поле с помощью (16.17), получим уравнение для определения функции $\Phi(v)$:

$$\Phi(v) = \frac{4\pi}{3} \frac{m v^4}{T n_e} f_M \int_0^\infty dv \Phi(v). \quad (16.19)$$

Его решением является функция $\Phi(v) = \mathbb{B} (v/v_{Te})^4 f_M$ с произвольным коэффициентом \mathbb{B} . Этот коэффициент находим из условия (16.16): $\mathbb{B} = \sqrt{\pi} u / 4v_{Te}$. Подставив найденную функцию распределения в (16.18), находим силу трения электронов об ионы в случае лоренцевской плазмы:

$$\mathbf{R}_{ue} = -\frac{3\pi}{32} \frac{m_e n_e \mathbf{u}_e}{\tau_e}. \quad (16.20)$$

13.6 Используя (13.12) и функцию распределения электронов, найденную в задаче 13.5, вычисляем:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{ue} &= \int \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f d^3 v \\ &\approx \int \frac{m v^2}{2} \mathbf{v} \delta f d^3 v - \int m(\mathbf{v} \mathbf{u}) v f_M d^3 v - \int \frac{m v^2}{2} \mathbf{u} f_M d^3 v \\ &= 4n_e T_e \mathbf{u} - n_e T_e \mathbf{u} - \frac{3}{2} n_e T_e \mathbf{u} \\ &= \frac{3}{2} n_e T_e \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Полный электронный поток тепла q_e равен сумме q_{ue} и q_{Te} .

- 13.8 Добавив к правой части уравнения (16.15) $\operatorname{div}(\kappa \nabla T)$ и повторив все выкладки из задачи 10.4, получаем:

$$nT \frac{d}{dt} \frac{s}{n} = Q - ne \mathbf{E} \mathbf{u} + \operatorname{div}(\kappa \nabla T). \quad (16.21)$$

- 15.1 Поделив мощность излучения из единицы объёма на энергию фотона $\hbar\omega$, получим $\alpha^3 Z^2 \lambda_B^2 n_e n_i \nu$, где $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Множитель $\alpha^3 Z^2 \ll 1$ есть вероятность излучить фотон при «лобовом» столкновении электрона с ионом.
- 16.2 Поскольку приведённые параметры соответствуют критерию Ломусона, тепловой поток из единицы объёма равен $3nT/\tau$, где $\tau = 1$ сек. Поток S на единицу поверхности находим из уравнения баланса

$$2\pi R \cdot S = \pi R^2 \frac{3nT}{\tau}.$$

Отсюда

$$S = \frac{3}{2} \frac{3nTR}{2\tau} = 2,4 \cdot 10^5 \cdot R[\text{м}] \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

При $R = 1$ м получим $S = 240$ кВт/м². Это число получено в предположении, что α -частицы достигают стенки. Если они тормозятся в плазме, то тепловой поток нужно умножить на 4/5.

Список литературы

[1] 29, 38, 56, 62, 115

Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.

[2]

Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. шк., 1978.

[3] 103

Чен Ф. Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987.

[4]

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. Ч. 1.

[5] 56, 76

Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1968.

[6]

Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.

[7] 44, 115

Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высоко-температурных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.

[8] 44, 115

Жданов В.П. Элементарные процессы в высокотемпературной плазме. Новосибирск, 1980 (Препр. ИЯФ СО АН СССР; № 80-110).

[9] 103, 115, 122

Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1961.

[10] 29, 38

Трубников Б.А. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1, с. 98.

[11] 122

Лукьянов С.Ю. Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. М.: Наука, 1975.

[12] 56

Сивухин Д.В. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1, с. 7.

[13]

Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая Кинетика. М.: Наука, 1979.

[14] 38

Сивухин Д.В. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 81.

[15]

Кудрин Л.П. Статистическая физика плазмы. М.: Атомиздат, 1974.

[16] 29, 38, 44

Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987.

[17] 84, 93, 103

Брагинский С.И. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1, с. 183.

[18]

Рютов Д.Д. УФН. 1988, т. 154, вып. 4, с. 565, .

Игорь Александрович Котельников
Геннадий Викторович Ступаков

Лекции по физике плазмы

Учебное пособие
для студентов НГУ

Подписано в печать

Печать офсетная.

Тираж 150 экз.

Уч.-изд. л. 8.

Заказ №

Формат 60x86/16

Усл. печ. л. 8.

Цена 6000 р.

Редакционно-издательский отдел Новосибирского государственного университета; участок оперативной полиграфии НГУ; 630090, Новосибирск 90, ул. Пирогова, 2.