

Т.Р. РАШИДОВ, С.В. КУЗНЕЦОВ, Б.М. МАРДОНОВ, И. МИРЗАЕВ

# ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ



## Книга 2 КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ.



**АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ  
СООРУЖЕНИЙ им. М.Т. УРАЗБАЕВА**

**Т.Р. РАШИДОВ, С.В. КУЗНЕЦОВ, Б.М. МАРДОНОВ,  
И. МИРЗАЕВ**

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОДИНАМИКИ  
СООРУЖЕНИЙ**

**Книга 2**

**КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДЗЕМНЫХ  
СООРУЖЕНИЙ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ  
СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

**ТАШКЕНТ – 2021**

УДК: 624.042.7:699.841

ББК: 38.77

М 45

**Т.Р. Рашидов, С.В. Кузнецов, Б.М. Мардонов, И. Мирзаев. «Прикладные задачи сейсмодинамики сооружений. Книга 2. Колебания и устойчивость подземных сооружений сложной структуры при сейсмических воздействиях»** – Ташкент.: «Наврўз», 2021, – 172 с.

ISBN 978-9943-659-43-8

Книга 1 монографии была посвящена действию сейсмических волн на подземный трубопровод и фундаменты сооружений, взаимодействующих с грунтовой средой. Основное внимание было уделено вопросам влияния механических свойств окружающей среды на поведение подземного сооружения, а также возможности снижения интенсивности поверхностных сейсмических волн установкой барьеров и сейсмоизоляторов.

Книга 2 посвящена аналитическим и численным методам решения задач колебания и устойчивости подземных трубопроводов сложной структуры при сейсмических воздействиях. Отдельная глава посвящена использованию сейсмических подушек и барьеров из метаматериалов для защиты зданий и сооружений от сейсмических воздействий.

Монография предназначена для молодых инженеров, научных сотрудников, занимающихся вопросами защиты различных объектов от действия сейсмических нагрузок, и магистров высших технических образовательных учреждений, специализирующихся по динамике сооружений.

### **Ответственный редактор:**

доктор физико-математических наук, профессор **Б. Мардонов**

### **Рецензенты:**

доктор технических наук, профессор **А.А. Ишанходжаев**

доктор физико-математических наук, профессор **А. Абдусаттаров**

***Рекомендовано к печати решением Научного совета Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз (протокол №10 от 20.10.2020)***

ISBN 978-9943-659-43-8

© Изд. «Наврўз» 2021 г.

---

*Посвящается памяти  
академика Турсунбая Рашидова*

## **Предисловие**

На основе динамической теории сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений исследованы колебания и устойчивость взаимодействующих с грунтом подземных сооружений, несущих упругие и упруго диссипативные элементы, при действии сейсмических волн. В книге 1 данной монографии [1], подготовленной под общей редакцией академика Т.Р. Рашидова, основное внимание было уделено вопросам влияния механических свойств окружающей среды и видам действующих волн на поведение подземного сооружения (трубопровод, фундаментная часть здания) и контактных сил взаимодействия с грунтом на формирование волновых полей в теле сооружения. Показана возможность снижения интенсивности поверхностных сейсмических волн установкой барьеров на основе решения задач теории упругости, применяя метод конечных элементов.

Академиком Т.Р. Рашидовым было предложено выпустить книгу 2 монографии, и представлено ее содержание. В ней изложены вопросы оценки влияния конструктивных особенностей (пространственный вид сооружения, наличие массивных узлов, разных грунтовых условий, сейсмических подушек, эксцентричное и упругое соединение между собой элементов сложной системы сооружений и др.) на колебательный процесс и устойчивость сооружений. Авторы данной монографии посвящают книгу доброй памяти академика Т.Р. Рашидова, основоположника теории сейсмодинамики подземных сооружений, внесшего огромный вклад в развитие механики и динамической теории сейсмостойкости сооружений в республике и за рубежом.

В подготовке материалов главы 4 участвовали: Д.А. Бекмирзаев, Е.В. Ан, Э.А. Косимов и Ж.Ф. Шомуродов.

Авторы монографии приносят свою благодарность за техническое оформление и подготовку к выпуску монографии старшим научным сотрудникам лаборатории «Сейсмодинамика подземных сооружений, оснований и фундаментов» Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз Е.В. Ан и Н.А. Нишонову.

# Глава 1. Колебания системы «подземный трубопровод – узлы – грунтовая среда» при действии продольной волны

## 1.1. Исследование волновых процессов в протяженном подземном трубопроводе при кусочно-однородном изменении коэффициента взаимодействия по его длине

При контакте протяженного трубопровода с грунтовой средой закон взаимодействия его с грунтом может меняться по длине трубопровода. При этом такое изменение может произойти вдоль тонкого слоя грунта, контактирующего с поверхностью трубопровода, а также в случае перехода трубопровода из одного типа грунта к другому. Рассмотрим случай наличия тонкого слоя грунта на поверхности контакта, который не влияет на величину скорости распространения волны в грунтовой среде. При этом трубопровод вдоль оси контактирует с грунтом законам, предложенным в работе [1] с кусочно-однородными коэффициентами взаимодействия.

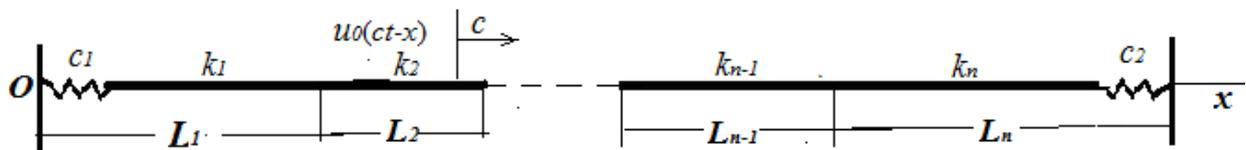


Рис. 1.1. Схема кусочно-однородного закона взаимодействия трубопровода с грунтом

Обозначим через  $k_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) коэффициент линейного взаимодействия трубопровода с грунтом и запишем уравнения движений сечений трубопровода для каждого участка взаимодействия:

$$\rho F \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + k_j [u_j - u_0(ct - x - L_{j-1})] H(ct - x - L_{j-1}) = 0, \quad L_{j-1} < x < L_j \quad (j=1, \dots, n), \quad (1.1.1)$$

где  $u_j = u_j(x, t)$  – перемещение сечения трубопровода в  $i$ -том участке;  $\rho$ ,  $E$  – плотность и модуль Юнга материала;  $F$  – площадь поперечного сечения трубопровода;  $c$  – скорость распространения, обтекающая фронтом трубопровода, продольной волны в грунте;  $k_i$  – коэффициент взаимодействия трубопровода с грунтом в  $i$ -том участке контакта;  $L_j = \sum_{k=0}^j l_k$ ,  $l_k$  – длина  $k$ -ого участка контакта,  $l_0 = 0$ ,  $u_0(z)$  – закон перемещения частиц грунта за фронтом волны;  $H(z)$  – функция Хевисайда; перемещения  $u_1(x, t)$ ,  $u_0(x, t)$  в уравнениях (1.1.1) удовлетворяют условиям упругого контакта в начальном и конечном сечениях трубопровода:

$$EF \frac{\partial u_1}{\partial x} = k_{01} [u_1 - u_0(ct)] \quad \text{при } x = 0, \quad (1.1.2)$$

$$EF \frac{\partial u_n}{\partial x} = k_{0n} [u_n - u_0(ct - L_{n-1})] H(ct - L_{n-1}) \quad \text{при } x = L, \quad (1.1.3)$$

где  $k_{01}$  и  $k_{0n}$  – соответственно коэффициенты упругой связи начального и конечного сечений трубопровода с грунтовой средой,  $L = \sum_{k=0}^n l_k$ . В сечениях перехода из  $i$ -того участка к  $i+1$  участку записываем условия непрерывности перемещения и напряжения

$$u_i = u_{i+1}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} \quad \text{при } x = L_i \quad (1.1.4)$$

Полагая

$$\begin{aligned} u_1 &= L [\bar{u}_1 + c_1 \bar{u}_0 (M\tau) (\xi - \bar{L}_1)^2] \\ u_n &= L [\bar{u}_n + c_2 \bar{u}_0 (M\tau - 1) (\xi - \bar{L}_{n-1})^2 H(M\tau - 1)] \\ u_i &= L \bar{u}_i, \quad i = 2 \dots n-1, \end{aligned}$$

где  $\xi = x/L$ ,  $\bar{L}_i = L_i/L$ ,  $\tau = at/L$ ,  $\bar{u}_i = u_i/L$ ,  $\bar{u}_0 = u_0/L$ ,  $\bar{L}_i = L_i/L$   
 $c_1 = \frac{\beta_{01}}{L_1(2 + \beta_{01}L_1)}$ ,  $c_2 = \frac{\beta_{0n}}{L_{n-1}(2 + \beta_{0n}L_{n-1})}$ ,  $\beta_{01} = k_{01}/EF$ ,  $\beta_{0n} = k_{0n}/EF$ ,  $M = c/a$ ,  
 $a = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения продольной волны в материале трубопровода.

Граничные условия (1.1.2) и (1.1.3) приведем к однородному виду

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} = \beta_{01} \bar{u}_1, \quad \text{при } \xi = 0 \quad (1.1.5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \xi} = -\beta_{0n} \bar{u}_n, \quad \text{при } \xi = 1. \quad (1.1.6)$$

При этом условия (1.1.4) для функций  $\bar{u}_i$  остаются без изменения функций

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} \quad \text{при } \xi = \bar{L}_1 \quad (1.1.7)$$

$$\bar{u}_i = \bar{u}_{i+1}, \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{u}_{i+1}}{\partial \xi} \quad \text{при } \xi = \bar{L}_i, \quad i = 2 \dots n-2 \quad (1.1.8)$$

$$\bar{u}_{n-1} = \bar{u}_n, \quad \frac{\partial \bar{u}_{n-1}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \xi} \quad \text{при } \xi = \bar{L}_{n-1}. \quad (1.1.9)$$

Уравнения (1.1.1) при этом относительно  $\bar{u}_i$  записываются в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \xi^2} + \alpha_1 \bar{u}_1 = F_1(\tau, \xi) \quad (1.1.10)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \xi^2} + \alpha_i \bar{u}_i = 0 \quad (1.1.11)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_n}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_n}{\partial \xi^2} + \alpha_n \bar{u}_n = F_n(\tau, \xi), \quad (1.1.12)$$

где  $F_1 = \alpha_1 \bar{u}_0(M\tau - \xi) + c_1 \{2\bar{u}_0(M\tau) - (\xi - \bar{L}_1)^2 [M^2 \bar{u}_0''(M\tau) + \alpha_1 \bar{u}_0(M\tau)]\}$ ;  
 $F_n = \alpha_n \bar{u}_0(M\tau - \xi) +$   
 $+ c_2 \{2\bar{u}_0(M\tau - 1) - (\xi - \bar{L}_{n-1})^2 [M^2 \bar{u}_0''(M\tau - 1) + \alpha_2 \bar{u}_0(M\tau - 1)] H(M\tau - 1)\}$ ;  
 $\alpha_i = k_i L^2 / EF$ .

Для нахождения решений уравнений (1.1.10) – (1.1.12) с граничными условиями (1.1.5) – (1.1.9) и начальными условиями

$$\bar{u}_i(\xi, \tau) = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \tau} = -c_1 (\xi - L_1)^2 M \dot{u}_0(0), \quad \text{при } \tau = 0 \quad (1.1.14)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0, i = 2, \dots, n-1, \quad (1.1.15)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \tau} = -c_2 (\xi - \bar{L}_{n-1})^2 M \dot{u}_0(1/M), \quad \text{при } \tau = 1/M \quad (1.1.16)$$

используем метод Фурье [2], согласно которому решение однородной части уравнений (1.1.10) – (1.1.12) относительно  $u_j(x, t)$  и  $\bar{u}_1, \bar{u}_n$  представим в следующем виде:

$$\bar{u}_1 = \bar{\varphi}_1(\xi) T(\tau), \quad \bar{u}_j = \varphi_j(\xi) T(\tau), \quad \bar{u}_n = \bar{\varphi}_n(\xi) T(\tau), \quad (1.1.17)$$

где  $\bar{\varphi}_1, \varphi_j, \bar{\varphi}_n$  и  $T(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$T'' = -\mu^2 T,$$

$$\bar{\varphi}_1'' + \lambda_1^2 \bar{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_j'' + \lambda_j^2 \varphi_j = 0, \quad \bar{\varphi}_n'' + \lambda_n^2 \bar{\varphi}_n = 0 \quad (1.1.18)$$

$$\lambda_i^2 = \mu^2 - \alpha_i \quad (1.1.19)$$

Будем рассматривать ограниченные функции  $\bar{\varphi}_{1i}, \varphi_{ji}, \bar{\varphi}_{ni}$  для каждого числа  $\mu = \mu_i$  и поэтому полагаем  $\mu_i > \mu_* = \sqrt{\alpha_{\max}}$ , ( $\alpha_{\max} = \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ).

В дальнейшем полагаем  $\lambda_{ji} = \lambda_i = \sqrt{\mu_i^2 - \alpha_1}$  и, учитывая, что функция  $T(\tau)$  одна и та же для всех участков взаимодействия, получим

$$\lambda_j^2 + \alpha_j = \lambda_k^2 + \alpha_k = \lambda_1^2 + \alpha_1, \quad (\lambda_j^2 - \lambda_k^2 = \alpha_j^2 - \alpha_k^2).$$

Из этого равенства установим

$$\lambda_{ji} = \sqrt{\lambda_i^2 + \alpha_1 - \alpha_j}.$$

Функции  $\bar{\varphi}_{1i}, \varphi_{ji}, \bar{\varphi}_{ni}$  согласно (1.1.5) – (1.1.9) удовлетворяют условиям:

$$\bar{\varphi}'_{1i} = \beta_{01} \bar{\varphi}_{1i}, \quad \text{при } \xi = 0 \quad (1.1.20)$$

$$\varphi_{ii} = \varphi_{j+1i}, \quad \varphi'_{ji} = \varphi_{j+1i}, \quad \text{при } \xi = \bar{L}_j \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (1.1.21)$$

$$\bar{\varphi}'_{ni} = -\beta_{0n} \bar{\varphi}_{ni}, \quad \text{при } \xi = 1 \quad (1.1.22)$$

Решение уравнения (1.1.18) при  $j=1$ , удовлетворяющего условию (1.1.21), представим в виде

$$\bar{\varphi}_1 = B(\beta_{01} \cos \lambda_1 \xi + \lambda_1 \cos \lambda_1 \xi), \quad \text{при } 0 < \xi < \bar{L}_1.$$

Для участка  $\bar{L}_1 < \xi < \bar{L}_2$  получаем

$$\varphi_2 = A_2 \sin \lambda_2 (\xi - \bar{L}_1) + B_2 \cos \lambda_2 (\xi - \bar{L}_1) \quad \text{при } \bar{L}_1 < \xi < \bar{L}_2.$$

Полагая  $B=1$ , и, пользуясь условиями (1.1.21) при  $j=2$ , получаем

$$A_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\cos \lambda_1 \bar{L}_1 - \lambda_1 \sin \lambda_1 \bar{L}_1), \quad (1.1.23)$$

$$B_2 = \beta_{01} \sin \lambda_1 \bar{L}_1 + \lambda_1 \cos \lambda_1 \bar{L}_1. \quad (1.1.24)$$

Полагая  $\varphi_3 = A_3 \sin \lambda_3 (\xi - \bar{L}_2) + B_3 \cos \lambda_3 (\xi - \bar{L}_2)$  при  $\bar{L}_2 < \xi < \bar{L}_3$ , получаем

$$A_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} (A_2 \cos \lambda_2 \bar{L}_2 - B_2 \sin \lambda_2 \bar{L}_2), \quad B_3 = A_2 \sin \lambda_2 \bar{L}_2 + B_2 \cos \lambda_2 \bar{L}_2. \quad (1.1.25)$$

Продолжая этот процесс для участка  $L_{n-1} < x < L_n$ , получаем

$$\bar{\varphi}_n = A_n \cos \lambda_n (x - L_{n-1}) + B_n \sin \lambda_n (x - L_{n-1}),$$

где 
$$A_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} (A_{n-1} \cos \lambda_{n-1} \bar{L}_{n-1} - B_{n-1} \sin \lambda_{n-1} \bar{L}_{n-1}), \quad (1.1.26)$$

$$B_n = A_{n-1} \sin \lambda_{n-1} \bar{L}_{n-1} + B_{n-1} \cos \lambda_{n-1} \bar{L}_{n-1}. \quad (1.1.27)$$

Из формул (1.1.26) и (1.1.27) заметим, что при известных значениях  $A_2$  и  $B_2$ , которые зависят от чисел  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $A_n$  и  $B_n$  определяются по рекуррентным формулам (1.1.26) – (1.1.27).

Пользуясь условием (1.1.22), составим уравнение для определения так называемых собственных чисел  $\lambda = \lambda_n$

$$A_n(\beta_{0n} \sin \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n) + B_n(\lambda_n \sin \lambda_n \bar{L}_n + \beta_{0n} \cos \lambda_n l_n) = 0.$$

Получим условие ортогональности функций  $\bar{\varphi}_1, \varphi_j, \bar{\varphi}_n$ . Полагая  $\lambda = \lambda_i$ , уравнения (1.1.18) умножаем на функции  $\bar{\varphi}_{1k}, \varphi_{jk}, \bar{\varphi}_{nk}$  и, учитывая  $\lambda_{ji} = \lambda_i$ , интегрируем в соответствующих интервалах  $\bar{L}_{j-1} < \xi < \bar{L}_j$

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1k} \bar{\varphi}_{1i} d\xi &= - \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i}'' \bar{\varphi}_{1k} d\xi = \bar{\varphi}_{1i}'(0) \bar{\varphi}_{1k}(0) - \bar{\varphi}_{1i}'(\bar{L}_1) \bar{\varphi}_{1k}(\bar{L}_1) + \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i}' \bar{\varphi}_{1k}' d\xi \\ \lambda_i^2 \int_{\bar{L}_1}^{\bar{L}_2} \varphi_{2k} \varphi_{2i} d\xi &= - \int_{\bar{L}_1}^{\bar{L}_2} \varphi_{2i}'' \varphi_{2k} d\xi = \varphi_{2i}'(\bar{L}_1) \varphi_{2k}(\bar{L}_1) - \varphi_{2i}'(\bar{L}_2) \varphi_{2k}(\bar{L}_2) + \int_{\bar{L}_1}^{\bar{L}_2} \varphi_{2i}' \varphi_{2k}' d\xi \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_i^2 \int_{\bar{L}_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{nk} \bar{\varphi}_{ni} d\xi &= - \int_{\bar{L}_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{ni}'' \bar{\varphi}_{nk} d\xi = \bar{\varphi}_{ni}'(\bar{L}_{n-1}) \bar{\varphi}_{nk}(\bar{L}_{n-1}) - \bar{\varphi}_{ni}'(1) \bar{\varphi}_{nk}(1) + \int_{\bar{L}_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{ni}' \bar{\varphi}_{nk}' d\xi \end{aligned}$$

Полагая  $i \rightarrow k$  в последних равенствах, составим их разность

$$\begin{aligned} (\lambda_i^2 - \lambda_k^2) \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i} \bar{\varphi}_{1k} d\xi &= \bar{\varphi}_{1i}'(0) \bar{\varphi}_{1k}(0) - \bar{\varphi}_{1i}'(\bar{L}_1) \bar{\varphi}_{1k}(\bar{L}_1) - \bar{\varphi}_{1k}'(0) \bar{\varphi}_{1i}(0) + \bar{\varphi}_{1k}'(\bar{L}_1) \bar{\varphi}_{1i}(\bar{L}_1) \\ (\lambda_i^2 - \lambda_k^2) \int_{\bar{L}_1}^{\bar{L}_2} \varphi_{2i} \varphi_{2k} d\xi &= \varphi_{2i}'(\bar{L}_1) \varphi_{2k}(\bar{L}_1) - \varphi_{2i}'(\bar{L}_2) \varphi_{2k}(\bar{L}_2) - \varphi_{2k}'(\bar{L}_1) \varphi_{2i}(\bar{L}_1) + \varphi_{2k}'(\bar{L}_2) \varphi_{2i}(\bar{L}_2) \\ \dots \dots \dots \\ (\lambda_i^2 - \lambda_k^2) \int_{\bar{L}_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{ni} \bar{\varphi}_{nk} d\xi &= \bar{\varphi}_{ni}'(\bar{L}_{n-1}) \bar{\varphi}_{nk}(\bar{L}_{n-1}) - \bar{\varphi}_{ni}'(1) \bar{\varphi}_{nk}(1) - \bar{\varphi}_{nk}'(\bar{L}_{n-1}) \bar{\varphi}_{ni}(\bar{L}_{n-1}) + \bar{\varphi}_{nk}'(1) \bar{\varphi}_{ni}(1) \end{aligned}$$

Складывая полученные выражения с учетом (1.1.5) – (1.1.9), получим

$$\int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i} \bar{\varphi}_{1k} d\xi + \int_{\bar{L}_1}^{\bar{L}_2} \bar{\varphi}_{2i} \bar{\varphi}_{2k} d\xi + \dots + \int_{\bar{L}_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{ni} \bar{\varphi}_{nk} d\xi = 0. \quad (1.1.28)$$

Равенство (1.1.28) является условием ортогональности собственных функций  $\bar{\varphi}_{1i}(\xi), \varphi_{ji}(\xi), \bar{\varphi}_{ni}(\xi)$ .

Решение неоднородных уравнений (1.1.10) – (1.1.12) представим в виде разложений

$$\bar{u}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{1i}(\xi) T_i(\tau), \quad \bar{u}_j = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{ji}(\xi) T_i(\tau), \quad \bar{u}_n = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{ni}(\xi) T_i(\tau). \quad (1.1.29)$$

После подстановки разложений (1.1.29) в уравнения (1.1.10) – (1.1.12) с учетом (1.1.18) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} [T_j'' + \lambda_j^2 T_j(\tau)] \bar{\varphi}_{1j} = F_1(\tau, \xi) \quad (1.1.30)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} [T_j'' + \lambda_j^2 T_j(\tau)] \bar{\varphi}_{ij} = 0 \quad (1.1.31)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} [T_j'' + \lambda_j^2 T_j(\tau)] \bar{\varphi}_{nj} = F_2(\tau, \xi). \quad (1.1.32)$$

Умножим уравнения (1.1.30) – (1.1.32) соответственно на функции  $\bar{\varphi}_{1k}(\xi)$ ,  $\varphi_{jk}(\xi)$  и  $\bar{\varphi}_{nk}(\xi)$  и произведем интегрирование в соответствующих интервалах  $\bar{L}_{j-1} < \xi < \bar{L}_j$  ( $j = 1, \dots, n, \bar{L}_0 = 0, \bar{L}_n = 1$ ), а результат суммируем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} [T_i'' + \lambda_i^2 T_i(\tau)] & \left[ \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i} \bar{\varphi}_{1k} d\xi + \int_{\bar{L}_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{ni} \bar{\varphi}_{nk} d\xi + \sum_{j=2}^n \int_{\bar{L}_{j-1}}^{\bar{L}_j} \varphi_{ji} \varphi_{jk} d\xi \right] = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1k} F_1(\tau, \xi) d\xi + \int_{\bar{L}_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{nk} F_2(\tau, \xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

С учетом условия ортогональности собственных функций  $\bar{\varphi}_{1k}(\xi)$ ,  $\varphi_{jk}(\xi)$  и  $\bar{\varphi}_{nk}(\xi)$  получаем

$$T_i'' + \lambda_i^2 T_i = \frac{1}{\|\varphi_i\|} \left[ \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i} F_1 d\xi + \int_{\bar{L}_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{ni} F_2 d\xi \right], \quad (1.1.33)$$

где  $\|\varphi_i\|$  – норма собственных функций  $\bar{\varphi}_{1k}(\xi)$ ,  $\varphi_{jk}(\xi)$  и  $\bar{\varphi}_{nk}(\xi)$ , имеющая вид

$$\|\varphi_i\| = \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i}^2 d\xi + \int_{\bar{L}_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{ni}^2 d\xi + \sum_{j=2}^{n-1} \int_{\bar{L}_{j-1}}^{\bar{L}_j} \varphi_{ji}^2 d\xi.$$

Общие решения уравнений (1.1.33) можно представить в виде

$$T_i = T_{1i} = \frac{1}{\lambda_i} \int_0^{\tau} Q(z) \sin \lambda_i(\tau - z) dz +$$

$$+ T_i(0) \cos \lambda_i \tau + T_i'(0) \sin \lambda_i \tau \quad \text{при } 0 \leq \tau \leq 1/M \quad (1.1.34)$$

$$T_i = T_{2i} = T_{1i}(1/M) \cos \lambda_i(\tau - 1/M) + \frac{1}{\lambda_i} \int_{1/M}^{\tau} Q(z) \sin \lambda_i(\tau - z) dz +$$

$$+ T_{2i}'(1/M) \sin \lambda_i(M\tau - 1) \quad \text{при } 1/M \leq \tau \leq 1. \quad (1.1.35)$$

$$\text{Здесь } Q(\tau) = \frac{1}{\|\varphi_i\|} \left[ \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i} F_1 d\xi + \int_{L_{n-1}}^1 \bar{\varphi}_{ni} F_2 d\xi \right].$$

Из начальных условий (1.1.13) следует  $T_i(0)=0$ . Условия (1.1.14) – (1.1.16) дают

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_i'(0) \lambda_i \bar{\varphi}_{1i}(\xi) = -c_1 (\xi - \bar{L}_1)^2 M \bar{u}'_0(0) \quad 0 < \xi < \bar{L}_1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_i'(0) \lambda_i \varphi_{j+1i}(\xi) = 0 \quad \text{при } \bar{L}_j < \xi < \bar{L}_{j+1} \quad j = 1..n-2,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_i'(0) \lambda_i \bar{\varphi}_{ni}(\xi) = 0 \quad \text{при } \bar{L}_{n-1} < \xi < 1.$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_i'(1/M) \lambda_i \bar{\varphi}_{1i}(\xi) = 0, \quad \text{при } 0 < \xi < \bar{L}_1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_i'(1/M) \lambda_i \varphi_{j+1i}(\xi) = 0 \quad \text{при } \bar{L}_j < \xi < \bar{L}_{j+1} \quad j = 1..n-2,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_i'(1/M) \lambda_i \bar{\varphi}_{ni}(\xi) = -c_2 (\xi - L_{n-1})^2 M \bar{u}'_0(1/M) \quad \text{при } \bar{L}_{n-1} < \xi < 1.$$

Из этих равенств находим коэффициенты разложений  $T_i'(0)$  и  $T_i'(1/M)$

$$T_i'(0) = -\frac{c_1 M \bar{u}'_0(0)}{\lambda_i \|\varphi_i\|} \int_0^{\bar{L}_1} (\xi - \bar{L}_1)^2 \bar{\varphi}_{1i}(\xi) d\xi,$$

$$T_i'(1/M) = -\frac{c_2 M \bar{u}'_0(1/M)}{\lambda_i \|\varphi_i\|} \int_{L_{n-1}}^1 (\xi - \bar{L}_{n-1})^2 \bar{\varphi}_{1i}(\xi) d\xi.$$

Поставляя коэффициенты  $T_i'(0)$  и  $T_i'(1/M)$  в формулы (1.1.34) и (1.1.35), получим выражения функций  $T_i(\tau)$ .

В качестве примера рассмотрим действие волны на трубопровод, где перемещения частиц грунта за фронтом волны подчиняются закону  $u_0 = A_0(1 - \cos \omega(M\tau - \xi))$  ( $A_0$  – амплитуда колебаний,  $\omega = L/l$ ,  $l$  – длина волны). Таким образом, на фронте волны выполняются условия равенства нулю перемещения и скорости частиц грунта  $u'_0(0) = u'_0(1/M) = 0$  и поэтому принято  $T_i'(0) = T_i'(1/M) = 0$ . Расчеты производились для трубопровода из стали длиной  $L=20$  м при наличии двух равных по длине участков с коэффициентами жесткостей  $k_1$  и  $k_2$  со значениями в вариантах: 1)  $k_1 = k_2 = 10^6$  Н/м<sup>2</sup>; 2)  $k_1 = 10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $k_2 = 5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>; 3)  $k_1 = 5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $k_2 = 10^6$  Н/м<sup>2</sup>. В расчетах принято  $A_0=0.003$  м, глубиной заложения  $R_1=1.5$  м,  $E=2 \cdot 10^5$  МПа (цилиндрический стальной трубопровод с внешним диаметром  $D_1= 0.2$  м,,

толщиной  $\delta=0.005$  и модулем Юнга  $E$ )  $k_{01} = k_{02} = 10^7$  Н/м. На рис. 1.2 и 1.3 представлены графики изменения напряжения  $\sigma = E \frac{A_0}{L} \frac{\partial u}{\partial x}$  по безразмерному времени  $\tau=at/Ld$  в различных сечениях трубопровода для первого варианта, когда  $k_1 = k_2 = 10^6$  Н/м<sup>2</sup> для двух значений числа  $M$  и длины волны  $l$ . Видно, что с ростом числа  $M=c/a$  изменение напряжения по времени приобретает колебательный характер с увеличенной частотой и практически одинаковым значением максимальной амплитуды колебания.

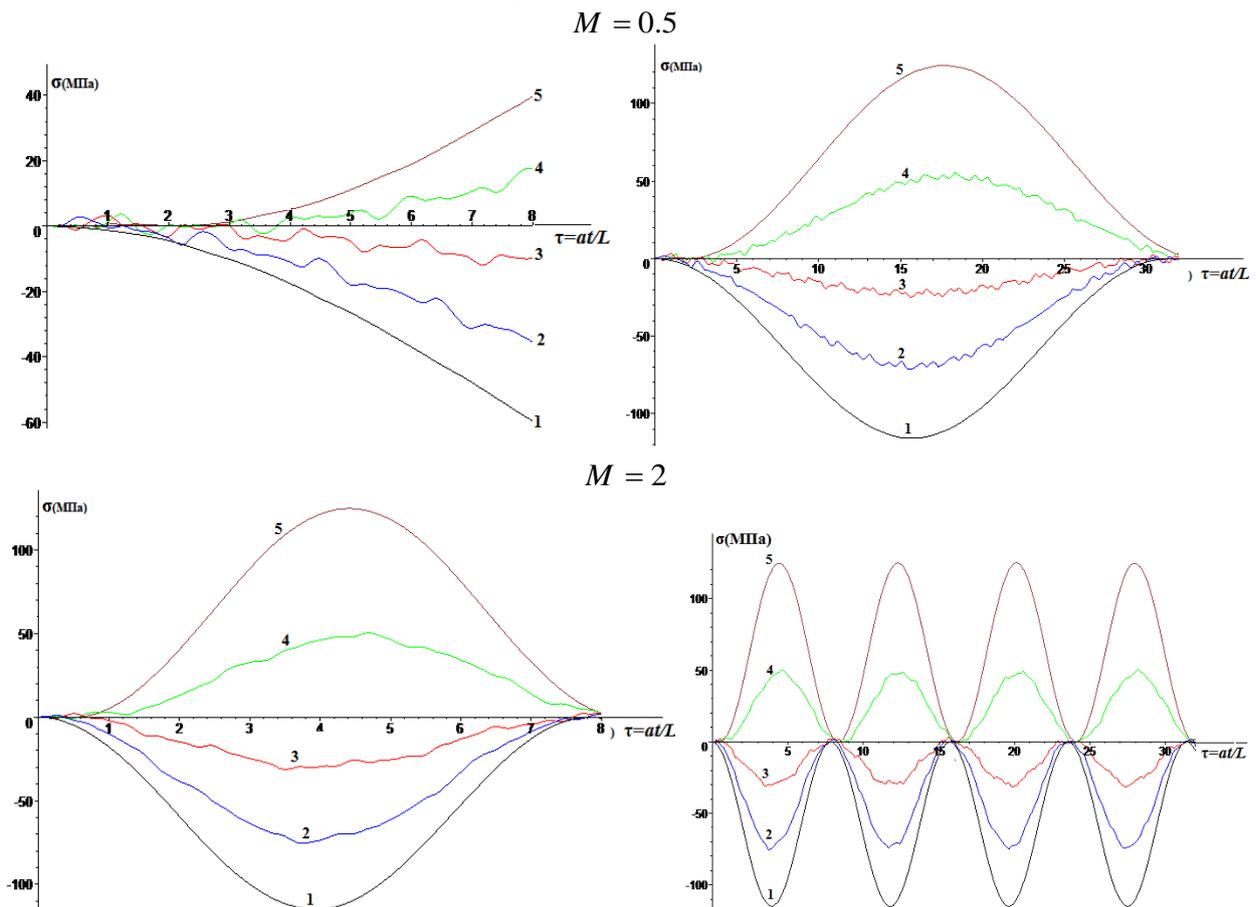
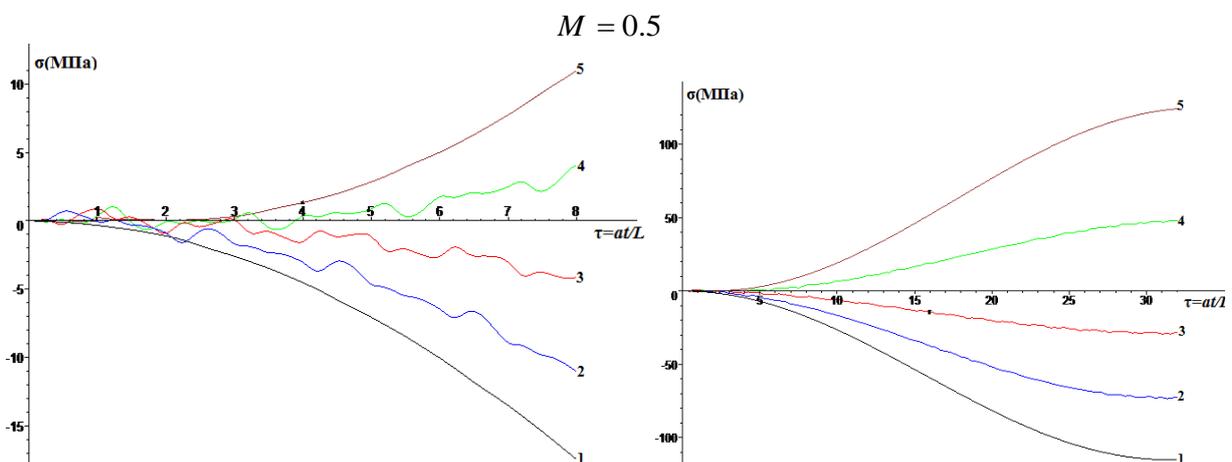


Рис. 1.2. Зависимости напряжения  $\sigma$  (МПа) от безразмерного времени  $\tau=at/L$  при  $k_1=k_2=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $l=50$  м для двух значений числа  $M$  в различных сечениях трубопровода: 1 –  $\zeta=0$ ; 2 –  $\zeta=0.25$ ; 3 –  $\zeta=0.5$ ; 4 –  $\zeta=0.75$ ; 5 –  $\zeta=1$



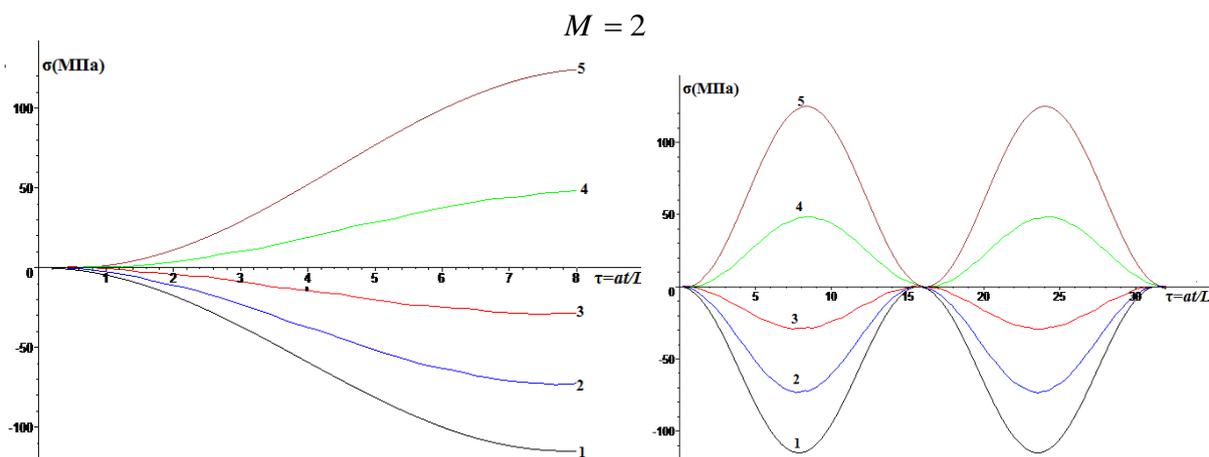
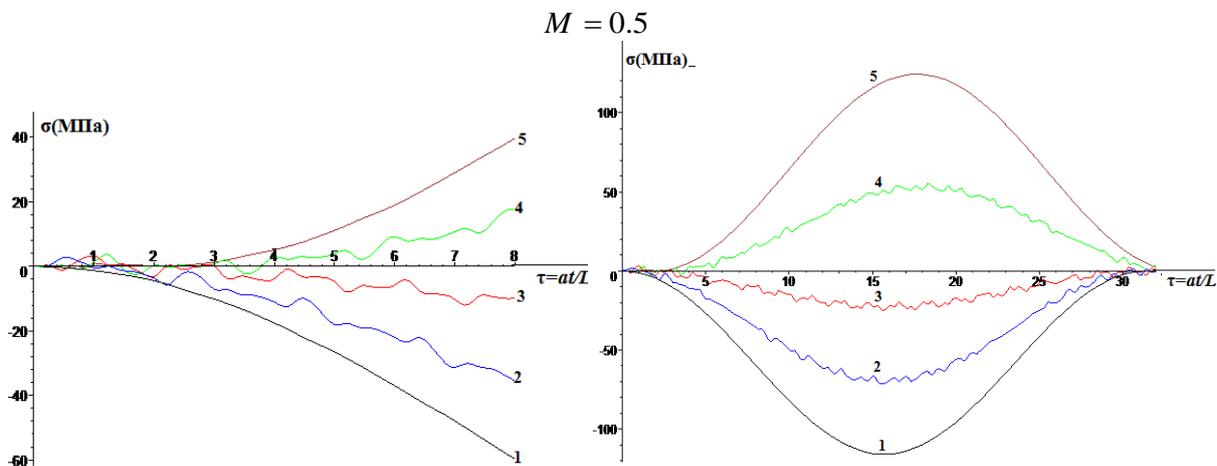


Рис. 1.3. Зависимости напряжения  $\sigma$  (МПа) от безразмерного времени  $\tau=at/L$  при  $k_1=k_2=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $l=100$  м для двух значений числа  $M$  в различных сечениях трубопровода: 1 –  $\zeta=0$ ; 2 –  $\zeta=0.25$ ; 3 –  $\zeta=0.5$ ; 4 –  $\zeta=0.75$ ; 5 –  $\zeta=1$

Максимальные значения напряжений достигаются в торцевых сечениях трубопровода. Это указывает на существенное влияние скорости распространения волны на частотный состав колебаний сечений трубопровода и часто встречаемые на практике возможность возникновения высоких значений напряжений в местах контакта торцевых сечений трубопровода с грунтовой средой.

На рис. 1.4 и 1.5 представлены аналогичные кривые результатов расчета для второго варианта, где принято  $k_1=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $k_2=5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>. Видно, что в рассматриваемом варианте увеличение коэффициента продольного сдвига в дальней зоне от начального сечения трубопровода приводит к снижению напряжения в начальных моментах времени воздействия волны. Далее с ростом времени результаты расчетов аналогичны как в первом варианте. Таким образом, влияние неоднородности коэффициентов взаимодействия обнаруживается в начальном периоде колебаний сечений. В результате развития волновых процессов в трубопроводе неоднородность не меняет параметров колебаний сечений трубопроводов.



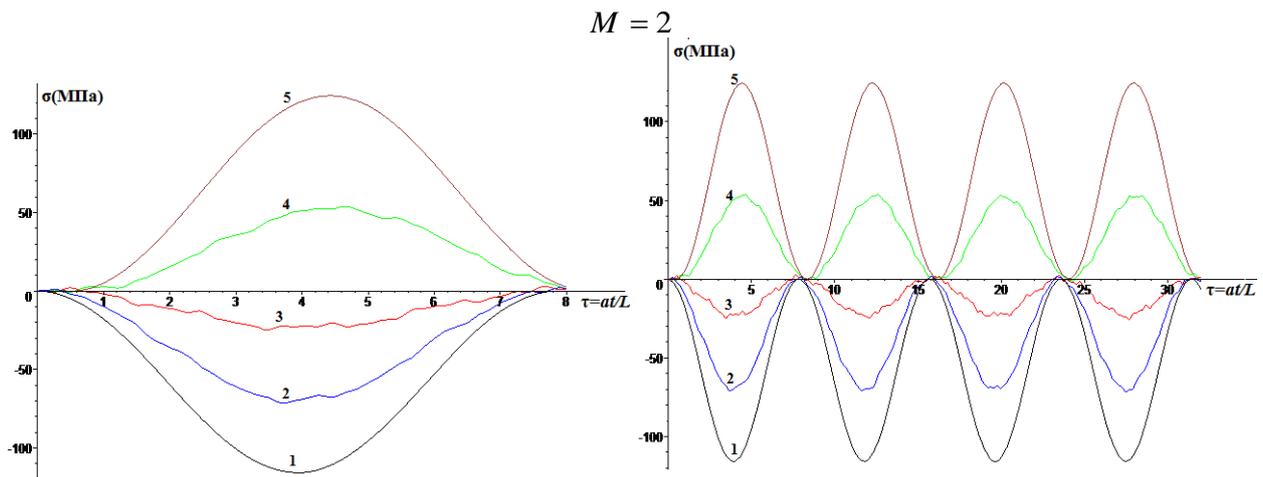


Рис. 1.4. Зависимости напряжения  $\sigma$  (МПа) от безразмерного времени  $\tau=at/L$  при  $k_1=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $k_2=5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $l=50$  м для двух значений числа  $M$  в различных сечениях трубопровода:  
 1 –  $\zeta=0$ ; 2 –  $\zeta=0.25$ ; 3 –  $\zeta=0.5$ ; 4 –  $\zeta=0.75$ ; 5 –  $\zeta=1$

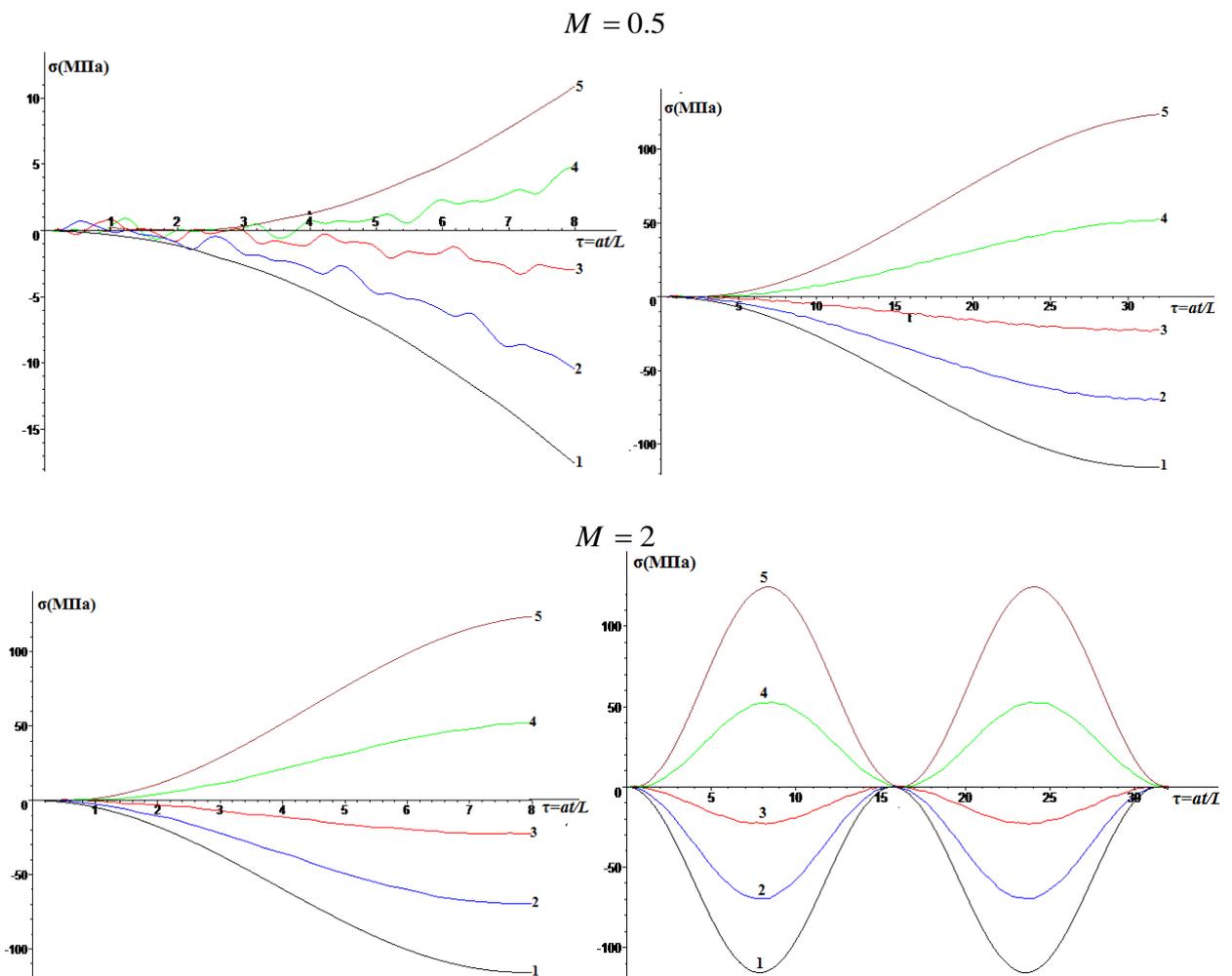


Рис. 1.5. Зависимости напряжения  $\sigma$  (МПа) от безразмерного времени  $\tau=at/L$  при  $k_1=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $k_2=5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $l=100$  м для двух значений числа  $M$  в различных сечениях трубопровода:  
 1 –  $\zeta=0$ ; 2 –  $\zeta=0.25$ ; 3 –  $\zeta=0.5$ ; 4 –  $\zeta=0.75$ ; 5 –  $\zeta=1$

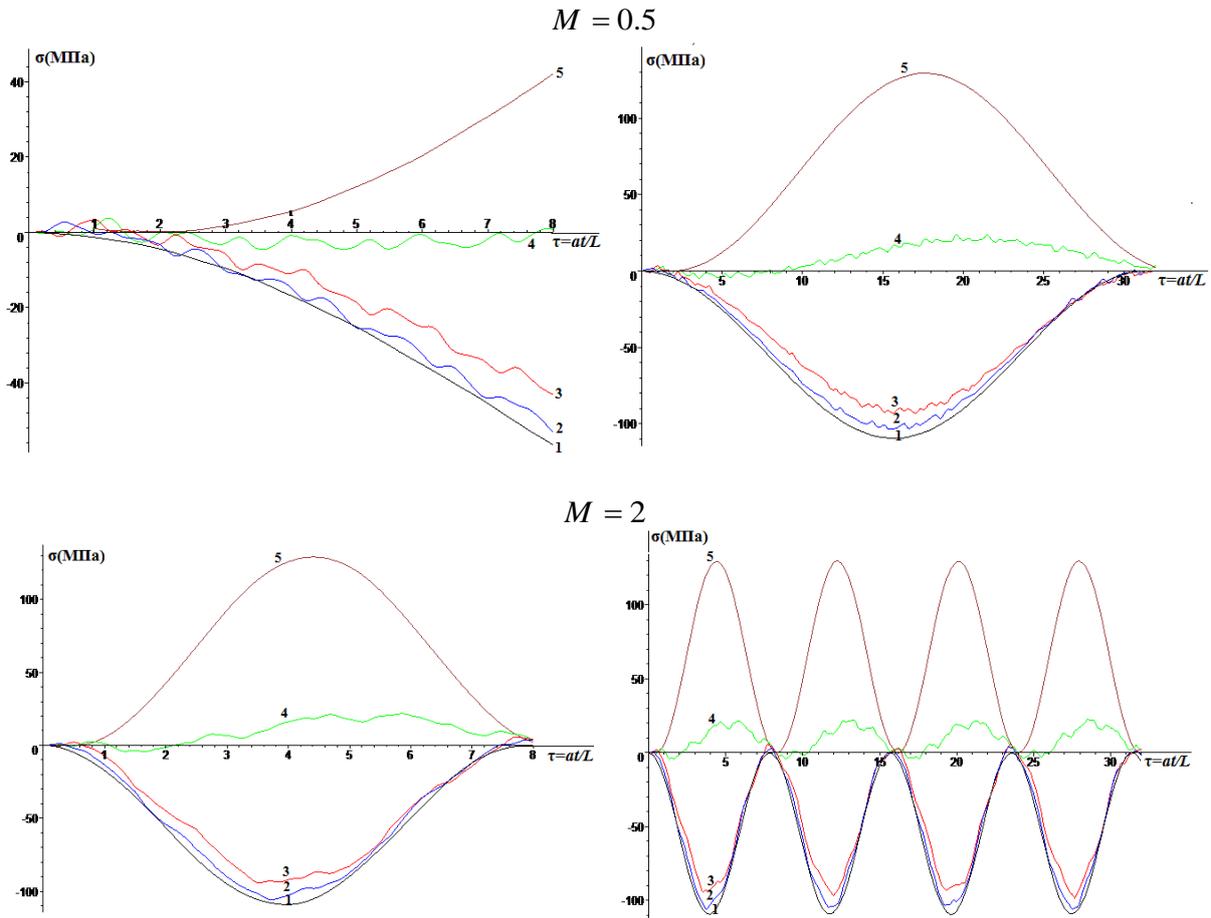
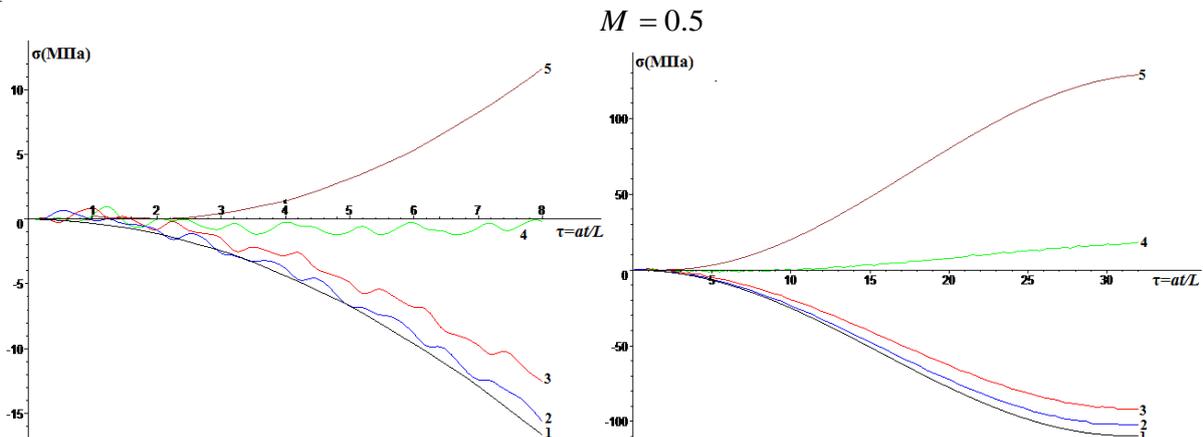


Рис. 1.6. Зависимости напряжения  $\sigma$  (МПа) от безразмерного времени  $\tau=at/L$  при  $k_1=5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $k_2=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $l=50$  м для двух значений числа  $M$  в различных сечениях трубопровода: 1 –  $\zeta=0$ ; 2 –  $\zeta=0.25$ ; 3 –  $\zeta=0.5$ ; 4 –  $\zeta=0.75$ ; 5 –  $\zeta=1$

Кривые, представленные на рис. 1.6 и 1.7, соответствуют результатам расчетов произведенных для третьего варианта, где принято  $k_1=5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $k_2=10^6$  Н/м<sup>2</sup>. Из анализа графиков следует, что наличие высокого значения коэффициента взаимодействия в первой зоне по сравнению со второй приводит к качественному изменению картины колебательного процесса. При этом напряжения в сечениях трубопровода в первой зоне по значениям незначительно отличаются друг от друга. Численные значения напряжений незначительно отличаются от результатов, полученных в предыдущих вариантах.



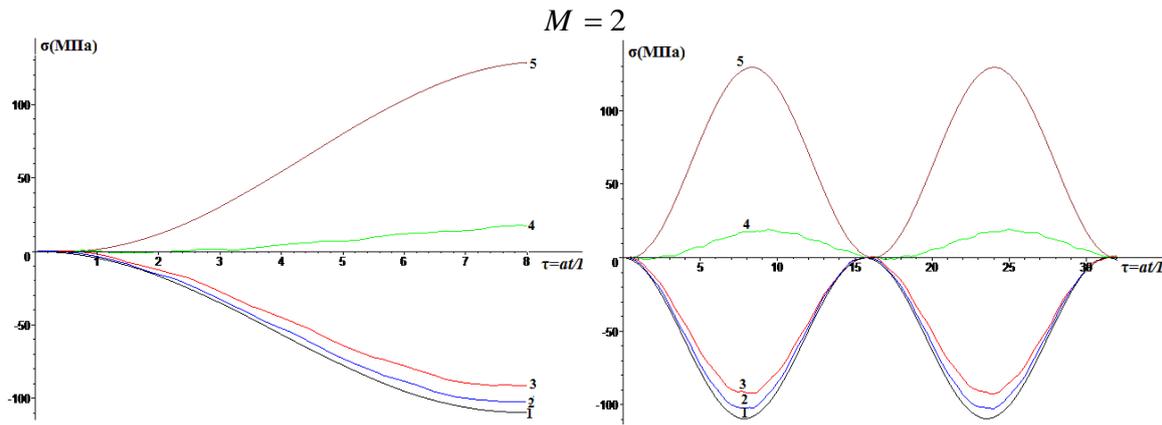


Рис. 1.7. Зависимости напряжения  $\sigma$  (МПа) от безразмерного времени  $\tau=at/L$  при  $k_1=5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $k_2=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $l=100$  м для двух значений числа  $M$  в различных сечениях трубопровода: 1 –  $\xi=0$ ; 2 –  $\xi=0.25$ ; 3 –  $\xi=0.5$ ; 4 –  $\xi=0.75$ ; 5 –  $\xi=1$

## 1.2. Колебания трубопровода при наличии зоны контакта по закону сухого трения

Рассмотрим динамическую задачу действия продольного усилия на подземный трубопровод. На поверхности контакта с грунтовой средой кроме зоны упругого контакта может образоваться зона отрыва трубопровода, где контактная сила определяется согласно закону сухого трения Кулона. Рассмотрим случай действия усилия на сечение трубопровода по гармоническому закону  $P = -\frac{1}{2}P_0(1 - \cos \omega t)$ , где  $P_0$  и  $\omega$  – максимальная амплитуда и частота воздействия приложенного усилия.

Установим начало координат в начальном торце. Направим ось  $Ox$  вдоль оси трубопровода. Зона срыва начинается с торца  $x=0$  и распространяется по поверхности трубопровода. Участок зоны контакта с сухим трением обозначим  $0 < x < x_0$ , считая  $x_0 < x < l$  упругим, записываем уравнение движения трубопровода в каждой зоне

$$\rho F \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -f_0 k \rho_0 g \pi D h \text{sign} v_1 \quad \text{при } 0 < x < x_0 \quad (1.2.1)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \pi D k_x u_2 = 0 \quad \text{при } x_0 < x < l \quad (1.2.2)$$

где  $u_1(x,t)$ ,  $u_2(x,t)$  – перемещения сечений в каждой зоне;  $\rho$ ,  $E$  – плотность и модуль Юнга материала трубопровода;  $F$ ,  $D$  – площадь поперечного сечения и внешний диаметр трубопровода;  $\rho_0$  – плотность грунтовой среды;  $h$  – глубина залегания трубопровода;  $f$ ,  $k$  – коэффициент трения и бокового давления;  $k_x$  – коэффициент продольного сдвига;  $l$  – длина трубопровода;  $v_1 = \partial u_1 / \partial t$  – скорость сечения трубопровода в зоне сдвига трубопровода по

закону Кулона;  $signv_1$  – функция, определяющая знак силы сопротивления в зависимости от знака скорости сечения, определяемая по формуле

$$signv_1 = 1 \text{ при } v_1 > 0, \text{ } signv_1 = -1 \text{ при } v_1 < 0, |signv_1| < 1 \text{ при } v_1 = 0 \quad (1.2.3)$$

Уравнения (1.2.1) и (1.2.2) интегрируются при нулевых начальных и следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\varepsilon_0(1 - \cos \omega t) \quad \text{при } x = 0 \quad (1.2.4)$$

$$EF \frac{\partial u_2}{\partial x} + k_0 u_2 = 0 \quad \text{при } x = l \quad (1.2.5)$$

и условий сопряжения:

$$u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{при } x = x_0 \quad (1.2.6)$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{P_0}{2EF}$ ,  $k_0$  – коэффициент упругого отпора.

Сначала рассмотрим случай, когда  $x_0$  является постоянной величиной. При этом решение краевой задачи для уравнений (1.2.1) и (1.2.2) с краевыми условиями (1.2.4) и (1.2.5), а также условиями сопряжений (1.2.6) получим методом Фурье .

Вводя функцию  $\bar{u}_1(x, t)$  по формуле

$$u_1 = -\frac{(x - x_0)^2}{2x_0} \varepsilon_0(1 - \cos \omega t) + \bar{u}_1. \quad (1.2.7)$$

Краевые условия (1.2.3) и условия сопряжений (1.2.6) приводим к однородному виду:

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$\bar{u}_1 = u_2, \quad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{при } x = x_0$$

Условие (1.2.5) остается без изменения. Функция  $\bar{u}_1(x, t)$  удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x^2} = -B_0 - \frac{\varepsilon_0}{x_0} (1 - \cos \omega t) + \frac{(x - x_0)^2}{2x_0} \frac{\varepsilon_0 \omega^2}{c^2} \cos \omega t \quad (1.2.8)$$

и нулевым начальным условиям

$$\bar{u}_1(x, t) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_1(x, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (1.2.9)$$

Вводим безразмерные функции и величины

$$\bar{u}_1^* = \frac{\bar{u}_1}{l}, \quad \bar{u}_2 = \frac{u_2}{l}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0}{l}, \quad \tau = \frac{ct}{l}, \quad \beta = \frac{\pi D k_x l}{EF}, \quad \beta_0 = \frac{k_0 l}{EF}, \quad B_0 = \frac{\rho_0 g f_0 k \pi D h}{EF}.$$

Рассмотрим однородные уравнения:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1^*}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1^*}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad 0 < \bar{x} < \bar{x}_0 \quad (1.2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}^2} + \beta \bar{u}_2 = 0 \quad \bar{x}_0 < \bar{x} < 1. \quad (1.2.11)$$

При этом функции  $\bar{u}_1^*$  и  $\bar{u}_2$  удовлетворяют однородным граничным условиям

$$\frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \bar{x} = 0 \quad (1.2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}} + \beta_0 \bar{u}_2 = 0 \quad \bar{x} = 1 \quad (1.2.13)$$

$$\bar{u}_1^* = \bar{u}_2, \quad \frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}} \quad \text{при } \bar{x} = \bar{x}_0. \quad (1.2.14)$$

Решение краевой задачи (1.2.10) – (1.2.14) представим в виде

$$\bar{u}_1^* = \sum X_{1n}(\bar{x}) \Gamma_n(\tau) \quad (1.2.15)$$

$$\bar{u}_2 = \sum X_{2n}(\bar{x}) \Gamma_n(\tau), \quad (1.2.16)$$

где  $X_{1n}(x)$  и  $X_{2n}(x)$  – собственные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$X_{1n}'' + \lambda_n^2 X_{1n} = 0 \quad \text{при } 0 < \bar{x} < \bar{x}_0 \quad (1.2.17)$$

$$X_{2n}'' + \mu_n^2 X_{2n} = 0 \quad \text{при } \bar{x}_0 < \bar{x} < 1 \quad (1.2.18)$$

и краевым условиям

$$X_{1n}' = 0 \quad \text{при } \bar{x} = 0 \quad (1.2.19)$$

$$X_{2n}' + \beta_0 X_{2n} = 0 \quad \text{при } \bar{x} = 1 \quad (1.2.20)$$

$$X_{1n} = X_{2n} \quad \text{при } \bar{x} = \bar{x}_0 \quad (1.2.21)$$

$$X_{1n}' = X_{2n}' \quad \text{при } \bar{x} = \bar{x}_0 \quad (1.2.22)$$

где  $\mu_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \beta_0}$ ;  $\lambda_n$  – собственные числа.

Решения уравнений (1.2.17) и (1.2.18), удовлетворяющие условиям (1.2.19) и (1.2.20), представим в виде

$$\begin{aligned} X_{1n} &= a_n \cos \lambda_n x (b_n \cos \mu_n x_0 + c_n \sin \mu_n x_0), \\ X_{2n} &= \cos \lambda_n x_0 (b_n \cos \mu_n x + c_n \sin \mu_n x), \end{aligned}$$

где  $b_n = \beta_0 \sin \mu_n + \mu_n \cos \mu_n$ ,  $c_n = -\beta_0 \cos \mu_n + \mu_n \sin \mu_n$ .

Пользуясь условием (1.2.14) составим уравнение для определения собственных чисел  $\lambda_n$

$$\cos \lambda_n x_0 (c_n \cos \mu_n x_0 - b_n \sin \mu_n x_0) + \mu_n \sin \lambda_n x_0 (b_n \cos \mu_n x_0 + c_n \sin \mu_n x_0) \lambda_n = 0.$$

При выборе корней этого уравнения принимается условие  $\lambda_{n(\min)} > \beta_0$ .

Решение неоднородного уравнения (1.2.7) и однородного уравнения (1.2.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^* &= \sum X_{1n}(x) T_n(t) \\ \bar{u}_2 &= \sum X_{2n}(x) T_n(t) \end{aligned}$$

и, подставляя их в соответствующие уравнения (1.2.8), получаем

$$\begin{aligned} \sum (T_n'' + \lambda_n^2 T_n) X_{1n} &= -B_0 + \frac{\varepsilon}{x_0} (1 - \cos \bar{\omega} \tau) - \varepsilon_0 \frac{(\bar{x} - \bar{x}_0)^2}{2\bar{x}_0} \omega^2 \cos \bar{\omega} \tau \\ \sum (T_n'' + \lambda_n^2 T_n) X_{2n} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\bar{\omega} = \omega \frac{l}{c}$ .

Умножаем первое и второе уравнения на соответствующие собственные функции  $X_{1k}(x)$  и  $X_{2k}(x)$ , интегрируем соответственно в интервалах  $0 < x < x_0$  и  $x_0 < x < 1$  и результат складываем

$$\begin{aligned} &\sum (T_n'' + \lambda_n^2 T_n) \left[ \int_0^{x_0} X_{1n} X_{1k} dx + \int_0^{x_0} X_{2n} X_{2k} dx \right] = \\ &= - \int_0^{x_0} [B_0 + \frac{\varepsilon}{x_0} (1 - \cos \bar{\omega} \tau)] X_{1k} dx + \varepsilon_0 \omega^2 \int_0^{x_0} \frac{(\bar{x} - \bar{x}_0)^2}{2\bar{x}_0} \cos \bar{\omega} \tau X_{1k} dx. \end{aligned}$$

Пользуясь условиями (1.2.12) – (1.2.14), можно показать, что собственные функции  $X_{1n}(x)$  и  $X_{2n}(x)$  удовлетворяют условию ортогональности, получаем

$$\int_0^{x_0} X_{1n} X_{1k} dx + \int_0^{x_0} X_{2n} X_{2k} dx = 0 \quad \text{при } n \neq k.$$

Пользуясь условием ортогональности, получаем

$$T_n'' + \lambda_n^2 T_n = a_n + b_n \cos \omega \tau \quad (1.2.23)$$

$$\text{где } a_n = \left[ \int_0^{x_0} \left[ -B_0 + \frac{\varepsilon_0}{x_0} \right] X_{1n}(x) dx \right] / \|X_n\|; \quad b_n = \left[ -\frac{\varepsilon_0}{\bar{x}_0} \int_0^{x_0} \left[ \omega^2 \frac{(x-x_0)^2}{2} + 1 \right] X_{1n}(\bar{x}) d\bar{x} \right] / \|X_n\|;$$

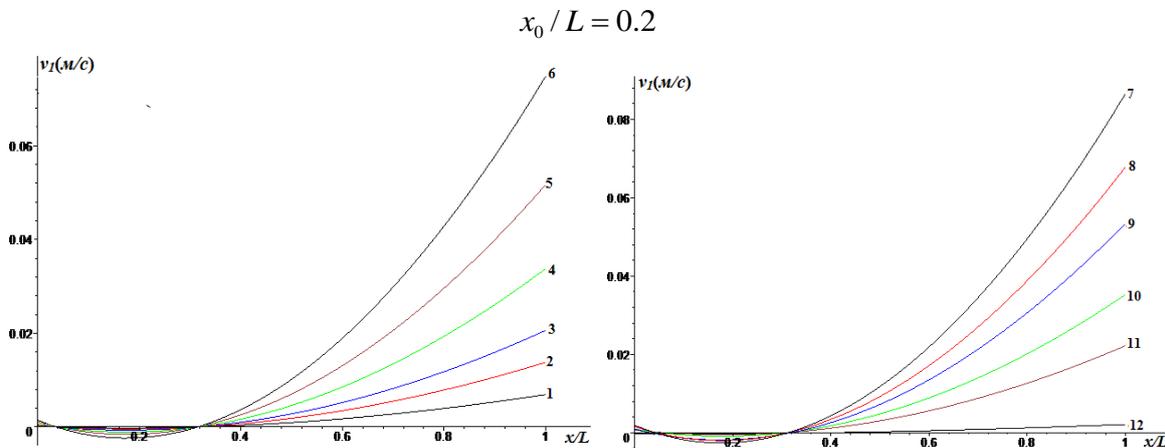
$$\|X_n\| = \int_0^{x_0} X_{1n}^2 dx + \int_{x_0}^1 X_{2n}^2 dx.$$

Решение уравнения (1.2.23) при условиях  $T_n(0) = 0$  и  $T_n'(0) = 0$  имеет вид

$$T_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\tau (a_n + b_n \cos \omega \xi) \sin \lambda_n (\tau - \xi) d\xi \quad (1.2.24)$$

В процессе выполнения расчета следует проверить условие (1.2.3), где выбирается знак функции  $sign v_1$  в зоне отрыва сечений трубопровода от поверхности грунта. В расчетах принято:  $k_0 = 5 \cdot 10^4$  Н/м,  $k_x = 10^7$  Н/м<sup>3</sup>,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, внешний диаметр стального трубопровода  $D = 0.2$  м, толщина стенки  $\delta = 0.005$  м,  $L = 20$  м,  $\rho_0 = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\omega = 30$  с<sup>-1</sup>,  $k = 0.5$ ,  $f = 0.3$ ,  $R_1 = 2$  м.

На рис. 1.8 представлены кривые изменения скорости сечений по длине трубопровода для  $\omega = 20$  с<sup>-1</sup> двух значений отношения  $x_0/L$  и безразмерного времени  $\tau = at/L$ . Видно, что для выбранных параметров скорость сечений трубопровода в зоне отрыва его поверхности от грунта, (кроме малого участка вблизи сечения  $x=0$ ), в интервале изменения безразмерного времени при  $0 < \tau < 40$  ( $0 < t < 0.16$  с) сохраняет положительный знак. Это указывает на возможность реализации колебательного процесса сечений трубопровода с положительным (при наличии малого участка с нулевой скоростью в случае  $x_0/L = 0.2$ ) знаком. Аналогичные кривые в случае  $\omega = 40$  с<sup>-1</sup> представлены на рис. 1.9. Видно, что рост частоты воздействия внешней силы приводит к росту скорости сечения трубопровода и уменьшению интервала изменения безразмерного времени  $0 < \tau < 20$  ( $0 < t < 0.8$  с).



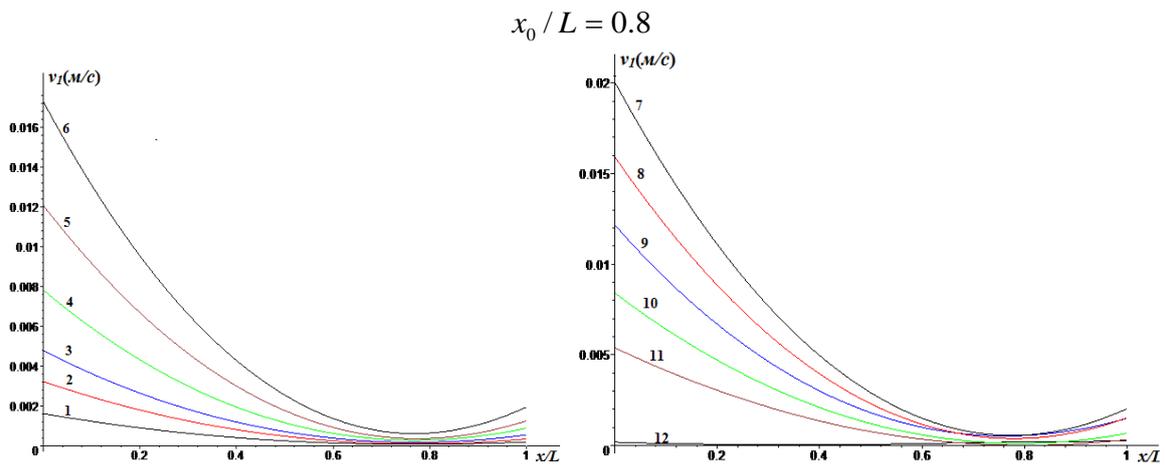


Рис. 1.8. Распределение скорости сечений трубопровода по его длине при  $\omega=20 \text{ c}^{-1}$  и различных значениях безразмерного времени  $\tau$ : 1 –  $\tau=1$ ; 2 –  $\tau=2$ ; 3 –  $\tau=3$ ; 4 –  $\tau=5$ ; 5 –  $\tau=8$ ; 6 –  $\tau=13$ ; 7 –  $\tau=18$ ; 8 –  $\tau=28$ ; 9 –  $\tau=31$ ; 10 –  $\tau=34$ ; 11 –  $\tau=36$ ; 12 –  $\tau=40$

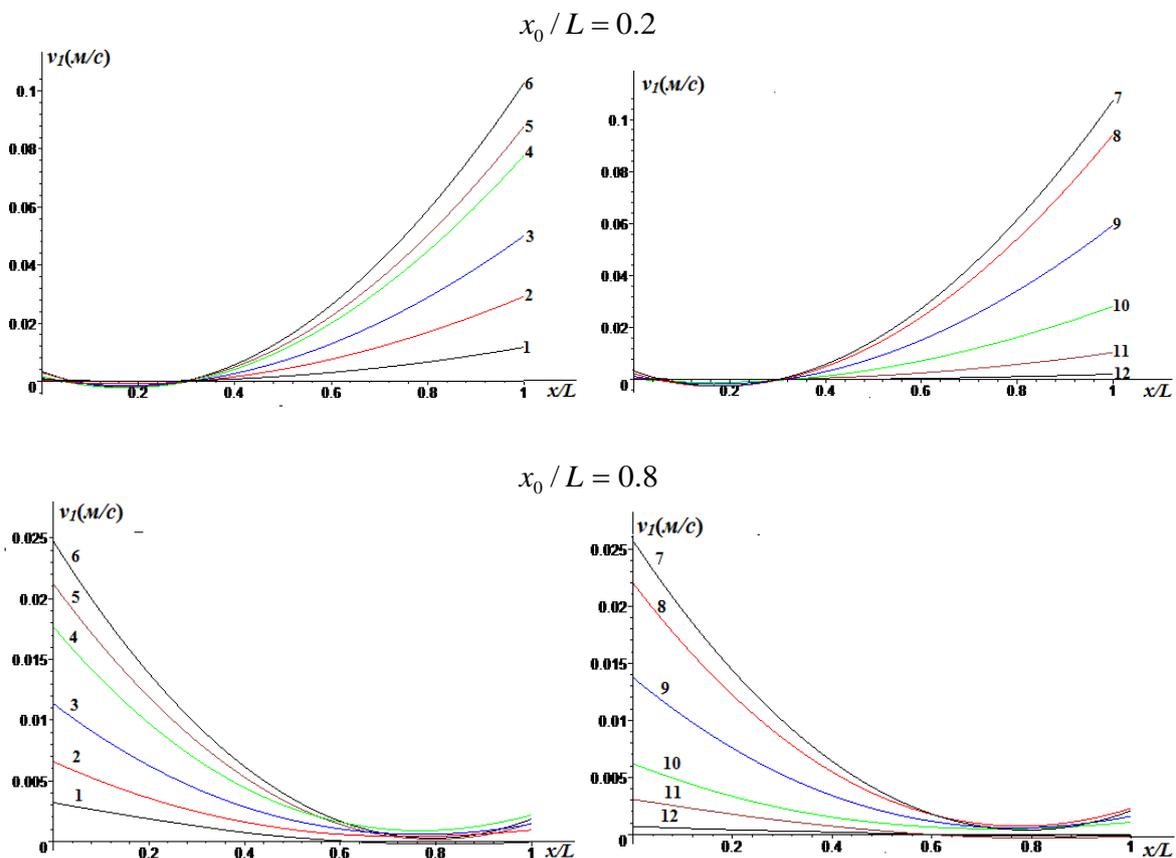


Рис. 1.9. Распределение скорости сечений трубопровода по его длине при  $\omega=40 \text{ c}^{-1}$  и различных значениях безразмерного времени  $\tau$ : 1 –  $\tau=0.7$ ; 2 –  $\tau=1.7$ ; 3 –  $\tau=3$ ; 4 –  $\tau=5$ ; 5 –  $\tau=6$ ; 6 –  $\tau=8$ ; 7 –  $\tau=10$ ; 8 –  $\tau=13$ ; 9 –  $\tau=16$ ; 10 –  $\tau=18$ ; 11 –  $\tau=19$ ; 12 –  $\tau=20$

На рис. 1.10 и 1.11 приведены кривые зависимости напряжений от безразмерного времени  $\tau$  в сечениях трубопровода для двух значений длины зоны отрыва  $x_0$  (отнесенной к  $L$ ) и частоты воздействия  $\omega(\text{c}^{-1})$  осевой силы  $P$ . Видно, что в связи с уменьшением длины интервала изменения безразмерного

времени  $\tau$  напряжения в сечениях трубопровода практически имеют одинаковую закономерность изменения по времени со случаем  $\omega=20\text{с}^{-1}$ .

$$x_0/L = 0.2$$

$$x_0/L = 0.8$$

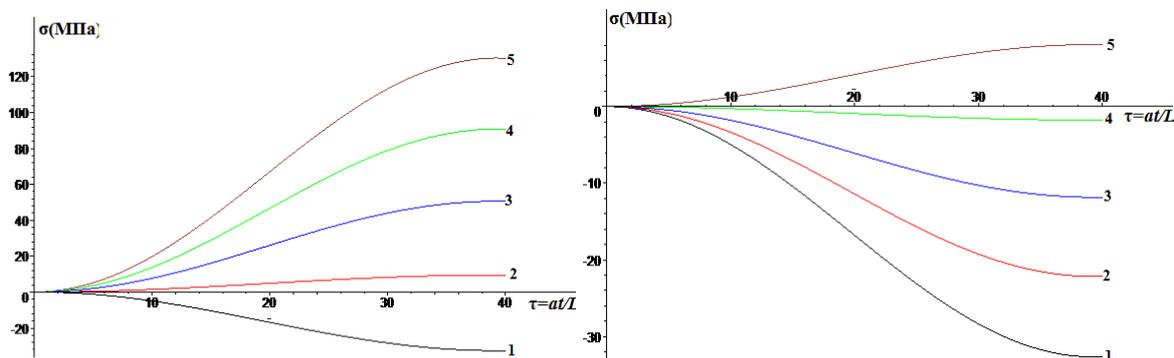


Рис. 1.10. Зависимости напряжения от безразмерного времени  $\tau=at/L$  при  $\omega=20\text{с}^{-1}$  в различных сечениях трубопровода (отнесенных к  $L$ )  $\bar{x} = x/L$ :  
 1 –  $\bar{x} = 0$ , 2 –  $\bar{x} = 0.25$ , 3 –  $\bar{x} = 0.5$ , 4 –  $\bar{x} = 0.75$ , 5 –  $\bar{x} = 1$

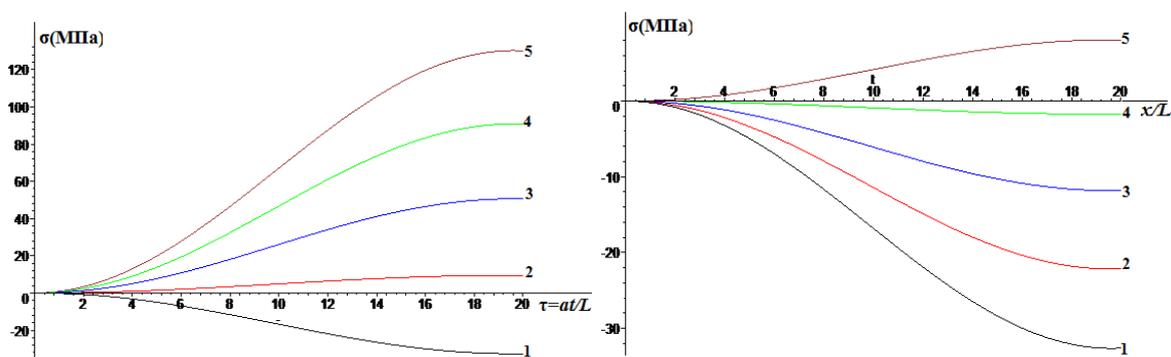


Рис. 1.11. Зависимости напряжения от безразмерного времени  $\tau=at/L$  при  $\omega=40\text{с}^{-1}$  в различных сечениях трубопровода (отнесенных к  $L$ )  $\bar{x} = x/L$ :  
 1 –  $\bar{x} = 0$ , 2 –  $\bar{x} = 0.25$ , 3 –  $\bar{x} = 0.5$ , 4 –  $\bar{x} = 0.75$ , 5 –  $\bar{x} = 1$

### 1.3. Действие волн на трубопровод, сопряженный с одним массивным узлом, и кусочно-однородным коэффициентом взаимодействия с грунтовой средой

Рассмотрим действие продольной волны на состыкованные между собой массивным узлом массой  $m$  двух трубопроводов конечной длины. На боковые поверхности действуют силы взаимодействия по линейным законам, причем коэффициенты жесткости при сдвиге принимают различные значения в каждой зоне поверхности трубопроводов. Рассмотрим случай упругой заделки концевых торцов трубопровода (рис. 1.12).

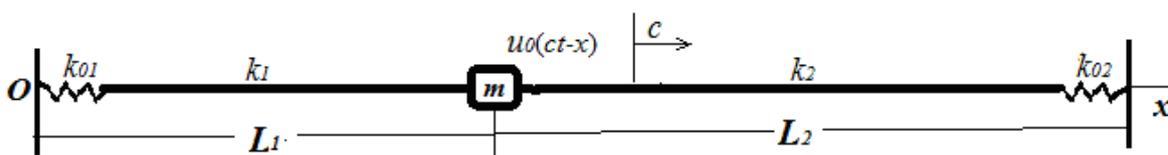


Рис. 1.12. Схема действия волны на трубопровод сопряженный с массивным узлом

Полное перемещение сечений трубопровода представим в виде суммы

$$\begin{aligned} u_1 &= L \left[ \bar{u}_1 + c_1 \bar{u}_0 (M\tau) (\xi - \bar{L}_1)^2 \right] \\ u_2 &= L \left[ \bar{u}_2 + c_2 \bar{u}_0 (M\tau - 1) (\xi - \bar{L}_1)^2 H(M\tau - 1) \right], \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где  $\xi = x/L$ ,  $\tau = at/L$ ,  $\bar{u}_i = u_i/L$ ,  $\bar{u}_0 = u_0/L$ ,  $c_1 = \frac{\beta_{01}}{L_1(2 + \beta_{01}L_1)}$ ,

$$c_2 = \frac{\beta_{0n}}{L_1(2 + \beta_{02}L_1)}, \quad \beta_{01} = k_{01}L/EF, \quad \beta_{02} = k_{02}L/EF, \quad M = c/a, \quad a = \sqrt{E/\rho_0}.$$

Здесь перемещения  $\bar{u}_1(\xi, \tau)$  и  $\bar{u}_2(\xi, \tau)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \xi^2} + \alpha_1 \bar{u}_1 = F_1(\tau, \xi) \quad 0 < \xi < \bar{L}_1 \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \xi^2} + \alpha_2 \bar{u}_2 = F_2(\tau, \xi) \quad \bar{L}_1 < \xi < \bar{L}_2 \quad (1.3.3)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} = \beta_{01} \bar{u}_1, \quad \text{при } \xi = 0 \quad (1.3.4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \xi} = -\beta_{0n} \bar{u}_n, \quad \text{при } \xi = 1, \quad (1.3.5)$$

а также условию сопряжения трубопровода в сечении  $\xi = \bar{L}_1$  с закрепленным к нему узлом

$$\bar{u}_1(\bar{L}_1, \tau) = \bar{u}_2(\bar{L}_1, \tau), \quad \gamma \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \tau^2} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} \quad \text{при } \xi = \bar{L}_1.$$

Здесь  $F_1 = \alpha_1 \bar{u}_0 (M\tau - \xi) + c_1 \{ 2\bar{u}_0 (M\tau) - (\xi - \bar{L}_1)^2 [M^2 \bar{u}_0''(M\tau) + \alpha_1 \bar{u}_0 (M\tau)] \}$ ;

$$\begin{aligned} F_2 &= \alpha_2 \bar{u}_0 (M\tau - \xi) + \\ &+ c_2 \{ 2\bar{u}_0 (M\tau - 1) - (\xi - \bar{L}_1)^2 [M^2 \bar{u}_0''(M\tau - 1) + \alpha_2 \bar{u}_0 (M\tau - 1)] H(M\tau - 1) \}; \end{aligned}$$

$$\gamma = m/\rho_0 FL; \quad \alpha_1 = k_1 L^2/EF; \quad \alpha_2 = k_2 L^2/EF; \quad \bar{L}_2 = 1 - \bar{L}_1,$$

где  $\bar{u}_1(\xi, \tau)$  и  $\bar{u}_2(\xi, \tau)$  – перемещения сечений трубопроводов на соответствующих участках  $0 < \xi < \bar{L}_1$  и  $\bar{L}_1 < \xi < 1$ ;  $u_0(z)$  – перемещение частиц грунта за фронтом волны, распространяющейся со скоростью  $c$ ;  $E$  и  $\rho_0$  – модуль Юнга и плотность материала трубопровода;  $F$  – площадь его поперечного сечения;  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты жесткости при сдвиге на двух участках поверхности трубопроводов длиной  $L_1$  и  $L_2 = L - L_1$ ;  $L$  – общая длина

трубопровода;  $k_{01}$  и  $k_{02}$  – коэффициенты жесткости упругих элементов, связывающие торцы трубопровода с грунтовой средой при сжатии – растяжении;  $H(z)$  – функция Хевисайда. Решения краевых задач (1.3.4), (1.3.5) для уравнений (1.3.2) и (1.3.3) получим методом Фурье

$$\bar{u}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i}(\xi) T_i(\tau), \quad \bar{u}_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{2i}(\xi) T_i(\tau),$$

где  $\varphi_{1i}$  и  $\varphi_{2i}$  – собственные функции

$$\varphi_{1i} = \varphi_{1i}(\xi) = \lambda_{1i} \cos \lambda_{1i} \xi + \beta_{01} \sin \lambda_{1i} \xi,$$

$$\varphi_{2i} = \varphi_{2i}(\xi) = s_i [\lambda_{2i} \cos \lambda_{2i} (1 - \xi) + \beta_{01} \sin \lambda_{2i} (1 - \xi)],$$

$$a_{1i} = \varphi_{1i}(\bar{L}_1), \quad a_{2i} = \varphi_{2i}(\bar{L}_1), \quad \lambda_{1i} = \sqrt{\mu_i^2 - \alpha_1}, \quad \lambda_{2i} = \sqrt{\mu_i^2 - \alpha_2}, \quad s_i = a_{1i} \lambda_{2i} / a_{2i} \lambda_{1i},$$

$\mu_i$  – собственные числа, определяемые из уравнения

$$(b_{1i} - s_i b_{2i})(\mu_i^2 + \alpha_1) + \gamma \mu_i^2 a_{1i} = 0. \quad (1.3.6)$$

Здесь  $b_{1i} = -\lambda_{1i} \sin \lambda_{1i} \bar{L}_1 + \beta_{01} \cos \lambda_{1i} \bar{L}_1$ ,  $b_{2i} = \lambda_{2i} \sin \lambda_{2i} \bar{L}_2 - \beta_{02} \cos \lambda_{2i} \bar{L}_2$ .

$$a_{1i} = \lambda_{1i} \cos \lambda_{1i} \bar{L}_1 + \beta_{01} \sin \lambda_{1i} \bar{L}_1, \quad a_{2i} = \lambda_{2i} \cos \lambda_{2i} \bar{L}_2 + \beta_{02} \sin \lambda_{2i} \bar{L}_2.$$

При этом функции  $\varphi_{1i}$  и  $\varphi_{2i}$  удовлетворяют условию ортогональности (1.1.28), где учитывается наличие массы узла

$$\int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i} \bar{\varphi}_{1k} d\xi + \int_{\bar{L}_{n1}}^1 \bar{\varphi}_{ni} \bar{\varphi}_{nk} d\xi + \gamma \varphi_{1i} \varphi_{1k} = 0. \quad (1.3.7)$$

Пользуясь этим условием, составим уравнение для определения функции  $T_i(\tau)$

$$T_i'' + \lambda_i^2 T_i = \frac{1}{\|\varphi_i\|} \left[ \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i} F_1 d\xi + \int_{\bar{L}_1}^1 \bar{\varphi}_{2i} F_2 d\xi \right], \quad (1.3.8)$$

$$\text{где } \|\varphi_i\| = \int_0^{\bar{L}_1} \bar{\varphi}_{1i}^2 d\xi + \int_{\bar{L}_1}^1 \bar{\varphi}_{2i}^2 d\xi + \gamma \varphi_i^2.$$

Уравнения (1.3.8) интегрируются при нулевых начальных условиях.

На рис. 1.13 – 1.14 представлены кривые распределения напряжений по длине стального трубопровода с внешним диаметром  $D_1=0.2$  м и толщиной  $\delta=0.005$  м для различных значений длины волны  $l$ , массы узла и безразмерного времени  $\tau=c_0 t/L$  в случае равных значений коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ . В расчетах принято  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho_0=7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $k_1=k_2=10^6$  Н/м<sup>3</sup>,  $k_{01}=k_{02}=10^7$  Н/м,  $L=100$  м,  $\bar{L}_1 = \bar{L}_2 = 0.5$ ,  $M=0.5$ .

На трубопровод действует волна вида ( $A_0=0.003$  м,  $M=0.5$ )

$$u_0 = 0.5A_0[1 - \cos(\omega(M\tau - \xi))]H(M\tau - \xi), (\omega = l/L) \quad (1.3.9)$$

Из анализа кривых следует, что распределение напряжения по длине трубопровода носит колебательный характер и рост длины волны и массы узла приводит соответственно к снижению и увеличению максимальных значений напряжений в сечениях трубопровода. На рис. 1.15 и 1.16 представлены аналогичные результаты в случае, когда коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  принимают значения  $k_1=10^6$  Н/м<sup>3</sup>,  $k_2=5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>3</sup>. Видно, что наличие разных коэффициентов взаимодействия меняет характер колебаний сечений трубопровода и практически не влияет на максимальные значения амплитуд колебаний.

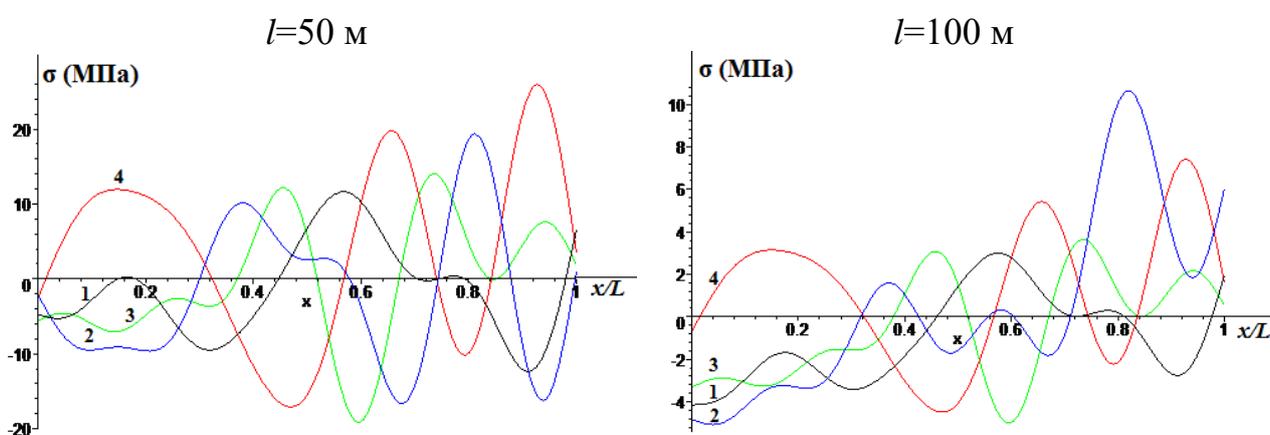


Рис. 1.13. Графики распределения напряжений по длине (отнесенной к  $L$ ) трубопровода для  $k_1=k_2=10^6$  Н/м<sup>3</sup>,  $m=0$ , различных значений длины волны  $l$  и безразмерного времени  $\tau=at/L$ : 1 –  $\tau=4$ ; 2 –  $\tau=8$ ; 3 –  $\tau=12$ ; 4 –  $\tau=16$

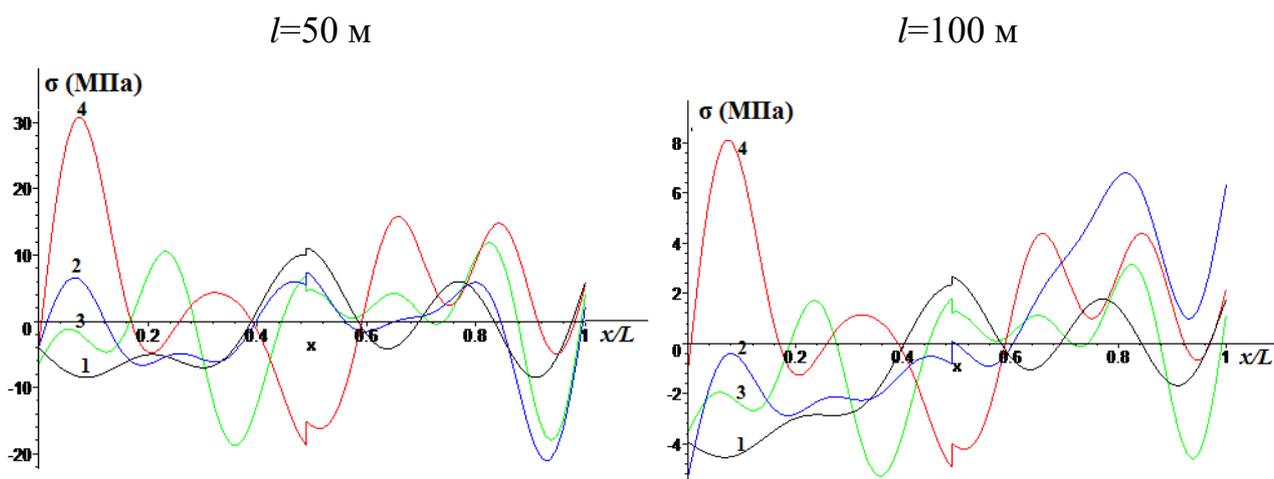


Рис. 1.14. Графики распределения напряжений по длине (отнесенной к  $L$ ) трубопровода для  $k_1=k_2=10^6$  Н/м<sup>3</sup>,  $m=100$  кг, различных значений длины волны  $l$  и безразмерного времени  $\tau=at/L$ : 1 –  $\tau=4$ ; 2 –  $\tau=8$ ; 3 –  $\tau=12$ ; 4 –  $\tau=16$

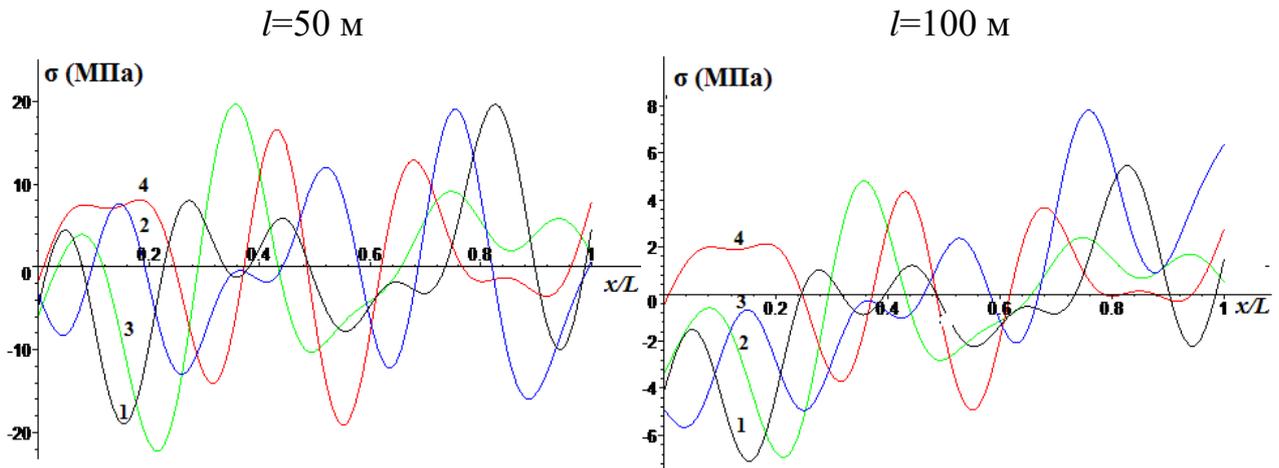


Рис. 1.15. Графики распределения напряжений по длине (отнесенной к  $L$ ) трубопровода для  $k_1=10^6$  Н/м<sup>3</sup>,  $k_2=5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>3</sup>,  $m=0$  кг, различных значений длины волны  $l$  и безразмерного времени  $\tau=at/L$ : 1 –  $\tau=4$ ; 2 –  $\tau=8$ ; 3 –  $\tau=12$ ; 4 –  $\tau=16$

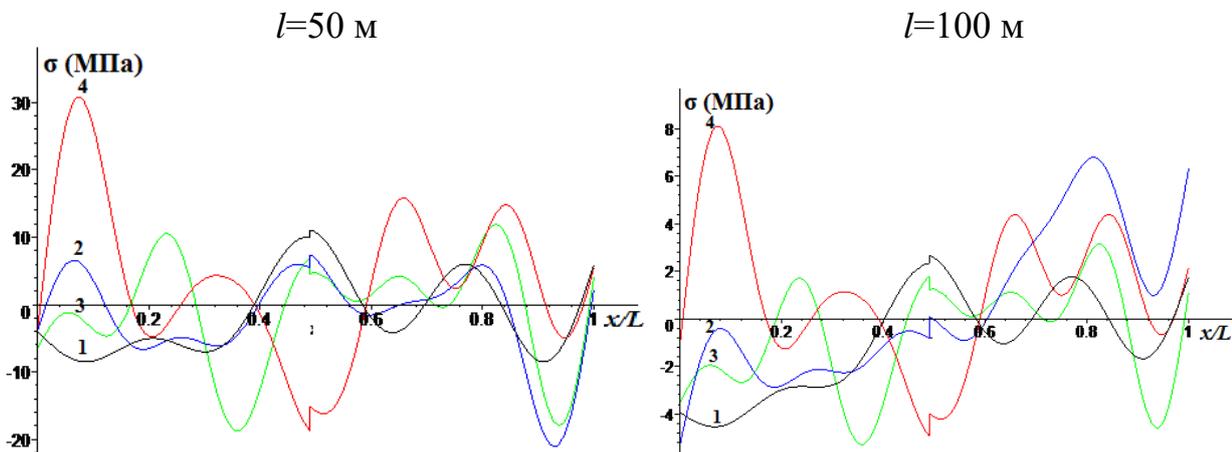


Рис. 1.16. Графики распределения напряжений по длине (отнесенной к  $L$ ) трубопровода для  $k_1=10^6$  Н/м<sup>3</sup>,  $k_2=5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>3</sup>,  $m=100$  кг, различных значений длины волны  $l$  и безразмерного времени  $\tau=at/L$ : 1 –  $\tau=4$ ; 2 –  $\tau=8$ ; 3 –  $\tau=12$ ; 4 –  $\tau=16$

#### 1.4. Действие волны на трубопровод, несущий на концах массивные узлы, с упругими элементами контакта с грунтом

Рассмотрим теперь случай воздействия продольной волны на трубопровод, торцы которого жестко закреплены к массивным узлам. Узлы в свою очередь по осевому направлению взаимодействуют с окружающим грунтом по линейному закону. Оценим влияние массы узлов и силы контакта с грунтовой средой на состояние трубопровода в процессе обтекания его волной. Считаем, что коэффициенты продольного сдвига на поверхности трубопровода – кусочно-однородные функции его длины. Установим начало координат в

левом торце трубопровода и направим ось  $Ox$  по оси трубопровода слева направо (рис. 1.17).

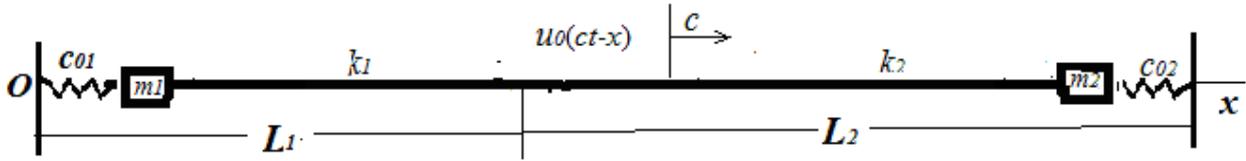


Рис. 1.17. Схема действия волны на трубопровод, сопряженный на торцах с массивными узлами

Поскольку узлы жестко связаны с торцами трубопровода, то в этих сечениях действуют односторонние силы опор, в результате чего производные к нормали к узлам терпят разрыв, причем производные в этих сечениях правее от сечения  $x=0$  и левее от сечения  $x=L$  удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{m_1}{EF} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + c_{01}[u_1 - u_0(ct)]/EF \quad \text{при } x = +0 \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{m_2}{EF} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c_{02}[u_2 - u_0(ct-L)H(ct-L)]/EF \quad \text{при } x = L-0, \quad (1.4.2)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы узлов;  $c_{01}$  и  $c_{02}$  – соответственно коэффициенты упругой связи левого и правого узлов с грунтом.

Уравнения (1.4.1) и (1.4.2) интегрируются при нулевых начальных условиях

$$u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \quad u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t=0$$

Кроме того, на границе участков контакта трубопровода с грунтом, выполняется условие сопряжения:

$$u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{при } x=L_1 \quad (1.4.3)$$

Уравнение движения каждого участка трубопровода с учетом производных  $\frac{\partial u_1}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u_2}{\partial x}$  представим в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \alpha_1[u_1 - u_0(\tau - \xi/M)H(\tau - \xi/M)] = 0 \quad \text{при } 0 < x < \bar{L}_1 \quad (1.4.4)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \alpha_2[u_2 - u_0(\tau - \xi/M)H(\tau - \xi/M)] = 0 \quad \text{при } \bar{L}_1 < x < 1 \quad (1.4.5)$$

Введем обозначения:  $\gamma_1 = m_1 / \rho_0 FL$ ,  $\gamma_2 = m_2 / \rho_0 FL$ .

Тогда граничные условия (1.4.10) – (1.4.11) приводятся к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \gamma_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \beta_{01}[u_1(0, \tau) - u_0(\tau)H(\tau)] \quad \text{при } \xi = 0 \quad (1.4.6)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi} = \gamma_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \beta_{02}[u_2(1, \tau) - u_0(\tau - 1/M)H(\tau - 1/M)] \quad \text{при } \xi = 1 \quad (1.4.7)$$

$$u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \quad \text{при } x = \bar{L}_1, \quad (1.4.8)$$

где  $\beta_{01} = c_{01}L/EF$ ,  $\beta_{02} = c_{02}L/EF$ .

Вводя новые функции  $\bar{u}_1(\tau, \xi)$  и  $\bar{u}_2(\tau, \xi)$  по формулам

$$u_1 = \bar{u}_1 + u_0(\tau - \xi/M) + v_1(\tau)(\xi - \bar{L}_1)^2, \\ u_2 = \bar{u}_2 + u_0(\tau - \xi/M) + v_2(\tau - 1/M)H(\tau - 1/M)(\xi - \bar{L}_1)^2,$$

приведем граничные условия (1.4.6) и (1.4.7) к однородному виду

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} = \gamma_1 \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \tau^2} + \beta_{01}\bar{u}_1(0, \tau) \quad (1.4.9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} = -\gamma_2 \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \tau^2} - \beta_{02}\bar{u}_2(1, \tau) \quad (1.4.10)$$

где  $v_1(\tau)$  и  $v_2(\tau)$  определяются по формулам

$$v_1 = v_1(\tau) = -\frac{1}{M\gamma_1\bar{L}_1^2} \left( M\gamma_1 \left[ u_0(\tau) - \int_0^\tau u_0(z) \sin \omega_1(\tau - z) dz \right] + \int_0^\tau u_0(z) \cos \omega_1(\tau - z) dz \right)$$

$$v_2 = v_2(\tau) = \frac{-1}{M\gamma_2\bar{L}_2^2} \left( -M\gamma_2 \left[ u_0\left(\tau - \frac{1}{M}\right) H\left(\tau - \frac{1}{M}\right) - \int_{1/M}^\tau u_0\left(z - \frac{1}{M}\right) \sin \omega_2(\tau - z) dz \right] \right) + \\ + \frac{1}{M\gamma_2\bar{L}_2^2} \left( \int_{1/M}^\tau u_0\left(z - \frac{1}{M}\right) \cos \omega_2(\tau - z) dz \right),$$

где  $\omega_1 = \sqrt{(2 + \bar{L}_1\beta_{01})/\bar{L}_1\gamma_1}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{(2 + \bar{L}_2\beta_{02})/\bar{L}_2\gamma_2}$ ,  $\bar{L}_2 = 1 - \bar{L}_1$ .

Уравнения (1.4.9) и (1.4.14) относительно функций  $\bar{u}_1(\tau, \xi)$  и  $\bar{u}_2(\tau, \xi)$  записываются в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \xi^2} + \alpha_1 \bar{u}_1 = -\ddot{v}_1 (\xi - \bar{L}_1)^2 + 2v_1 + \frac{1-M^2}{M^2} u_0''(\tau - \xi/M) H(\tau - \xi/M) \quad (1.4.20)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \xi^2} + \alpha_2 \bar{u}_2 = -\ddot{v}_2 (\xi - \bar{L}_1)^2 + 2v_2 + \frac{1-M^2}{M^2} u_0''(\tau - \xi/M) H(\tau - \xi/M) \quad (1.4.21)$$

Для решения краевой задачи (1.4.10) – (1.4.12) для уравнений (1.4.20) и (1.4.21) используем метод Фурье. Решение однородной части уравнений (1.4.20) и (1.4.21) для каждого участка представим в виде

$$u_1 = \varphi_1(\xi) T(\tau), \quad u_2 = \varphi_2(\xi) T(\tau)$$

где  $\varphi_1(\xi)$ ,  $\varphi_2(\xi)$  и  $T(\tau)$  удовлетворяют уравнениям

$$T'' + \mu^2 T = 0, \quad \varphi_1'' + \lambda_1^2 \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2'' + \lambda_2^2 \varphi_2 = 0, \quad (1.4.22)$$

где  $\lambda_1 = \sqrt{\mu^2 - \alpha_1}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{\mu^2 - \alpha_2}$ .

Поскольку функция  $T(\tau)$  одна и та же для функций  $u_1(\xi, \tau)$  и  $u_2(\xi, \tau)$ , то необходимо требовать выполнения условия

$$\alpha_1 + \lambda_1^2 = \alpha_2 + \lambda_2^2,$$

откуда устанавливаем связь между числами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

$$\lambda_2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \alpha_1 - \alpha_2}.$$

Функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  согласно (1.4.17) – (1.4.18) удовлетворяют условиям разрыва производных на торцах  $x=0$  и  $x=1$ :

$$\varphi_1'(0) = -(\gamma_1 \mu^2 - \beta_{01}) \varphi_1(0), \quad \varphi_1'(1) = -(\gamma_2 \mu^2 + \beta_{02}) \varphi_1(1).$$

Используя эти зависимости, представим решения последних двух уравнений (1.4.22) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -A_1 [(\gamma_1 \mu^2 - \beta_{01}) \sin \lambda_1 \xi - \lambda_1 \cos \lambda_1 \xi] / \lambda_1, \\ \varphi_2 &= A_2 [(\gamma_2 \mu^2 + \beta_{02}) \sin \lambda_2 (1 - \xi) + \lambda_2 \cos \lambda_2 (1 - \xi)] / \lambda_2. \end{aligned}$$

Постановка выражений  $\varphi_1, \varphi_2$  в условия (1.4.17) приводит к системе однородных уравнений

$$A_1 a_{11} + A_2 a_{12} = 0,$$

$$A_1 a_{21} + A_2 a_{22} = 0,$$

где  $a_{11} = -[(\gamma_1 \mu^2 - \beta_{01}) \sin \lambda_1 \bar{L}_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1 \bar{L}_1] / \lambda_1$ ,

$a_{12} = [(\gamma_2 \mu^2 + \beta_{02}) \sin \lambda_2 \bar{L}_2 + \lambda_2 \cos \lambda_2 \bar{L}_2] / \lambda_2$ ,

$a_{21} = -(\gamma_1 \mu^2 - \beta_{01}) \cos \lambda_1 \bar{L}_1 - \lambda_1 \sin \lambda_1 \bar{L}_1$ ,  $a_{22} = -(\gamma_2 \mu^2 + \beta_{02}) \cos \lambda_2 \bar{L}_2 + \lambda_2 \sin \lambda_2 \bar{L}_2$ .

Приравнявая определитель системы (1.4.20) нулю составим уравнения для определения собственных чисел  $\mu = \mu_i$

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = 0 \quad (1.4.23)$$

Полагая  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = a_{11} / a_{12} = a_{21} / a_{22}$ , собственные функции представим в виде

$$\varphi_1 = -[(\gamma_1 \mu^2 - \beta_{01}) \sin \lambda_1 \xi - \lambda_1 \cos \lambda_1 \xi] / \lambda_1$$

$$\varphi_2 = A_2 [(\gamma_2 \mu^2 + \beta_{02}) \sin \lambda_2 (1 - \xi) + \lambda_2 \cos \lambda_2 (1 - \xi)] / \lambda_2.$$

Можно показать, что собственные функции  $\varphi_1, \varphi_2$  удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int_0^{\bar{L}_1} \varphi_{1i} \varphi_{1k} d\xi + \int_{\bar{L}_1}^1 \varphi_{2i} \varphi_{2k} d\xi + \gamma_1 \varphi_{1i}(0) \varphi_{1k}(0) + \gamma_2 \varphi_{2i}(1) \varphi_{2k}(1) = 0 \text{ при } i \neq k \quad (1.4.24)$$

Решение неоднородных уравнений (1.4.20) и (1.4.21) представим в виде разложений по собственным функциям  $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}$

$$\bar{u}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1i}(x) T_i(t), \quad \bar{u}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2i}(x) T_i(t)$$

Подставляя выражения  $\bar{u}_1$  и  $\bar{u}_2$  в уравнения (1.4.20) и (1.4.21), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{T}_i + \mu_i^2 T_i) \varphi_{1i} = -\ddot{v}_1(\tau) (\xi - \bar{L}_1)^2 + 2v_1(\tau) + (1 - M^2) u_0''(\tau - \xi/M) H(\tau - \xi/M) / M^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{T}_i + \mu_i^2 T_i) \varphi_{2i} = -\ddot{v}_2(\tau) (\xi - \bar{L}_1)^2 + 2v_2(\tau) + (1 - M^2) u_0''(\tau - \xi/M) H(\tau - \xi/M) / M^2.$$

Пользуясь условием ортогональности (1.4.24), составим уравнения для определения функций  $T_i(\tau)$

$$\ddot{T}_i + \mu_i^2 T_i = -\ddot{v}_1(\tau) b_{1i} + \ddot{v}_2(\tau) b_{2i} + 2v_1(\tau) c_{1i} + 2v_2(\tau) c_{2i} + F_{1i}(\tau) + F_{2i}(\tau)$$

Здесь  $b_{1i} = \frac{1}{\|\varphi_i\|} \int_0^{\bar{L}_1} (\xi - \bar{L}_1)^2 \varphi_{1i}(\xi) d\xi$ ,  $c_{1i} = \frac{1}{\|\varphi_i\|} \int_0^{\bar{L}_1} \varphi_{1i}(\xi) d\xi$ ,

$$b_{2i} = \frac{1}{\|\varphi_i\|_{L_1}} \int_{L_1}^1 (\xi - \bar{L}_1)^2 \varphi_{2i}(\xi) d\xi, \quad c_{2i} = \frac{1}{\|\varphi_i\|_{L_1}} \int_{L_1}^1 \varphi_{1i}(\xi) d\xi,$$

$$F_{1i} = \frac{1 - M^2}{M^2 \|\varphi_i\|} \int_0^{M\tau} u_0''(\tau - \xi/M) \varphi_{1i}(\xi) d\xi \quad \text{при } \tau < \bar{L}_1/M,$$

$$F_{1i} = \frac{1 - M^2}{M^2 \|\varphi_i\|} \int_0^{\bar{L}_1} u_0''(\tau - \xi/M) \varphi_{1i}(\xi) d\xi \quad \text{при } \tau > \bar{L}_1/M$$

$$F_{2i} = 0 \quad \text{при } \tau < \bar{L}_1/M$$

$$F_{2i} = \frac{1 - M^2}{M^2 \|\varphi_i\|} \int_{\bar{L}_1}^{M\tau} u_0''(\tau - \xi/M) \varphi_{2i}(\xi) d\xi \quad \text{при } \bar{L}_1/M < \tau < 1/M,$$

$$F_{2i} = \frac{1 - M^2}{M^2 \|\varphi_i\|} \int_{\bar{L}_1}^1 u_0''(\tau - \xi/M) \varphi_{2i}(\xi) d\xi \quad \text{при } \tau > 1/M,$$

$$\|\varphi_i\| = \int_0^{\bar{L}_1} \varphi_{1i}^2 d\xi + \int_{\bar{L}_1}^1 \varphi_{2i}^2 d\xi + \gamma_1 \varphi_{1i}^2(0) + \gamma_2 \varphi_{2i}^2(1).$$

На рис. 1.18 – 1.22 представлены графики изменения осевых напряжений  $\sigma$  (МПа) по безразмерному времени  $\tau$  в сечениях для различных значений параметров  $m_1, m_2, k_1, k_2, l$  ( $l$  – длина волны) при действии волны вида (1.4.9). На рис. 1.18 показаны графики изменения напряжения  $\sigma$  (МПа) в сечениях  $x$  (отнесенных к  $L$ ) при  $k_1=k_2=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{01}=c_{02}=10^7$  Н/м,  $m_1=m_2=30$  кг для двух значений длины волны  $l$ .

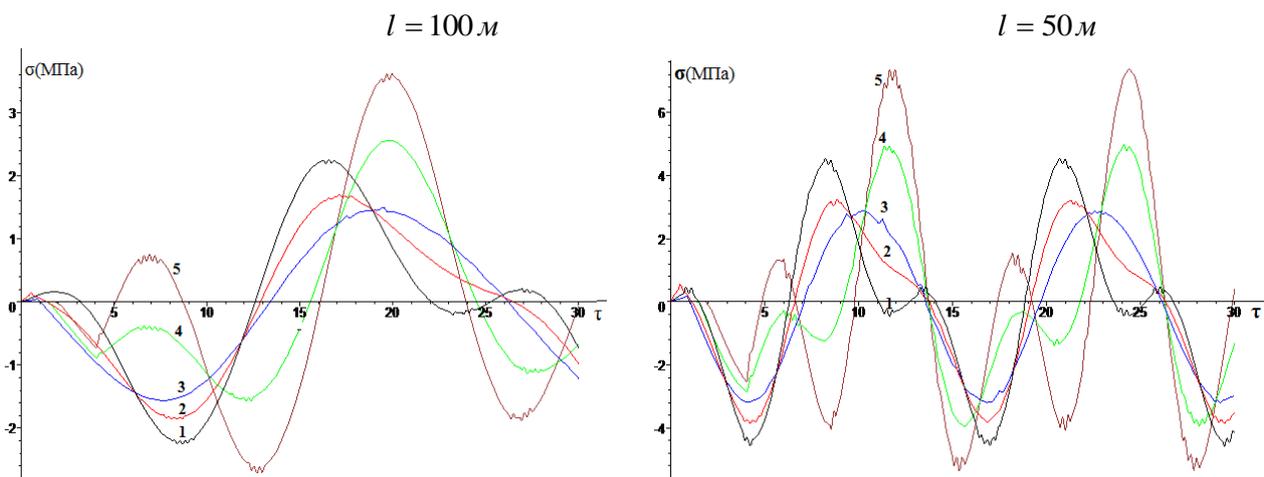


Рис. 1.18. Зависимости напряжений в различных сечениях (отнесенных к  $L$ ) трубопровода для двух значений длины волны  $l$  при  $m_1 = m_2 = 400$  кг: 1 –  $\xi=0$ ; 2 –  $\xi=0.25$ ; 3 –  $\xi=0.45$ ; 4 –  $\xi=0.75$ ; 5 –  $\xi=1$

Из анализа графиков, представленных на рис. 1.18, следует, изменение напряжения по безразмерному времени  $\tau=at/L$  в каждом сечении трубопровода

имеет колебательный характер с разными частотами и амплитудами. Причем наибольшую амплитуду независимо от длины волны  $l$  имеет сечение трубопровода  $\xi=1$  ( $x=L$ ), что из-за большого времени взаимодействия обтекаемой трубопровод волной, значения напряжений увеличиваются с ростом длины волны. При этом при сопряжении концевых сечений трубопровода с узлами приводит к изменению волновой картины в сечениях трубопровода, причем действие длинной волны на трубопровод приводит к снижению значений напряжений в сечениях трубопровода.

На рис. 1.19 представлены результаты расчетов для двух разных значений массы узлов. Видно, что изменение массы узлов практически не влияет на закономерности изменения напряжения по времени в различных сечениях трубопровода, но они могут влиять на изменение частотного состава, где на графиках наблюдается наличие дополнительных частот с мелкими амплитудами, связанные с колебаниями узлов за счет упругой связи их с грунтом.

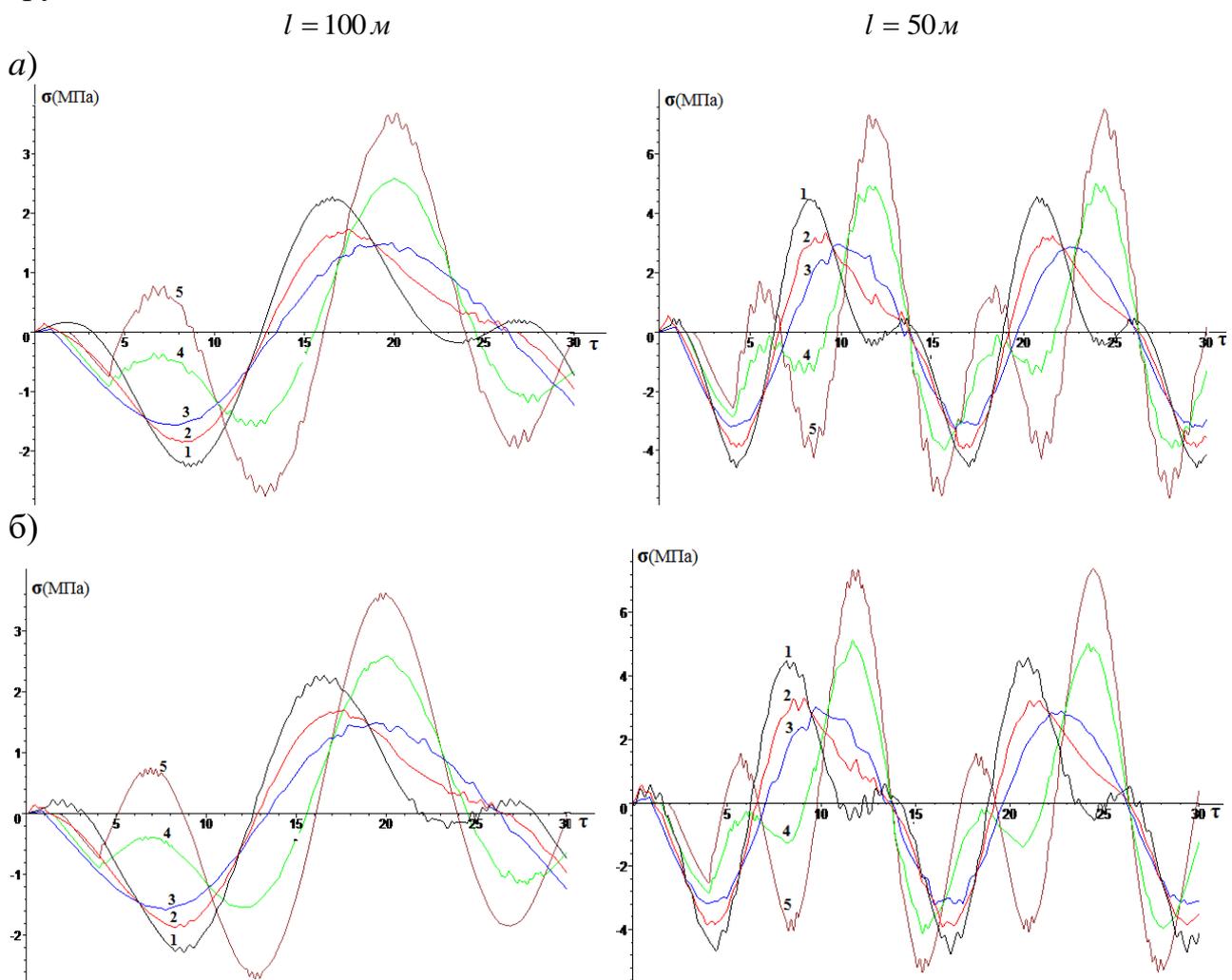


Рис. 1.19. Зависимости напряжений в различных сечениях (отнесенных к  $L$ ) трубопровода от безразмерного времени  $\tau$  при  $k_1=k_2=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{01}=c_{02}=10^7$  Н/м, для двух значений массы  $m_1=30$  кг,  $m_2=100$  кг (а) и  $m_1=100$  кг,  $m_2=30$  кг (б): 1 –  $\xi=0$ ; 2 –  $\xi=0.25$ ; 3 –  $\xi=0.45$ ; 4 –  $\xi=0.75$ ; 5 –  $\xi=1$

На рис. 1.20 показаны графики изменения напряжения в сечениях по переменной  $\tau$  для двух значений коэффициентов упругости  $c_{01}$  и  $c_{02}$ . Видно, что увеличение коэффициента  $c_{02}$  в 5 раз приводит к снижению напряжения примерно в 1.5 – 2 и 1.2 – 1.5 раза в сечениях вблизи расположения правого узла (рис. 1.20, а, кривые 4 и 5) соответственно при действии короткой длиной волны. А увеличение коэффициента жесткости  $c_{01}$  приводит к незначительному снижению напряжения в сечении вблизи узла, расположенного на правом торце трубопровода (рис. 1.20, б, кривые 1 и 2).

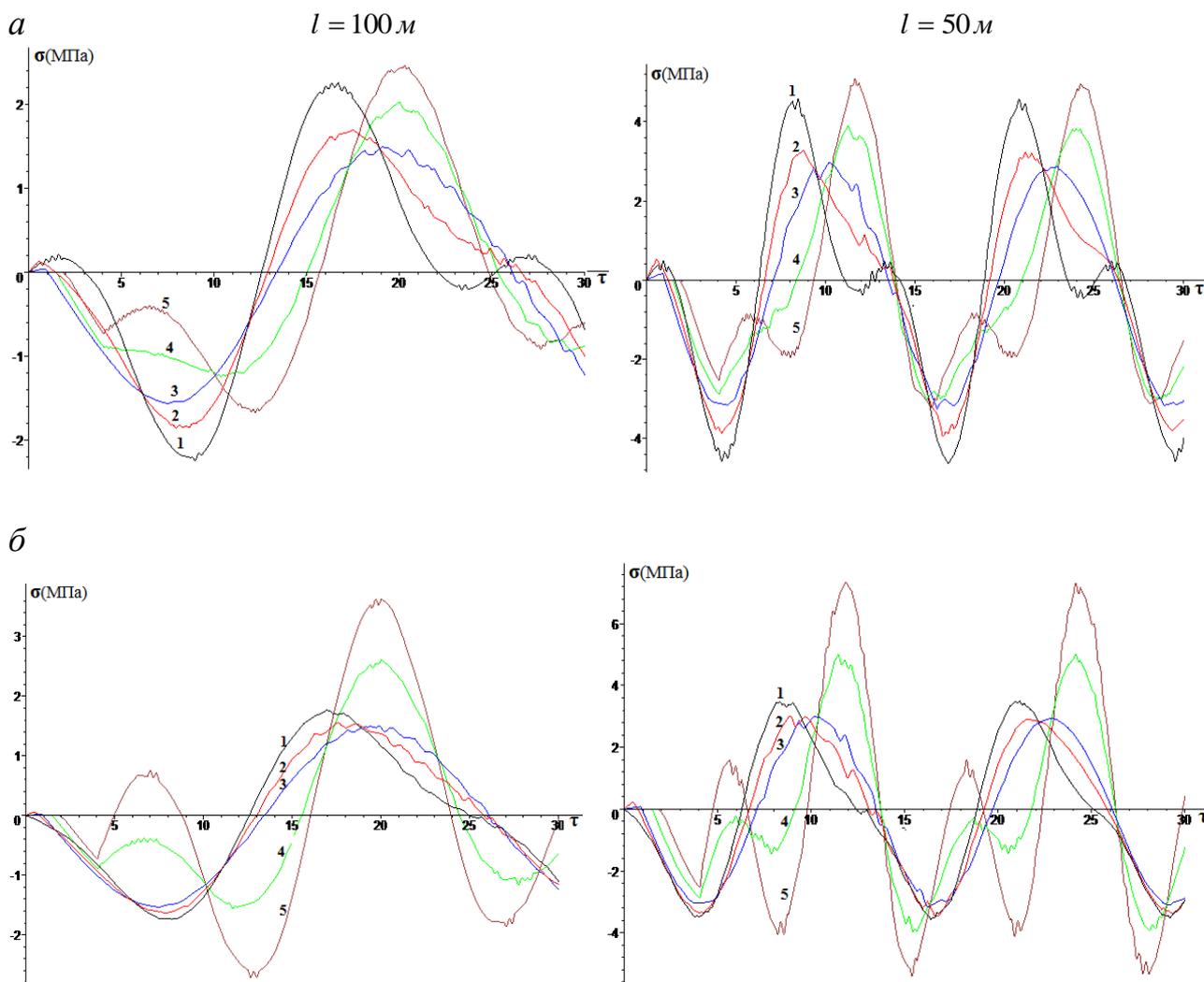


Рис. 1.20. Зависимости напряжений в различных сечениях (отнесенных к  $L$ ) трубопровода от безразмерного времени  $\tau$  для  $k_1=k_2=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $m_1=m_2=40$  кг и двух значений коэффициентов взаимодействия  $c_{01}=10^7$  Н/м,  $c_{02}=5 \cdot 10^7$  Н/м (а);  $c_{01}=5 \cdot 10^7$  Н/м,  $c_{02}=10^7$  Н/м (б):  
 1 –  $\xi=0$ ; 2 –  $\xi=0.25$ ; 3 –  $\xi=0.45$ ; 4 –  $\xi=0.75$ ; 5 –  $\xi=1$

Оценка влияния коэффициентов продольного сдвига  $k_1$  и  $k_2$  на напряженное состояние трубопровода производилась по результатам анализа графиков, представленных на рис. 1.21. Анализ кривых показывает, что наличие на поверхности взаимодействия с различными коэффициентами взаимодействия практически не меняют волновую картину в сечениях вблизи начального узла, но приводит к снижению напряжения в сечениях вблизи дальнего узла (рис. 1.20, а, б).

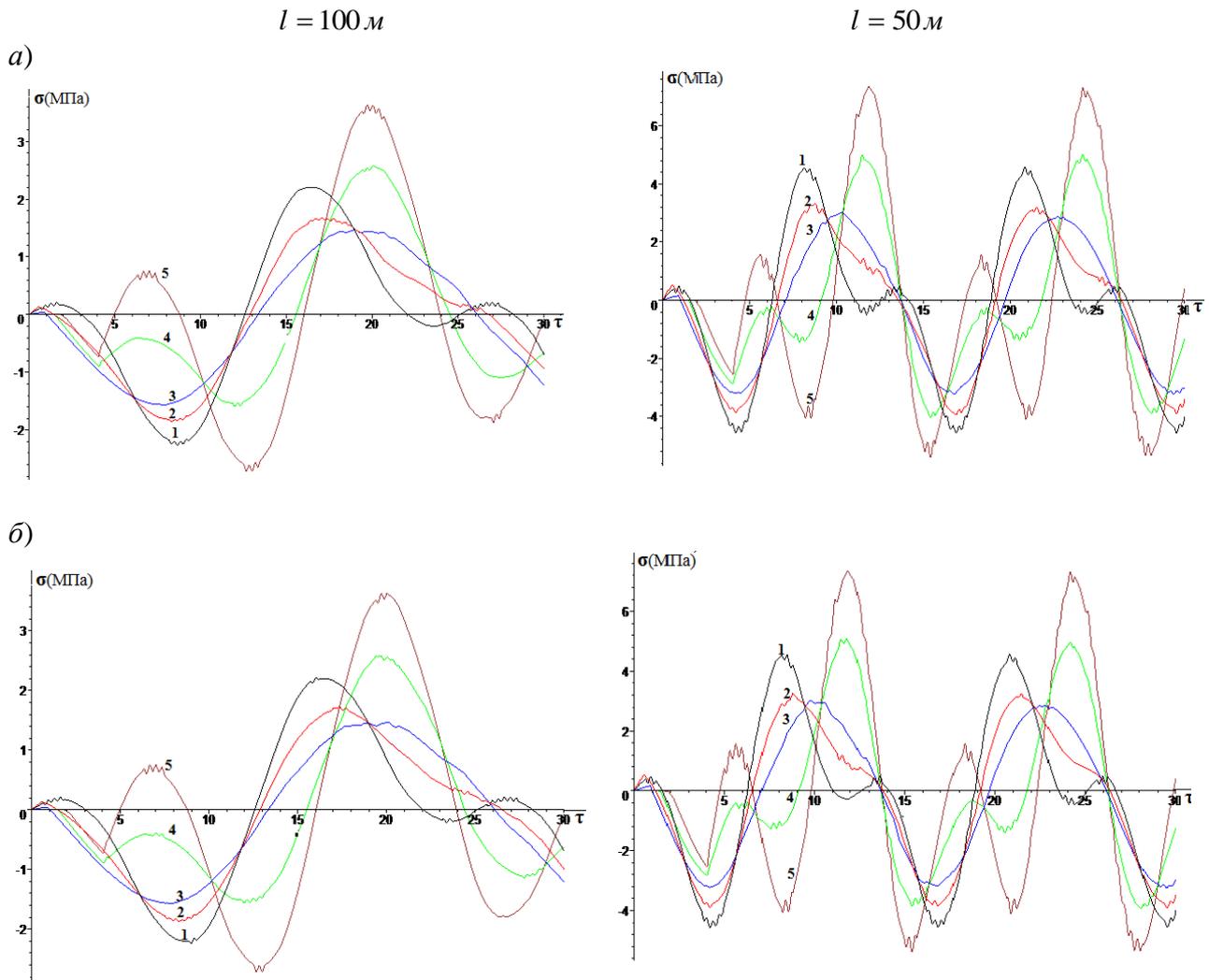


Рис. 1.21. Зависимости напряжений в различных сечениях (отнесенных к  $L$ ) от безразмерного времени  $\tau$  для  $c_{01}=c_{02}=10^7$  Н/м,  $m_1=m_2=40$  кг и  $k_1=10^6$  Н/м<sup>2</sup> и двух значений коэффициента продольного сдвига,  $k_2 = 5 \cdot 10^6$  Н / м<sup>3</sup> (а), и  $k_2 = 5 \cdot 10^7$  Н / м<sup>3</sup> (б):  
 1 –  $\zeta=0$ ; 2 –  $\zeta=0.25$ ; 3 –  $\zeta=0.45$ ; 4 –  $\zeta=0.75$ ; 5 –  $\zeta=1$

### 1.5. Колебания трубопровода сопряженного с узлами через упругие элементы

Пусть теперь торцы трубопровода сопрягаются с узлами через упругие элементы, причем поверхность взаимодействия трубопровода с грунтом происходит с постоянным коэффициентом  $k$  (рис. 1.22).

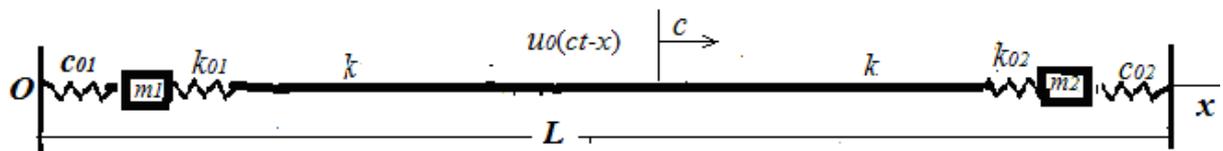


Рис. 1.22. Схема действия волны на трубопровод сопряженный с узлами через упругие элементы

Вводим дельта функции для учета разрывных свойств производных [2] через дельта функцию  $\delta(z)$  в сечениях расположения точечных масс узлов.

Контактные силы взаимодействия трубопровода с грунтом представим в виде

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k[u_0(ct - x) - u]H(ct - x) - k_{01}[u(0, t) - u_{01}]\delta(x) - k_{02}[u(L, t) - u_{02}]\delta(L - x) = 0, \quad 0 < x < L.$$

Здесь  $u_{01}=u_{01}(t)$  и  $u_{02}=u_{02}(t)$  – перемещения узлов, удовлетворяющие уравнениям движения

$$m_1 \ddot{u}_{01} = k_{01}[u_1(0, t) - u_{01}] + c_{01}[u_0(ct) - u_{01}] \quad (1.5.1)$$

$$m_2 \ddot{u}_{02} = k_{02}[u_2(0, t) - u_{02}] + c_{02}[u_0(ct - L) - u_{02}]H(ct - L), \quad (1.5.2)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $F$  – площадь поперечного сечения трубопровода;  $k$  – коэффициент продольного сдвига;  $k_{01}$  и  $k_{02}$  – соответственно коэффициенты упругой связи левого и правого торцов трубопровода с узлами;  $m_1$  и  $m_2$  – соответственно их массы;  $c_{01}$  и  $c_{02}$  – соответствующие коэффициенты упругого отпора грунта к узлам.

В безразмерных переменных уравнение (1.5.1) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \alpha[u - u_0(\tau - \xi/M)H(\tau - \xi/M)] + \beta_{01}[u(0, \tau) - u_{01}(\tau)]\delta(\xi) + \beta_{02}[u(1, \tau) - u_{02}]\delta(1 - \xi) = 0. \quad (1.5.3)$$

(1.5.3) представляет собой уравнение с разрывными производными в сечениях  $\xi=0$  и  $\xi=1$ , в связи, с чем в этих точках выполняются условия

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = -0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 1+0. \quad (1.5.4)$$

Для решения краевой задачи (1.5.3) – (1.5.4) используем метод, предложенный в работах [3, 4], согласно которому решение представим в виде разложения

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\tau)\varphi_n(\xi), \quad (1.5.5)$$

где функции  $T_n(\tau)$  и  $\varphi_n(\xi)$  удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{T}_n + \mu_n^2 T_n = 0, \\ \varphi_n'' + \lambda_n^2 \varphi_n + \beta_{01}\varphi_{n0}\delta(\xi) + \beta_{02}\varphi_{n1}\delta(1 - \xi) = 0. \quad (1.5.6)$$

Здесь  $\lambda_n = \sqrt{\mu_n^2 - \alpha}$ .

Для функций  $\varphi_n(\xi)$  имеем условия

$$\varphi_n'(-0) = 0, \quad \varphi_n'(1+0) = 0 \quad (1.5.7)$$

$$\varphi_i'(+0) = \beta_{01} \varphi_{i0} \quad (1.5.8)$$

$$\varphi_i'(1-0) = -\beta_{02} \varphi_{i1}. \quad (1.5.9)$$

Здесь  $\varphi_{10} = \varphi_1(0)$ ,  $\varphi_{20} = \varphi_2(1)$ .

Решение уравнения для каждого значения  $i$  имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{\beta_{01} \varphi_{i0}}{\lambda_i \sin \lambda_i} [\cos \lambda_i \cos \lambda_i \xi + \sin \lambda_i \sin \lambda_i \xi H(\xi)] + \\ &+ \frac{\beta_{02} \varphi_{i1}}{\lambda_i \sin \lambda_i} [\cos \lambda_i \cos \lambda_i (1 - \xi) + \sin \lambda_i \sin \lambda_i (1 - \xi) H(1 - \xi)]. \end{aligned}$$

Числа  $\mu_i$  удовлетворяют трансцендентному уравнению [3]

$$\operatorname{tg} \lambda_i = \frac{\lambda_i (\beta_{01} + \beta_{02})}{\lambda_i^2 - \beta_{01} \beta_{02}}.$$

Функции  $\varphi_i(\xi)$  удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^1 \varphi_i \varphi_k = 0 \quad \text{при } i \neq k. \quad (1.5.10)$$

Подставим (1.5.3) в (1.5.1) и с учетом выражения для  $\varphi_i''(\xi)$  из (1.5.4) получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{T}_i + \mu_i^2 T_i) \varphi_i(\xi) = \alpha [u_0(\tau - \xi/M) H(\tau - \xi/M)] + \beta_{01} u_{01}(\tau) \delta(\xi) + \beta_{02} u_{02} \delta(1 - \xi).$$

Умножим обе стороны равенства на собственные функции  $\varphi_k(\xi)$  и результат проинтегрируем по  $\xi$  в интервале  $0 < \xi < 1$  и, учитывая условия ортогональности, получим

$$T_i'' + \mu_i^2 T_i = [\alpha F_i(\tau) + \beta_{01} u_{01}(\tau) \varphi_i(0) + \beta_{02} u_{02} \varphi_i(1)] / \|\varphi_i\|, \quad (1.5.11)$$

$$\text{где } F_i = \int_0^{M\tau} u_0(\tau - \xi/M) \varphi_i(\xi) d\xi \quad \text{при } \tau < 1/M;$$

$$F_i = \int_0^1 u_0(\tau - \xi/M) \varphi_i(\xi) d\xi \quad \text{при } \tau > 1/M; \quad \|\varphi_i\| = \int_0^1 \varphi_i^2(\xi) d\xi.$$

Уравнения движения узлов в безразмерной форме имеют вид

$$\ddot{u}_{01} + (\omega_{01}^2 + \omega_{11}^2) u_{10} = \omega_{01}^2 u(0, \tau) + \omega_{11} u_0(\tau)$$

$$\ddot{u}_{02} + (\omega_{02}^2 + \omega_{12}^2) u_{20} = \omega_{02}^2 u(1, \tau) + \omega_{12} u_0(\tau) H(\tau - 1/M),$$

$$\text{где } \omega_{01} = \frac{L}{c_0} \sqrt{\frac{k_{01}}{m_1}}, \quad \omega_{02} = \frac{L}{c_0} \sqrt{\frac{k_{02}}{m_2}}, \quad \omega_{11} = \frac{L}{c_0} \sqrt{\frac{c_{01}}{m_1}}, \quad \omega_{12} = \frac{L}{c_0} \sqrt{\frac{c_{02}}{m_2}}, \quad c_0 = \sqrt{E/\rho_0}.$$

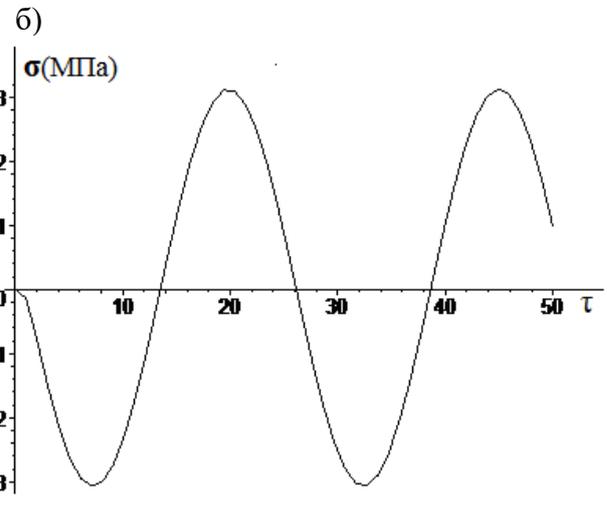
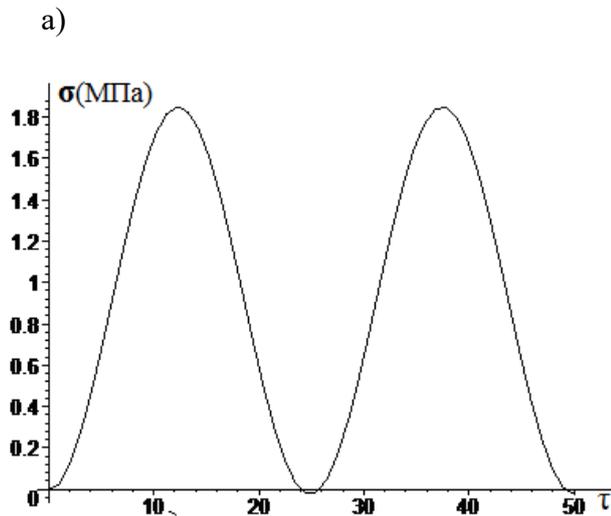
Подставляя выражения  $u(0, \tau)$  и  $u(1, \tau)$  из (1.5.5) в последние уравнения, получаем

$$\ddot{u}_{01} + (\omega_{01}^2 + \omega_{11}^2)u_{10} - \omega_{01}^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k \varphi_i(0) = \omega_{11}^2 u_0(\tau) \quad (1.5.12)$$

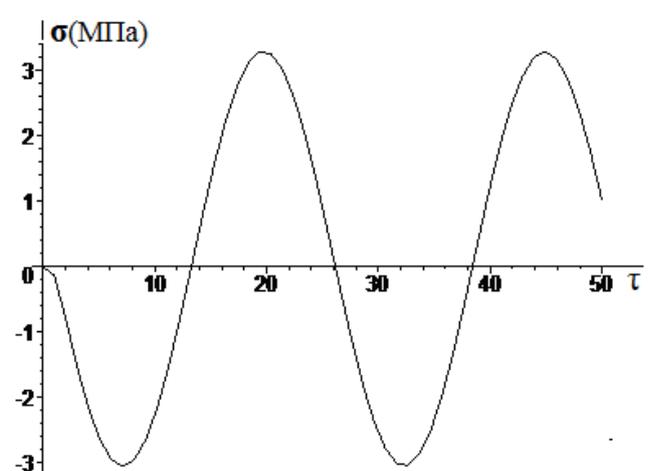
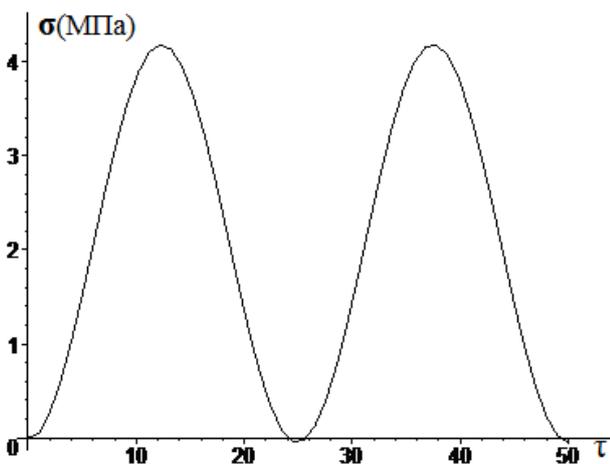
$$\ddot{u}_{02} + (\omega_{02}^2 + \omega_{12}^2)u_{20} - \omega_{02}^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k \varphi_i(1) + \omega_{12}^2 u_0(\tau) H(\tau - 1/M) \quad (1.5.13)$$

Уравнения (1.5.12) и (1.5.13) совместно с (1.5.11) образуют систему бесконечных дифференциальных уравнений второго порядка, для решения которого используется метод усечения. На рис. 1.23 представлены кривые зависимости напряжения  $\sigma$ , МПа от переменной  $\tau$  для различных значений коэффициентов жесткостей  $c_{01}$  и  $c_{02}$ , где принято  $m_1=m_2=200$  кг,  $k_1=10^6$  Н/м<sup>2</sup> и  $k_{01}=k_{02}=10^7$  Н/м для стального трубопровода длиной  $L=100$  м, внешним диаметром  $D=0.2$  м и толщиной  $\delta=0.01$  м.

$$c_{01} = c_{02} = 2 * 10^6 \text{ Н/м}$$



$$c_{01} = c_{02} = 5 * 10^6 \text{ Н/м}$$



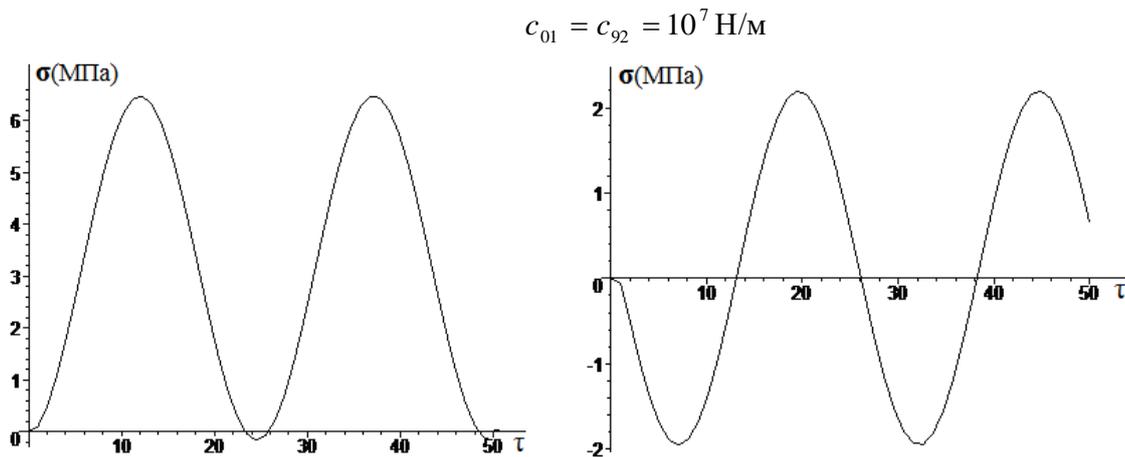


Рис. 1.23. Зависимости напряжений в сечениях  $\zeta=0$  (а) и  $\zeta=0.5$  (б) от переменной  $\tau$  для различных значений коэффициентов жесткости  $c_{01}$  и  $c_{02}$

При выбранных параметрах анализ результатов расчета показал о несущественном влиянии масс узлов, коэффициента продольного сдвига  $k_1$  и коэффициентов жесткости  $k_{01}$  и  $k_{02}$  на напряженное состояние трубопровода. При этом установлена закономерность влияния на это состояние коэффициентов упругой связи  $c_{01}$ ,  $c_{02}$  торцов трубопровода с узлами.

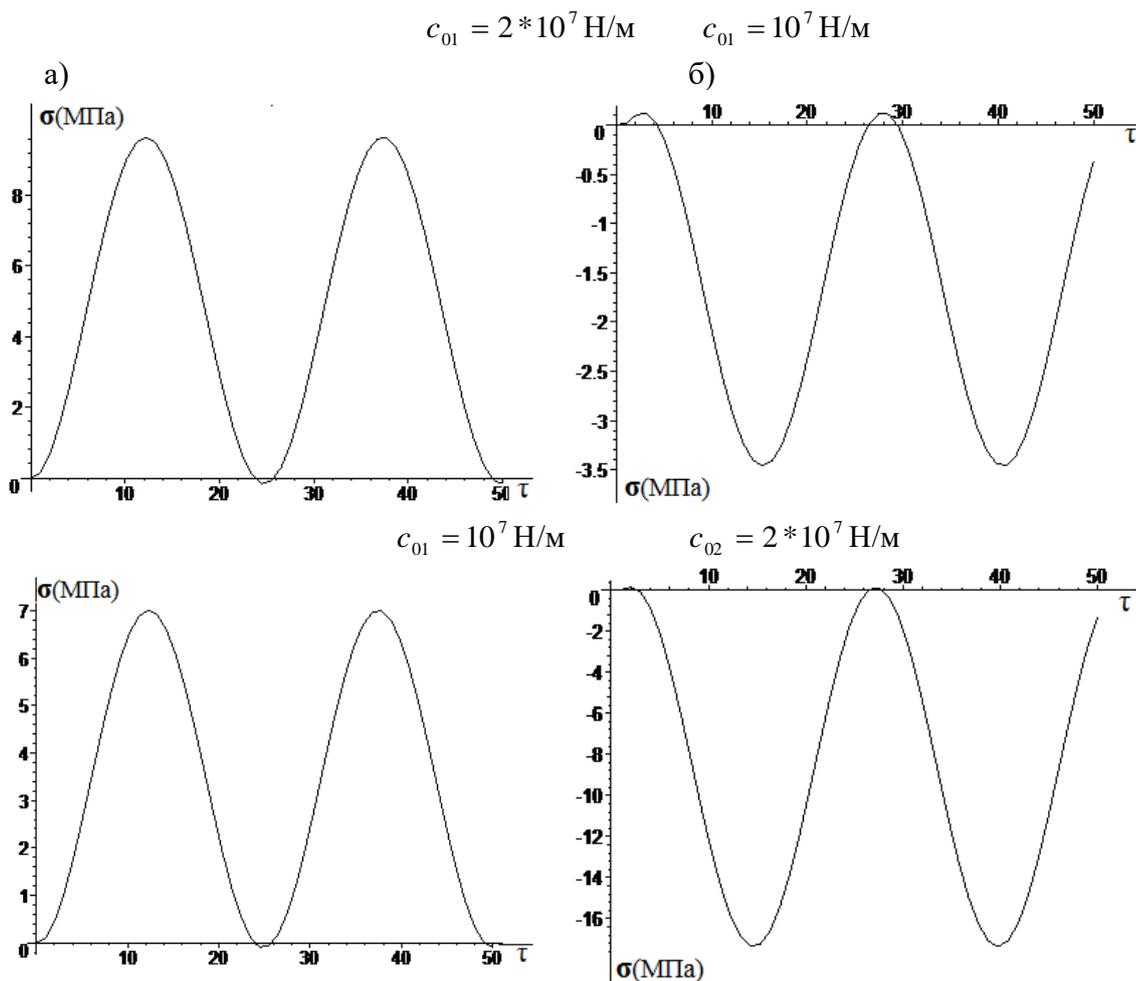


Рис. 1.24. Зависимости напряжений в сечениях  $\zeta=0$  (а) и  $\zeta=1$  (б) от переменной  $\tau$  для различных значений коэффициентов жесткости  $c_{01}$  и  $c_{02}$

На рис. 1.23 и 1.24 представлены зависимости напряжений в двух сечениях трубопровода. Показано, что при малых значениях этих коэффициентов наибольшие напряжения возникают в среднем сечении трубопровода (рис. 1.23) и с ростом их значений ( $c_{01}=c_{02}>10^7\text{Н/м}$ ) максимальные напряжения достигаются в торцевых сечениях трубопровода (рис. 1.24).

### **1.6. Действие сейсмических волн на систему подземных трубопроводов сопряженных с массивными узлами**

Подземные сооружения представляют собой механическую систему сопряженных труб, несущих массивные узлы, и взаимодействующих с окружающей их грунтовой средой, где формируются и распространяются волновые процессы.

В большинстве работ, посвященных теоретическому исследованию колебаний, такая система условно рассматривается как однородный стержень [1] и влияние условий сопряжения труб между собой на частоту и амплитуду ее колебаний не учитывается.

Для анализа процессов распространения волн ввиду большой протяженности сопряженные трубы рассматриваем как систему однородных стержней с элементами упругих соединений и постоянной площадью поперечного сечения  $S$ . Материал стержней будем считать идеально упругим, пренебрегая потерями на трение.

В этом случае система стержней представляет собой сложную систему волновода. Задачу о динамике всего волновода можно заменить эквивалентной задачей для подземного трубопровода (или ее свободного участка), учитывая в граничных сечениях влияние связанных с ней других звеньев волновода, а на боковой поверхности силы контактного взаимодействия с окружающей средой.

При этом контактная сила с внешней средой по отношению к колебаниям стержней является динамической нагрузкой с комплексными, т.е. активными (с поглощением энергии вследствие трения) и реактивным упруго-инерционного характера трения сопротивлениями.

Исследование динамики подземного трубопровода позволяет произвести расчет на прочность, как самого отдельного трубопровода, так и системы в целом со связанным с ней наземным оборудованием, и разработать рациональный режим их эксплуатации при действии динамических, в частности, сейсмических нагрузок. Для этого необходимо определить динамические нагрузки, воспринимаемые подземными трубопроводами в ситуациях приближенных к реальным условиям их эксплуатации.

Используем метод разрывных производных для решения задачи колебаний подземного трубопровода, содержащего  $n$  линейных стержневых участков длиной  $l_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) и  $n+1$  точечными массами  $m_i$  ( $i=1, \dots, n+1$ ), сопряженных с концевыми сечениями стержней с упругими элементами, коэффициенты жесткости которых линейно зависят от величины сжатия

(растяжения) элемента и температуры в зоне контакта стержней с внешней средой. Составим уравнение движения, вводя разрыв первой производной в концевых сечениях стержней. Установим начало координат в начальном сечении каждого стержня и направим ось  $Ox$  вдоль оси трубопровода. Обозначим через  $u_i(x,t)$  перемещение произвольного сечения  $i$ -ого стержня. При этом, учитывая формулу для напряжения  $\sigma_i = E_i \frac{\partial u_i}{\partial x}$ , заметим, что величина разрыва будет равна деформации сечения  $i$ -ого стержня. Граничные условия на торцах стержней и условия сопряжения при такой постановке входят в уравнения движения через дельту функцию Дирака.

Рассмотрим случай отсутствия сосредоточенных масс в местах сопряжения  $j$ -ого стержня с  $j+1$  ( $j=1, \dots, n-1$ ) стержнем.

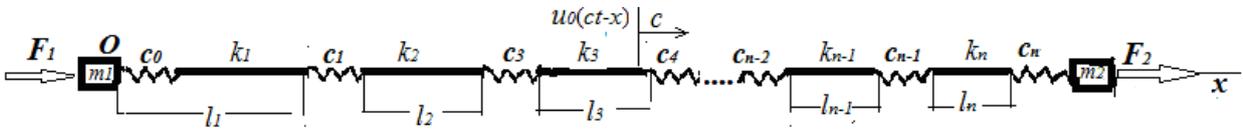


Рис. 1.25. Схема обтекания волной протяженного трубопровода, взаимодействующего с грунтом по кусочно-однородному закону

При этом полагаем, что на торцах первого и  $n$ -ого стержней упруго закреплены точечные массы  $m_1$  и  $m_{n+1}$ . На концевых сечениях  $j$ -ого и  $j+1$ -ого стержней действует контактная сила ( $j=1, \dots, n-1, n \geq 3$ ), равная

$$E_j S_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = c_j (u_{j,1} - u_{j+1,0}).$$

Уравнения движения стержней при этом записываются в виде

$$\begin{aligned} & S_1 \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - E_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_0 (u_{1,0} - v_0) \delta(x) + c_1 (u_{1,1} - u_{2,0}) \delta(l_1 - x) + \\ & \quad + k_1 \left[ u_1 - u_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] H \left( t - \frac{x}{c} \right); \\ & S_j \rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - E_j S_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + c_{j-1} (u_{j,0} - u_{j-1,1}) \delta(x) + c_j (u_{j,1} - u_{j+1,0}) \delta(l_j - x) + \\ & + k_j \left[ u_j - u_0 \left( t - \frac{x + L_{j-1}}{c} \right) \right] H \left( t - \frac{x + L_{j-1}}{c} \right) \text{ при } t > 0, 0 < x < l_j \quad (j = 2 \dots n-1); (1.6.1) \\ & S_n \rho_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - E_n S_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + c_{n-1} (u_{n,0} - u_{n-1,1}) \delta(x) + c_n (u_{n,1} - v_1) \delta(l_n - x) + \\ & \quad + k_n \left[ u_n - u_0 \left( t - \frac{x + L_n}{c} \right) \right] H \left( t - \frac{x + L_n}{c} \right), \end{aligned}$$

где принято  $u_{j,0} = u_j(0,t)$ ,  $u_{j-1,1} = u_{j-1}(l_{j-1},t)$ ,  $L_j = \sum_{p=0}^j l_p$ ,  $l_0 = 0$ ,  $L_n = L$  – общая длина системы трубопроводов. Для нахождения решения системы волновых уравнений (1.6.1) используем метод Фурье при наличии разрывов первых производных в сечениях  $x=0$  и  $x=l_j$ . Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} S_1 \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - E_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_1 u_1 - c_0 u_{1,0} \delta(x) - c_1 u_{1,1} \delta(l_1 - x) &= 0 \text{ при } t > 0, 0 < x < l_1 \\ S_j \rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - E_j S_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + k_j u_j - c_{j-1} (u_{j,0} - u_{j-1,1}) \delta(x) - c_j (u_{j,1} - u_{j+1,0}) \delta(l_j - x) &= 0 \\ \text{при } t > 0, 0 < x < l_j, (j = 2 \dots n-1) & \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

$$\begin{aligned} S_n \rho_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - E_n S_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + k_n u_n - c_{n-1} (u_{n,0} - u_{n-1,1}) \delta(x) - \\ - c_n u_{n,1} \delta(l_n - x) &= 0 \quad \text{при } t > 0, 0 < x < l_n. \end{aligned}$$

Поскольку в равенствах (1.6.2) перемещения  $u_j(x,t)$  сопряжены с торцевыми сечениями через упругие элементы, то они образуют совместную систему уравнений, решение которой относительно  $u_j(x,t)$  представим в виде [3, 4]

$$u_j = \varphi_j(x) T(t).$$

При этом имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1^2} \frac{\ddot{T}}{T} - \frac{\varphi_1''}{\varphi_1} + \alpha_1 + \beta_0 \frac{\varphi_{1,0}}{\varphi_1} \delta(x) + \beta_1 \frac{(\varphi_{1,1} - \varphi_{2,0})}{\varphi_1} \delta(l_1 - x) &= 0, \quad 0 < x < l_1 \\ \frac{1}{a_j^2} \frac{\ddot{T}}{T} - \frac{\varphi_j''}{\varphi_j} + \alpha_j + \beta_{j-1} \frac{(\varphi_{j,0} - \varphi_{j-1,1})}{\varphi_j} \delta(x) + \\ + \beta_j \frac{(\varphi_{j,1} - \varphi_{j+1,0})}{\varphi_j} \delta(l_j - x) &= 0, \quad 0 < x < l_j, (j = 2 \dots n-1) \\ \frac{1}{a_n^2} \frac{\ddot{T}}{T} - \frac{\varphi_n''}{\varphi_n} + \alpha_n + \beta_{n-1} \frac{(\varphi_{n,0} - \varphi_{n-1,1})}{\varphi_n} \delta(x) + \beta_n \frac{\varphi_{n,1}}{\varphi_n} \delta(l_n - x) &= 0, \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

где  $a_j = \sqrt{E_j / \rho_j}$ ,  $\alpha_j = k_j / E_j S_j$ ,  $\beta_{j-1} = c_{j-1} / E_j S_j$ ,  $\beta_j = c_j / E_j S_j$ ,  $\varphi_{j,0} = \varphi_j(0)$ ,  $\varphi_{j,1} = \varphi_j(l_j)$ .

Полагая в системе (1.6.3)

$$\ddot{T} = -(\lambda_j^2 + \alpha_j) a_j^2 T,$$

получим

$$\begin{aligned}
& \varphi_1'' + \lambda_1^2 \varphi_1 + \beta_0 \varphi_{1,0} \delta(x) + \beta_1 (\varphi_{1,1} - \varphi_{2,0}) \delta(l_1 - x) = 0 \\
& \varphi_j'' + \lambda_j^2 \varphi_j + \beta_{j-1} (\varphi_{j,0} - \varphi_{j-1,1}) \delta(x) + \\
& + \beta_j (\varphi_{j,1} - \varphi_{j+1,0}) \delta(l_j - x) = 0, \quad 0 < x < l_j \quad (j = 2 \dots n-1) \\
& \varphi_n'' + \lambda_n^2 \varphi_n + \beta_{n-1} (\varphi_{n,0} - \varphi_{n-1,1}) \delta(x) + \beta_n \varphi_{n,1} \delta(l_n - x) = 0,
\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

где  $\lambda_j$  – собственные числа, удовлетворяющие равенствам

$$(\lambda_1^2 + \alpha_1) a_1^2 = (\lambda_2^2 + \alpha_2) a_2^2 = \dots = (\lambda_n^2 + \alpha_n) a_n^2.$$

Из этих равенств выразим собственные числа  $\lambda_j$  ( $j=2, \dots, n$ ) через  $\lambda_1$

$$\lambda_j = \sqrt{(\lambda_1^2 + \alpha_1) a_1^2 / a_j^2 - \alpha_j}. \tag{1.6.5}$$

Решение уравнений (1.6.4) представим в виде

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= A_1 \cos \lambda_1 x + B_1 \sin \lambda_1 x + \frac{\beta_0 \varphi_{1,0}}{\lambda_1} \sin \lambda_1 x H(x) + \frac{\beta_1 (\varphi_{1,1} - \varphi_{2,0})}{\lambda_1} \sin \lambda_1 (l_1 - x) H(l_1 - x) \\
\varphi_j &= A_j \cos \lambda_j x + B_j \sin \lambda_j x + \frac{\beta_{j-1} (\varphi_{j,0} - \varphi_{j-1,1})}{\lambda_j} \sin \lambda_j x H(x) + \\
& + \frac{\beta_j (\varphi_{j,1} - \varphi_{j+1,0})}{\lambda_j} \sin \lambda_j (l_j - x) H(l_j - x) \quad 0 < x < l_j \quad (j = 2 \dots n-1) \\
\varphi_n &= A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x + \frac{\beta_{n-1} (\varphi_{n,0} - \varphi_{n-1,0})}{\lambda_n} \sin \lambda_n x H(x) + \\
& + \frac{\beta_n \varphi_{n,1}}{\lambda_n} \sin \lambda_n (l_n - x) H(l_n - x),
\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

где постоянные  $A_j$  и  $B_j$  определяются из условия разрыва производных  $\varphi_j'(x)$  в точках  $x=0$  и  $x=l_j$

$$\varphi_j'(-0) = 0, \quad \varphi_j'(l_j + 0) = 0, \tag{1.6.7}$$

которые дают

$$B_1 = \frac{1}{\lambda_1} \beta_1 (\varphi_{1,1} - \varphi_{2,0}) \cos \lambda_1 l_1; \quad A_1 = \frac{\cos \lambda_1}{\lambda_1 \sin \lambda_1} [\beta_1 (\varphi_{1,1} - \varphi_{2,0}) \cos \lambda_1 l_1 + \beta_0 \varphi_{1,0}]$$

$$B_j = \frac{1}{\lambda_j} \beta_j (\varphi_{j,1} - \varphi_{j+1,0}) \cos \lambda_j l_j;$$

$$A_j = \frac{\cos \lambda_j}{\lambda_j \sin \lambda_j} \beta_j (\varphi_{j,1} - \varphi_{j+1,0}) \cos \lambda_j l_j + \beta_{j-1} (\varphi_{j,0} - \varphi_{j-1,1}), \quad (j = 2 \dots n-1);$$

$$B_n = \frac{1}{\lambda_n} \beta_n \varphi_{n1} \cos \lambda_n l_n; \quad A_n = \frac{\cos \lambda_n}{\lambda_n \sin \lambda_n} [\beta_n \varphi_{n1} \cos \lambda_n l_n + \beta_{n-1} (\varphi_{n,0} - \varphi_{n-1,1})].$$

Подставляя найденные выражения  $A_j$  и  $B_j$  в формулу (1.6.6), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\beta_0 \varphi_{1,0}}{\lambda_1 \sin \lambda_1 l_1} [\cos \lambda_1 l_1 \cos \lambda_1 x + \sin \lambda_1 l_1 \sin \lambda_1 x H(x)] + \\ &+ \frac{\beta_1 (\varphi_{1,1} - \varphi_{2,0})}{\lambda_1 \sin \lambda_1 l_1} [\cos \lambda_1 l_1 \cos \lambda_1 (l_1 - x) + \sin \lambda_1 l_1 \sin \lambda_1 (l_1 - x) H(l_1 - x)] \quad (1.6.8) \\ \varphi_j &= \frac{\beta_{j-1} (\varphi_{j0} - \varphi_{j-1,1})}{\lambda_j \sin \lambda_j l_j} [\cos \lambda_j l_j \cos \lambda_j x + \sin \lambda_j l_j \sin \lambda_j x H(x)] + \\ &+ \frac{\beta_j (\varphi_{j1} - \varphi_{j+1,0})}{\lambda_j \sin \lambda_j l_j} [\cos \lambda_j l_j \cos \lambda_j (l_j - x) + \sin \lambda_j l_j \sin \lambda_j (l_j - x) H(l_j - x)] \\ \varphi_n &= \frac{\beta_{n-1} (\varphi_{n,0} - \varphi_{n-1,1})}{\lambda_n \sin \lambda_n l_n} [\cos \lambda_n l_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n l_n \sin \lambda_n x H(x)] + \\ &+ \frac{\beta_n \varphi_{n1}}{\lambda_n \sin \lambda_n l_n} [\cos \lambda_n l_n \cos \lambda_n (l_n - x) + \sin \lambda_n l_n \sin \lambda_n (l_n - x) H(l_n - x)]. \end{aligned}$$

Можно показать, что полученные решения (1.6.8) кроме (1.6.7) удовлетворяют следующим условиям сопряжения

$$\varphi'_1(+0) = \beta_0 \varphi_1(0), \quad \varphi'_1(l_1 - 0) = -\beta_1 [\varphi_1(l_1) - \varphi_2(0)] \quad (1.6.9)$$

$$\varphi'_j(+0) = \beta_{j-1} [\varphi_j(0) - \varphi_{j-1}(l_{j-1})], \quad \varphi'_j(l_j - 0) = -\beta_j [\varphi_j(l_j) - \varphi_{j+1}(0)] \quad (j = 2 \dots n-1) \quad (1.6.10)$$

$$\varphi'_n(+0) = \beta_{n-1} (\varphi_n(0) - \varphi_{n-1}(l_{n-1})), \quad \varphi'_n(l_n - 0) = -\beta_n \varphi_n(l_n). \quad (1.6.11)$$

Полагая теперь  $\varphi_j = \varphi_{j0}$  при  $x=0$ ,  $\varphi_j = \varphi_{j1}$  при  $x=l_j$ , получим систему однородных уравнений относительно  $\varphi_{j,0} = \varphi_{j0}$  и  $\varphi_{j,1} = \varphi_{j1}$ :

$$(\lambda_1 \sin \lambda_1 l_1 - \beta_0 \cos \lambda_1 l_1) \varphi_{10} - \beta_1 \varphi_{11} + \beta_1 \varphi_{20} = 0 \quad (1.6.12)$$

$$-\beta_{01} \varphi_{10} + (\lambda_1 \sin \lambda_1 l_1 - \beta_1 \cos \lambda_1 l_1) \varphi_{11} + \beta_1 \varphi_{20} \cos \lambda_1 l_1 = 0 \quad (1.6.13)$$

$$\beta_{j-1} \varphi_{j-11} \cos \lambda_j l_j + (\lambda_j \sin \lambda_j l_j - \beta_{j-1} \cos \lambda_j l_j) \varphi_{j0} - \beta_j \varphi_{j1} + \beta_j \varphi_{j+10} = 0 \quad (j = 2 \dots n-1) \quad (1.6.14)$$

$$\beta_{j-1} \varphi_{j-11} - \beta_{j-1} \varphi_{j0} + (\lambda_j \sin \lambda_j l_j - \beta_j \cos \lambda_j l_j) \varphi_{j1} + \varphi_{j+10} \cos \lambda_j l_j = 0 \quad (j = 2 \dots n-1) \quad (1.6.15)$$

$$\beta_{n-1} \varphi_{n-11} \cos \lambda_n l_n + (\lambda_n \sin \lambda_n l_n - \beta_{n-1} \cos \lambda_n l_n) \varphi_{n0} - \beta_n \varphi_{n1} = 0 \quad (1.6.16)$$

$$\beta_{n-1} \varphi_{n-1,1} - \beta_{n-1} \varphi_{n0} + (\lambda_n \sin \lambda_n l_n - \beta_n \cos \lambda_n l_n) \varphi_{n1} = 0. \quad (1.6.17)$$

Равенства (1.6.12) – (1.6.17) образуют  $4n-2$  однородных уравнений для определения  $4n-2$  постоянных  $\varphi_{ij}$ . Учитывая зависимость (1.6.5), и приравнявая

определитель этой системы к нулю, составим уравнение для определения чисел  $\lambda_{1i}=\lambda_i$ , которые являются собственными числами системы уравнений (1.6.1). При этом минимальное значение собственных чисел при  $\lambda_j a_j < \lambda_1 a_1$  удовлетворяют неравенству  $\lambda_{\min} > \sqrt{\alpha_j a_j^2 / a_1^2 - \alpha_1}$ . Установим рекуррентные соотношения между коэффициентами  $\varphi_{ij}$ . Учитывая однородность системы, полагаем

$$\varphi_{10} = \beta_1 \frac{\lambda_1 \sin \lambda_1 l_1}{\lambda_1 \sin \lambda_1 l_1 - \beta_0 \cos \lambda_1 l_1}.$$

Тогда из уравнений (1.6.12) и (1.6.15) находим

$$\varphi_{20} = \varphi_{11} - \lambda_1 \sin \lambda_1 l_1. \quad (1.6.18)$$

$$\varphi_{11} = \frac{\beta_0 \varphi_{10} + \lambda_1 \beta_1 \cos \lambda_1 l_1 \sin \lambda_1 l_1}{\lambda_1 \sin \lambda_1 l_1}. \quad (1.6.19)$$

Из системы (1.6.13) и (1.6.14) установим

$$\beta_2 (\varphi_{21} - \varphi_{30}) = \varphi_{20} (\lambda_2 \sin \lambda_2 l_2 - \beta_1 \cos \lambda_2 l_2) + \beta_1 \varphi_{11} \cos \lambda_2 l_2$$

$$\beta_2 (\varphi_{21} - \varphi_{30}) \cos \lambda_2 l_2 = \varphi_{21} \lambda_2 \sin \lambda_2 l_2 - \beta_1 (\varphi_{20} - \varphi_{11}).$$

Из этих уравнений находим постоянные  $\varphi_{21}$  и  $\varphi_{30}$

$$\varphi_{21} = \frac{\cos \lambda_2 l_2 [\varphi_{20} (\lambda_2 \sin \lambda_2 l_2 - \beta_1 \cos \lambda_2 l_2) + \beta_1 \varphi_{11} \cos \lambda_2 l_2] + \beta_1 (\varphi_{20} - \varphi_{11})}{\lambda_2 \sin \lambda_2 l_2}, \quad (1.6.20)$$

$$\varphi_{30} = [-\varphi_{21} (\lambda_2 \sin \lambda_2 l_2 - \beta_2 \cos \lambda_2 l_2) + \beta_1 (\varphi_{20} - \varphi_{11})] / \beta_2 \cos \lambda_2 l_2. \quad (1.6.21)$$

Аналогично находим

$$\varphi_{31} = \frac{\cos \lambda_3 l_3 [\varphi_{30} (\lambda_3 \sin \lambda_3 l_3 - \beta_2 \cos \lambda_3 l_3) + \beta_2 \varphi_{21} \cos \lambda_3 l_3] + \beta_2 (\varphi_{30} - \varphi_{21})}{\lambda_3 \sin \lambda_3 l_3} \quad (1.6.22)$$

$$\varphi_{40} = [-\varphi_{31} (\lambda_3 \sin \lambda_3 l_3 - \beta_3 \cos \lambda_3 l_3) + \beta_2 (\varphi_{30} - \varphi_{21})] / \beta_3 \cos \lambda_3 l_3. \quad (1.6.23)$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\varphi_{j1} = \frac{\cos \lambda_j l_j [\varphi_{j0} (\lambda_j \sin \lambda_j l_j - \beta_{j-1} \cos \lambda_j l_j) + \beta_{j-1} \varphi_{j-11} \cos \lambda_j l_j] + \beta_{j-1} (\varphi_{j0} - \varphi_{j-11})}{\lambda_j \sin \lambda_j l_j} \quad (1.6.24)$$

$$\varphi_{j+10} = [-\varphi_{j1} (\lambda_j \sin \lambda_j l_j - \beta_j \cos \lambda_j l_j) + \beta_{j-1} (\varphi_{j0} - \varphi_{j-11})] / \beta_j \cos \lambda_j l_j \quad j = 4 \dots n-1. \quad (1.6.25)$$

При  $j=n$  имеем

$$\beta_{n-1} \varphi_{n-11} \cos \lambda_n l_n + (\lambda_n \sin \lambda_n l_n - \beta_{n-1} \cos \lambda_n l_n) \varphi_{n0} - \beta_n \varphi_{n1} = 0 \quad (1.6.26)$$

$$\beta_{n-1} \varphi_{n-1,1} - \beta_{n-1} \varphi_{n0} + (\lambda_n \sin \lambda_n l_n - \beta_n \cos \lambda_n l_n) \varphi_{n1} = 0. \quad (1.6.27)$$

Уравнения (1.6.16) и (1.6.27) содержат неизвестные  $\varphi_{n-1}$ ,  $\varphi_{n0}$  и  $\varphi_{n1}$ . Если учитывать рекуррентные формулы (1.6.18) – (1.6.25), устанавливающие связь между коэффициентами  $\varphi_{ij}$ , то подстановка коэффициентов  $\varphi_{n-1}$ ,  $\varphi_{n0}$  и  $\varphi_{n1}$  в равенства (1.6.26) и (1.6.27) с учетом (1.6.5) приводит к уравнению для определения собственных чисел  $\lambda_i$ .

Выражения функций  $\varphi_j(x)$  при  $\lambda=\lambda_i$  называются собственными функциями краевой задачи (1.6.9) – (1.6.11) для системы уравнений (1.6.1) и далее их обозначаем через  $\varphi_{ij}(x)$  и определим условия их ортогональности.

Записываем уравнения (1.6.4) при  $\lambda=\lambda_i$  и умножим первое уравнение на  $\varphi_{1k}$ , второе на  $\varphi_{ij}$  и последнее на  $\varphi_{ni}$ , затем интегрируя соответственно в интервалах  $0 < x < l_1$ ,  $0 < x < l_j$ ,  $0 < x < l_n$ , получим

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 \int_0^{l_1} \varphi_{1i} \varphi_{1k} dx &= - \int_0^{l_1} \varphi_{1i}'' \varphi_{1k} dx - \beta_0 \varphi_{10i} \varphi_{10k} - \beta_1 \varphi_{11k} (\varphi_{11i} - \varphi_{20i}) = \\ &= \varphi_{1i}'(+0) \varphi_{10k} - \varphi_{1i}'(l_1 - 0) \varphi_{11k} + \int_0^{l_1} \varphi_{1i}' \varphi_{1k}' dx - \beta_0 \varphi_{10i} \varphi_{10k} - \beta_1 \varphi_{11k} (\varphi_{11i} - \varphi_{20i}). \\ \lambda_i^2 \int_0^{l_j} \varphi_{ji} \varphi_{jk} dx &= - \int_0^{l_j} \varphi_{ji}'' \varphi_{jk} dx - \beta_{j-1} \varphi_{j0k} (\varphi_{j0i} - \varphi_{j-10i}) - \beta_j \varphi_{j1k} (\varphi_{j1i} - \varphi_{j+10i}) = \\ &= \varphi_{ji}'(+0) \varphi_{j0k} - \varphi_{ji}'(l_j - 0) \varphi_{j1k} + \int_0^{l_j} \varphi_{ji}' \varphi_{jk}' dx - \beta_{j-1} \varphi_{j0k} (\varphi_{j0i} - \varphi_{j-10i}) - \beta_j \varphi_{j1k} (\varphi_{j1i} - \varphi_{j+10i}). \\ \lambda_i^2 \int_0^{l_n} \varphi_{ni} \varphi_{nk} dx &= - \int_0^{l_n} \varphi_{ni}'' \varphi_{nk} dx - \beta_{n-1} \varphi_{n0k} (\varphi_{n0i} - \varphi_{n-11i}) - \beta_n \varphi_{n1k} \varphi_{n1k} = \\ &= \varphi_{ni}'(0) \varphi_{n0k} + \varphi_{ni}'(l_n - 0) \varphi_{n1k} + \int_0^{l_n} \varphi_{ni}' \varphi_{nk}' dx - \beta_{n-1} \varphi_{n0k} (\varphi_{n0i} - \varphi_{n-11i}) - \beta_n \varphi_{n1k} \varphi_{n1k}. \end{aligned}$$

Пользуясь условиями (1.6.9) – (1.6.11), получим

$$\int_0^{l_1} \varphi_{1i} \varphi_{1k} dx = \int_0^{l_2} \varphi_{2i} \varphi_{2k} dx = \int_0^{l_n} \varphi_{ni} \varphi_{nk} dx = 0.$$

Из последних равенств получаем условия ортогональности собственных функций

$$\int_0^{l_j} \varphi_{ji} \varphi_{jk} dx = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Рассмотрим систему неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \alpha_1 u_1 - \beta_0 u_{1,0} \delta(x) - \beta_1 (u_{1,1} \delta(l_1 - x)) = \\ = -\beta_0 v_0(t) \delta(x) + \alpha_1 u_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) H \left( t - \frac{x}{c} \right), \end{aligned} \quad (1.6.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_j^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \alpha_j u_j - \beta_{j-1} (u_{j,0} - u_{j-1,1}) \delta(x) - \beta_j (u_{j,1} - u_{j+1,0}) \delta(l_j - x) = \\ = \alpha_j u_0 \left( t - \frac{x + L_{j-1}}{c} \right) H \left( t - \frac{x + L_{j-1}}{c} \right) \quad (j = 2 \dots n-1) \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \alpha_n u_n - \beta_{n-1} u_{n-1,1} \delta(x) - \beta_n u_{n,1} \delta(l_n - x) = \\ = -\beta_n v_1 \delta(l_1 - x) + \alpha_n u_0 \left( t - \frac{x + L}{c} \right) H \left( t - \frac{x + L}{c} \right). \end{aligned} \quad (1.6.30)$$

Решение системы (1.6.28) – (1.6.30) представим в виде разложения по собственным функциям  $\varphi_{ji}$

$$u_j = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{ji}(x) T_i(t). \quad (1.6.31)$$

Подстановка (1.6.31) в (1.6.28) – (1.6.30) с учетом (1.6.5) дает

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\ddot{T}_i}{a_1^2} \varphi_{1i} - [\lambda_{1i}^2 \varphi_{1i}'' - \alpha_1 \varphi_{1i} + \beta_0 \varphi_{10i} \delta(x) + \beta_1 \varphi_{11i} \delta(l_1 - x)] T_i \right\} = \\ = -\beta_0 v_0(t) \delta(x) + \alpha_1 u_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) H \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\ddot{T}_i}{a_i^2} \varphi_{ji} - [\lambda_{ji}^2 \varphi_{ji}'' - \alpha_j \varphi_{1j} + \beta_{j-1} \varphi_{j0} \delta(x) + \beta_i \varphi_{j1} \delta(l_j - x)] T_i \right\} = \\ = \alpha_j u_0 \left( t - \frac{x + L_{j-1}}{c} \right) H \left( t - \frac{x + L_{j-1}}{c} \right) \quad (j = 2 \dots n-1) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\ddot{T}_i}{a_n^2} \varphi_{ni} - [\lambda_{ni}^2 \varphi_{ni}'' - \alpha_n \varphi_{ni} + \beta_{n-1} \varphi_{n-10i} \delta(x) + \beta_n \varphi_{n1i} \delta(l_n - x)] T_i \right\} = \\ = -\beta_n v_1(t) \delta(l_n - x) + \alpha_n u_0 \left( t - \frac{x + L}{c} \right) H \left( t - \frac{x + L}{c} \right). \end{aligned}$$

Поставляя выражения для производных  $\varphi_{1i}''$ ,  $\varphi_{ji}''$  и  $\varphi_{ni}''$  из (1.6.4) в последние равенства, далее первое уравнение умножаем на  $\varphi_{1k}$ , вторые на  $\varphi_{jk}$  и третье на  $\varphi_{nk}$ , интегрируем их соответственно в интервалах  $0 < x < l_1$ ,  $0 < x < l_j$ ,  $0 < x < l_n$  и результат суммируем по  $j$

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\ddot{T}_i + (\lambda_{1i}^2 + \alpha_1) a_i^2 T_i] \left[ \int_0^{l_1} \varphi_{1i} \varphi_{1k} dx + \int_0^{l_2} \varphi_{2i} \varphi_{2k} dx + \dots + \int_0^{l_n} \varphi_{ni} \varphi_{nk} dx \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= a_1^2 \int_0^{l_1} \left[ -\beta_0 v_0(t) \delta(x) + \alpha_1 u_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) H \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \varphi_{1k} dx + a_2^2 \int_0^{l_2} \alpha_2 u_0 \left( t - \frac{x+l_1}{c} \right) H \left( t - \frac{x+l_1}{c} \right) \varphi_{2k} dx + \\
&\quad + a_3^2 \int_0^{l_3} \alpha_3 u_0 \left( t - \frac{x+l_1+l_2}{c} \right) H \left( t - \frac{x+l_1+l_2}{c} \right) \varphi_{3k} dx + \dots \\
&\quad + a_n^2 \int_0^{l_n} \left[ -\beta_n v_1 \delta(l_n - x) + \alpha_n u_0 \left( t - \frac{x+L_{n-1}}{c} \right) H \left( t - \frac{x+L_{n-1}}{c} \right) \right] \varphi_{ni} dx.
\end{aligned}$$

Учитывая условия ортогональности собственных функций  $\varphi_{ii}$ , получаем

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_i + \omega_i^2 T_i &= \frac{a_1^2}{c_i} \left[ -\beta_0 v_0(t) \varphi_{10i} + \int_0^{l_1} u_0(z_0) H(z_0) \varphi_{1k}(x) dx \right] + \frac{a_2^2}{c_i} \int_0^{l_2} u_0(z_1) H(z_1) \varphi_{2k} dx + \dots \\
&\quad + \frac{a_n^2}{c_i} \left[ -\beta_n v_1(t) \varphi_{ni} + \int_0^{l_n} u_0(z_n) H(z_n) \varphi_{ni} dx \right], \tag{1.6.32}
\end{aligned}$$

где  $\omega_i = a_1 \sqrt{\lambda_{1i}^2 + \alpha_1}$ ,  $c_i = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \varphi_{ki}^2(x) dx$ ,  $z_j = t - \frac{x+L_j}{c}$ ,  $L_j = \sum_{k=0}^j l_k$ ,  $l_0 = 0$ .

Уравнения (1.6.32) содержат перемещения массивных узлов  $v_0(t)$  и  $v_1(t)$  (сосредоточенных масс), контактирующих с внешней средой соответственно по законам  $F_1 = f_1(u_0, v_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0)$ ,  $F_2 = f_2(u_0, v_1, \dot{u}_0, \dot{v}_1)$ , и упруго закрепленных к торцам первого и последнего стержней, удовлетворяющих уравнениям движения

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{v}_0 &= c_0 [u_1(0, t) - v_0] + f_1(u_0, v_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0) \\
m_2 \ddot{v}_1 &= c_n [u_n(l_n, t) - v_1] + f_2(u_0, v_1, \dot{u}_0, \dot{v}_1),
\end{aligned}$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы узлов.

Подставляем выражения для перемещений сечений стержней  $u_1(0, t)$  и  $u_n(l_n, t)$  из формулы (1.6.31)

$$m_1 \ddot{v}_0 = c_0 \left[ \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t) \varphi_{1i}(0) - v_0 \right] + f_1(u_0, v_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0) \tag{1.6.33}$$

$$m_2 \ddot{v}_1 = c_n \left[ \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t) \varphi_{ni}(l_n) - v_1 \right] + f_2(u_0, v_1, \dot{u}_0, \dot{v}_1) \tag{1.6.34}$$

Равенства (1.6.32) – (1.6.33) образуют бесконечную систему для определения коэффициентов разложения  $T_i(t)$  и перемещений торцов  $v_0(t)$  и  $v_1(t)$ , для решения которой можно применить метод усечения [4].

## Глава 2. Поперечные колебания подземного трубопровода, сопряженного с массивными узлами

### 2.1. Воздействие плоской продольной волны на трубопровод конечной длины с шарнирно закрепленным массивным узлом

На основе анализа литературных источников в работе [5] указано, что в относительно длинном трубопроводе для частот  $\omega < 20$  Гц динамическими эффектами можно пренебречь и при определенных размерах труб и жесткости грунта не возникает значительного количества числа колебаний в кольцевом направлении. Наибольший эффект взаимодействия проявляется в жестких трубах, уложенных в мягких грунтах. Все эти закономерности в большей степени относятся к случаю когда сечения трубопровода под действием волны совершают только продольные перемещения. Их поперечное движение при падении волны, фронт которой составляет произвольный угол с осью трубопровода, мало изучено. Задача о поперечных колебаниях трубопровода при действии высокочастотной продольной волны с фронтом параллельным оси трубопровода рассмотрена в работе [1]. В более общей постановке задача динамики о взаимодействии пространственно расположенных систем трубопроводов с окружающей средой при действии продольных волн, рассмотрены в монографии [6].

В [7] получена оценка продольного напряжения в трубопроводах, подверженных падающей поперечной волне, на основе параметрического исследования. Результаты анализа реакции одномерного участка используются для расчета осевых и изгибающих деформаций трубопроводов, подверженных воздействию гармонической волны.

В работе [8] изучено отражение бегущей волны изгиба от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу, и ее прохождение. Решение обратной задачи позволяет определить начальную координату распределенной массы и ее значение, используя параметры отраженной волны в точке наблюдения.

Рассмотрим случай воздействия плоской продольной волны на трубопровод конечной длины с шарнирно закрепленными концами и шарнирно сопряженный с массивным узлом. Фронт волны и ось заглубленного трубопровода в грунтовой среде параллельны свободной поверхности полупространства. Влиянием трубопровода на волновое поле вблизи него и отраженными волнами от свободной поверхности пренебрегаем. Направим ось  $Ox$  вдоль оси трубопровода слева направо, начало координат установим в сечении, где трубопровод шарнирно закреплен к массивному узлу. Временем обтекания волной поверхность трубопровода пренебрегаем и считаем, что воздействие волны на трубопровод происходит в момент времени  $t=0$  (рис. 2.1). Уравнение для прогиба  $w=w(x,t)$  записывается в виде

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial w^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \pi D_1 k [w - w_0(t)] = 0, \quad (2.1.1)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $J$  – момент инерции сечения;  $D_1$  – внешний диаметр трубопровода;  $m=\rho S$  – его погонная масса,  $S = \pi[D_1^2 - (D_1 - 2\delta)^2]/4$ ,  $\rho$  и  $\delta$  – плотность материала и толщина стенок трубопровода;  $k$  – коэффициент упругого отпора грунта;  $w_0(t) = w_0(t - y/c)H(t - y/c)$  – перемещение частиц грунта за фронтом волны, ось  $Oy$  направлена перпендикулярно к оси трубопровода (рис. 2.1);  $c$  – скорость распространения продольной волны;  $H(z)$  – единичная функция Хевисайда.

Полагаем  $w=w_1(x,t)$  и  $w=w_2(x,t)$  соответственно в интервалах  $-L_1 < x < 0$ ,  $0 < x < L_2$ . Прогибы  $w_1(x,t)$  и  $w_2(x,t)$  удовлетворяют уравнению (2.1.1).

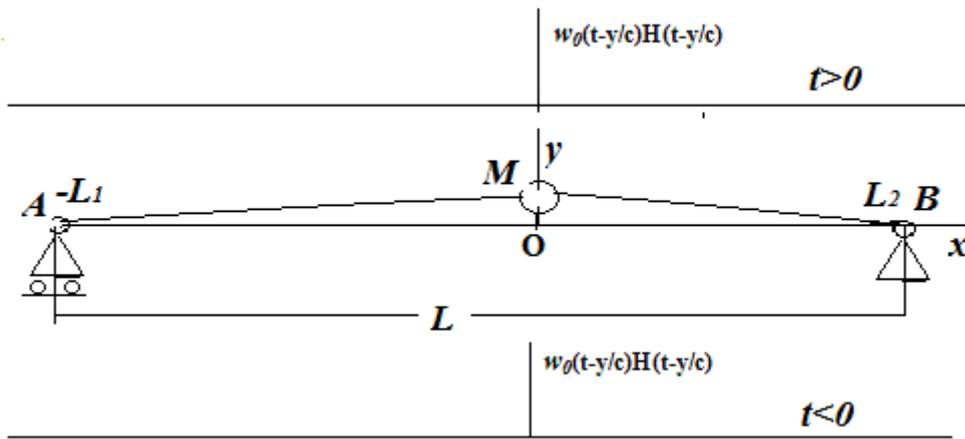


Рис. 2.1. Схема обтекания сопряженного с узлом трубопровода продольной волной  $w_0(t - y/c)H(t - y/c)$

Рассмотрим случай, когда концы балки  $x = -L_1$  и  $x = L_2$  шарнирно закреплены

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = -L_1, \quad w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = L_2, \quad (2.1.2)$$

Считаем, что балка в сечении  $x=0$  шарнирно закреплена с узлом массой  $M$ , совершающим только вертикальное перемещение  $w=w_k(t)$ . Таким образом, в этом сечении балки выполняются следующие условия:

$$w_1 = w_2 = w_k, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1.3)$$

$$M \frac{d^2 w_k}{dt^2} = EJ \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \right) - S_0 k_0 [(w_k - w_0(t))] \quad \text{при } x = 0,$$

где  $M$  – масса узла;  $k_0$  – коэффициент упругой связи узла с окружающей средой;  $S_0$  – площадь контакта узла с внешней средой.

Рассмотрим случай падения на трубопровод гармонической волны  $w_0 = A_0 \sin \omega(t - y/c)$ , где  $A_0$  – амплитуда;  $\omega$  – частота колебаний частиц грунта

за фронтом волны. Изучим установившиеся колебания сечений трубопровода и узла. Решение уравнения (2.1.1) и перемещение узла представим в виде

$$w_1 = v_1(x) \sin \omega t, \quad w_2 = v_2(x) \sin \omega t, \quad w_k = v_0 \sin \omega t. \quad (2.1.4)$$

Здесь  $w_i(x)$  удовлетворяют уравнению (2.1.1) и согласно (2.1.2) и (2.1.3) условиям

$$v_i^{iv} + \beta(\alpha^2 - \omega^2)v_i = \beta\alpha^2 A_0 \quad (i = 1, 2), \quad (2.1.5)$$

$$v_1(-L_1) = v_1''(-L_1) = 0, \quad v_2(L_2) = v_2''(L_2) = 0, \quad (2.1.6)$$

$$v_1''(0) = 0, \quad v_2''(0) = 0, \quad v_1(0) = v_2(0) = v_0, \quad (2.1.7)$$

$$-\omega^2 M v_0(0) = EJ[v_1''(0) - v_2''(0)] - S_0 k_9 (A_0 - v_0), \quad (2.1.8)$$

$$\beta = m/EJ, \quad \alpha^2 = c/m.$$

Решения уравнений (2.1.5) зависят от знака разности  $\alpha^2 - \omega^2$  и удовлетворяют условиям (2.1.6). Рассмотрим воздействие короткой волны  $L_v = c/\omega$ , где полагаем  $\omega > \alpha$ , тогда решения уравнений (2.1.5) получим в виде

$$v_1 = q + A_1 Y_1[\lambda(\xi + \bar{L}_1)] + A_2 Y_2[\lambda(\xi + \bar{L}_1)] + A_3 Y_3[\lambda(\xi + \bar{L}_1)] + A_4 Y_4[\lambda(\xi + \bar{L}_1)],$$

$$v_2 = q + B_1 Y_1[\lambda(\bar{L}_2 - \xi)] + B_2 Y_2[\lambda(\bar{L}_2 - \xi)] + B_3 Y_3[\lambda(\bar{L}_2 - \xi)] + B_4 Y_4[\lambda(\bar{L}_2 - \xi)].$$

Здесь  $q = -\gamma/\lambda^2$ ,  $\lambda = \sqrt{\bar{\omega}^2 - \gamma}$ ,  $\gamma = \pi D_1 k L^3 / EJ$ ,  $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{m/EJ}$ ,  $\xi = x/L$ ,  $\bar{L}_1 = L_1/L$ ,  $\bar{L}_2 = L_2/L$ ,  $L = L_1 + L_2$ ,  $Y_i(z)$  – функции Крылова, имеющие вид

$$Y_1(z) = \frac{chz + \cos z}{2}, \quad Y_2(z) = \frac{shz + \sin z}{2}, \quad Y_3(z) = \frac{chz - \cos z}{2}, \quad Y_4(z) = \frac{shz - \sin z}{2},$$

где  $A_i$  и  $B_i$  – постоянные, определяемые из граничных условий (2.1.6) и (2.1.7).

Выражения для прогибов имеют вид

$$v_1 = q \{ 1 - Y_1[\lambda(\xi + \bar{L}_1)] + m_{01} Y_4[\lambda(\xi + \bar{L}_1)] \} + (v_0 - d_1) w_{10}(\xi) / w_{10}(0) \quad (2.1.9)$$

$$w_{10} = Y_2[\lambda(\xi + \bar{L}_1)] - n_{01} Y_4[\lambda(\xi + \bar{L}_1)], \quad m_{01} = Y_1''(\lambda \bar{L}_1) / Y_4''(\lambda \bar{L}_1), \quad n_{01} = Y_2''(\lambda \bar{L}_1) / Y_4''(\lambda \bar{L}_1),$$

$$d_1 = q \{ 1 - Y_1(\lambda \bar{L}_1) \} + m_{01} Y_4(\lambda \bar{L}_1),$$

$$v_2 = q \{ 1 - Y_1[\lambda(\bar{L}_2 - \xi)] + m_{02} Y_4[\lambda(\bar{L}_2 - \xi)] \} + (v_0 - d_2) w_{20}(\xi) / w_{20}(0) \quad (2.1.10)$$

$$w_{20} = Y_2[\lambda(\bar{L}_2 - \xi)] - n_{02} Y_4[\lambda(\bar{L}_2 - \xi)], \quad m_{02} = Y_1''(\lambda \bar{L}_2) / Y_4''(\lambda \bar{L}_2), \quad n_{02} = Y_2''(\lambda \bar{L}_2) / Y_4''(\lambda \bar{L}_2),$$

$$d_2 = q \{ 1 - Y_1(\lambda \bar{L}_2) \} + m_{02} Y_4(\lambda \bar{L}_2).$$

Подставляя выражения  $v_1'''(0)$  и  $v_2'''(0)$  в (2.1.8), составим уравнение для определения амплитуды колебаний узла, решение которого имеет вид

$$v_0 = [q_1(\bar{\omega}) - q_2(\bar{\omega}) + \gamma_0] / [\gamma_0 - \alpha_0 \bar{\omega}^2 - z_1(\bar{\omega}) + z_2(\bar{\omega})], \quad (2.1.11)$$

где  $\gamma_0 = S_0 L^2 k_0 / EJ$ ,  $\alpha_0 = M / mL$ ,  $q_1 = q \left[ -Y_2'''(\lambda L_1) - d_1 u_{10}(0) / w_{10}(0) + m_{01} Y_4''(\lambda \bar{L}_1) \right]$ ,  
 $q_2 = q \left[ -Y_2'''(\lambda L_1) - d_2 u_{20}(0) / w_{10}(0) + m_{02} Y_4''(\lambda \bar{L}_2) \right]$ ,  $u_{10} = Y_2'''(\lambda \bar{L}_1) - n_{01} Y_4'''(\lambda \bar{L}_1)$ ,  
 $u_{20} = Y_2'''(\lambda \bar{L}_2) - n_{02} Y_4'''(\lambda \bar{L}_2)$ ,  $z_1 = u_{10} / w_{10}$ ,  $z_2 = u_{20} / w_{10}$ .

Амплитуда осевых напряжений в трубопроводе определяется по формуле

$$\bar{\sigma}_i = E x v_i''(x), \quad (i = 1, 2). \quad (2.1.12)$$

В качестве примера рассмотрена задача о поперечных колебаниях стального трубопровода длиной  $L=10$  м, горизонтально расположенного дневной поверхности грунтовой среды на глубине  $h_0=0.6$  м. Среднее сечение трубопровода шарнирно закреплено к бетонному узлу в виде кругового цилиндра. Площадь поверхности узла и объем соответственно определяются по формулам  $S_0 = 2\pi(R_1^2 - R_2^2 + R_1 h)$ ,  $V = \pi(R_1^2 - R_2^2)h$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – внешний и внутренний радиусы цилиндра;  $h$  – его высота.

Амплитуда вертикального перемещения узла при действии волны определяется по формуле (2.1.11), где следует полагать  $L_1=L_2=L/2$ ,  $M=\rho_b V$ , где  $\rho_b$  – плотность бетона.

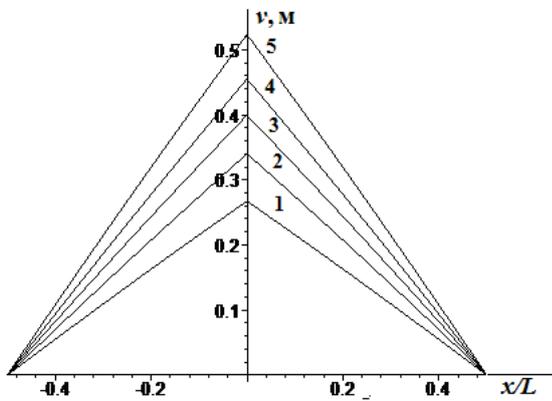
Расчеты проводились для значений частоты воздействия  $\omega$  близких к резонансной. В расчетах принято  $D_1=0.2$  м,  $\delta=0.01$  м,  $E=2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho=7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $L_1=L_2=L/2$ ,  $v_1=v_2=v$ ,  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}$ ,  $k=2 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup>. Расчеты проводились для случаев, когда амплитуда максимального напряжения в сечениях трубопровода не превосходила значения 200 МПа, амплитуда перемещения узла удовлетворяла условию  $v_0 \leq h_1$ , где  $h_1$  – расстояние от верхней границы узла до дневной поверхности, определяемая по формуле

$$v_0 \leq h_0 - h + \delta + D_1. \quad (2.1.13)$$

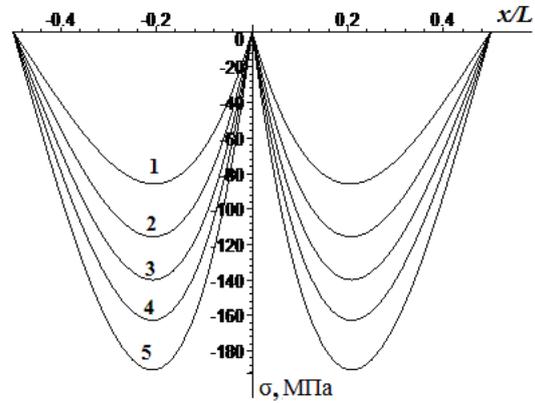
На рис. 2.2 представлены графики распределения амплитуд колебаний прогибов  $v(a)$  и напряжений  $\bar{\sigma}(b)$  по переменной  $x/L$  в сечениях трубопровода при различных значениях частоты колебаний частиц грунта  $\omega$ , коэффициента упругой связи узла с окружающей средой  $k_0$ , Н/м<sup>2</sup>. Геометрические данные узла в виде цилиндра из бетона с плотностью  $\rho_b=5000$  кг/м<sup>3</sup> равны  $R_1=0.14$  м,  $R_2=0.1$  м,  $h=0.332$  м. При этом общая площадь контакта узла с грунтом и его масса соответственно будут равны  $S_0=0.352$  м<sup>2</sup>,  $M=50$  кг, а расстояние узла до свободной границы  $h_1=0.508$  м. Колебания узла происходят за счет действия волны и перерезывающей силы, возникающей в точке контакта узла с трубопроводом. При малых значениях коэффициента связи узла с грунтовой средой его амплитуда определяется действием перерезывающей силы, что приводит к росту максимального значения осевого напряжения. Эта закономерность подтверждается графиками, представленными на рис. 2.2 для различных значений коэффициента  $k_0$ . Так например, при достижении узла амплитуды  $h_1$ , для  $k_0=5 \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup> амплитуда максимального напряжения будет

равна 190 МПа, для  $k_0=2.6 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup> она будет равна 70 МПа, т.е. подъём узла происходит при наименьшем сопротивлении трубопровода.

$$k_0 = 5 \cdot 10^4 \text{ H / M}^2$$



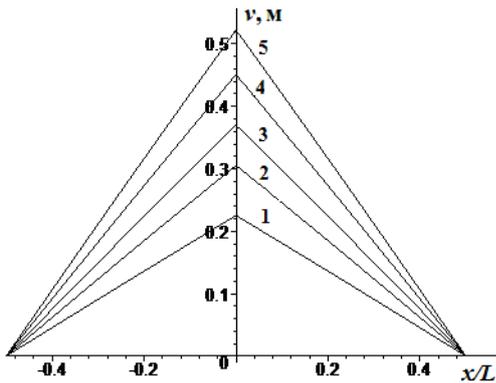
a)



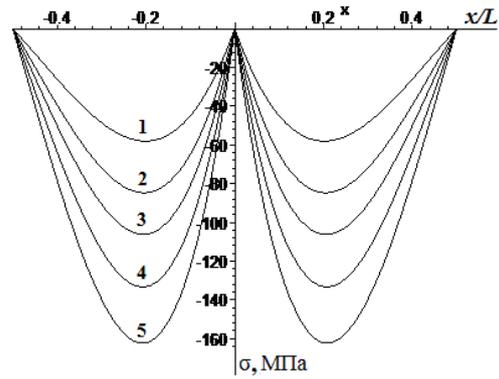
б)

$$1 - \omega = 24.26c^{-1}, \quad 2 - \omega = 23.32c^{-1}, \quad 3 - \omega = 24.35c^{-1}, \quad 4 - \omega = 24.38c^{-1}, \quad 5 - \omega = 24.4c^{-1}$$

$$k_0 = 10^5 \text{ H / M}^2$$



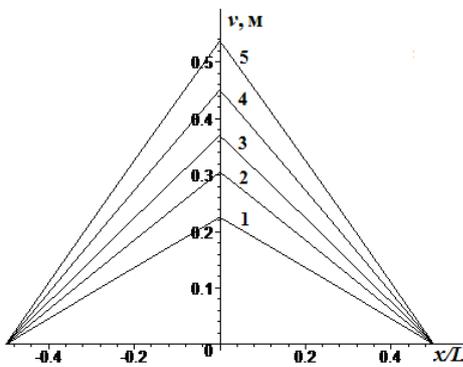
a)



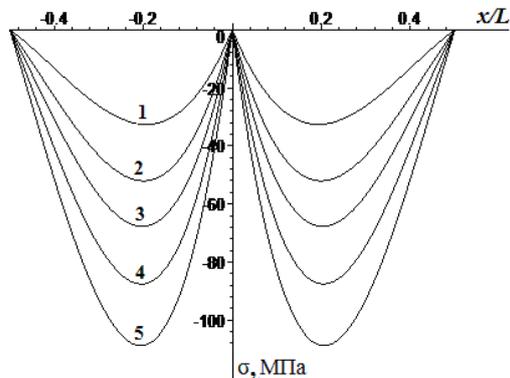
б)

$$1 - \omega = 23.32c^{-1}, \quad 2 - \omega = 23.4c^{-1}, \quad 3 - \omega = 23.44c^{-1}, \quad 4 - \omega = 23.48c^{-1}, \quad 5 - \omega = 23.52c^{-1}$$

$$k_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ H / M}^2$$



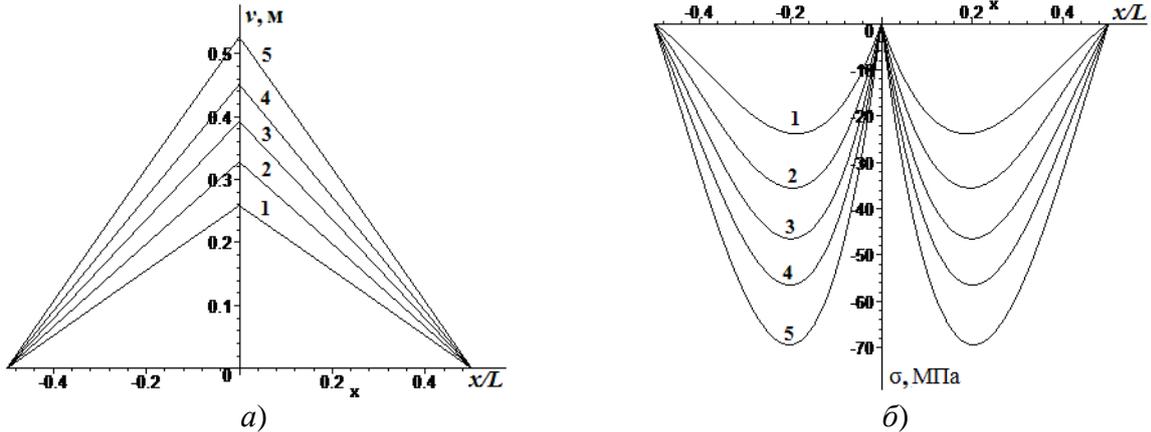
a)



б)

$$1 - \omega = 21.35c^{-1}, \quad 2 - \omega = 21.44c^{-1}, \quad 3 - \omega = 20.47c^{-1}, \quad 4 - \omega = 21.51c^{-1}, \quad 5 - \omega = 21.54c^{-1}$$

$$k_0 = 2.6 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$

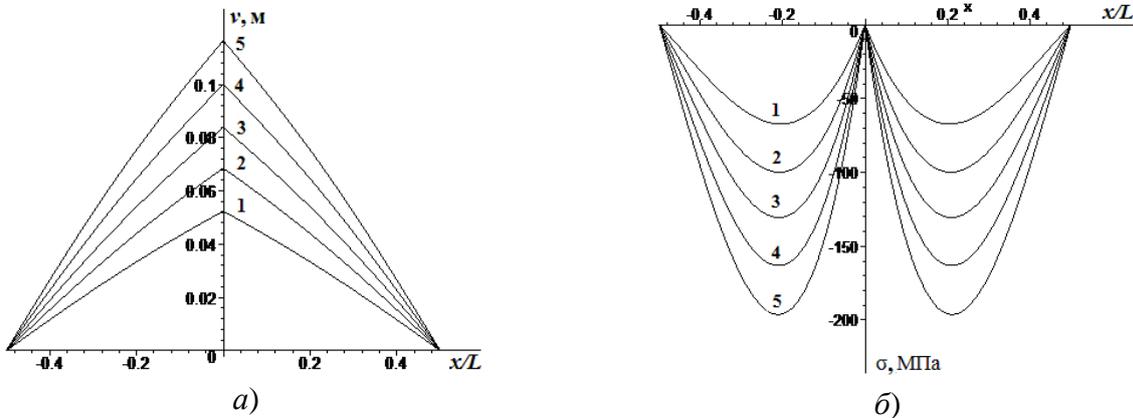


$$1 - \omega = 20.1 \text{ с}^{-1}; 2 - \omega = 20.13 \text{ с}^{-1}; 3 - \omega = 20.15 \text{ с}^{-1}; 4 - \omega = 20.17 \text{ с}^{-1}; 5 - \omega = 20.18 \text{ с}^{-1}$$

Рис. 2.2. Распределение амплитуд прогибов  $v(x)$ , м (а) и напряжений  $\bar{\sigma}(x)$ , МПа (б) по длине трубопровода (отнесенная к  $L$ ) при различных значениях коэффициента упругой связи узла с трубопроводом  $k_0$ , Н/м<sup>2</sup> и частоты падающей волны  $\omega$ , с<sup>-1</sup>

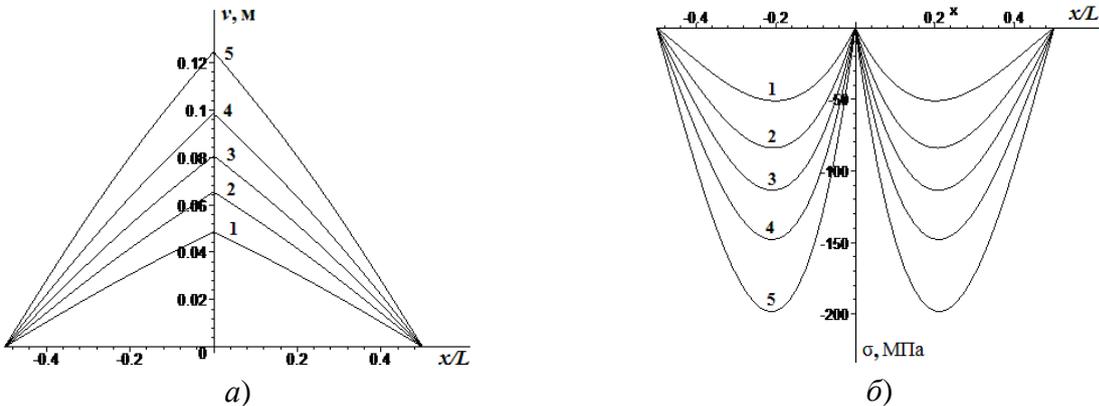
Результаты аналогичных расчетов для узла с геометрическими данными  $R_1=0.2$  м,  $R_2=0.16$  м,  $h=0.442$  м представлены на рис. 2.3, где контактная площадь узла с окружающим грунтом и масса узла соответственно будут равны  $S_0=0.646$  м<sup>2</sup>,  $M=100$  кг, а расстояние узла до свободной границы  $h_1=0.398$  м.

$$k_0 = 5 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$$



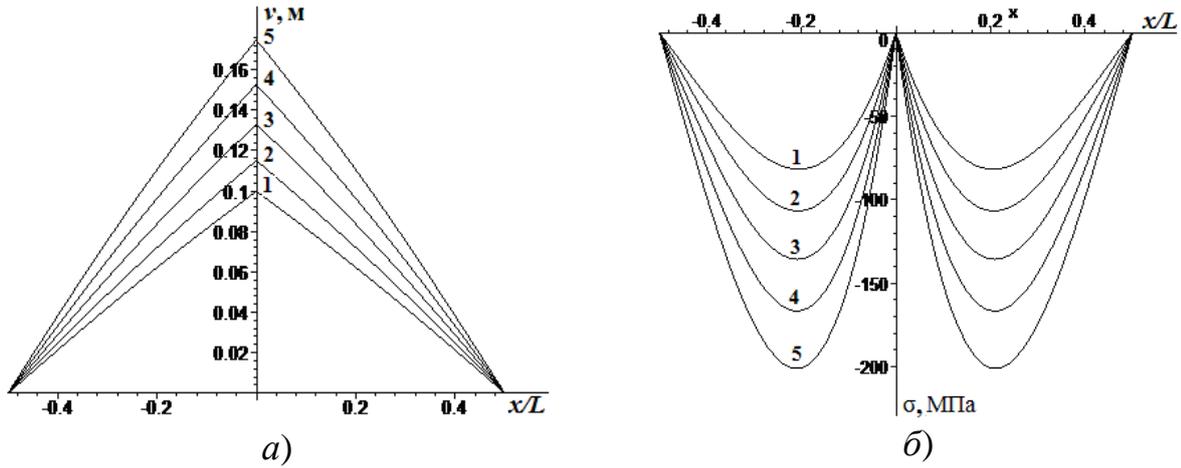
$$1 - \omega = 39.4 \text{ с}^{-1}; 2 - \omega = 40.1 \text{ с}^{-1}; 3 - \omega = 40.6 \text{ с}^{-1}; 4 - \omega = 40.9 \text{ с}^{-1}; 5 - \omega = 41.1 \text{ с}^{-1}$$

$$k_0 = 10^5 \text{ Н/м}^2$$



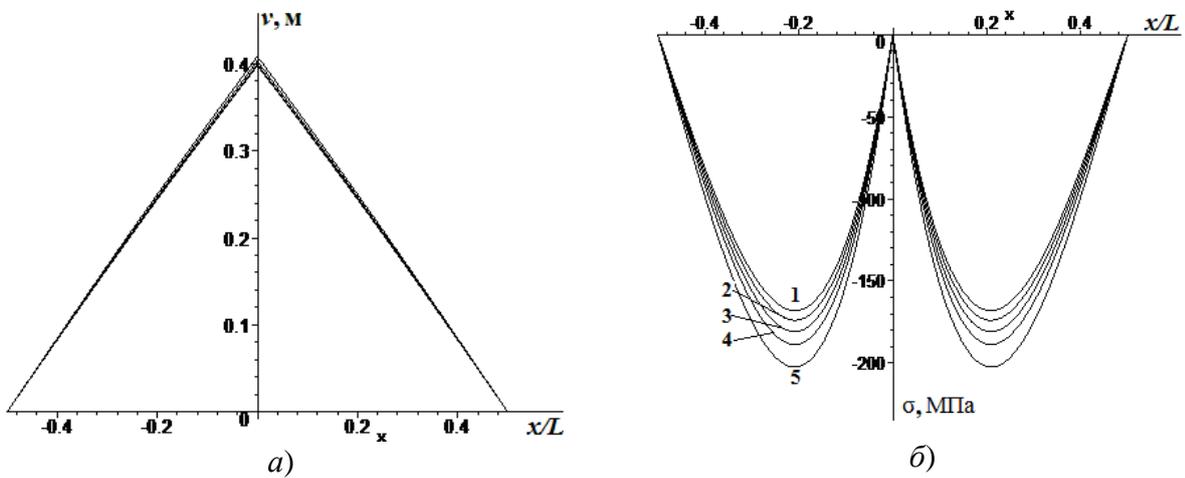
$$1 - \omega = 37.4 \text{ с}^{-1}; 2 - \omega = 38.7 \text{ с}^{-1}; 3 - \omega = 39.3 \text{ с}^{-1}; 4 - \omega = 39.7 \text{ с}^{-1}; 5 - \omega = 40.2 \text{ с}^{-1}$$

$$k_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$



$$1 - \omega = 32.7 \text{ с}^{-1}, \quad 2 - \omega = 33.4 \text{ с}^{-1}, \quad 3 - \omega = 34.43 \text{ с}^{-1}, \quad 4 - \omega = 35.0 \text{ с}^{-1}, \quad 5 - \omega = 35.5 \text{ с}^{-1}$$

$$k_0 = 4.57 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$



$$1 - \omega = 25.1 \text{ с}^{-1}, \quad 2 - \omega = 25.2 \text{ с}^{-1}, \quad 3 - \omega = 25.4 \text{ с}^{-1}, \quad 4 - \omega = 25.6 \text{ с}^{-1}, \quad 5 - \omega = 25.9 \text{ с}^{-1}$$

Рис. 2.3. Распределение амплитуд прогибов  $v(x)$ , м (а) и напряжений  $\bar{\sigma}(x)$ , МПа (б) по длине трубопровода (отнесенная к  $L$ ) при различных значениях коэффициента упругой связи узла с трубопроводом  $k_0$ , Н/м<sup>2</sup> и частоты падающей волны  $\omega$ , с<sup>-1</sup>

Из анализа графиков видно, что при малых значениях коэффициента  $k_0$  и допустимых значениях напряжения амплитуда перемещения узла не достигает значения  $h_1$ , т.е. не происходит выход узла на поверхность. Достижение амплитуды величины  $h_1$  происходит при высоких значениях коэффициента упругой связи узла с окружающей средой  $k_0=4.57 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ , при этом значения резонансных частот будут очень близкими друг к другу. Максимальное значение осевого напряжения практически не зависит от частоты.

## 2.2. Поперечные колебания подземных трубопроводов при различных законах взаимодействия их с окружающим грунтом.

При рассмотрении вопросов взаимодействия подземного трубопровода с окружающим грунтом часто не учитывается изменчивость параметров взаимодействия по длине трубопровода. Это обстоятельство особое значение имеет для протяженных трубопроводов вдоль трассы, где в значительной степени меняются грунтовые условия. При этом поведение трубопровода, согласно теории сейсродинамики подземных сооружений, в основном, зависит от выбора закона взаимодействия его с грунтом, который в простейших случаях характеризуется коэффициентами взаимодействия, определяемые из экспериментов. Пусть трубопровод контактирует с окружающим грунтом при наличии двух участков взаимодействия  $k_1$  ( $0 < x < l_1$ ) и  $k_2$  ( $l_1 < x < l$ ), где  $l$  – общая длина трубопровода. Установим начало координат в начальном сечении трубопровода и направим ось  $x$  вдоль оси трубопровода. В момент времени  $t_1 = (H - 2R)/c$  (где  $R$  – глубина заложение трубы,  $c$  – скорость распространения волны) на трубопровод падает волна, сформированная на глубине  $Z = H$ , фронт которой перпендикулярен оси трубопровода. Если пренебречь временем обтекания волной трубопровод и не учитывать вторичные волны отражения и дифракции, то при  $t \geq t_1$  по длине трубопровода будет действовать распределенная нагрузка  $k_1 (w_1 - u_0)$  при  $0 < x < l_1$  и  $k_2 (w_2 - u_0)$  при  $l_1 < x < l$ , где  $w_1(x, t)$ ,  $w_2(x, t)$  – поперечные перемещения сечений трубопровода,  $u = u_0(t) = u_{00}(ct - H + 2R)$  – перемещение частиц грунта за фронтом волны в плоскости  $Z = H - 2R$ .

Уравнения поперечных колебаний трубопровода для каждого участка имеют вид

$$EI \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + k_1 (w_1 - u_0) = 0 \quad (0 < x < l_1) \quad (2.2.1)$$

$$EI \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + k_2 (w_2 - u_0) = 0 \quad (l_1 < x < l) \quad (2.2.2)$$

где  $EI$  – изгибная жесткость трубопровода;  $m$  – погонная масса.

Уравнения (2.2.1) и (2.2.2) удовлетворяют граничным условиям

$$w_1 = 0 \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (2.2.3)$$

$$w_2 = 0 \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = l. \quad (2.2.4)$$

Кроме того следует удовлетворить условиям непрерывности смещений, углов поворота, моментов и перерезывающих сил на границе перехода

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \quad \text{при } x = l_1. \quad (2.2.5)$$

Рассмотрим случай  $u_0 = A \sin[\omega(ct - H + 2R)] = A \sin\left(\frac{2\pi(ct - H + 2R)}{\xi_R}\right)$ ,

где  $\xi_R$  – длина волны;  $A$  – амплитуда колебаний.

Процесс считаем установившимся и решение уравнений (2.2.1) и (2.2.2) представим в виде

$$w_1 = X_2(x) \sin(\omega t + \alpha), \quad w_2 = X_2(x) \sin(\omega t + \alpha),$$

где  $\omega = \frac{c}{\xi_R}$ ;  $\alpha = -\frac{2\pi(H - 2R)}{\xi_R}$ .

Функции  $X_1(x)$  и  $X_2(x)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} X_1^{IV} - \lambda_1^4 X_1 &= c_1, & X_2^{IV} - \lambda_2^4 X_2 &= c_2, & \text{при } \omega^2 > \frac{k_{01}}{m} \\ X_1^{IV} + \lambda_1^4 X_1 &= c_1, & X_2^{IV} + \lambda_2^4 X_2 &= c_2, & \text{при } \omega^2 < \frac{k_{02}}{m}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

где  $k_{01} = \max(k_1, k_2)$ ,  $k_{02} = \min(k_1, k_2)$ ,  $\lambda_1^4 = \frac{m\omega^2 - k_1}{EJ}$ ,  $\lambda_2^4 = \frac{m\omega^2 - k_2}{EJ}$ ,  $c_i = Ak_i / EJ$ .

1. Рассмотрим случай  $\omega^2 > k_{01}/m$ .

Тогда решения уравнений (2.2.1) и (2.2.2) представим в виде:

$$X_1 = A_1 Y_1(\lambda_1, x) + A_2 Y_2(\lambda_1, x) + A_3 Y_3(\lambda_1, x) + A_4 Y_4(\lambda_1, x) - \frac{c_1}{\lambda_1^4}$$

$$X_2 = B_1 Y_1(\lambda_2, x) + B_2 Y_{21}(\lambda_2, x) + B_3 Y_{31}(\lambda_2, x) + B_4 Y_4(\lambda_2, x) - \frac{c_1}{\lambda_2^4},$$

где  $A_i, B_i$  – произвольные постоянные;  $Y_i(z)$  – функции Крылова [9,10]

$$Y_1(z) = \frac{chz + \cos z}{2}, \quad Y_2(z) = \frac{shz + \sin z}{2}, \quad (2.2.7)$$

$$Y_3(z) = \frac{chz - \cos z}{2}, \quad Y_4(z) = \frac{shz - \sin z}{2}. \quad (2.2.8)$$

С учетом граничных условий (2.2.3) перемещение  $X_1(x)$  представим в виде

$$X_1 = \frac{c_1}{\lambda_1^4} Y_1(\lambda_1, x) + A_2 Y_2(\lambda_1, x) + A_4 Y_4(\lambda_1, x) - \frac{c_1}{\lambda_1^4}, \quad 0 < x < l_1 \quad (2.2.9)$$

Функция  $X_2(x)$  полагаем имеет вид:

$$X_2 = B_1 Y_1[\lambda_2, (x - l_1)] + B_2 Y_2[\lambda_2, (x - l_1)] + B_3 Y_3[\lambda_2, (x - l_1)] + \\ + B_4 Y_4[\lambda_2, (x - l_1)] - \frac{c_1}{\lambda_2^4}, \quad l_1 < x < l. \quad (2.2.10)$$

Из условий (2.2.5) следует

$$B_1 = A_2 Y_2(\lambda_1 l_1) + A_4 Y_4(\lambda_1 l_1) + \frac{c_1}{\lambda_1^4} [Y_1(\lambda_1 l_1) - 1] + \frac{c_1}{\lambda_2^4},$$

$$B_2 = \beta [A_2 Y_1(\lambda_1 l_1) + A_4 Y_3(\lambda_1 l_1)] + \frac{c_1}{\lambda_1^3 \lambda_2} Y_4(\lambda_1 l_1),$$

$$B_3 = \beta^2 [A_2 Y_4(\lambda_1 l_1) + A_4 Y_2(\lambda_1 l_1)] + \frac{c_1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} Y_3(\lambda_1 l_1),$$

$$B_4 = \beta^3 [A_2 Y_3(\lambda_1 l_1) + A_4 Y_1(\lambda_1 l_1)] + \frac{c_1}{\lambda_1 \lambda_2^3} Y_2(\lambda_1 l_1),$$

где  $\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ .

Подставляя выражения  $B_i$  в формулу (2.2.10), получаем

$$X_2 = A_2 F_2(x) + A_4 F_4(x) + F_0(x), \quad (2.2.11)$$

где

$$F_2 = Y_2(\lambda_1 l_1) Y_1[\lambda_2, (x - l_1)] + \beta Y_1(\lambda_1 l_1) Y_2[\lambda_2, (x - l_1)] + \beta^2 Y_4(\lambda_1 l_1) Y_3[\lambda_2, (x - l_1)] + \\ + \beta^3 Y_3(\lambda_1 l_1) Y_4[\lambda_2, (x - l_1)],$$

$$F_4 = Y_4(\lambda_1 l_1) Y_1[\lambda_2, (x - l_1)] + \beta Y_3(\lambda_1 l_1) Y_2[\lambda_2, (x - l_1)] + \beta^2 Y_2(\lambda_1 l_1) Y_3[\lambda_2, (x - l_1)] + \\ + \beta^3 Y_1(\lambda_1 l_1) Y_4[\lambda_2, (x - l_1)],$$

$$F_0(x) = \left\{ \frac{c_1}{\lambda_1^4} [Y_1(\lambda_1 l_1) - 1] + \frac{c_2}{\lambda_1^4} \right\} Y_1[\lambda_2, (x - l_1)] + \frac{c_1}{\lambda_1^3 \lambda_2} Y_4(\lambda_1 l_1) Y_2[\lambda_1, (x - l_1)] + \\ + \frac{c_1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} Y_3(\lambda_1 l_1) Y_3[\lambda_2, (x - l_1)] + \frac{c_1}{\lambda_1 \lambda_2^3} Y_2(\lambda_1 l_1) Y_4[\lambda_2, (x - l_1)].$$

Согласно условиям (2.2.4) полагаем

$$X_2(l) = 0, \quad X_2''(l) = 0.$$

Пользуясь этими условиями, составим уравнение для определения постоянных  $A_2$  и  $A_4$

$$A_2 F_2(l) + A_4 F_4(l) = -F_0(l),$$

$$A_2 F_2''(l) + A_4 F_4''(l) = -F_0''(l).$$

Из этой системы находим постоянные  $A_2$  и  $A_4$

$$A_2 = \frac{F_0''(l) F_4(l) - F_0(l) F_4''(l)}{F_2(l) F_4''(l) - F_2''(l) F_4(l)}, \quad A_4 = \frac{F_2''(l) F_0(l) - F_2''(l) F_4(l)}{F_2(l) F_4''(l) - F_2''(l) F_4(l)}.$$

Подставляя выражения постоянных  $A_2$  и  $A_4$  в формулы (2.2.9) и (2.2.11), окончательно получим решения задач, где частота колебаний внешнего воздействия удовлетворяет условию  $\omega^2 > k_{02}/m$ .

2. Рассмотрим случай  $\omega^2 < \frac{k_{02}}{m}$ . Функции  $X_1$  и  $X_2$  удовлетворяют уравнениям:

$$X_1^{IV} + 4\gamma_1^4 X_1 = c_1, \quad X_2^{IV} + 4\gamma_2^4 X_2 = c_2, \quad (2.2.14)$$

где  $\gamma_1^4 = -\frac{\lambda_1^4}{4} = \frac{k_1 - m\omega^2}{4EI}$ ,  $\gamma_2^4 = -\lambda_2^4 = \frac{k_2 - m\omega^2}{4EI}$ .

Решения уравнений (2.2.14) представим в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 Z_1(\gamma_1 x) + A_2 Z_2(\gamma_1 x) + A_3 Z_3(\gamma_1 x) + A_4 Z_4(\gamma_1 x) + \frac{c_1}{4\gamma_1^4}, \\ X_2 &= B_1 Z_1[\gamma_2(x-l)] + B_2 Z_2[\gamma_2(x-l)] + B_3 Z_3[\gamma_2(x-l)] + \\ &\quad + B_4 Z_4[\gamma_2(x-l)] + \frac{c_2}{4\gamma_2^4}, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

где  $Z(z)$  представляются через функции типа Крылова:

$$\begin{aligned} Z_1 &= ch \gamma z \cos \gamma z, \quad Z_2 = sh \gamma z \cos \gamma z + ch \gamma z \sin \gamma z, \\ Z_3 &= sh \gamma z \sin \gamma z, \quad Z_4 = sh \gamma z \cos \gamma z - ch \gamma z \sin \gamma z. \end{aligned}$$

Для производных этих функций имеют место зависимости

$$\begin{aligned} Z_1^I &= \gamma Z_4, \quad Z_1^{II} = -2\gamma^2 Z_3, \quad Z_1^{III} = -2\gamma^3 Z_2, \quad Z_1^{IV} = -4\gamma^4 Z_1, \\ Z_2^I &= \gamma Z_1, \quad Z_2^{II} = 2\gamma^2 Z_4, \quad Z_2^{III} = -4\gamma^3 Z_3, \quad Z_2^{IV} = -4\gamma^4 Z_2, \\ Z_3^I &= \gamma Z_2, \quad Z_3^{II} = 2\gamma^2 Z_1, \quad Z_3^{III} = 2\gamma^3 Z_4, \quad Z_3^{IV} = -4\gamma^4 Z_3, \\ Z_4^I &= -2\gamma Z_3, \quad Z_4^{II} = -2\gamma^2 Z_2, \quad Z_4^{III} = -4\gamma^3 Z_1, \quad Z_4^{IV} = -4\gamma^4 Z_4. \end{aligned}$$

Видно, что все функции  $Z_i$  удовлетворяют уравнению

$$X_i^{IV} + 4\gamma^4 X_i = 0.$$

Из граничных условий (2.2.4) следует

$$X_1 = \frac{c_1}{4\gamma_1^4} [1 - Z_1(\gamma_1 x)] + A_2 Z_2(\gamma_1 x) + A_4 Z_4(\gamma_1 x).$$

Условия (2.2.5) дают

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{c_1}{4\gamma_1^4} [1 - Z_1(\gamma_1 l_1)] + A_2 Z_2(\gamma_1 l_1) + A_4 Z_4(\gamma_1 l_1) - \frac{c_1}{4\gamma_2^4}, \\
 B_2 &= \alpha [A_2 Z_1(\gamma_1 l_1) - 2A_4 Z_3(\gamma_1 l_1)] - \frac{c_1}{4\gamma_1^3 \gamma_2} Z_4(\gamma_1 l_1), \\
 B_3 &= \frac{\alpha^2}{2} [A_2 Z_4(\gamma_1 l_1) - 2A_4 Z_2(\gamma_1 l_1)] + \frac{c_1}{4\gamma_1^2 \gamma_2^2} Z_3(\gamma_1 l_1), \\
 B_4 &= \frac{\alpha^3}{2} [-A_2 Z_3(\gamma_1 l_1) - 2A_4 Z_1(\gamma_1 l_1)] - \frac{c_1}{4\gamma_1 \gamma_2^3} Z_2(\gamma_1 l_1).
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения  $B_i$  в формулы (2.2.5), установим вид функции  $X_2(x)$

$$X_2 = A_2 R_2(x) + A_4 R_4(x) + R_0(x),$$

где

$$\begin{aligned}
 R_2 &= Z_2(\gamma_1 l_1) Z_n[\gamma_2(x - l_1)] + \alpha Z_1(\gamma_1 l_1) Z_2[\gamma_2(x - l_1)] + \frac{\alpha^2}{2} \cdot Z_2(\gamma_1 l_1) \cdot Z_3[\gamma_2(x - l_1)] - \\
 &\quad - \frac{\alpha^3}{4} Z_3(\gamma_1 l_1) Z_4[\gamma_2(x - l_1)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_4 &= Z_4(\gamma_1 l_1) Z_1[\gamma_2(x - l_1)] + 2Z_3(\gamma_1 l_1) Z_2[\gamma_2(x - l_1)] + \alpha^2 \cdot Z_2(\gamma_1 l_1) \cdot Z_3[\gamma_2(x - l_1)] - \\
 &\quad - \frac{\alpha^3}{4} Z_1(\gamma_1 l_1) Z_4[\gamma_2(x - l_1)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_0(x) &= \frac{c_1}{4\gamma_1^4} [1 - Z_1(\gamma_1 l_1)] Z_1[\gamma_2(x - l_1)] - \frac{c_1}{4\gamma_2^4} Z_1[\gamma_2(x - l_1)] - \frac{c_1}{4\gamma_1^3 \gamma_2} Z_4(\gamma_1 l_1) Z_2[\gamma_2(x - l_1)] - \\
 &\quad - \frac{c_1}{4\gamma_1^2 \gamma_2^2} Z_3(\gamma_1 l_1) Z_3[\gamma_2(x - l_1)] + \frac{c_1}{4\gamma_1 \gamma_2^3} Z_1(\gamma_1 l_1) Z_4[\gamma_2(x - l_1)], \quad \alpha = \gamma_1 / \gamma_2.
 \end{aligned}$$

Пользуясь граничными условиями (2.2.5), составим уравнения для определения постоянных  $A_2$  и  $A_4$

$$A_2 R_2(l) + A_4 R_4(l) = -R_0(l), \quad A_2 R_2''(l) + A_4 R_4''(l) = -R_0''(l).$$

Из этой системы определяем  $A_2$  и  $A_4$ .

На рис. 2.4 – 2.6 представлены кривые распределения прогибов (отнесенных к  $A$ ) и моментов (отнесенных к величине  $EJl^2/A$ ) вдоль оси трубопровода  $x/l$  в случае  $\omega^2 > k_{02}/m$  для различных отношений частот

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{k_1/m}, \quad \bar{\omega}_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{k_2/m}.$$

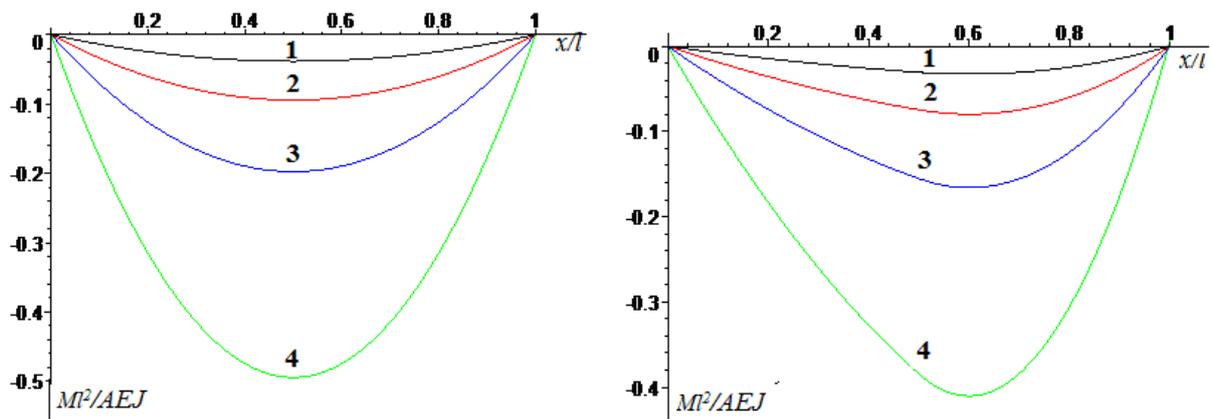


Рис. 2.4. Распределение момента  $\bar{M} = Ml^2 / AEJ$  по длине трубопровода  $x/l$  в частотах близких к первой резонансной  $\bar{\omega} = 3.15$  при различных частотах  $\bar{\omega} = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 l^4}{EJ}}$  :  
 $1 - \varpi = 5, 2 - \varpi = 4.5, 3 - \varpi = 4, 4 - \varpi = 3.5$

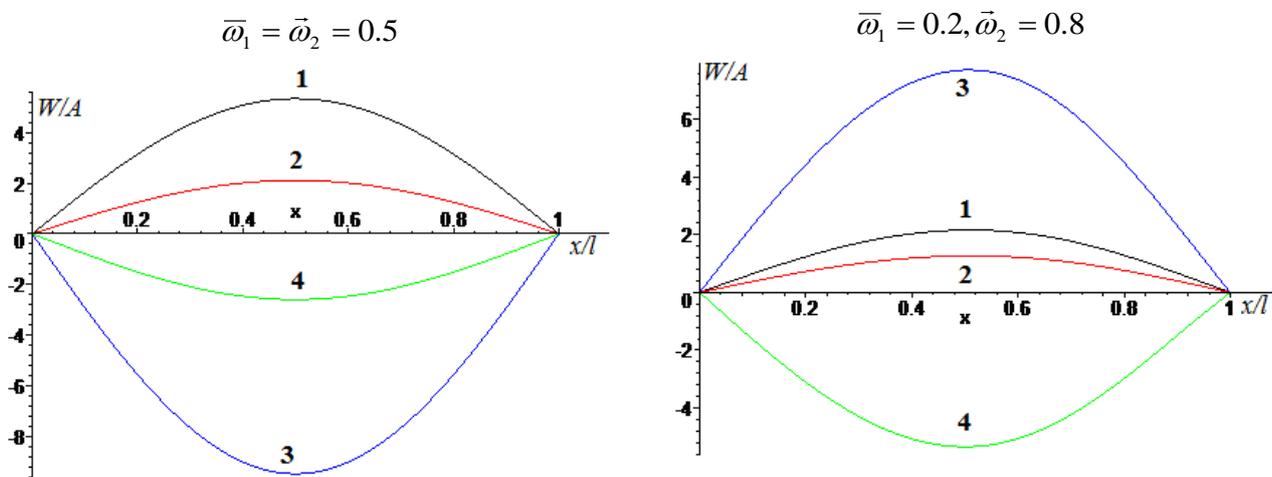


Рис. 2.5. Распределение прогибов трубопровода по длине (отнесенной к  $l$ ) в частотах близких к первой резонансной  $\bar{\omega} = 3.15$  :  $1 - \varpi = 5, 2 - \varpi = 4.5, 3 - \varpi = 4, 4 - \varpi = 3.5$

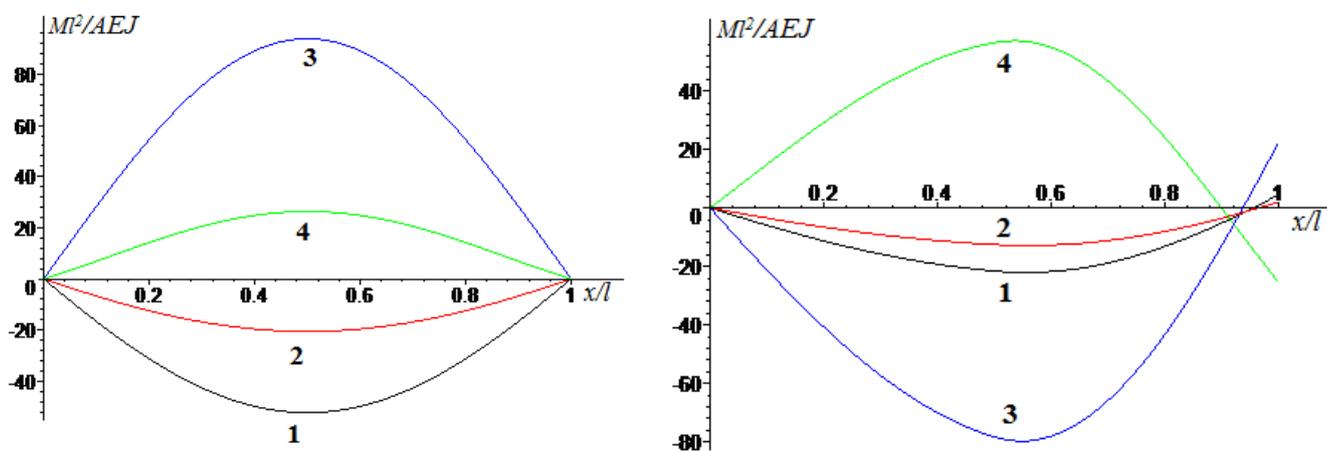


Рис. 2.6. Распределение момента  $\bar{M} = Ml^2 / AEJ$  по длине (отнесенной к  $l$ ) в частотах близких к первой резонансной  $\bar{\omega} = 3.15$  :  $1 - \varpi = 5, 2 - \varpi = 4.5, 3 - \varpi = 4, 4 - \varpi = 3.5$

Колебательный процесс трубопровода может реализоваться в частотах близких к корням уравнения, при которых знаменатели для функций  $X_1(x, \omega)$  и  $X_2(x, \omega)$  обращаются в нуль. На рис. 2.5 представлены кривые распределения перемещений (отнесенные к величине  $A$ ) сечений трубопровода по длине в безразмерных частотах  $\bar{\omega} = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 l^4}{EJ}}$  близких к двум резонансным для различных значений отношений  $\omega_1/\omega$  и  $\omega_2/\omega$  ( $\omega_i^2 = k_i/m$ ). В расчетах принято  $l_1/l=0.5$ . При колебаниях трубопровода с частотой близкой к резонансной перемещения его сечений могут принимать сколь угодно большие значения. Наличие участка с разными коэффициентами жесткости, в рассматриваемом случае, существенно не влияет на резонансный режим колебаний. Аналогичные кривые для моментов представлены на рис. 2.4 и 2.6. Видно, что в частотах близких к резонансной в сечениях трубопровода могут возникнуть высокие моменты, являющиеся причинами потери устойчивости.

### 2.3. Продольный изгиб трубопровода в грунтовой среде при наличии зоны отрыва

Задача об изгибе весомой балки бесконечной длины, лежащей на упругом основании, под действием сосредоточенных сил рассмотрена в работах [11, 12]. При действии одной сосредоточенной силы определено ее минимальное значение, при котором начинает образовываться зона отрыва, симметрично расположенная от точки приложения силы. При действии двух сосредоточенных сил установлена возможность появления зоны отрыва на отрезке между точками приложения этих сил.

Рассмотрим случай нарушения контакта невесомой конечной балки от основания при действии сосредоточенной силы  $P_0$  на концевых сечениях балки и действия сосредоточенной силы  $Q$ . При этом принимаем, что контактная сила между балкой и основанием подчиняется закону

$$q=cW \quad \text{при} \quad 0 \leq W \leq W^*, \quad q=0 \quad W > W^*,$$

где  $c$  – коэффициент постели, а для подземного трубопровода – коэффициент упругого отпора грунта.

При действии силы  $P_0$  кривая изогнутой оси балки будет симметрична относительно точки  $O$ , которую принимаем за начало координат, ось  $Ox$  направим вдоль оси балки слева направо (рис. 2.7).

Уравнение равновесия балки на упругом основании для каждой части балки представим в виде

$$EJ \frac{d^4 W_1}{dx^4} + P_0 \frac{d^2 W_1}{dx^2} + cW_1 = 0 \quad \text{при} \quad x_0 < x < l \quad (2.3.1)$$

$$EJ \frac{d^4 W_2}{dx^4} + P_0 \frac{d^2 W_2}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < x_0, \quad (2.3.2)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  – прогибы балки в соответствующих зонах;  $EJ$  – жесткость при изгибе.

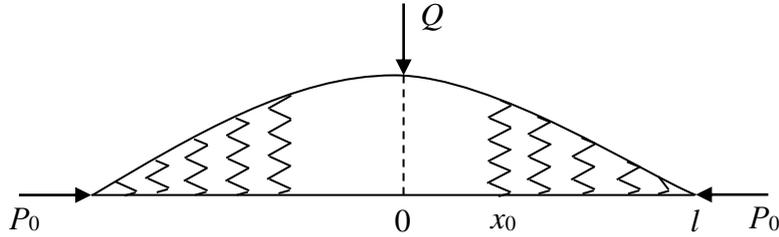


Рис. 2.8. Схема деформирования балки

Уравнения (2.3.1) и (2.3.2) интегрируются при выполнении следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} EJ W_1''' &= -Q & \text{при} \quad x = 0 \\ W_1' &= 0, W_2 = 0, W_2' = 0 & \text{при} \quad x = l \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

И условий сопряжения:

$$W_1 = W_*, \quad W_2 = W_*, \quad W_1' = W_2', \quad W_1'' = W_2'', \quad W_1''' = W_2''' \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (2.3.4)$$

Здесь  $x_0$  – длина зоны отрыва.

Решения уравнений (2.3.1) и (2.3.2), удовлетворяющих условиям (2.3.3) и (2.3.4), представим в виде:

$$\begin{aligned} W_1 &= C_1(l - x) + A_1 \sin m(l - x), & x_0 < x < l \\ W_2 &= C_2 + A_2 \cos \beta x, & 0 < x < x_0, \end{aligned}$$

где  $m = \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - r}}$ ,  $\beta^2 = \frac{P_0}{EJ}$ ,  $r = \frac{c}{EJ}$ ;  $x_0$ ,  $C_1$ ,  $A$ ,  $C_2$ ,  $A_2$  – постоянные, определяемые из условий сопряжений (2.3.5), которые дают

$$C_1 = -\bar{A}_1 \lambda \bar{\beta} \cos \lambda \bar{\beta} (1 - \bar{x}_0) + \bar{A}_2 \bar{\beta} \sin \bar{\beta} \bar{x}_0$$

$$C_2 = -\bar{A}_1 \cos \bar{\beta} \bar{x}_0 - \frac{q}{\bar{\beta}^3} (\bar{\beta} \bar{x}_0 - \sin \bar{\beta} \bar{x}_0) + \bar{W}_*$$

$$\bar{A}_1 = \frac{q}{\lambda^2 \bar{\beta}^3} \frac{1}{\Delta(\bar{x}_0)}, \quad \bar{A}_2 = \frac{q}{\bar{\beta}^3} \frac{\Delta_1(\bar{x}_0)}{\Delta(\bar{x}_0)}, \quad q = \frac{Ql^2}{EJ}.$$

$$\Delta(\bar{x}_0) = \lambda \cos \bar{\beta} \bar{x}_0 \cos \lambda \bar{\beta} (1 - \bar{x}_0) - \sin \bar{\beta} \bar{x}_0 \sin \lambda \bar{\beta} (1 - \bar{x}_0)$$

$$\Delta_1(\bar{x}_0) = \cos \bar{\beta} \bar{x}_0 \sin \lambda \bar{\beta} (1 - \bar{x}_0) + \lambda \cos \bar{\beta} (1 - \bar{x}_0) \sin \bar{\beta} \bar{x}_0,$$

где  $\bar{x}_0$  – корни уравнения:

$$C_1(1 - \bar{x}_0) + \bar{A}_1 \cos \lambda \bar{\beta} (1 - \bar{x}_0) - \bar{W}_* = 0.*$$

Здесь  $\bar{x}_0 = \frac{x_0}{l}$ ;  $\bar{A}_1 = \frac{A_1}{l}, \bar{A}_2 = \frac{A_2}{l}$ ;  $\bar{\beta} = \sqrt{\frac{P_0 l^2}{EJ}}$ ;  $\lambda = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\gamma}}{2}}$ ;  $\gamma = \frac{cEJ}{P_0^2} < \frac{1}{4}$ ;  
 $q = Ql / EJ$ .

Прогиб балки и изгибающий момент вдоль балки вычисляются по формулам

$$\bar{W}_1 = \frac{W_1}{l} = C_1(1 - \bar{x}) + \bar{A}_1 \cos \lambda \bar{\beta}(1 - \bar{x}) \quad \text{при } \bar{x}_0 \leq \bar{x} < 1$$

$$\bar{W}_2 = \frac{W_2}{l} = \frac{q}{\bar{\beta}^3} (\bar{x} \bar{\beta} + \sin \bar{\beta} \bar{x}) + \bar{A}_2 \cos \bar{\beta} \bar{x} \quad \text{при } 0 < \bar{x} \leq \bar{x}_0$$

$$M_2 = \frac{EJ}{l} \left( \frac{q}{\bar{\beta}} \sin \bar{x} - \bar{\beta}^2 \bar{A}_2 \cos \bar{\beta} \bar{x} \right) \quad \text{при } 0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_0$$

$$M_1 = \frac{EJ}{l^2} \bar{A}_1 \lambda^2 \bar{\beta}^2 \cos \bar{\beta} \lambda (1 - \bar{x}) \quad \text{при } \bar{x}_0 \leq \bar{x} \leq 1.$$

Таблица 2.2 – Значения координаты отрыва трубопровода  $x_0/l$  от грунта при различных значениях параметров  $q=Ql/EJ$  и  $\gamma = cEJ / P_0^2$

	$q=0.0035$					$q=0.005$				
$\gamma$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.245	0.05	0.1	0.15	0.2	0.245
$x_0/l$	0.045	0.23	0.305	0.353	0.387	0.397	0.436	0.463	0.484	0.5

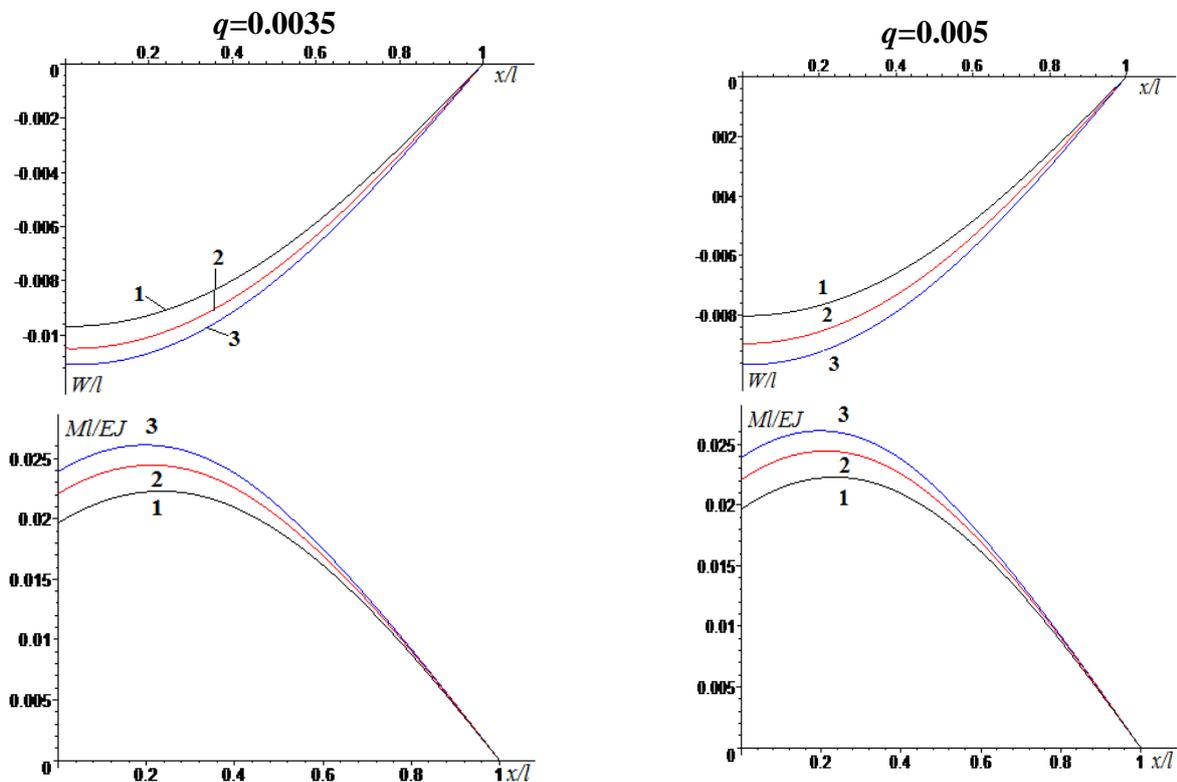


Рис. 2.9. Распределение прогиба и момента по длине трубопровода при различных значениях параметров  $q=Ql/EJ$  и  $\gamma = cEJ / P_0^2$ : 1 –  $\gamma=0.05$ ; 2 –  $\gamma=0.15$ ; 3 –  $\gamma=0.245$

Из табличных данных видно, что с ростом параметра  $\gamma$  длина зоны отрыва, а также прогибы и моменты в сечениях трубопровода увеличиваются. При этом рост силы растяжения в сечении  $x=0$  также приводит к увеличению длины зоны отрыва.

## 2.4. Действие сейсмических волн на трубопровод, взаимодействующий с грунтом по различным законам

Рассмотрим теперь случай воздействия сейсмической волны, фронт которой параллелен оси трубопровода, обтекающей трубопровод под произвольным углом. При этом сечения трубопровода совершают движение как в продольном (вдоль оси трубопровода), так и в поперечном (перпендикулярном к оси трубопровода) направлениям. Если рассматривать движение трубопровода только в поперечном направлении, тогда можно использовать уравнение (2.3.1), приведенное в предыдущем параграфе. Будем считать, что трубопровод контактирует с грунтом по линейному закону при наличии двух участков с различными коэффициентами взаимодействия. Уравнение (2.3.1) в рассматриваемом случае записывается в виде

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + \alpha_1 w_1 = \alpha_1 w_0 (M\tau - \xi) \text{ при } \tau > 0 \quad 0 < \xi < \xi_0, \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} + \alpha_2 w_2 = \alpha_2 w_0 (M\tau - \xi) \text{ при } \tau > 0 \quad \xi_0 < \xi < 1. \quad (2.4.2)$$

Здесь  $w_i \rightarrow w_i / l$  ( $i=1,2$ );  $\xi = x/l$ ;  $\tau = t\sqrt{EJ/ml^4}$ ;  $\alpha_i = k_i l^4 / EJ$ ;  $M = c_1 \sqrt{\frac{ml^2}{EJ}}$ ;  $\xi_0 = l_1 / l$ , где  $l$  – длина трубопровода;  $m$  – погонная масса;  $E$  – модуль Юнга материала трубопровода;  $c_1$  – кажущаяся скорость распространения волны;  $w_0(\tau, \xi)$  – поперечное составляющее перемещения частиц грунта за фронтом волны,  $J$  – момент инерции сечения;  $k_1$  – коэффициент взаимодействия для первого участка  $0 < x < l_1$ ;  $k_2$  – для второго участка  $l_1 < x < l$ .

Уравнения (2.4.1) и (2.4.2) интегрируются при следующих нулевых граничных условиях:

$$w_i = 0, \frac{\partial w_i}{\partial t} = 0 \text{ при } \tau = 0, \quad (2.4.3)$$

$$w_1 = 0, w_1'' = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad (2.4.4)$$

$$w_2 = 0, w_2'' = 0 \text{ при } \xi = 1. \quad (2.4.5)$$

Кроме того функции  $w_i(\xi, \tau)$  удовлетворяют условиям непрерывности

$$w_1 = w_2, w_1' = w_2', w_1'' = w_2'', w_1''' = w_2''' \text{ при } \xi = \xi_0 = l_1 / l. \quad (2.4.6)$$

Решение краевой задачи (2.4.3) – (2.4.6) получим методом Фурье, согласно которому решение соответствующих однородных уравнений представим в виде

$$w_1 = X_1(\xi)T(\tau), \quad w_2 = X_2(\xi)T(\tau),$$

где  $X_i(\xi)$  – собственные;  $T(\tau)$  – координатные функции, удовлетворяющие уравнениям.

$$\frac{X_1^{(4)}}{X_1} + \frac{T''}{T} + \alpha_1 = 0, \quad \frac{X_2^{(4)}}{X_2} + \frac{T''}{T} + \alpha_2 = 0. \quad (2.4.7)$$

При этом функция  $T(\tau)$  удовлетворяет уравнению

$$T'' = -(\lambda_1^4 + \alpha_1)T = -(\lambda_2^4 + \alpha_2)T,$$

где  $\lambda_i$  – собственные числа.

Из последнего равенства получаем  $\lambda_1^4 + \alpha_1 = \lambda_2^4 + \alpha_2$ .

Далее обозначим  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = \sqrt[4]{(\lambda^4 + \alpha_1 - \alpha_2)}$ . Уравнения относительно  $X_i(\xi)$  записываются в виде

$$X_1^{(4)} - \lambda^4 X_1 = 0, \quad X_2^{(4)} - \lambda_2^4 X_2 = 0.$$

Общие решения этих уравнений выражаются через функции Крылова [9, 10]

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 Y_1(\lambda \xi) + A_2 Y_2(\lambda \xi) + A_3 Y_3(\lambda \xi) + A_4 Y_4(\lambda \xi), \\ X_2 &= B_1 Y_1[\lambda_2(\xi - \xi_0)] + B_2 Y_2[\lambda_2(\xi - \xi_0)] + B_3 Y_3[\lambda_2(\xi - \xi_0)] + B_4 Y_4[\lambda_2(\xi - \xi_0)], \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Из граничных условий (2.4.4) следует

$$A_1 = A_3 = 0.$$

Условия (2.4.6) дают

$$\begin{aligned} B_1 &= A_2 Y_2(\lambda l_0) + A_4 Y_4(\lambda l_0), \quad B_2 = \beta [A_2 Y_1(\lambda l_0) + A_4 Y_3(\lambda l_0)], \\ B_3 &= \beta^2 [A_2 Y_4(\lambda l_0) + A_4 Y_2(\lambda l_0)], \quad B_4 = \beta^3 [A_2 Y_3(\lambda l_0) + A_4 Y_1(\lambda l_0)], \end{aligned}$$

Подставляя выражения  $B_i$  в формулу (2.4.8), выразим  $X_2(x)$  через коэффициенты  $A_2$  и  $A_4$

$$\begin{aligned} X_2 &= [A_2 Y_2(\lambda l_0) + A_4 Y_4(\lambda l_0)] \cdot Y_1[\lambda_2(\xi - \xi_0)] + \beta [A_2 Y_1(\lambda l_0) + A_4 Y_3(\lambda l_0)] \cdot Y_2[\lambda_2(\xi - \xi_0)] + \\ &+ \beta^2 [A_2 Y_4(\lambda l_0) + A_4 Y_2(\lambda l_0)] \cdot Y_3[\lambda_2(\xi - \xi_0)] + \beta^3 [A_2 Y_3(\lambda l_0) + A_4 Y_1(\lambda l_0)] \cdot Y_4[\lambda_2(\xi - \xi_0)]. \end{aligned}$$

Из условий (2.4.5) получим систему однородных уравнений для определения постоянных  $A_2$  и  $A_4$ . Приравнявая определитель этой системы нулю, составим уравнение для определения собственных чисел  $\lambda_i$

$$a_2(\lambda)A_2 + a_4(\lambda)A_4 = 0,$$

$$b_2(\lambda)A_2 + b_4(\lambda)A_4 = 0,$$

где  $a_i$  и  $b_i$  – известные коэффициенты.

Собственные числа  $\lambda_i$  определяются из уравнения

$$a_2(\lambda)b_4(\lambda) - b_2(\lambda)a_4(\lambda) = 0.$$

Можно показать, что собственные функции  $X_{1i}$  и  $X_{2i}$ , соответствующие числам  $\lambda_i$ , удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^{l_0} X_{1i} X_{1k} dx + \int_{l_0}^1 X_{2i} X_{2k} dx = 0 \text{ при } i \neq k. \quad (2.4.9)$$

Решение неоднородных уравнений (2.4.1) и (2.4.2) представим в виде разложения по собственным функциям  $X_{1i}$  и  $X_{2i}$

$$w_1 = \sum_{i=1}^{\infty} X_{1i}(x)T_i(\tau), \quad w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} X_{2i}(x)T_i(\tau).$$

Поставляя эти выражения в уравнения (2.4.1) и (2.4.2), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T_i'' + \omega_i^2 T_i) X_{1i} = \alpha_1 w_0 (M\tau - \xi) H(M\tau - \xi),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T_i'' + \omega_i^2 T_i) X_{2i} = \alpha_2 w_0 (M\tau - \xi) H(M\tau - \xi).$$

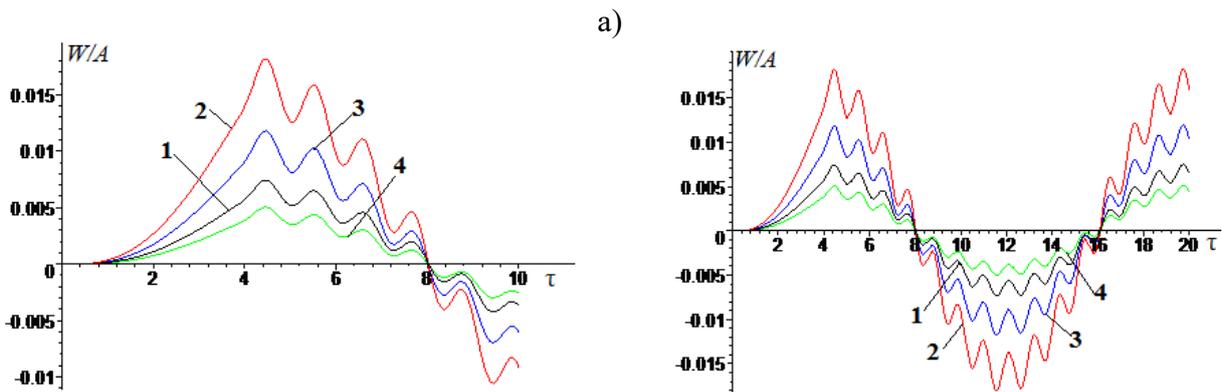
Умножаем каждое уравнение соответственно на функции  $X_{1k}$  и  $X_{2k}$  и интегрируем в соответствующих интервалах  $0 < \xi < \xi_0$  и  $\xi_0 < \xi < 1$ . Далее результаты складываем, пользуясь условием ортогональности, получим уравнения относительно  $T_i(\tau)$

$$T_i'' + \omega_i^2 T_i = F_i(\tau),$$

$$\text{где } F_i = \frac{1}{\|X_i\|} \left( \alpha_1 \int_0^{l_0} w_0 (M\tau - \xi) X_{1i} d\xi + \alpha_2 \int_{l_0}^1 w_0 (M\tau - \xi) X_{2i} d\xi \right).$$

Здесь  $\|X_i\| = \int_0^{l_0} X_{1i}^2 d\xi + \int_{l_0}^1 X_{2i}^2 d\xi$  – норма собственных функций.

На рис. 2.10 – 2.13 представлены кривые изменения прогибов и моментов от времени при  $w_0 = A_0 \sin[2\pi R(M\tau - \xi)/\xi_R]$ ,  $\xi_0=0.2$ ,  $M=0.5$  в различных сечениях трубопровода.



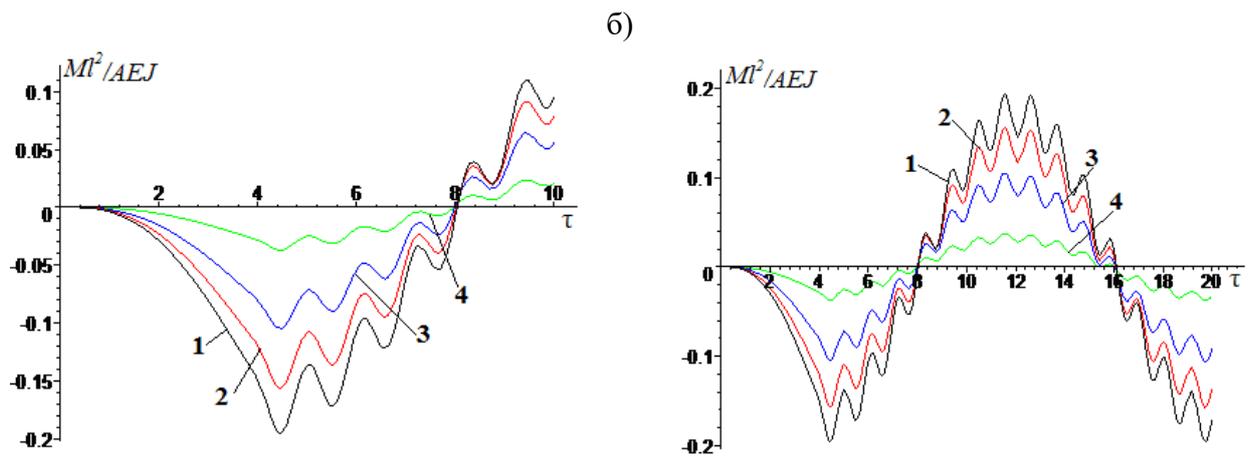


Рис. 2.10. Изменения прогиба (а) (отнесенного к амплитуде  $A_0$  падающей волны) и момента (б) (отнесенного к величине  $EJA_0/l^2$ ) по времени в различных сечениях трубопровода (от переменной  $x/l$ ): 1 –  $x=0.2$ ; 2 –  $x=0.4$ ; 3 –  $x=0.6$ ; 4 –  $x=0.8$ , где  $\zeta_R/R=2$  и коэффициенты взаимодействия одинаковые  $\alpha_1=\alpha_2=2$

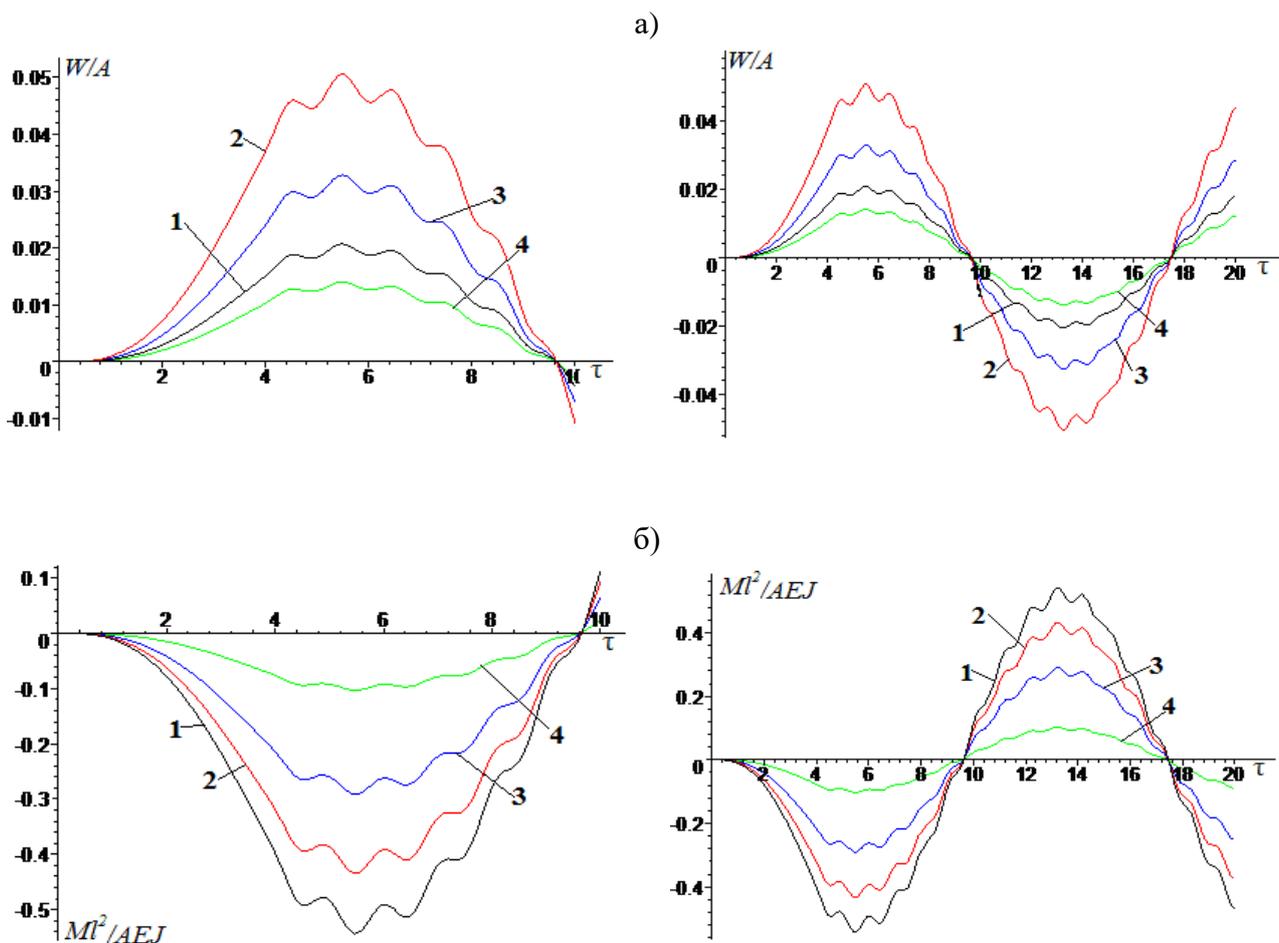


Рис. 2.11. Изменения прогиба (а) (отнесенного к амплитуде  $A_0$  падающей волны) и момента (б) (отнесенного к величине  $EJA_0/l^2$ ) по времени в различных сечениях трубопровода (от переменной  $x/l$ ): 1 –  $x=0.2$ ; 2 –  $x=0.4$ ; 3 –  $x=0.6$ ; 4 –  $x=0.8$ , где  $\zeta_R/R=2$  и коэффициенты взаимодействия разные  $\alpha_1=6$ ,  $\alpha_2=2$

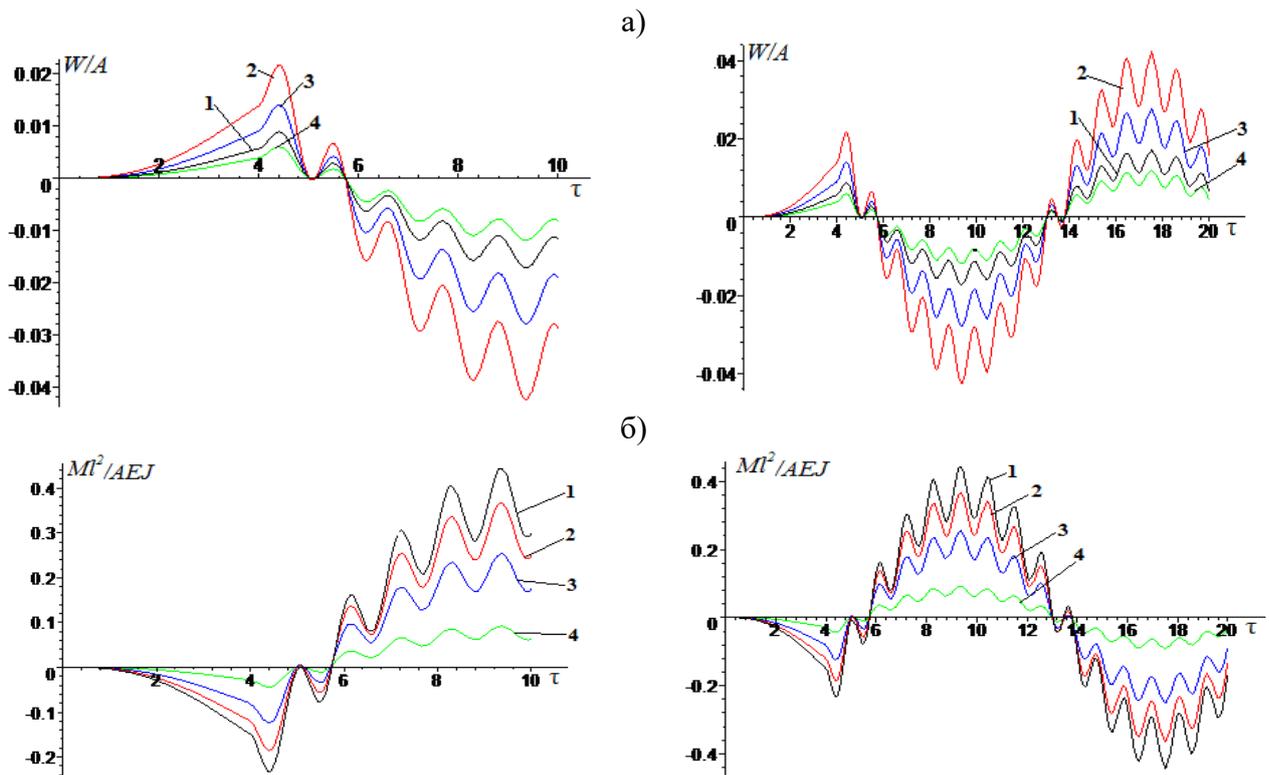


Рис. 2.12. Изменения прогиба (а) (отнесенного к амплитуде  $A_0$  падающей волны) и момента (б) (отнесенный к величине  $EJA_0/l^2$ ) по времени в различных сечениях трубопровода (от переменной  $x/l$ ): 1 –  $x=0.2$ ; 2 –  $x=0.4$ ; 3 –  $x=0.6$ ; 4 –  $x=0.8$ , где  $\zeta_R/R$  и при различных коэффициентах взаимодействия разные  $\alpha_1=2$ ,  $\alpha_1=6$

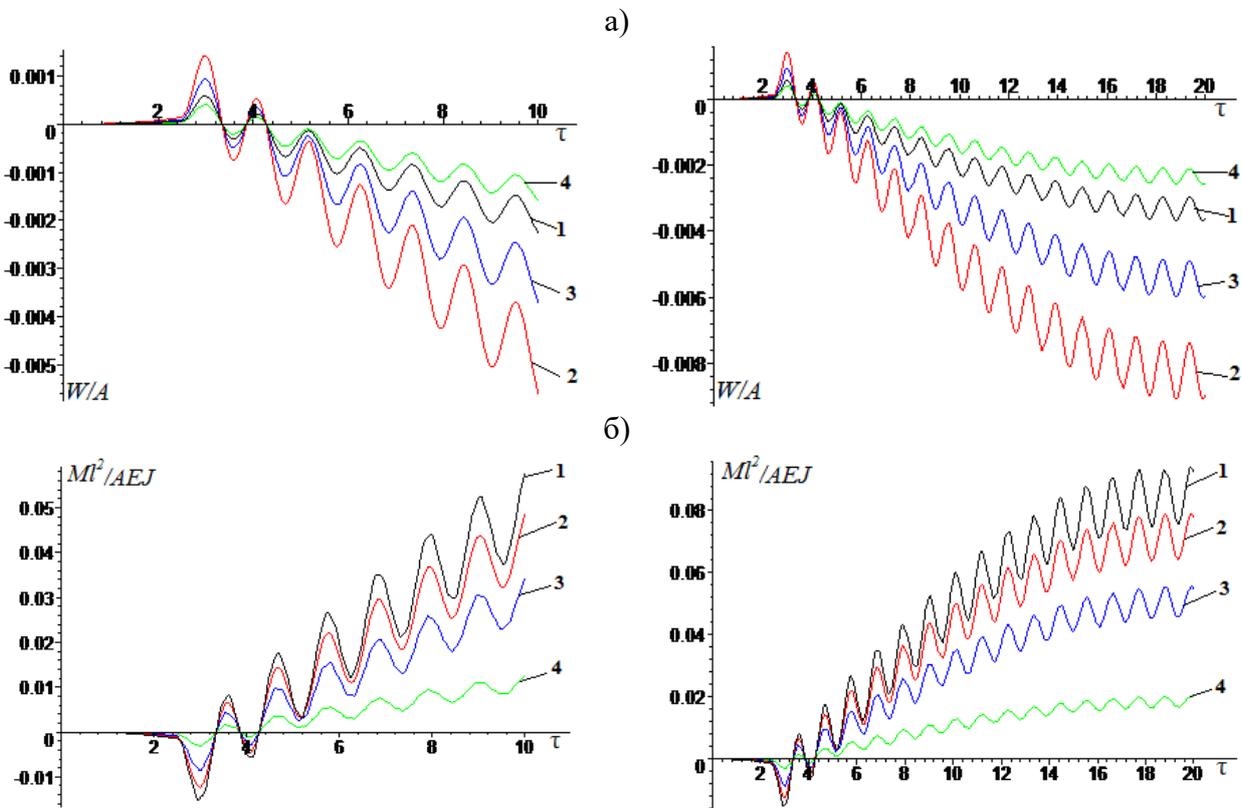


Рис. 2.13. Изменения прогиба (а) (отнесенного к амплитуде  $A_0$  падающей волны) и момента (б) (отнесенный к величине  $EJA_0/l^2$ ) по времени в различных сечениях трубопровода (от переменной  $x/l$ ): 1 –  $x=0.2$ ; 2 –  $x=0.4$ ; 3 –  $x=0.6$ ; 4 –  $x=0.8$ , где  $\zeta_R/R=0.5$  и при различных коэффициентах взаимодействия одинаковые  $\alpha_1=\alpha_2=2$

Анализ кривых показывает, что действие волны приводит к появлению дополнительного колебательного составляющего в сечениях трубопровода. При этом наибольший эффект влияния волны наблюдается в сечениях отдаленных от концевых. Переменный коэффициент взаимодействия существенно влияет на величину момента. Если коэффициент жесткости увеличить в зоне близкой к начальному торцу, то колебания сечений происходят по закону близкому к движению перемещений частиц грунта (рис. 2.10). Если коэффициент жесткости увеличить в зоне близкой к конечному торцу (рис. 2.12), то начальные сечения совершают колебания по дополнительному закону.

## 2.5. Продольно-поперечные колебания трубопровода с учетом конечных деформаций изогнутой оси при действии волны Релея

Рассмотрим продольно-поперечное движение подземного трубопровода с учетом физического нелинейного деформирования в виде стержня постоянного поперечного сечения. Установим начало координат в левом сечении трубопровода и направим ось  $Ox$  слева на право. Потенциальную и кинетическую энергию стержня при ее продольно-поперечном деформировании представим в виде [13 – 16]:

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{ES}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 \right] dx, \quad (2.5.1)$$

$$T = \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \quad (2.5.2)$$

где  $u=u(x,t)$  и  $v=v(x,t)$  – продольное и поперечное смещение сечения стержня;  $E$  и  $\rho$  – модуль Юнга и плотность материала стержня;  $S$  и  $L$  – площадь поперечного сечения и длина стержня.

Используя принцип минимума Эйлера – Лагранжа, получим систему нелинейных уравнений [13]

$$ES \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P_u(u, x, t) = 0 \quad (2.5.3)$$

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - ES \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 + \rho S v_{tt} + P_v(v, x, t) = 0, \quad (2.5.4)$$

где  $P_u(u, x, t)$ ,  $P_v(v, x, t)$  – известные выражения сил сопротивления окружающей среды в продольном и поперечном направлениях. Уравнения (2.5.3) и (2.5.4) составляют связанную нелинейную систему и ее решение можно получить численно. В зависимости от постановки задачи их можно привести к упрощенной форме.

Пусть на трубопровод падает волна Релея с осредненными перемещениями частиц грунта на его поверхности, которые представлены в работе [1]

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_x(r, \theta) d\theta, \quad B_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_z(r, \theta) d\theta$$

$$U_x = \frac{|u_0|(2-s)}{m_2 s} \left\{ \exp[-m_2 \xi_R (R + R_1 \sin \theta)] - 0.5(2-s) \exp[-m_1 \xi_R (R + R_1 \sin \theta)] \right\}$$

$$U_z = \frac{|u_0|(2-s)}{s} \left\{ \exp[-m_2 \xi_R (R + R_1 \sin \theta)] - 2(2-s)^{-1} \exp[-m_1 \xi_R (R + R_1 \sin \theta)] \right\},$$

где  $m_1 = \sqrt{1-s}$ ,  $m_2 = \sqrt{1-qs}$ ,  $q = (1-2\nu_0)/2(1-\nu_0)$ ,  $s$  – действительный корень уравнения  $4m_1(s)m_2(s) - (2-s)^2 = 0$ ;  $\xi_R = \omega/c_2 \sqrt{s}$ ,  $\omega$  – частота колебаний частиц грунта;  $c_2$  – скорость распространения поперечной волны в грунте;  $u_0$  – перемещения частиц грунта;  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона для грунта;  $R$  – глубина заложения трубопровода;  $R_1$  – внешний радиус трубы.

С целью упрощения постановки задачи считаем, что угол наклона изогнутой оси (стержня) балки к оси балки близко к нулю, поэтому полагаем  $(\partial v / \partial x)^2 \approx 0$

С учетом этого условия система (2.5.3) – (2.5.4) записывается в виде

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k_u u(x, t) = -k_u A_n \sin(\omega t - \xi_R x) \quad (2.5.5)$$

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - EF \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k_v v(x, t) = k_v B_0 \cos(\omega t - \xi_R x) \quad (2.5.6)$$

где  $A_0$  и  $B_0$  – осредненные по контуру трубопровода амплитуды продольного и поперечного составляющего перемещения частиц грунта;  $\omega$  – частота колебаний;  $\xi_R = 2\pi/\lambda_R$ ,  $\lambda_R$  – длина волны [1].

В торцевых сечениях стержня для перемещения  $u(x, t)$  выполняются условия

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} = k_{01} [u - u_0(0, t)] \quad \text{при } x = 0 \quad (2.5.7)$$

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} = k_{02} [u - u_0(L, t)] H(t - L/\lambda_R) \quad \text{при } x = L. \quad (2.5.8)$$

Вводя разрывы производных в сечениях  $x=0$  и  $x=L$ , с учетом (2.5.7) и (2.5.8), уравнение (2.5.5) записываем в виде ( $\xi = x/L$ )

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_u [u_0(x, t) H(t - x/\lambda_R) - u(x, t)] + k_{01} [u(0, t) - u_0(0, t)] \delta(\xi) + k_{02} [u(L, t) - u_0(L, t) H(t - L/\lambda_R)] \delta(1 - \xi) = 0 \quad (2.5.9)$$

В принятых предположениях уравнение (2.5.9) для продольного составляющего перемещения решается независимо от уравнения (2.5.6). Далее после нахождения функции  $u(x,t)$  из (2.5.9) находим прогиб  $v(x,t)$ . Решение уравнения (2.5.9) удовлетворяет условиям разрыва производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x = -0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x = L + 0.$$

При  $x=0$  и  $x=L$  выполняются соответственно условия (2.5.7) и (2.5.8). Согласно (2.5.5) решение уравнения (2.5.9) представим в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_i(\tau) \varphi_i(\xi), \quad (2.5.10)$$

где  $\varphi_i(\xi)$  – собственные функции, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \cos \lambda_i \cos \lambda_i \xi + \sin \lambda_i \sin \lambda_i \xi H(\xi) + \\ &+ \frac{\beta_{02}}{\lambda_i \sin \lambda_i - \beta_{02} \cos \lambda_i} [\cos \lambda_i \cos \lambda_i (1 - \xi) + \sin \lambda_i \sin \lambda_i (1 - \xi) H(1 - \xi)]. \end{aligned}$$

Собственные числа определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda_i = \frac{\lambda_i (\beta_{01} + \beta_{02})}{\lambda_i^2 - \beta_{01} \beta_{02}},$$

где  $\tau = c_0 t / L$ ,  $\beta_{01} = k_{01} L / EF$ ,  $\beta_{02} = k_{02} L / EF$ ,  $c_0 = \sqrt{E / \rho_0}$ .

Подставляя выражение (2.5.8) в (2.5.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \\ = \alpha [u_0 (\tau - \xi / M) H(\tau - \xi / M)] + \beta_{01} u_0 (M \tau) \delta(\xi) + \beta_{02} u_0 (M \tau - 1) H(M \tau - 1) \delta(1 - \xi), \end{aligned}$$

где  $\mu_i = \sqrt{\lambda_i^2 - \alpha}$ ,  $\alpha = kL^2 / EF$ ,  $M = c_2 / c_0$

Умножаем обе стороны равенства на собственные функции  $\varphi_k(\xi)$  и результат интегрируем по  $\xi$  в интервале  $0 < \xi < 1$ , и, учитывая условия ортогональности, получаем

$$T_i'' + \mu_i^2 T_i = [\alpha F_i(\tau) + \beta_{01} u_0(\tau) \varphi_i(0) + \beta_{02} u_0(\tau - 1/M) H(\tau - 1/M) \varphi_i(1)] / \|\varphi_i\|, \quad (2.5.11)$$

где  $F_i = F_{0i} = \int_0^{M\tau} u_0(\tau - \xi / M) \varphi_i(\xi) d\xi$  при  $\tau < 1/M$ ;

$$F_i = F_{1i} = \int_0^1 u_0(\tau - \xi / M) \varphi_i(\xi) d\xi \text{ при } \tau > 1/M; \quad \|\varphi_i\| = \int_0^1 \varphi_i^2(\xi) d\xi.$$

Решение уравнения (2.5.11) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$T_i = \frac{1}{\mu_i} \int_0^\tau Q_{1i}(z) \sin \mu_i(z - \tau) dz \quad \text{при } 0 \leq \tau \leq 1/M$$

$$T_i = \frac{1}{\mu_i} \int_0^\tau Q_{1i}(z) \sin \mu_i(z - \tau) dz + \frac{1}{\mu_i} \int_{1/M}^\tau Q_{2i}(z) \sin \mu_i(z - \tau) dz \quad \text{при } \tau \geq 1/M,$$

где  $Q_{1i} = F_{0i} + \beta_{01} u_0(M\tau) \varphi_i(0)$ ,  $Q_{2i} = F_{1i} + \beta_{02} u_0(M\tau - 1) \varphi_i(1)$ .

Уравнение (2.5.4) с учетом выражения  $u = u(\xi, \tau)$  представим в виде

$$b_0 \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + b_1 v + \frac{A_0}{L} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\tau) \varphi'_n(\xi) + \frac{\partial v}{\partial \xi} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\tau) \varphi''_n(\xi) \right] =$$

$$= b_1 v_0(x, t) H(\tau - \xi/M). \quad (2.5.12)$$

Здесь  $b_0 = J/SL^2$ ;  $b_0 = k_0 \alpha$ , где  $k_0$  – отношение коэффициентов упругого отпора и продольного сдвига.

Для решения уравнения используем следующее условие (шарнирно закрепленные торцы стержня):

$$v(\xi, \tau) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \quad \text{и} \quad \xi = 1. \quad (2.5.13)$$

Для нахождения решение уравнения (2.5.12), удовлетворяющее нулевым начальным и граничным условиям (2.5.13), применим метод Бубнова – Галеркина [15], согласно которому прогиб стержня представим в виде разложения по ортогональным в отрезке  $0 < \xi < 1$  функциям с коэффициентами  $W_i(\tau)$

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(\tau) \sin i\pi\xi. \quad (2.5.14)$$

После постановки выражения (2.5.14) в (2.5.12), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [W_i'' + (i^4 \pi^4 b_0 + b_1) W_i] \sin i\pi\xi + i\pi \frac{A_0}{L} W_i \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\tau) [i\pi \varphi'_n(\xi) \sin i\pi\xi + \varphi''_n(\xi) \cos i\pi\xi] \right\} =$$

$$= b_1 v_0(x, t).$$

Умножаем последнее равенство на функции  $\sum_{j=1}^n W_j \sin j\pi\xi$  и интегрируем в интервале  $0 < \xi < 1$ . Получим

$$W_i \left[ W_i'' + 0.5(i^4 \pi^4 b_0 + b_1) W_i + i\pi \frac{A_0}{L} \sum_{j=1}^n W_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{ijn} T_n(\tau) \right] = b_1 W_i v_0(x, t).$$

Здесь  $a_{ijn} = \int_0^1 [i\pi \varphi'_n(\xi) \sin(i\pi\xi) + \varphi''_n(\xi) \cos i\pi\xi] \sin j\pi\xi d\xi$ .

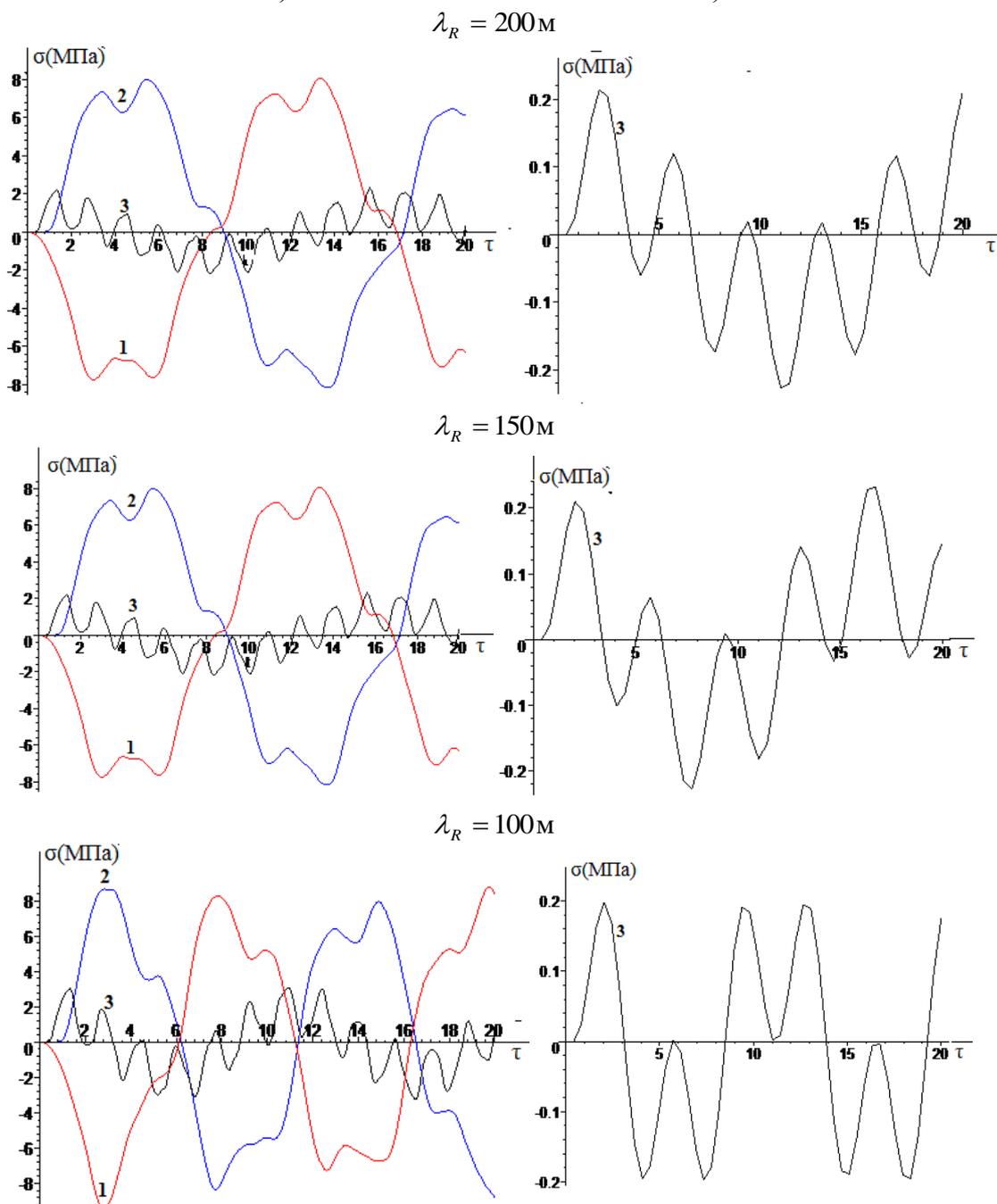
Учитывая независимость функций  $W_i(\tau)$ , получаем

$$W_i'' + 0.5(i^4 \pi^4 b_0 + b_1)W_i + i\pi \frac{A_0}{L} \sum_{j=1}^n W_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{ijn} T_n(\tau) = b_b. \quad (2.5.15)$$

Уравнение (2.5.15) является нелинейным [16], где на практике используется не бесконечное число членов в сумме по индексу  $j$ , а ограниченное количество этих членов. Тогда формула (2.5.15) дает систему конечного порядка и решение методом Бубнова – Галеркина является приближенным, дающим верхнюю оценку для искомой величины. Результаты расчетов осевых и отдельно изгибных напряжений при различных длинах волны  $\lambda_k$  в трех сечениях трубопровода представлены на рис. 2.14. В расчетах принято  $E=2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho_0=7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_2=800$  м/с,  $\nu_0=0.3$ ,  $k_u=10^6$  Н/м<sup>2</sup>,  $k_v=1.2k_u$ ,  $k_{01}=k_{02}=10^7$  Н/м,  $D_1=2R_1=0.2$  м,  $R=1.5$  м,  $\delta=0.005$  м,  $L=50$  м,  $u_0=0.003$  м.

а)

б)



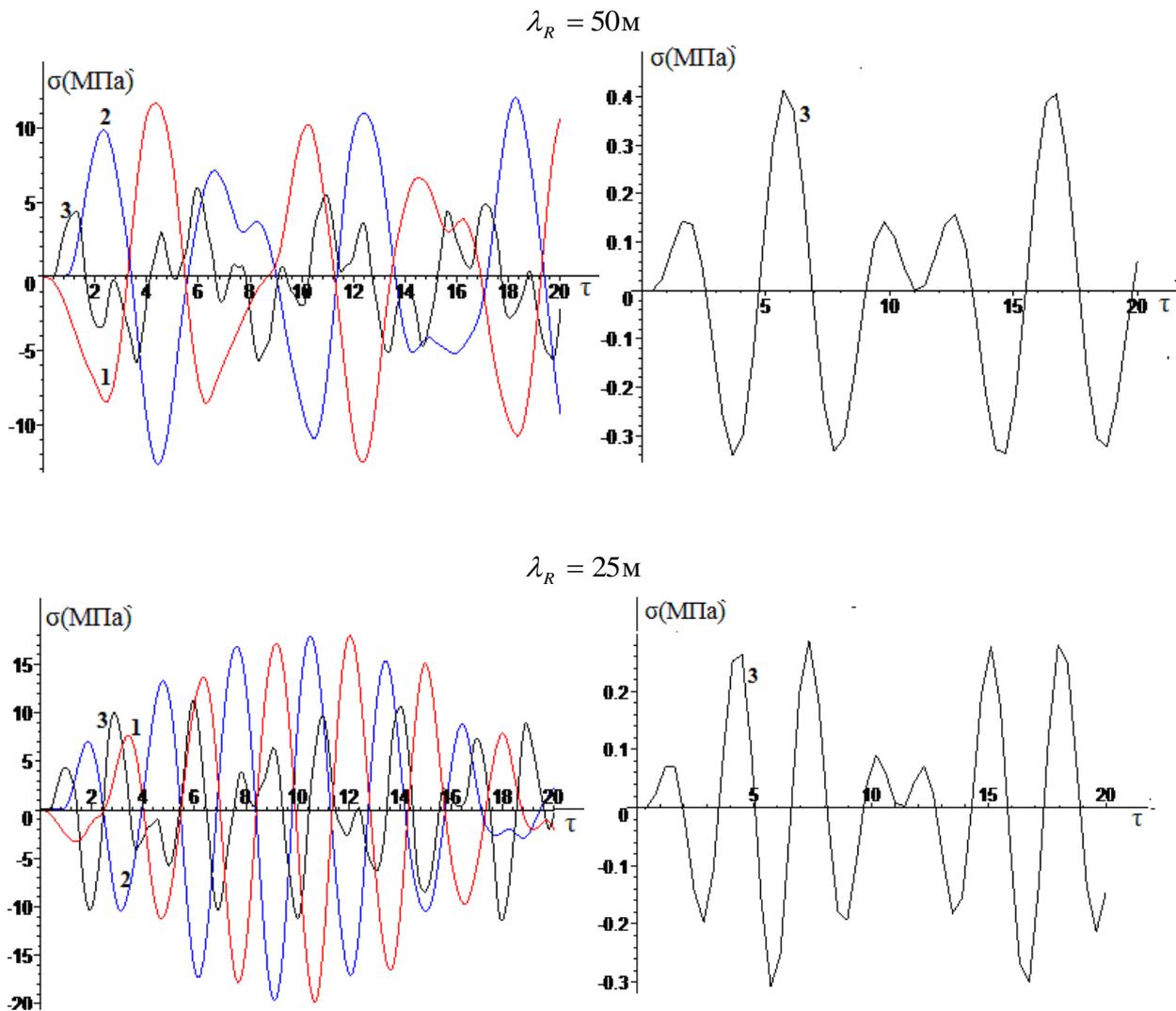


Рис. 2.14. Изменения продольного (а) и изгибного (б) напряжения в различных сечениях трубопровода от безразмерного времени  $\tau = c_0 t / L$  при различных значениях длины волны: 1 –  $\xi = 0$ ; 2 –  $\xi = 1$ ; 3 –  $\xi = 0.5$

Из анализа кривых следует, что для длины волны Релея  $\lambda_R > 100$  м наблюдается увеличение частоты колебаний, амплитуда напряжений практически не меняется. При меньших значениях длины волны амплитуда колебаний напряжений в сечениях может существенно увеличиться, при этом изгибные напряжения незначительные.

## **Глава 3. Устойчивость и колебания подземного трубопровода, сопряженного с массивными узлами**

### **3.1. Исследование устойчивости и оценка напряженного состояния трубопровода, сопряженного с массивным узлом**

Трубопроводные системы прокладываются на обширной территории, характеризующейся большим разнообразием климатических, грунтовых, гидрогеологических и других условий, и находятся под влиянием различных силовых воздействий, в том числе сейсмических (если речь идет о сейсмически активном регионе), которые в той или иной степени влияют на их прочность и устойчивость. Основы сейсродинамической теории пространственно ортогонально-расположенных подземных трубопроводных систем жизнеобеспечения изложены в работах [17, 18], разработана схема исследования НДС этих систем в условиях землетрясений. На основе этой теории базируется строительство различных уникальных объектов в Узбекистане. Однако недостаточно проведено исследований по оценке устойчивости подземных трубопроводов и колодцев.

Проблеме оценки устойчивости подземных сооружений для регионов с высоким уровнем сейсмической активности в последнее время уделяется повышенное внимание во всем мире. Имеются массовые случаи подъема колодцев и подземных труб при землетрясениях [19 – 22]. Таким образом, появилась потребность в изучении устойчивости труб и сопряженных с ними колодцев, так как оценка подъема является важным фактором, который следует учитывать при проектировании сооружений.

К настоящему времени нами решен ряд задач, связанный с изучением устойчивости подземных трубопроводов с начальным прогибом. Рассмотрены такие задачи как устойчивость подземного трубопровода, взаимодействующего с водонасыщенным грунтом, при действии продольной быстросрастающей и продольной пульсирующей нагрузках [23 – 26]. Задача решена в геометрически линейной и нелинейной постановках. Построены графики зависимости максимального поперечного перемещения трубопровода от времени. А также получены кривые зависимостей перемещений сосредоточенных масс от безразмерного времени при действии на подземный трубопровод осевой силы сжатия. Выявлено влияние начальной скорости, коэффициентов упругого и вязкого взаимодействий трубопровода с грунтом на состояние динамической неустойчивости при действии постоянной продольной нагрузки.

В работе [27] получены первые результаты по исследованию подъема подземных колодцев, взаимодействующих с водонасыщенным грунтом. Рассмотрен трубопровод с массой на конце. Для решения задачи использован численный метод расчета. Определены перемещение, нормальное напряжение, изгибающий момент и перерезывающая сила, результаты представлены в виде

графиков. Показано влияние внешнего воздействия и грунтовых условий, в том числе степени разжижения грунта на подъем подземных трубопроводов.

Теперь изучим состояние устойчивости подземной трубопроводной системы (трубопровод, присоединенный к узлу), контактирующей с окружающим грунтом, при этом трубопровод подвергается действию осевой силы сжатия. Отличие от предыдущих работ состоит в том, что ранее не было исследовано влияние узла и его расположения на устойчивость трубопровода.

Таким образом, идеи, которые были заложены в основу динамической теории сейсмостойкости подземных сооружений ее основателями [17, 18] продолжают развиваться.

Рассмотрим подземный трубопровод, представленный как упругая балка, взаимодействующая с грунтовой средой и находящаяся под действием статически приложенных сил. Трубопровод может быть как в устойчивом, так и неустойчивом состоянии равновесия. При неустойчивом состоянии малейшие отклонения балки от положения равновесия приводят к конечному нарастанию деформаций. При рассмотрении задач статической устойчивости трубопровода (упругой балки), расположенного в грунтовой среде, рассматриваем принципы и методы определения значений тех нагрузок, при которых балка переходит из устойчивого в неустойчивое состояние [15], где учитываются конечные перемещения в закритической области. Приведем случай потери устойчивости первого рода, при котором балка характеризуется идеализированными свойствами: строго прямолинейная, идеальные шарниры, силы приложены на бесконечно малых участках. Такая идеализация позволяет получить достаточно простые решения, и в то же время совпадающие с данными натурных наблюдений. Такую схему расчета применим для изучения развития неустойчивого состояния подземного трубопровода с узлом. При этом напряженное состояние тела трубопровода непосредственно будет связано с подъемом узла, вызванного осевой силой сжатия. В соответствии с [28] считаем, что каждое сечение трубопровода и узел совершают колебания с частотой  $\omega$ , подлежащей определению, другие динамические эффекты в теле трубопровода не учитываются. В качестве условия устойчивости трубопровода принимается существование колебательного процесса сечений трубопровода и узла около равновесного состояния. Трубопровод принимаем в виде упругой балки, контактирующей с грунтом, реакция которого на единицу длины стержня пропорциональна прогибу балки. Уравнение для прогиба  $v=v(x)$  записывается в виде

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + cv = 0, \quad (3.1.1)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $J$  – момент инерции сечения;  $c$  – коэффициент упругого отпора грунта.

Установим начало координат в точке  $O$ , направим ось  $Ox$  вдоль серединной линии слева направо. Обозначим прогибы балки через  $v=v_1(x)$  и  $v_2(x)$  соответственно в интервалах  $-L_1 < x < 0$ ,  $0 < x < L_2$ . Прогибы  $v=v_1(x)$  и  $v_2(x)$  удовлетворяют уравнению (3.1.1).

Рассмотрим выполнение двух видов граничных условий в сечениях.

1. Балка в сечениях  $x = -L_1$  и  $x = L_2$  закреплена

$$v_1 = 0, \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \text{ при } x = -L_1, v_2 = 0, \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \text{ при } x = L, \quad (3.1.2)$$

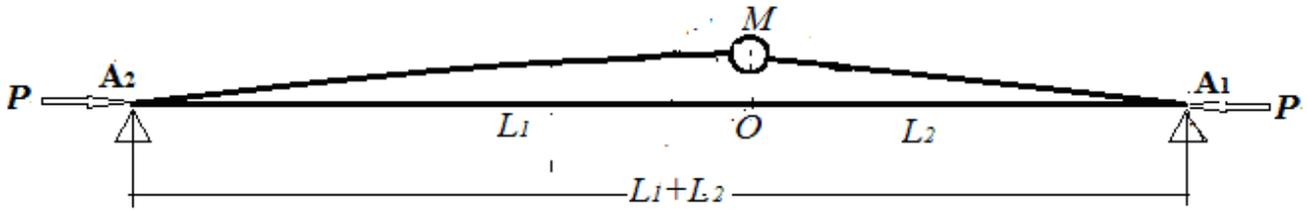


Рис. 3.1. Схема деформирования балки при наличии узла

Считаем, что балка в сечении  $x=0$  шарнирно закреплена с узлом массой  $M$ , совершающим только вертикальное перемещение. Таким образом, в этом сечении балки выполняются следующие условия:

$$v_1 = v_2 = v_0, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0, M \frac{d^2 v_0}{dt^2} = EJ \left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3} \right) \text{ при } x = 0. \quad (3.1.3)$$

Для определения параметров задачи, при которых происходит потеря устойчивости балки, решение уравнения (3.1.1) и перемещение узла будем искать в виде

$$v_1 = A_1(x) \sin(\omega t + \varepsilon); v_2 = A_2(x) \sin(\omega t + \varepsilon); v_0 = A_0 \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (3.1.4)$$

$A_i(x)$  удовлетворяют уравнению (3.1.1) и согласно (3.1.2) и (3.1.3) условиям

$$A_i^{iv} + k^2 A_i'' + r A_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.1.5)$$

$$A_1(-L_1) = A_1'(-L_1) = 0, A_2(L_2) = A_2'(L_2) = 0, \quad (3.1.6)$$

$$A_1''(0) = 0, A_2''(0) = 0, A_1(0) = A_2(0) = v_0 \quad (3.1.7)$$

$$-\omega^2 M v_0(0) = EJ[A_1'''(0) - A_2'''(0)] \quad (3.1.8)$$

Решения уравнений (3.1.5), удовлетворяющие условиям (3.1.6), представим в виде

$$A_1 = B_1[m_2 \sin m_1(x + L_1) - m_1 \sin m_2(x + L_1)] + B_2 m_2 [\cos m_1(x + L_1) - \cos m_2(x + L_1)] \quad (3.1.9)$$

$$A_2 = C_1[m_2 \sin m_1(L_2 - x) - m_1 \sin m_2(L_2 - x)] + C_2 m_2 [\cos m_1(L_2 - x) - \cos m_2(L_2 - x)], \quad (3.1.10)$$

где  $m_1 = \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} - r}}$ ,  $m_2 = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \sqrt{\frac{k^4}{4} - r}}$ ,  $k^2 = P/EJ$ ,  $r = c/EJ$  ( $k \geq \sqrt[4]{2r}$ ).

Здесь  $B_i$  и  $C_i$  – новые постоянные.

Пользуясь условиями (3.1.6) – (3.1.7), составим систему алгебраических уравнений для определения постоянных  $B_i$  и  $C_i$

$$B_1 m_1 m_2 (m_1 \sin m_1 L_1 - m_2 \sin m_2 L_1) + B_2 m_2 (m_1^2 \cos m_1 L_1 - m_2^2 \cos m_2 L_1) = 0 \quad (3.1.11)$$

$$C_1 m_1 m_2 (m_1 \sin m_1 L_2 - m_2 \sin m_2 L_2) + C_2 m_2 (m_1^2 \cos m_1 L_2 - m_2^2 \cos m_2 L_2) = 0 \quad (3.1.12)$$

$$B_1 (m_2 \sin m_1 L_1 - m_1 \sin m_2 L_1) + B_2 m_2 (\cos m_1 L_1 - \cos m_2 L_1) = v_0 \quad (3.1.13)$$

$$C_1 (m_2 \sin m_1 L_2 - m_1 \sin m_2 L_2) + C_2 m_2 (\cos m_1 L_2 - \cos m_2 L_2) = v_0. \quad (3.1.14)$$

В уравнениях (3.1.11) – (3.1.14) выразим постоянные через перемещение узла  $v_0$  и поставим их значения в формулы (3.1.9) и (3.1.10).

$$A_1 = v_0 b_1 [m_2 \sin m_1 (x + L_1) - m_1 \sin m_2 (x + L_1)] + q_1 m_2 [\cos m_1 (x + L_1) - \cos m_2 (x + L_1)] \quad (3.1.15)$$

$$A_2 = v_0 b_2 [m_2 \sin m_1 (L_2 - x) - m_1 \sin m_2 (L_2 - x)] + q_2 m_2 [\cos m_1 (L_2 - x) - \cos m_2 (L_2 - x)], \quad (3.1.16)$$

$$\text{где } b_1 = \frac{1}{m_2 \sin m_1 L_1 - m_1 \sin m_2 L_1 + q_1 m_2 (\cos m_1 L_1 - \cos m_2 L_1)};$$

$$b_2 = \frac{1}{m_2 \sin m_1 L_2 - m_1 \sin m_2 L_2 + q_2 m_2 (\cos m_1 L_2 - \cos m_2 L_2)};$$

$$q_1 = -\frac{m_1 (m_1 \sin m_1 L_1 - m_2 \sin m_2 L_1)}{m_1^2 \cos m_1 L_1 - m_2^2 \cos m_2 L_1}, \quad q_2 = -\frac{m_1 (m_1 \sin m_1 L_2 - m_2 \sin m_2 L_2)}{m_1^2 \cos m_1 L_2 - m_2^2 \cos m_2 L_2}.$$

Подставляя производные  $A_1''(0)$ ,  $A_2''(0)$  из (3.1.15) и (3.1.16) в уравнение (3.1.8), получим выражение для  $\omega^2$

$$\omega^2 = \frac{EJ}{ML^3} m_2 \{ b_1 [(m_1 (m_1^2 \cos m_1 L_1 - m_2^2 \cos m_2 L_1) + q_1 (m_1^3 \sin m_1 L_1 - m_2^3 \sin m_2 L_1))] + b_2 [(m_1 (m_1^2 \cos m_1 L_2 - m_2^2 \cos m_2 L_2) + q_2 (m_1^3 \sin m_1 L_2 - m_2^3 \sin m_2 L_2))] \}. \quad (3.1.17)$$

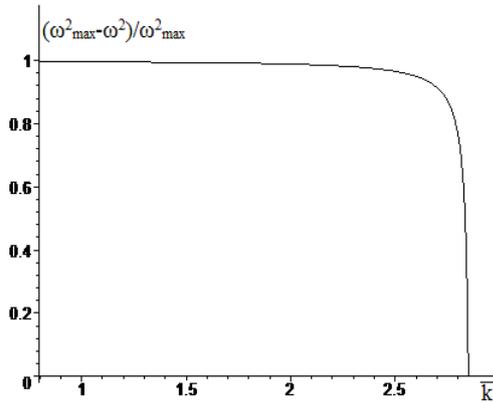
Условием устойчивости колебаний балки с частотой  $\omega$  будет служить условие выполнения положительности правой части выражения (3.1.17).

На рис. 3.2 представлены кривые зависимости приведенной частоты  $(\omega_{\max}^2 - \omega^2) / \omega_{\max}^2$  от безразмерного параметра  $\bar{k} = \sqrt{P / P_3}$  ( $P_3 = EJ\pi^2 / L^2$  – эйлерова нагрузка) при различных значениях безразмерной величины

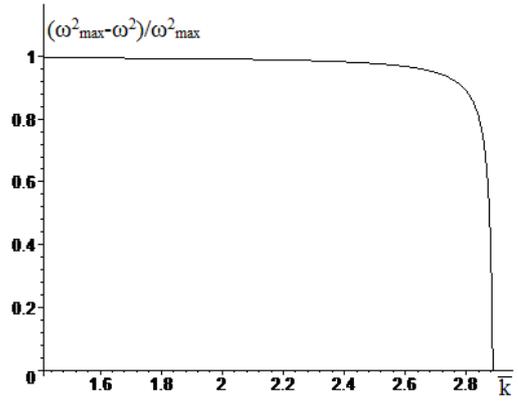
$\bar{r} = \frac{cL^4}{EJ\pi^4}$ , где  $\bar{k}_{\text{кр}} = \sqrt{P_{\text{кр}} / P_3}$ ,  $P_{\text{кр}}$  – критическое значение продольного усилия,

при котором наступает потеря устойчивости. В скобках приведены соответствующие значения коэффициента жесткости (постели) при следующих данных:  $D_1=0.2$  м,  $h=0.01$  м,  $L=15$  м,  $E=2 \cdot 10^5$  МПа.

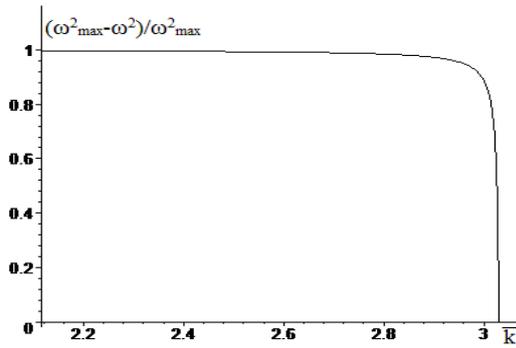
$$\bar{r} = 0.1 \quad (c = 0.525 \cdot 10^4 \text{ H/M}^2), \quad \bar{k}_{\text{np}} = 2.85$$



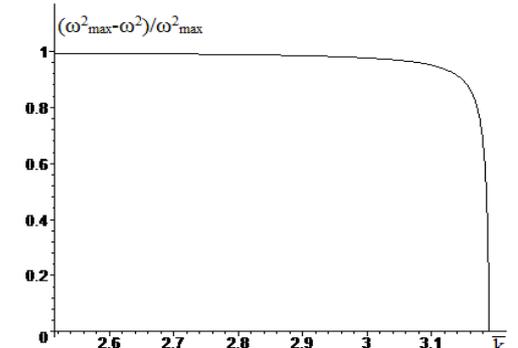
$$\bar{r} = 1 \quad (c = 5.25 \cdot 10^4 \text{ H/M}^2), \quad \bar{k}_{\text{np}} = 2.886$$



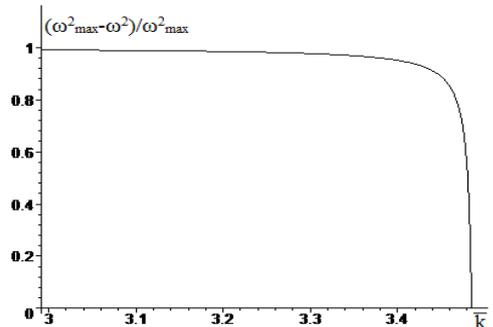
$$\bar{r} = 5 \quad (c = 2.62 \cdot 10^5 \text{ H/M}^2), \quad \bar{k}_{\text{np}} = 3.03$$



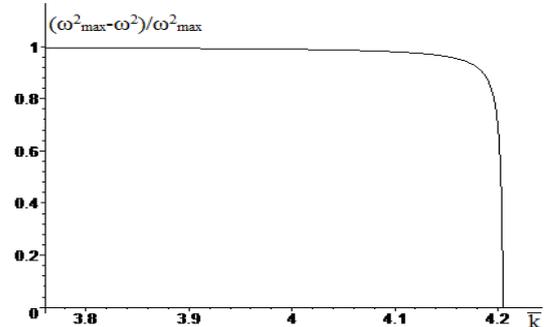
$$\bar{r} = 10 \quad c = 5.25 \cdot 10^5 \text{ H/M}^2, \quad \bar{k}_{\text{np}} = 3.192$$



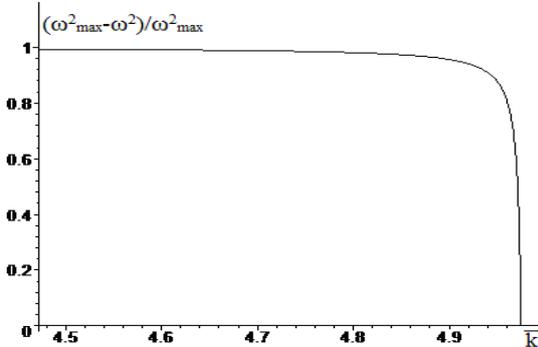
$$\bar{r} = 20 \quad (c = 1.05 \cdot 10^6 \text{ H/M}^2), \quad \bar{k}_{\text{np}} = 3.485$$



$$\bar{r} = 50 \quad (c = 2.612 \cdot 10^6 \text{ H/M}^2), \quad \bar{k}_{\text{np}} = 4.205$$



$$\bar{r} = 100 \quad (c = 5.25 \cdot 10^6 \text{ H/M}^2), \quad \bar{k}_{\text{np}} = 4.975$$



$$\bar{r} = 200 \quad (c = 1.05 \cdot 10^7 \text{ H/M}^2), \quad \bar{k}_{\text{np}} = 5.7$$

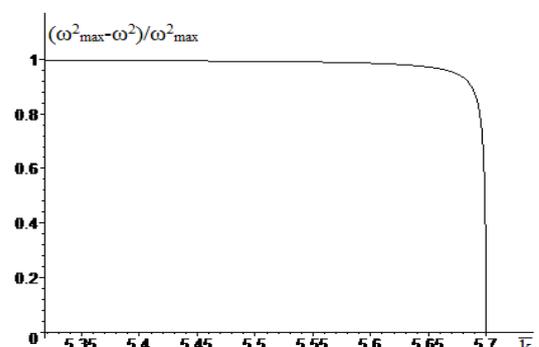
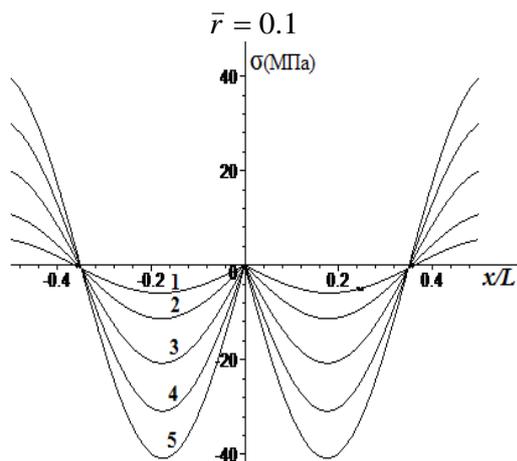


Рис. 3.2. Зависимости приведенной частоты  $(\omega_{\text{max}}^2 - \omega^2) / \omega_{\text{max}}^2$  от величины  $\bar{k} = \sqrt{P/P_s}$

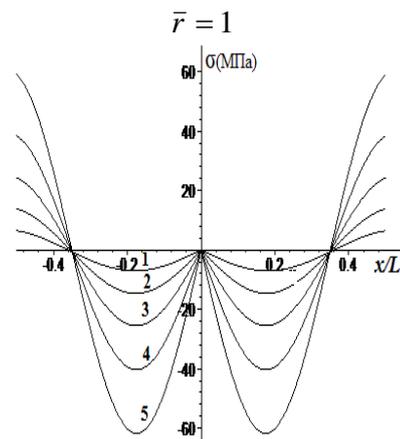
при  $L_1/L=0.5$  и различных значениях безразмерного коэффициента жесткости  $\bar{r} = \frac{cL^4}{EJ\pi^4}$

Из анализа графиков, представленных на рис. 3.2, следует, что с ростом величины  $\bar{r}$  (так например, с ростом коэффициента постели  $c$ ) значение критической силы также увеличивается, при этом интервал изменения продольного усилия с ростом  $\bar{r}$  уменьшается. Так, например, при  $\bar{r} = 10$  длина этого интервала  $\Delta$  составляет  $\Delta = 0.53$ , далее имеем  $\Delta = 0.33$  при  $\bar{r} = 20$ ,  $\Delta = 0.27$  при  $\bar{r} = 100$  и  $\Delta = 0.14$  при  $\bar{r} = 200$ . Таким образом, при больших значениях параметра  $\bar{r}$  можно использовать среднее по интервалу значения  $\bar{k}$ .

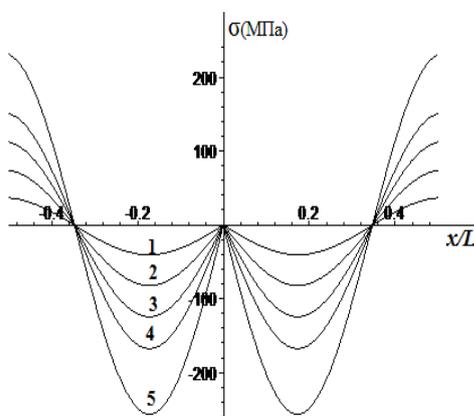
На рис. 3.3 представлены распределения продольного (изгибного) напряжения  $\sigma = \sigma_1 = \frac{M_1(x)}{W_c}$  при  $-\bar{L}_1 < x < 0$ ,  $\sigma = \sigma_2 = \frac{M_2(x)}{W_c}$  при  $0 < x < 1 - \bar{L}_1$ , где  $M_1 = EJA_1''(x)$ ,  $M_2 = EJA_2''(x)$  – изгибающие моменты;  $W_c = 2J / D_1$  – момент сопротивления сечения;  $\bar{L}_1 = L_1 / L$ . Расчеты были проведены при подъеме узла на величину  $v_0 = 0.05$  м для следующих данных:  $D_1 = 0.2$  м,  $h = 0.01$  м,  $L = 15$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. На рис. 3.3 приведены результаты расчетов при закреплении узла в середине балки. Из анализа кривых следует, что распределение напряжения вдоль оси балки существенно зависит от величин  $\bar{r}$  и  $\bar{k}$ .



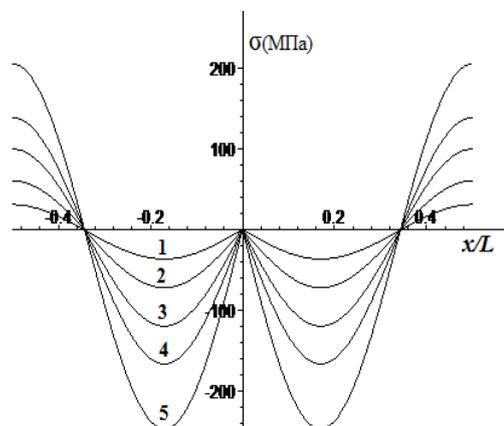
1 –  $\bar{k} = 2.76$ ; 2 –  $\bar{k} = 2.81$ ; 3 –  $\bar{k} = 2.835$ ;  
4 –  $\bar{k} = 2.845$ ; 5 –  $\bar{k} = 2.85$



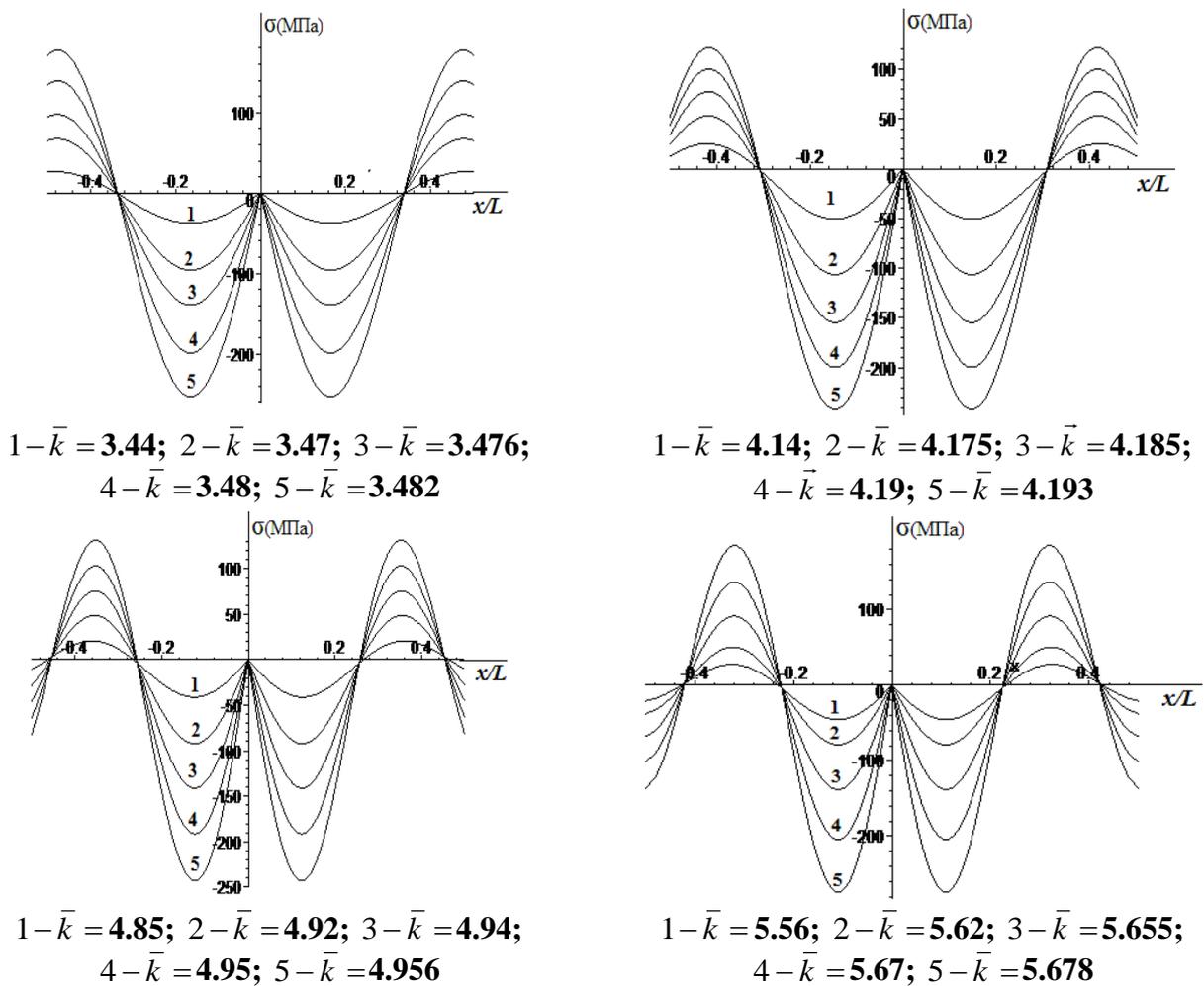
1 –  $\bar{k} = 2.8$ ; 2 –  $\bar{k} = 2.85$ ; 3 –  $\bar{k} = 2.87$ ;  
4 –  $\bar{k} = 2.88$ ; 5 –  $\bar{k} = 2.886$



1 –  $\bar{k} = 3.01$ ; 2 –  $\bar{k} = 3.022$ ; 3 –  $\bar{k} = 3.026$ ;  
4 –  $\bar{k} = 3.028$ ; 5 –  $\bar{k} = 3.03$



1 –  $\bar{k} = 3.16$ ; 2 –  $\bar{k} = 3.177$ ; 3 –  $\bar{k} = 3.184$ ;  
4 –  $\bar{k} = 3.187$ ; 5 –  $\bar{k} = 3.1895$



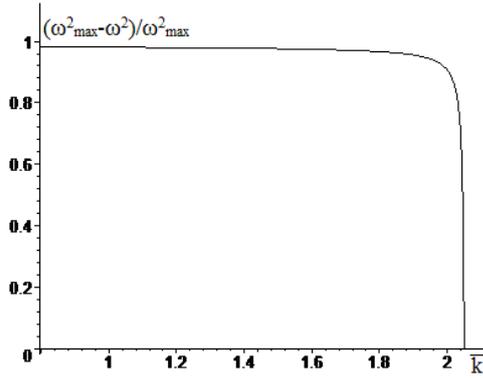
**Рис. 3.3.** Распределение осевого напряжения  $\sigma$ , МПа по оси трубопровода при  $L_1=L_2$  для различных значений величины  $\bar{r} = cL^4 / EJ\pi^4$  и безмерного параметра  $\bar{k} = \sqrt{P/P_s}$

Видно, что при малых значениях параметра  $\bar{r}$  почти вся длина трубопровода находится в сжатом состоянии. С ростом этого параметра (например, с увеличением коэффициента жесткости  $c$ ) по длине трубопровода могут возникать напряжения сжатия и растяжения. Причем состояние сжатия трубопровода наблюдается при высоких значениях силы сжатия  $P$ .

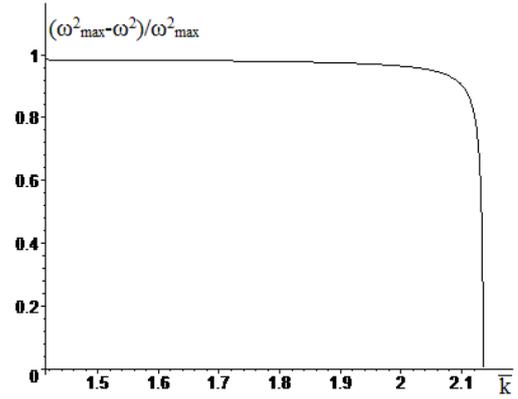
Как показано в работах [28], с ростом силы сжатия  $P$  в балке может развиваться состояние за пределом упругости прежде, чем происходит потеря устойчивости. Так например, если принять предел пропорциональности для стали  $\sigma_{np}=2500 \text{ кГ/см}^2=250 \text{ МПа}$ , то из проведенных расчетов следует, что согласно данным, приведенных на рис. 3.3, это условие соблюдается для  $\bar{r} = 0.1$  и  $\bar{r} = 1$  соответственно при  $\bar{k} = 4.956$  и  $\bar{k} = 5.678$ . Результаты высоких значений напряжения связаны с выбором подъема узла на величину  $v_0=0.05 \text{ м}$ . При этом вблизи узла могут развиваться пластические деформации в теле трубы.

Результаты расчетов в случае несимметричного расположения узла в балке приведены на рис. 3.4 и 3.5. Видно, что при несимметричном расположении узла может в значительной степени измениться закон распределения напряжения по оси трубопровода. При этом наибольшие напряжения могут возникнуть в короткой части трубопровода, которые становятся заметными при больших значениях сжимающей силы  $P$ .

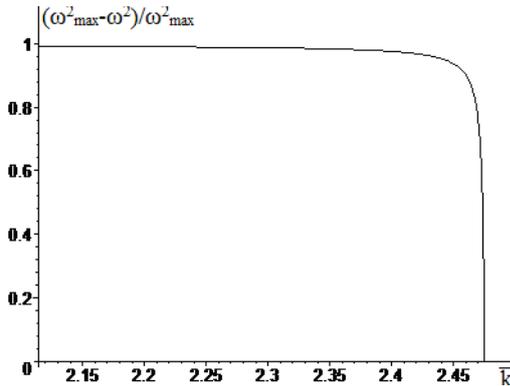
$$\bar{r} = 0.1 \quad (c = 0.525 \cdot 10^4 \text{ H/M}^2), \quad k_{\text{ип}} = 2.05$$



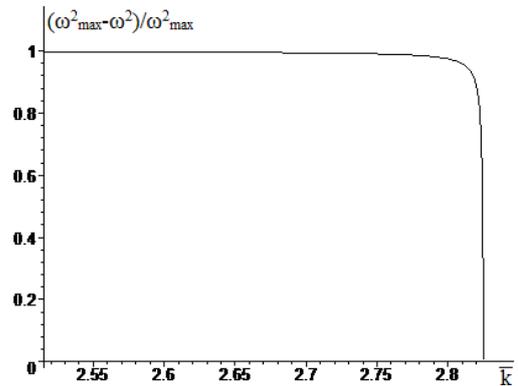
$$\bar{r} = 1 \quad (c = 5.25 \cdot 10^4 \text{ H/M}^2), \quad k_{\text{ип}} = 2.136$$



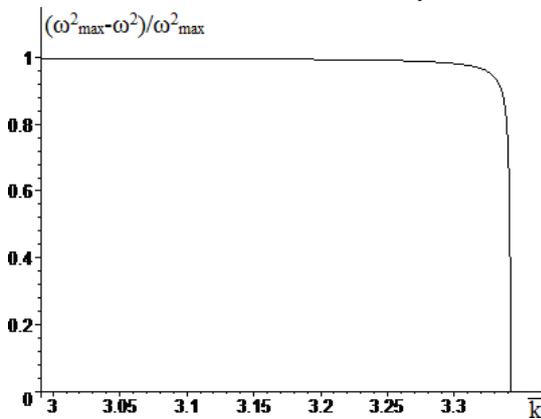
$$\bar{r} = 5 \quad (c = 2.62 \cdot 10^5 \text{ H/M}^2), \quad k_{\text{ип}} = 2.475$$



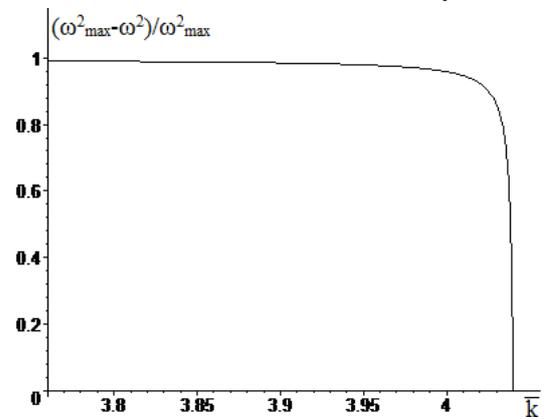
$$\bar{r} = 10 \quad (c = 5.25 \cdot 10^5 \text{ H/M}^2), \quad k_{\text{ип}} = 2.825$$



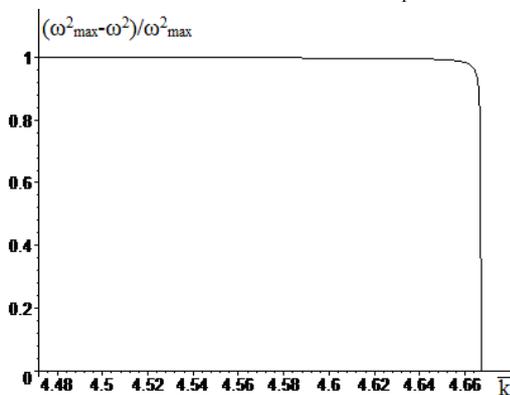
$$\bar{r} = 20 \quad (c = 1.05 \cdot 10^6 \text{ H/M}^2), \quad k_{\text{ип}} = 3.342$$



$$\bar{r} = 50 \quad (c = 2.612 \cdot 10^6 \text{ H/M}^2), \quad k_{\text{ип}} = 4.04$$



$$\bar{r} = 100 \quad (c = 5.25 \cdot 10^6 \text{ H/M}^2), \quad k_{\text{ип}} = 4.667$$



$$\bar{r} = 200 \quad (c = 1.05 \cdot 10^7 \text{ H/M}^2), \quad k_{\text{ип}} = 5.528$$

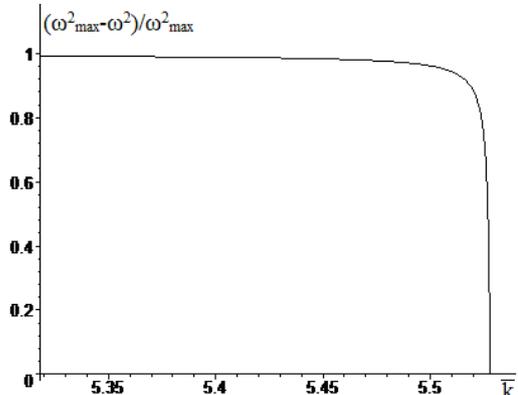
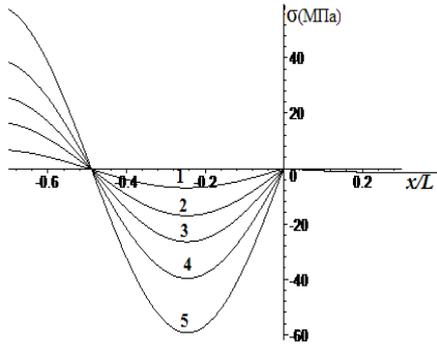
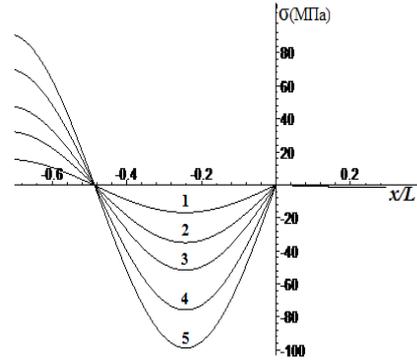


Рис. 3.4. Зависимости безразмерной частоты  $\bar{\omega}^2 = \omega^2 / \omega_{\text{max}}^2$  от величины  $\bar{k} = \sqrt{P/P_0}$  при  $L_1/L=0.5$  и различных значениях безразмерного коэффициента жесткости (постели)

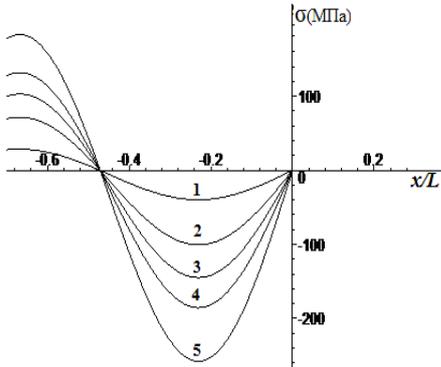
$$\bar{r} = \frac{cL^4}{EJ\pi^4}$$



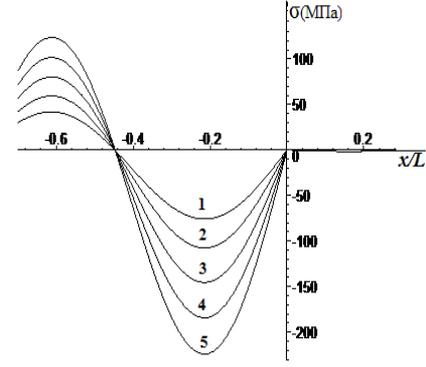
$1 - \bar{k} = 2.02$ ;  $2 - \bar{k} = 2.04$ ;  $3 - \bar{k} = 2.045$ ;  
 $4 - \bar{k} = 2.048$ ;  $5 - \bar{k} = 2.05$



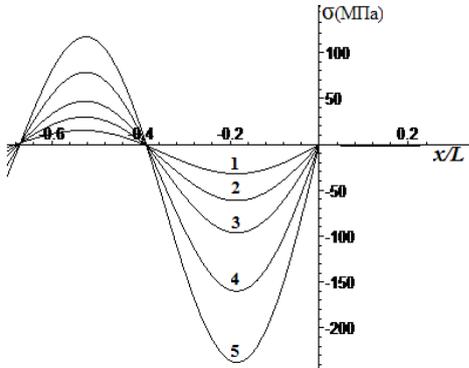
$1 - \bar{k} = 2.12$ ;  $2 - \bar{k} = 2.13$ ;  $3 - \bar{k} = 2.133$ ;  
 $4 - \bar{k} = 2.135$ ;  $5 - \bar{k} = 2.136$



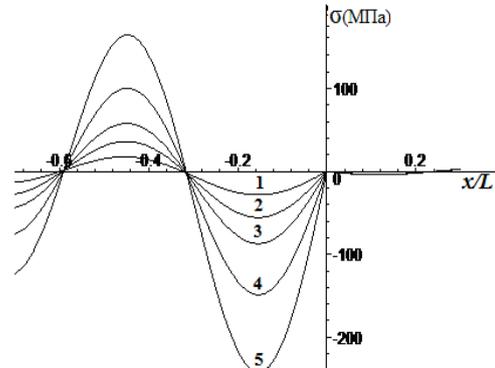
$1 - \bar{k} = 2.46$ ;  $2 - \bar{k} = 2.47$ ;  $3 - \bar{k} = 2.472$ ;  
 $4 - \bar{k} = 2.473$ ;  $5 - \bar{k} = 2.474$



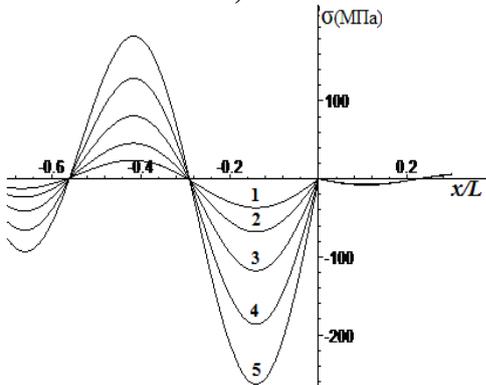
$1 - \bar{k} = 2.81$ ;  $2 - \bar{k} = 2.816$ ;  $3 - \bar{k} = 2.8185$ ;  
 $4 - \bar{k} = 2.82$ ;  $5 - \bar{k} = 2.821$



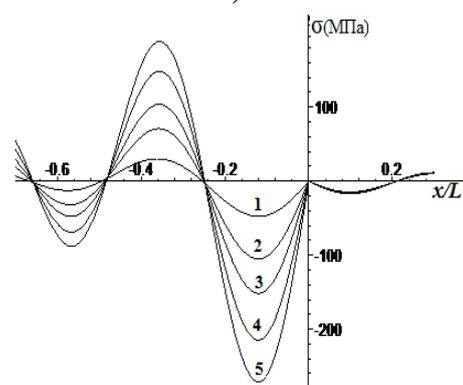
$1 - \bar{k} = 3.29$ ;  $2 - \bar{k} = 3.315$ ;  $3 - \bar{k} = 3.325$ ;  
 $4 - \bar{k} = 3.332$ ;  $5 - \bar{k} = 3.3355$



$1 - \bar{k} = 3.96$ ;  $2 - \bar{k} = 4$ ;  $3 - \bar{k} = 4.015$ ;  
 $4 - \bar{k} = 4.026$ ;  $5 - \bar{k} = 4.032$



$1 - \bar{k} = 4.58$ ;  $2 - \bar{k} = 4.62$ ;  $3 - \bar{k} = 4.64$ ;  
 $4 - \bar{k} = 4.65$ ;  $5 - \bar{k} = 4.655$



$1 - \bar{k} = 5.42$ ;  $2 - \bar{k} = 5.48$ ;  $3 - \bar{k} = 5.495$ ;  
 $4 - \bar{k} = 5.505$ ;  $5 - \bar{k} = 5.51$

Рис. 3.5. Распределение осевого напряжения  $\sigma$ , МПа по оси трубопровода при  $L_1=0.6L$ ,  $L_2=0.4L$ ,  $\bar{r} = cL^4 / EJ\pi^4 = 0.1$  и различных значений безмерного параметра  $\bar{k}^2 = P / P_3$

### 3.2. Устойчивость подземного трубопровода при шарнирном закреплении с массивным узлом

В практике строительства встречаются сложные системы трубопроводов, различным образом стыкуемых в сложных узлах, с учетом важнейших особенностей комплекса и характера строительства. В качестве сложных узлов могут выступать, в частности, различные смотровые колодцы, места разветвлений, поворотов, всевозможные варианты стыков, крепления и пр. Рассмотрим устойчивость сопряженного с узлом через упругие элементы подземного трубопровода, подверженного действию осевой силы сжатия.

Вышеприведенная схема расчета применяется для изучения развития неустойчивого состояния подземного трубопровода, сопряженного с узлом массой  $M$  через упругие элементы с коэффициентами жесткостей  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 3.6).

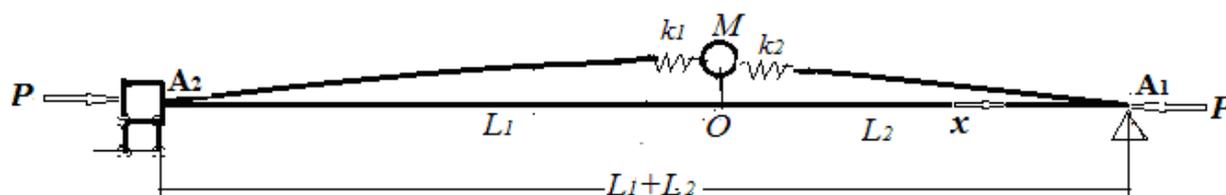


Рис. 3.6. Расчетная схема прогиба подземного трубопровода

Трубопровод принимается в виде упругой балки, контактирующей с грунтом, реакция которого на единицу длины стержня пропорциональна прогибу балки. Уравнение для прогиба  $v=v(x)$  записывается в виде (3.1.1), приведенное в предыдущем пункте.

Рассмотрим выполнение следующих граничных условий на концах балки и в сечении сопряжения ее с массивным узлом:

1. Балка в сечениях  $x=-L_1$  и  $x=L_2$  закреплена

$$v_1 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = -L_1, \quad v_2 = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = L_2, \quad (3.2.1)$$

2. Балка в сечении  $x=0$  шарнирно закреплена с узлом, совершающим только вертикальное перемещение. Таким образом, в этом сечении балки выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0, \quad EJ \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} = k_1 [v_1(0, t) - v_0], \\ EJ \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3} = k_2 [v_0 - v_2(0, t)] \quad \text{при } x = 0, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

где  $v_0(t)$  – перемещение балки, удовлетворяющее уравнению движения

$$M \frac{d^2 v_0}{dt^2} = EJ \left( \frac{\partial^3 v_1(0, t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v_2(0, t)}{\partial x^3} \right) = k_1 [v_1(0, t) - v_0] + k_2 [v_2(0, t) - v_0]. \quad (3.2.3)$$

Для определения параметров задачи, при которых происходит потеря устойчивости балки, решение уравнения (3.2.1) и перемещение узла будем искать в виде

$$v_1 = u_1(x) \sin(\omega t + \varepsilon), \quad v_2 = u_2(x) \sin(\omega t + \varepsilon), \quad v_0 = u_0 \sin(\omega t + \varepsilon),$$

где  $\omega$  – частота колебаний узла и сечений балки;  $\varepsilon$  – сдвиг фазы;  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  удовлетворяют уравнению (3.1.1), приведенное в предыдущем пункте, и, согласно (3.2.2) и (3.2.3), условиям:

$$u_1(-L_1) = u_1'(-L_1) = 0, \quad u_2(L_2) = u_2'(L_2) = 0, \quad (3.2.5)$$

$$u_1''(0) = 0, \quad u_2''(0) = 0 \quad (3.2.6)$$

$$EJu_1'''(0) = k_1(u_1(0) - u_0), \quad EJu_2'''(0) = k_2[v_0 - u_2(0)], \quad -\omega^2 Mu_0 = EJ[u_1'''(0) - u_2'''(0)] \quad (3.2.7)$$

Полагая  $u_1(0) = A_1$ ,  $u_2(0) = A_2$ , и вводя безразмерные величины и функции по формулам  $\xi = x/L$ ,  $l_1 = L_1/L$ ,  $l_2 = L_2/L$ ,  $u_1 = A_1 f_1(x)$ ,  $u_2 = A_2 f_2(x)$  ( $f_1(0) = f_2(0) = 1$ ), пользуясь условиями (3.2.6) и (3.2.7), получим уравнение для определения величины  $\omega^2$ ,

$$\omega^2 - \frac{EJu_0}{ML^3} \left( \frac{f_2'''(0, \omega)}{1 + \beta_2 f_2''(0, \omega)} - \frac{f_1'''(0, \omega)}{1 - \beta_1 f_1''(0, \omega)} \right) = 0, \quad (3.2.8)$$

где  $\beta_1 = EJ/L^3 k_1$ ;  $\beta_2 = EJ/L^3 k_2$ .

Условием существования состояния неустойчивости является

$$\Delta = \frac{f_2'''(0)[1 - \beta_1 f_1''(0)] - f_1'''(0)[1 - \beta_2 f_2''(0)]}{[1 + \beta_2 f_2''(0)][1 - \beta_1 f_1''(0)]} > 0. \quad (3.2.9)$$

Функции  $f_i(\xi)$  согласно (3.1.1) и (3.2.6) – (3.2.7) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} f_1^{iY} + \bar{k}^2 f_1''' + \bar{r} f_1 &= 0, & -l_1 < \xi < 0 \\ f_2^{iY} + \bar{k}^2 f_2''' + \bar{r} f_2 &= 0, & 0 < \xi < l_2 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

и граничным условиям

$$f_1(-l_1, \omega) = f_1'(-l_1) = 0, \quad f_2(l_2) = f_2'(l_2) = 0, \quad (3.2.11)$$

$$f_1''(0) = 0, \quad f_2''(0) = 0, \quad f_1(0) = 1, \quad f_2(0) = 1, \quad (3.2.12)$$

где  $\bar{k} = \sqrt{P/P_s}$ ,  $\bar{r} = cL^4/EJ\pi^4$ ,  $P_s = \pi EJ/L^2$  – эйлерова сила.

Решения уравнений (3.2.10), удовлетворяющие условиям (3.2.11), представим в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= B_1 [m_2 \sin m_1(\xi + l_1) - m_1 \sin m_2(\xi + l_1)] + \\ &+ B_2 m_2 [\cos m_1(\xi + l_1) - \cos m_2(\xi + l_1)] \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= C_1 [m_2 \sin m_1(l_2 - \xi) - m_1 \sin m_2(l_2 - \xi)] + \\ &+ C_2 m_2 [\cos m_1(l_2 - \xi) - \cos m_2(l_2 - \xi)]. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

где  $B_i$  и  $C_i$  – постоянные;  $m_1 = \pi \sqrt{\frac{\bar{k}^2}{2} + \sqrt{\frac{\bar{k}^4}{4} - \bar{r}}}$ ,  $m_2 = \pi \sqrt{\frac{\bar{k}^2}{2} - \sqrt{\frac{\bar{k}^4}{4} - \bar{r}}}$ , ( $\bar{k} \geq \sqrt[4]{2\bar{r}}$ ).

Пользуясь условиями (3.2.12), составим систему алгебраических уравнений для определения постоянных  $B_i$  и  $C_i$

$$B_1 m_1 m_2 (m_1 \sin m_1 L_1 - m_2 \sin m_2 L_1) + B_2 m_2 (m_1^2 \cos m_1 L_1 - m_2^2 \cos m_2 L_1) = 0 \quad (3.2.15)$$

$$C_1 m_1 m_2 (m_1 \sin m_1 L_2 - m_2 \sin m_2 L_2) + C_2 m_2 (m_1^2 \cos m_1 L_2 - m_2^2 \cos m_2 L_2) = 0 \quad (3.2.16)$$

$$B_1 (m_2 \sin m_1 L_1 - m_1 \sin m_2 L_1) + B_2 m_2 (\cos m_1 L_1 - \cos m_2 L_1) = 1 \quad (3.2.17)$$

$$C_1 (m_2 \sin m_1 L_2 - m_1 \sin m_2 L_2) + C_2 m_2 (\cos m_1 L_2 - \cos m_2 L_2) = 1 \quad (3.2.18)$$

Из этой системы находим

$$B_2 = q_1 B_1, \quad C_2 = q_2 C_1,$$

$$\text{где } B_1 = \frac{1}{m_2 \sin m_1 l_1 - m_1 \sin m_2 l_1 + q_1 m_2 (\cos m_1 l_1 - \cos m_2 l_1)};$$

$$C_1 = \frac{1}{m_2 \sin m_1 l_2 - m_1 \sin m_2 l_2 + q_2 m_2 (\cos m_1 l_2 - \cos m_2 l_2)};$$

$$q_1 = -\frac{m_1 (m_1 \sin m_1 l_1 - m_2 \sin m_2 l_1)}{m_1^2 \cos m_1 l_1 - m_2^2 \cos m_2 l_1}; \quad q_2 = -\frac{m_1 (m_1 \sin m_1 l_2 - m_2 \sin m_2 l_2)}{m_1^2 \cos m_1 l_2 - m_2^2 \cos m_2 l_2}.$$

Подставляя выражения  $B_i$  и  $C_i$  в (3.2.13) и (3.2.14), окончательно находим функции  $f_i(\xi)$  и таким образом вычислим производные третьего порядка в точке  $\xi=0$ :

$$f_1'''(0) = B_1 [-m_1 m_2 (m_1^2 \cos m_1 l_1 - m_2^2 \cos m_2 l_1 + q_1 m_2 (m_1^3 \sin m_1 l_1 - m_2^3 \sin m_2 l_1))] \quad (3.2.19)$$

$$f_2'''(0) = C_1 [m_1 m_2 (m_1^2 \cos m_1 l_2 - m_2^2 \cos m_2 l_2 - q_1 m_2 (m_1^3 \sin m_1 l_2 - m_2^3 \sin m_2 l_2)]. \quad (3.2.20)$$

По вычисленным значениям производных  $f_1'''(0)$  и  $f_2'''(0)$  по формуле (3.2.8) можно установить, применив формулу (3.2.8), пределы значения  $\bar{k}$ , при которых сохраняется положительный знак выражения (3.2.9).

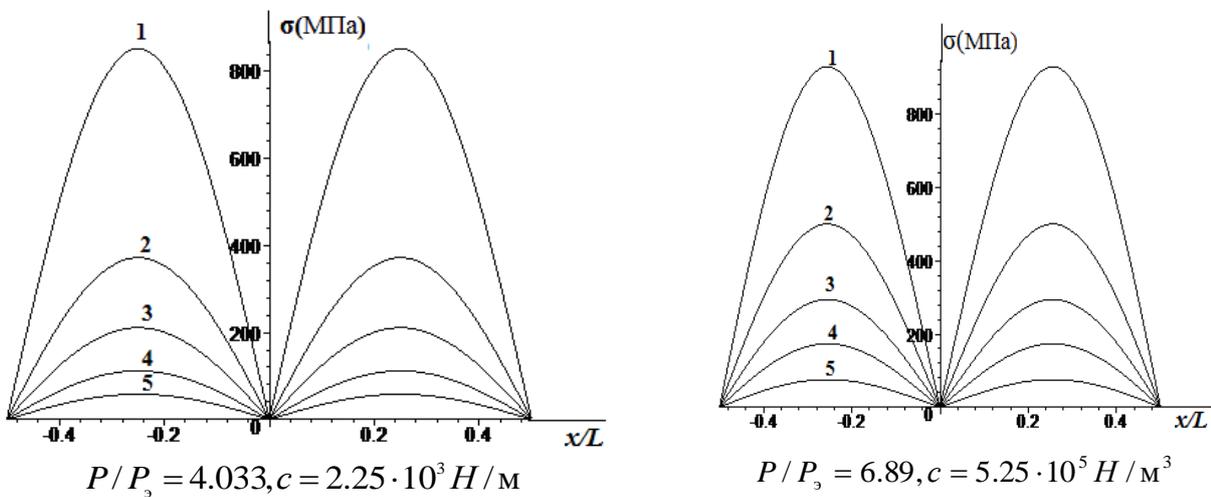
Расчеты проводились для следующих значений параметров  $E=2 \cdot 10^5$  МПа, внешний диаметр трубопровода  $D_1=0.2$  м, толщина стенки  $h=0.01$  м, общая длина трубопровода  $L=10$  м. Принято, что на обоих участках коэффициенты жесткости упругого взаимодействия массивного узла с балкой одинаковы, т.е. принято  $k_1 = k_2 = k_0$ ; массивный узел расположен посередине исследуемого участка трубопровода длиной  $L$ , поэтому  $L_1 = L_2 = L/2$ . Предельные значения  $\bar{k}^2 = P/P_s$ , при которых происходит потеря устойчивости балки, для различных значений коэффициентов  $c$  (Н/м<sup>3</sup>),  $k_0$  (Н/м) представлены в таблице.

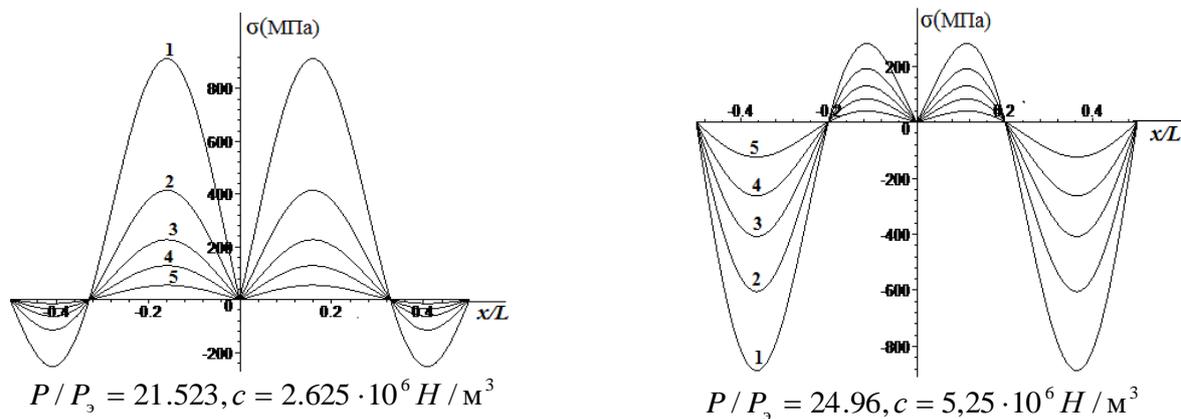
Таблица 3.1 – Предельная сила (отнесенная к  $P_0$ ) при различных значениях коэффициентов  $c$  и  $k_0$

	$\bar{r} = 0.1$ ( $c = 5.25 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$ )					$\bar{r} = 1$ ( $c = 5.25 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ )				
$k_0, \text{ Н/м}$	$5 \cdot 10^4$	$10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^4$	$10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$
$P/P_0$	4.423	4.234	4.071	4.05	4.033	6.49	5.739	4.747	4.458	4.296
	$\bar{r} = 10$ ( $c = 5.25 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^3$ )					$\bar{r} = 100$ ( $c = 5.25 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^3$ )				
$k_0, \text{ Н/м}$	$5 \cdot 10^4$	$10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^4$	$10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$
$P/P_0$	9.980	9.77	8.63	7.94	6.89	24.8	24.8	24.7	24.5	24.0

Из анализа табличных данных следует, что с ростом коэффициента упругой связи узла с сечением трубопровода предельная сила сжатия  $P$  уменьшается, поскольку рост этого коэффициента приводит к снижению силы реакции в месте сопряжения узла с трубопроводом, поэтому потеря устойчивости может произойти при меньших значениях силы сжатия  $P$ . Рост коэффициента жесткости контактной силы между трубопроводом и окружающей средой приводит к увеличению величины предельной силы, что означает переход на более устойчивое состояние подземного трубопровода, которое может быть реализовано при заданных значениях этого коэффициента. При этом следует учитывать [15, 16, 29], что при высоких значениях осевой силы  $P$  в сечениях трубопровода напряжения могут превосходить предел пропорциональности, прежде чем произойдет потеря устойчивости трубопровода.

Кривые распределения продольного напряжения по оси трубопровода для различных значений отношения  $P/P_0$ , коэффициентов постели  $c$ ,  $\text{Н/м}^3$ , и упругого сопряжения узла с трубопроводом  $k_0$ ,  $\text{Н/м}$ , представлены на рис. 3.7. С целью оценки влияния коэффициента сопряжения трубопровода с узлом, расчеты проведены при значениях осевого усилия близких к критическим.





**Рис. 3.7.** Зависимости продольного напряжения  $\sigma$ , МПа, от переменной  $x/L$  для различных значений отношения  $P/P_0$ , коэффициентов постели  $c$ ,  $H/m^3$ , и упругой связи элемента с трубопроводом  $k_0$ ,  $H/m$ : 1 –  $k_0=5 \cdot 10^6$ ; 2 –  $k_0=4.98 \cdot 10^6$ ; 3 –  $k_0=4.95 \cdot 10^6$ ; 4 –  $k_0=4.9 \cdot 10^6$ ; 5 –  $k_0=4.75 \cdot 10^6$

Из анализа представленных кривых следует, что сила реакции поверхности трубопровода, зависящая от его прогиба по линейному закону, существенно влияет на напряженное состояние трубопровода. При этом, в зависимости от значений коэффициентов упругой связи сечений трубопровода с узлом максимальные значения напряжения могут превосходить пределы пропорциональности, прежде чем произойдет потеря устойчивости. Установлено существование допустимого значения этого коэффициента, при достижении которого значение максимального напряжения будет выше, чем предельное.

### 3.3. Устойчивость трубопровода с учетом конечных деформаций изогнутой оси

Рассмотрим задачу устойчивости трубопровода с учетом конечной деформации изогнутой оси, где используются уравнения

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_u u(x, t) = 0 \quad (3.3.1)$$

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - EF \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k_v v(x, t) = 0 \quad (3.3.2)$$

Рассмотрим случай колебательного процесса и решение уравнения (3.3.1), удовлетворяющего условиям

$$u = 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P_0}{ES} \sin \omega t \text{ при } x = L,$$

Решение уравнения (3.3.1) представим в виде

$$u = -\frac{P_0}{ES} \frac{sh \lambda x}{\lambda ch \lambda L} \sin \omega t, \quad (3.3.3)$$

где  $\sqrt{\beta - \omega^2 / c_0^2}$ ,  $\beta = k_u / ES$ ,  $c_0 = \sqrt{E / \rho_0}$ .

После подстановки выражения  $u(x,t)$  из (3.3.3) в (3.3.2), получаем

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{ch\lambda x}{ch\lambda L} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k_v v(x,t) = 0. \quad (3.3.4)$$

Для решения уравнения используем следующие граничные условия (шарнирно закрепленные торцы стержня):

$$v(x, \tau) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = L. \quad (3.3.5)$$

Уравнение (3.3.4) является уравнением с переменными коэффициентами. Для нахождения его решения, удовлетворяющего граничным условиям (3.3.5), используем метод Бубнова – Галеркина [1]. Прогиб стержня на отрезке  $0 < x < L$  представим в виде

$$v = W(t) \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (3.3.6)$$

После подстановки выражения (3.3.6) в (3.3.4), получаем

$$\begin{aligned} & \left[ \rho F W''(t) + (EJ \pi^4 / L^4 + k_v) W(t) \right] \sin \pi x / L + \\ & + \frac{P_0 \pi W(t)}{L^2 chL} \left[ \lambda L sh \lambda x \cos \frac{\pi x}{L} - \pi ch \lambda x \sin \frac{\pi x}{L} \right] \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Умножаем последнее равенство на функцию  $\sin \pi x / L$  и интегрируем в интервале  $0 < x < L$

$$W'' + (b_0 + b_1 \sin \omega t) W(t) = 0, \quad (3.3.7)$$

где  $b_0 = (EJ \pi^4 / L^4 + k_v) / 2L \rho S$ ,  $b_1 = \frac{P_0 \pi}{L^2 \rho S} \int_0^L \left[ \lambda L sh \lambda x \cos \frac{\pi x}{L} - \pi sh \lambda x \sin \frac{\pi x}{L} \right] dx$ .

Уравнение (3.3.7) после подстановки

$$k_0^2 = b_0, \quad \mu = \frac{b_1}{b_0}, \quad t = t_1 - \frac{\pi}{2\omega}$$

сводится к уравнению Матье

$$\frac{d^2 W}{dt_1^2} + k_0^2 (1 - \mu \cos \omega t_1) W = 0. \quad (3.3.8)$$

Уравнение (3.3.8) по переменной  $\tau$  в новых обозначениях  $a$  и  $\varepsilon$

$$\omega t_1 = 2\tau, \quad k_0^2 = a\omega^2 / 4, \quad \mu = 2\varepsilon / a$$

записывается в стандартной форме

$$\frac{d^2 W}{d\tau^2} + (a - 2\varepsilon \cos 2\tau) W = 0. \quad (3.3.9)$$

Решение уравнения (3.3.9) определяется функциями Матье, свойства которых подробно изучены в работе [30]

## Глава 4. Численное решение задач сейсродинамики пространственных систем подземных трубопроводов сложной структуры

### 4.1. Метод конечных элементов в сейсродинамике пространственных систем подземных трубопроводов

Рассматривается класс задач динамики пространственных систем подземных трубопроводов при действии сейсмических трехкомпонентных волн, распространяющихся в грунте, по инструментальным записям реальных землетрясений. Предполагаем, что распространяющаяся сейсмическая волна задана и отраженная волна от системы трубопроводов не влияет на поле перемещений в грунтовой среде. Так как длина сейсмической волны намного больше диаметра трубопровода, то последнее моделируется стержнем, работающим на растяжение – сжатие, кручение и изгиб с учетом деформации сдвига, а взаимодействие с окружающим его грунтом – по различным упрощенным моделям. Сейсмическое воздействие, распространяющееся в грунте, передается на трубопровод через сочетание упругих и вязких контактных элементов. Граничные условия на торцах трубопроводной системы могут быть следующими: условие абсолютно жесткого закрепления; закрепление к грунту, т.е. движется вместе с грунтом; заданы силы и моменты сил; полностью или частично свободно от напряжений; вязкоупругое условие.

Пространственную систему подземных трубопроводов, взаимодействующих с грунтом, можно разделить на линейные участки трубопровода, массивные узлы и стыковые контакты [17]. Стыковые контакты могут быть жесткими или податливыми. Для таких конструкций предложен конечно-разностный метод решения задач сейсродинамики [31].

В работах [32 – 35] приведены матрицы масс и жесткостей для пространственных стержневых систем. Подземную конструкцию разбиваем на конечные элементы, построим матрицы масс и жесткостей для линейного конечного элемента, узлового элемента и соберем матрицы масс и жесткостей для подземной конструкции в целом. Заменяя стержневой конечный элемент трубопроводным конечным элементом, можно построить матрицы масс, жесткостей самого трубопровода и стыков, жесткостей взаимодействия и вязкостей. Причем каждый трубопроводный элемент может иметь свои массовые, жесткостные и вязкие параметры.

Свяжем с подземной трубопроводной системой правую прямоугольную общую систему координат  $Oxuz$ . С  $ij$ -м конечным элементом трубопровода свяжем правую прямоугольную местную систему координат  $O_{ij}\xi\eta\zeta$ . Начало координат расположено в центре торцевого сечения конечного элемента трубопровода с номером узла  $i$  ( $i < j$ ), ось  $O_i\xi$  направляется по продольной (нейтральной) оси конечного элемента трубопровода в сторону узла  $j$ , оси  $O_i\eta$ ,

$O_i\zeta$  направляются по главным центральным осям поперечного сечения конечного элемента трубопровода.

В случае принятия закона плоских сечений и независимости продольной, изгибной и крутильной деформаций усилия и моменты связаны с деформациями в трубопроводе следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} N &= EF \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \varepsilon_0 - \alpha T \right); & M_\xi &= GJ_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}; \\ M_\zeta &= -EJ_\zeta \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial \xi^2}; & M_\eta &= -EJ_\eta \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial \xi^2}; \\ Q_\eta &= \frac{\partial M_\zeta}{\partial \xi}; & Q_\zeta &= \frac{\partial M_\eta}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

где  $N$  – продольное усилие;  $Q_\eta$ ,  $Q_\zeta$  – перерезывающие силы;  $M_\xi$ ,  $M_\eta$ ,  $M_\zeta$  – крутильная и изгибающие моменты относительно осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ;  $EF$ ,  $EJ_\zeta$ ,  $GJ_\xi$  – продольная, изгибная и крутильная погонные жесткости трубопровода;  $u$ ,  $w_\eta$ ,  $w_\zeta$  – перемещения точек срединной продольной оси трубопровода по осям  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ;  $\varphi$  – угол поворота поперечного сечения трубопровода вокруг оси  $\xi$ ;  $T$ ,  $\alpha$  – температура в теле трубопровода и коэффициент линейного расширения материала трубопровода;  $\varepsilon_0$  – усадка (предварительная продольная деформация).

Взаимодействие подземного трубопровода с окружающим его грунтом описывается моделью Т. Рашидова [17]. Тогда уравнения движения этого трубопроводного конечного элемента в дифференциальной форме имеют вид [17, 31]

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + K_\xi (u - u_0) &= q_\xi, \\ \rho J_\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - GJ_\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + K_\varphi \varphi &= m, \\ \rho F \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial t^2} + EJ_\zeta \frac{\partial^4 w_\eta}{\partial \xi^4} + K_\eta (w_\eta - v_0) &= q_\eta, \\ \rho F \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial t^2} + EJ_\eta \frac{\partial^4 w_\zeta}{\partial \xi^4} + K_\zeta (w_\zeta - w_0) &= q_\zeta, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня;  $K_\xi$ ,  $K_\eta$ ,  $K_\zeta$  – погонные жесткости грунта в направлении осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ;  $K_\varphi$  – погонная жесткость грунта сопротивления кручению;  $q_\xi$ ,  $q_\eta$ ,  $q_\zeta$ ,  $m$  – интенсивности распределенных внешних нагрузок. Здесь пренебрегаются деформациями сдвига и силами реакции грунта при повороте поперечного сечения стержня относительно осей  $\eta$  и  $\zeta$ .

Так как уравнения (4.1.2) записаны для трубопроводного конечного элемента, то граничные условия задаются на обоих торцах по три перемещения

и три поворота вокруг локальных осей ( $u_0, w_{\eta 0}, w_{\zeta 0}, \varphi_0, \varphi_{\eta 0}, \varphi_{\zeta 0}, u_\ell, w_{\eta \ell}, w_{\zeta \ell}, \varphi_\ell, \varphi_{\eta \ell}, \varphi_{\zeta \ell}$ ).

Граничные условия для подземной трубопроводной системы зависят от конкретной постановки задачи.

Для получения матриц жесткости и масс используется принцип возможных перемещений.

Виртуальная работа сил упругости трубопроводного конечного элемента имеет вид

$$\delta A = \int_0^\ell \left[ N \delta \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + M_\xi \delta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + M_\zeta \delta \left( \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial \xi^2} \right) + M_\eta \delta \left( \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial \xi^2} \right) \right] d\xi, \quad (4.1.3)$$

где  $\ell$  – длина стержня;  $\delta$  – символ вариации.

Виртуальная работа распределенных сил инерций, взаимодействия с грунтом и внешних распределенных сил имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta A_1 = - \int_0^\ell & \left[ \left( \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K_\xi (u - u_0) - q_\xi \right) \delta u + \left( \rho J_\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + K_\varphi \varphi - m \right) \delta \varphi + \right. \\ & + \left( \rho F \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial t^2} + K_\eta (w_\eta - v_0) - q_\eta \right) \delta w_\eta + \\ & \left. + \left( \rho F \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial t^2} + K_\zeta (w_\zeta - w_0) - q_\zeta \right) \delta w_\zeta \right] d\xi. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Виртуальная работа сил реакций на торцах трубопроводного конечного элемента выписывается в форме:

$$\delta A_2 = \sum_{k=1}^6 (R_k^{ij} \delta U_k^{ij} + R_k^{ji} \delta U_k^{ji}), \quad (4.1.5)$$

где  $U_k^{ij}$ ,  $R_k^{ij}$  –  $k$ -я компонента векторов обобщенных перемещений и реакций на торце  $i$  трубопроводного конечного элемента  $ij$ , положительные направления которых совпадают с положительными направлениями локальных осей;  $u_0, v_0, w_0$  – заданные функции времени и координат, т.е. трехкомпонентная сейсмическая волна.

Тогда из принципа возможных перемещений имеем

$$\delta A - \delta A_1 - \delta A_2 = 0. \quad (4.1.6)$$

Выразим перемещения ( $u, w_\eta, w_\zeta$ ) и повороты ( $\varphi$ ) точек срединной оси трубопроводного конечного элемента через перемещения ( $u_0, w_{\eta 0}, w_{\zeta 0}, u_\ell, w_{\eta \ell}, w_{\zeta \ell}$ ) и повороты ( $\varphi_0, \varphi_{\eta 0}, \varphi_{\zeta 0}, \varphi_\ell, \varphi_{\eta \ell}, \varphi_{\zeta \ell}$ ) центров его торцевых сечений в следующем виде [32]:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + (u_\ell - u_0) \frac{\xi}{\ell}; \\ \varphi &= \varphi_0 + (\varphi_\ell - \varphi_0) \frac{\xi}{\ell}; \end{aligned}$$

$$w_\eta = \left(1 - 3\frac{\xi^2}{l^2} + 2\frac{\xi^3}{l^3}\right)w_{\eta_0} + \xi\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^2\varphi_{\zeta_0} + \frac{\xi^2}{l^2}\left(3 - 2\frac{\xi}{l}\right)w_\eta l - \xi\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)\frac{\xi}{l}\varphi_{\zeta l}; \quad (4.1.7)$$

$$w_\zeta = \left(1 - 3\frac{\xi^2}{l^2} + 2\frac{\xi^3}{l^3}\right)w_{\zeta_0} - \xi\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^2\varphi_{\eta_0} + \frac{\xi^2}{l^2}\left(3 - 2\frac{\xi}{l}\right)w_{\zeta l} + \xi\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)\frac{\xi}{l}\varphi_{\eta l}.$$

Тогда продифференцировав соотношения (4.1.7), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_l - u_0}{l};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\varphi_l - \varphi_0}{l};$$

$$\frac{\partial^2 w_\eta}{\partial \xi^2} = \frac{6}{l^2}\left(2\frac{\xi}{l} - 1\right)w_{\eta_0} + \frac{2}{l}\left(3\frac{\xi}{l} - 2\right)\varphi_{\zeta_0} + \frac{6}{l^2}\left(1 - 2\frac{\xi}{l}\right)w_{\eta l} + \frac{2}{l}\left(3\frac{\xi}{l} - 1\right)\varphi_{\zeta l}; \quad (4.1.8)$$

$$\frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial \xi^2} = \frac{6}{l^2}\left(2\frac{\xi}{l} - 1\right)w_{\zeta_0} - \frac{2}{l}\left(3\frac{\xi}{l} - 2\right)\varphi_{\eta_0} + \frac{6}{l^2}\left(1 - 2\frac{\xi}{l}\right)w_{\zeta l} - \frac{2}{l}\left(3\frac{\xi}{l} - 1\right)\varphi_{\eta l}.$$

Подставляя (4.1.8) в (4.1.1), представим усилия и моменты через обобщенные перемещения торцов трубопроводного конечного элемента

$$N = EF\left(\frac{u_l - u_0}{l} - \varepsilon_0 - \alpha T\right);$$

$$Q_\eta = 12\frac{EJ_\zeta}{l^3}(w_{\eta l} - w_{\eta_0}) - 6\frac{EJ_\zeta}{l^2}(\varphi_{\zeta l} + \varphi_{\zeta_0});$$

$$Q_\zeta = 12\frac{EI_\eta}{l^3}(w_{\zeta l} - w_{\zeta_0}) + 6\frac{EI_\eta}{l^2}(\varphi_{\eta l} + \varphi_{\eta_0});$$

$$M_\xi = GJ_\xi \frac{\varphi_l - \varphi_0}{l};$$

$$M_\eta = -EJ_\eta \left[ \frac{6}{l^2}\left(2\frac{\xi}{l} - 1\right)w_{\zeta_0} - \frac{2}{l}\left(3\frac{\xi}{l} - 2\right)\varphi_{\eta_0} + \frac{6}{l^2}\left(1 - 2\frac{\xi}{l}\right)w_{\zeta l} - \frac{2}{l}\left(3\frac{\xi}{l} - 1\right)\varphi_{\eta l} \right]; \quad (4.1.9)$$

$$M_\zeta = -EJ_\zeta \left[ \frac{6}{l^2}\left(2\frac{\xi}{l} - 1\right)w_{\eta_0} + \frac{2}{l}\left(3\frac{\xi}{l} - 2\right)\varphi_{\zeta_0} + \frac{6}{l^2}\left(1 - 2\frac{\xi}{l}\right)w_{\eta l} + \frac{2}{l}\left(3\frac{\xi}{l} - 1\right)\varphi_{\zeta l} \right].$$

Подставляя в выражения для вариации работ (4.1.3) – (4.1.5) соотношения (4.1.7) – (4.1.9) из принципа возможных перемещений (4.1.6), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
[M_p^e]\{\ddot{U}\} + [C_p^e]\{\dot{U}\} + [K_p^e]\{U\} + [C_v^e]\{\dot{U}\} - \{\dot{U}0\} + [K_v^e]\{U\} - \{U0\} = \\
= -\{Q^\ell\} + \{R^\ell\},
\end{aligned}
\tag{4.1.10}$$

где  $[M_p^e], [C_p^e], [K_p^e]$  – матрицы масс, демпфирования и жесткости трубопроводного конечного элемента;  $[Q^\ell]$  – вектор обобщенных внешних сил;  $\{R^\ell\}$  – вектор узловых реакций. Здесь и далее точка над переменной означает производную по времени.

$$\{U^\ell\} = \begin{Bmatrix} U^{ij} \\ U^{ji} \end{Bmatrix} = \{u_0, w_{\eta 0}, w_{\zeta 0}, \varphi_0, \varphi_{\eta 0}, \varphi_{\zeta 0}, u_\ell, w_{\eta \ell}, w_{\zeta \ell}, \varphi_\ell, \varphi_{\eta \ell}, \varphi_{\zeta \ell}\};$$

$$[M^\ell] = \begin{bmatrix} M_{11}^\ell & M_{12}^\ell \\ M_{21}^\ell & M_{22}^\ell \end{bmatrix};$$

$$[M_{11}^\ell] = \rho F \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\ell}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{11\ell^2}{210} \\ 0 & 0 & \frac{13\ell}{35} & 0 & -\frac{11\ell^2}{210} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\xi \ell}{3F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11\ell^2}{210} & 0 & \frac{\ell^3}{105} & 0 \\ 0 & \frac{11\ell^2}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^3}{105} \end{bmatrix}$$

$$[M_{22}^\ell] = \rho F \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\ell}{35} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11\ell^2}{210} \\ 0 & 0 & \frac{13\ell}{35} & 0 & \frac{11\ell^2}{210} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\xi \ell}{3F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11\ell^2}{210} & 0 & \frac{\ell^3}{105} & 0 \\ 0 & -\frac{11\ell^2}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^3}{105} \end{bmatrix}$$

$$[M_{12}^\ell] = [M_{21}^\ell]^T = \rho F \begin{bmatrix} \frac{\ell}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\ell}{70} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13\ell^2}{420} \\ 0 & 0 & \frac{9\ell}{70} & 0 & \frac{13\ell^2}{420} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\xi \ell}{6F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13\ell^2}{420} & 0 & -\frac{\ell^3}{140} & 0 \\ 0 & \frac{13\ell^2}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell^3}{140} \end{bmatrix}$$

$$[K^\ell] = \begin{bmatrix} K_{11}^\ell & K_{12}^\ell \\ K_{21}^\ell & K_{22}^\ell \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{p11}^\ell & K_{p12}^\ell \\ K_{p21}^\ell & K_{p22}^\ell \end{bmatrix};$$

$$[K_{11}^\ell] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_\xi}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_\xi}{\ell^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_\eta}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_\eta}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_\xi}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_\eta}{\ell^2} & 0 & \frac{4EJ_\eta}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_\xi}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_\xi}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$[K_{p11}] = \begin{bmatrix} K_\xi \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_\eta \frac{13\ell}{35} & 0 & 0 & 0 & K_\eta \frac{11\ell^2}{210} \\ 0 & 0 & K_\zeta \frac{13\ell}{35} & 0 & -K_\zeta \frac{11\ell^2}{210} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\phi \frac{J_\xi \ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_\zeta \frac{11\ell^2}{210} & 0 & K_\zeta \frac{\ell^3}{105} & 0 \\ 0 & K_\eta \frac{11\ell^2}{210} & 0 & 0 & 0 & K_\eta \frac{\ell^3}{105} \end{bmatrix}$$

$$[K_{p12}] = [K_{p21}]^T = \begin{bmatrix} K_\xi \frac{\ell}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_\eta \frac{9\ell}{70} & 0 & 0 & 0 & -K_\eta \frac{13\ell^2}{420} \\ 0 & 0 & K_\zeta \frac{9\ell}{70} & 0 & K_\zeta \frac{13\ell^2}{420} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\phi \frac{J_\xi \ell}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_\zeta \frac{13\ell^2}{420} & 0 & -K_\zeta \frac{\ell^3}{140} & 0 \\ 0 & K_\eta \frac{13\ell^2}{420} & 0 & 0 & 0 & -K_\eta \frac{\ell^3}{140} \end{bmatrix}$$

$$[K_{p22}] = \begin{bmatrix} K_\xi \frac{\ell}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_\eta \frac{13\ell}{35} & 0 & 0 & 0 & -K_\eta \frac{11\ell^2}{210} \\ 0 & 0 & K_\zeta \frac{13\ell}{35} & 0 & K_\zeta \frac{11\ell^2}{210} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\phi \frac{J_\xi \ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_\zeta \frac{11\ell^2}{210} & 0 & K_\zeta \frac{\ell^3}{105} & 0 \\ 0 & -K_\eta \frac{11\ell^2}{210} & 0 & 0 & 0 & K_\eta \frac{\ell^3}{105} \end{bmatrix}$$

$$[K_{22}^\ell] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_\zeta}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_\zeta}{\ell^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_\eta}{\ell^3} & 0 & \frac{6EJ_\eta}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_\xi}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EJ_\eta}{\ell^2} & 0 & \frac{4EJ_\eta}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_\zeta}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_\zeta}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$[K_{12}^\ell] = [K_{21}^\ell]^T = \begin{bmatrix} -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_\zeta}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_\zeta}{\ell^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_\eta}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_\eta}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_\xi}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EJ_\eta}{\ell^2} & 0 & \frac{2EJ_\eta}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_\zeta}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_\zeta}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$\{Q^\ell\} = \begin{Bmatrix} Q^{ij} \\ Q^{ji} \end{Bmatrix};$$

$$\{Q^{ij}\} = \left\{ -\frac{q_\xi \ell}{2} + EF(\varepsilon_0 + \alpha T), -\frac{q_\eta \ell}{2}, -\frac{q_\zeta \ell}{2}, -\frac{m\ell}{2}, \frac{q_\zeta \ell^2}{12}, -\frac{q_\eta \ell^2}{12} \right\}^T;$$

$$\{Q^{ji}\} = \left\{ -\frac{q_\xi \ell}{2} - EF(\varepsilon_0 + \alpha T), -\frac{q_\eta \ell}{2}, -\frac{q_\zeta \ell}{2}, -\frac{m\ell}{2}, -\frac{q_\zeta \ell^2}{12}, \frac{q_\eta \ell^2}{12} \right\}^T.$$

Эти матрицы представлены в местной (локальной) системе координат.

Следует отметить, что при поперечном изгибе трубопровода величина прогибов зависит, прежде всего, от значений нормальных напряжений в поперечном сечении и соответствующих им деформаций. Однако в тонкостенных трубопроводах существенное влияние на характеристики

поперечных колебаний могут оказывать деформации сдвига. В этом случае, аналогично вышеописанному методу, получены матрица жесткости конечного элемента трубопровода с учетом деформации сдвига [34, 35]. Обозначим

$$a_{\eta}=1/(1+12EJ_{\eta}/(\ell^2GS_{\eta})); \quad a_{\zeta}=1/(1+12EJ_{\zeta}/(\ell^2GS_{\zeta})),$$

где  $GS_{\eta}$ ,  $GS_{\zeta}$  – сдвиговая жесткость единицы длины трубопровода в направлении соответствующих осей. Тогда элементы матрицы жесткости с учетом деформации сдвига имеют вид:

$$[K_{11}^{\ell}] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_{\zeta}a_{\zeta}}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_{\zeta}a_{\zeta}}{\ell^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_{\eta}a_{\eta}}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_{\eta}a_{\eta}}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{\xi}}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_{\eta}a_{\eta}}{\ell^2} & 0 & \frac{EJ_{\eta}(1+3a_{\eta})}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_{\zeta}a_{\zeta}}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EJ_{\zeta}(1+3a_{\zeta})}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$[K_{22}^{\ell}] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_{\zeta}a_{\zeta}}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_{\zeta}a_{\zeta}}{\ell^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_{\eta}a_{\eta}}{\ell^3} & 0 & \frac{6EJ_{\eta}a_{\eta}}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{\xi}}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EJ_{\eta}a_{\eta}}{\ell^2} & 0 & \frac{EJ_{\eta}(1+3a_{\eta})}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_{\zeta}a_{\zeta}}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EJ_{\zeta}(1+3a_{\zeta})}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$[K_{12}^{\ell}] = [K_{21}^{\ell}]^T = \begin{bmatrix} -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_{\zeta}a_{\zeta}}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_{\zeta}a_{\zeta}}{\ell^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_{\eta}a_{\eta}}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EJ_{\eta}a_{\eta}}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{\xi}}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EJ_{\eta}a_{\eta}}{\ell^2} & 0 & \frac{EJ_{\eta}(1+3a_{\eta})}{2\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_{\zeta}a_{\zeta}}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EJ_{\zeta}(1+3a_{\zeta})}{2\ell} \end{bmatrix}$$

В состыкованных трубопроводах, состоящих из секционных труб, есть необходимость учесть геометрические и механические характеристики податливого стыка. Для моделирования податливого стыка его массой пренебрегаем и представляем стык в виде пружины и вязкого элемента, тогда матрицы жесткости податливого стыка в местной системе координат будут иметь вид:

$$[K_{11}^s] = \begin{bmatrix} K_x^s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_y^s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\varphi}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\psi}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\gamma}^s \end{bmatrix}$$

$$[K_{22}^s] = \begin{bmatrix} K_x^s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_y^s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\varphi}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\psi}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\gamma}^s \end{bmatrix}$$

$$[K_{12}^s] = [K_{21}^s]^T = \begin{bmatrix} -K_x^s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_y^s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_z^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_\varphi^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_\psi^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_\gamma^s \end{bmatrix}$$

где  $K_x^s$ ,  $K_y^s$ ,  $K_z^s$ ,  $K_\varphi^s$ ,  $K_\psi^s$ ,  $K_\gamma^s$  – жесткость стыка в продольном, двум поперечным направлениям и на повороты вокруг осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно.

Для получения матриц в глобальной (общей) системе координат необходимо сделать следующее преобразование [32, 33]:

$$\{U^{ij}\} = [\wedge^{ij}]^T \{V^{ij}\}, \quad \{U^{ji}\} = [\wedge^{ji}]^T \{V^{ji}\}, \quad (4.1.11)$$

где  $\{V^{ij}\}$  – вектор обобщенных перемещений в общей системе координат,

$$[\wedge^{ij}] = [\wedge^{ji}] = \begin{bmatrix} T^{ij} & O \\ O & T^{ji} \end{bmatrix};$$

$$[T^{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11}^{ij} & t_{12}^{ij} & t_{13}^{ij} \\ t_{21}^{ij} & t_{22}^{ij} & t_{23}^{ij} \\ t_{31}^{ij} & t_{32}^{ij} & t_{33}^{ij} \end{bmatrix}, \quad (4.1.12)$$

$t^{ij}$  – косинусы углов между осями  $\xi, \eta, \zeta$  и  $x, y, z$ .

Перемещения  $\{V^{ij}\}$  и  $\{V^{ji}\}$  точек контакта  $ij$ -го трубопроводного элемента с  $i$ -м и  $j$ -м узловыми элементами связаны перемещениями  $\{W^i\}$  и  $\{W^j\}$  центров этих узловых элементов следующими соотношениями [32]:

$$\{V^{ij}\} = [H^{ij}]^T \{W^i\}, \quad \{V^{ji}\} = [H^{ji}]^T \{W^j\}, \quad (4.1.13)$$

где  $\{W^i\} = \{u^i \ v^i \ w^i \ \varphi_x^i \ \varphi_y^i \ \varphi_z^i\}^T$ ;

$$[H^{ij}] = \begin{bmatrix} E & O \\ \bar{H}^{ij} & E \end{bmatrix}; \quad [H^{ji}] = \begin{bmatrix} E & O \\ \bar{H}^{ji} & E \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.1.14)$$

$$[\bar{H}^{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{z}^{ij} & \bar{y}^{ij} \\ \bar{z}^{ij} & 0 & -\bar{x}^{ij} \\ -\bar{y}^{ij} & \bar{x}^{ij} & 0 \end{bmatrix}; \quad [\bar{H}^{ji}] = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{z}^{ji} & \bar{y}^{ji} \\ \bar{z}^{ji} & 0 & -\bar{x}^{ji} \\ -\bar{y}^{ji} & \bar{x}^{ji} & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\bar{x}^{ij}, \bar{y}^{ij}, \bar{z}^{ij}$  ( $\bar{x}^{ji}, \bar{y}^{ji}, \bar{z}^{ji}$ ) – координаты точки контакта начала (конца)  $ij$ -го трубопроводного элемента в системе координат  $o^i \bar{x} \bar{y} \bar{z}$  (начало координат находится в центре масс  $i$ -го узлового элемента, а оси  $o^i \bar{x}$ ,  $o^i \bar{y}$ ,  $o^i \bar{z}$  параллельны соответствующим осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ).

Подставляя (4.1.13) в (4.1.11), получаем

$$\{U^{ij}\} = [C^{ij}]^T \{W^i\}; \quad \{U^{ji}\} = [C^{ji}]^T \{W^j\}, \quad (4.1.15)$$

$$\text{где } [C^{ij}]^T = [H^{ij} \wedge^{ij}]^T = [\wedge^{ij}]^T [H^{ij}]^T; \quad [C^{ji}]^T = [H^{ji} \wedge^{ji}]^T = [\wedge^{ji}]^T [H^{ji}]^T. \quad (4.1.16)$$

По правилам ортогонального преобразования [32] матрицы масс и жесткости трубопроводного элемента, выраженные в общих координатах, принимают вид:

$$\begin{aligned} [\overline{M}_{11}^\ell] &= [C^{ij}] [M_{11}^\ell] [C^{ij}]^T; \quad [\overline{M}_{12}^\ell] = [C^{ij}] [M_{12}^\ell] [C^{ji}]^T; \quad [\overline{M}_{21}^\ell] = [C^{ji}] [M_{21}^\ell] [C^{ij}]^T; \\ [\overline{M}_{22}^\ell] &= [C^{ji}] [M_{22}^\ell] [C^{ji}]^T; \quad [\overline{K}_{11}^\ell] = [C^{ij}] [K_{11}^\ell] [C^{ij}]^T; \quad [\overline{K}_{12}^\ell] = [C^{ij}] [K_{12}^\ell] [C^{ji}]^T; \\ [\overline{K}_{21}^\ell] &= [C^{ji}] [K_{21}^\ell] [C^{ij}]^T; \quad [\overline{K}_{22}^\ell] = [C^{ji}] [K_{22}^\ell] [C^{ji}]^T; \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

А внешние силы преобразуются следующим образом:

$$\{\overline{Q}_i^\ell\} = [C^{ij}] \{Q_i^\ell\}; \quad \{\overline{Q}_j^\ell\} = [C^{ji}] \{Q_j^\ell\}; \quad (4.1.18)$$

Рассмотрим вопрос присоединения трубопроводного элемента к узловому элементу. При их жестком соединении обобщенные перемещения торца трубопроводного элемента и точки узла, к которому соединен этот торец трубопроводного элемента, будут одинаковыми. В случае шарнирного соединения часть обобщенных перемещений узла и соответствующего торца трубопроводного элемента имеют разные значения. Отсюда следует задача о выражении обобщенных перемещений торца трубопроводного элемента через обобщенные перемещения узлового элемента, и построении матрицы масс и жесткости при наличии шарнирных связей. Также через соответствующие преобразования можно реализовать соединение с эксцентриситетом. Формулы этих преобразований приведены в [32].

В трубопроводных системах могут встречаться части, которые можно моделировать сосредоточенной массой, взаимодействующей с грунтом. В этом случае сосредоточенную массу совместим с узлом конечного элемента и назовем узловым элементом. Узловой элемент характеризуется координатами центра масс величиной массы  $m$  и моментами инерции  $J_{xxi}, J_{xyi}, J_{xzi}, J_{yxi}, J_{yyi}, J_{yzi}, J_{zxi}, J_{zyi}, J_{zzi}$ . Матрица масс узлового элемента имеет вид [18]

$$[M_i] = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{xxi} & -J_{xyi} & -J_{xzi} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{xyi} & J_{yyi} & -J_{yzi} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{xzi} & -J_{zyi} & J_{zzi} \end{bmatrix}.$$

Матрица масс  $i$ -го узлового элемента  $M_i$  представлена в глобальной системе координат.

Масса узлового элемента имеет определенную поверхность, через которую происходит взаимодействие с грунтом [36]. Это взаимодействие выражается матрицей взаимодействия в глобальной системе координат

$$[K_i] = \begin{bmatrix} K_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{yi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{zi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\phi i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\phi i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\gamma i} \end{bmatrix}$$

где  $K_{xi}$ ,  $K_{yi}$ ,  $K_{zi}$ ,  $K_{\phi i}$ ,  $K_{\phi i}$ ,  $K_{\gamma i}$  – жесткости взаимодействия узлового элемента по направлениям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  и при поворотах вокруг этих осей соответственно.

Из приведенных выше стержневых, стыковых конечных элементов и узлового элемента, взаимодействующих с грунтом, можно собрать пространственную систему подземного трубопровода любой сложности. При этом граничными условиями на конечных точках трубопроводной системы могут задаваться условие закрепления к грунту или другие заданные значения перемещений, свободные от напряжений, вязкоупругое взаимодействие с грунтом. Эти условия так же охватываются приведенными конечными элементами.

Система уравнений движения подземной трубопроводной системы после конечно-элементной дискретизации имеет вид:

$$[M_p]\{\ddot{U}\} + [C_p]\{\dot{U}\} + [K_p]\{U\} + [C_v](\{\dot{U}\} - \{\dot{U}0\}) + [K_v](\{U\} - \{U0\}) = \{F(t)\}. \quad (4.1.19)$$

Здесь  $[M_p]$  – матрица масс;  $[K_p]$  – матрица жесткости;  $[C_p]$  – матрица демпфирования;  $[K_v]$  – матрица взаимодействия;  $[C_v]$  – матрица вязкого взаимодействия;  $\{F\}$  – вектор воздействий;  $\{U0\}$  – сейсмическая волна в виде сейсмограмм реальных записей землетрясений, зависящая от координаты и времени. Матрица демпфирования строится по способу Релея в следующем виде [33, 37]

$$[C_p] = \alpha[M_p] + \beta[K_p].$$

Здесь коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются на основе экспериментальных данных по соотношениям

$$\beta\omega_1^2 + \alpha = \gamma\omega_1; \quad \beta\omega_2^2 + \alpha = \gamma\omega_2; \quad \gamma = \frac{\delta}{\pi}, \quad (4.1.20)$$

где  $\delta$  – логарифмический декремент затухания колебаний конструкции;  $\omega_1, \omega_2$  – частоты двух характерных форм колебаний. Однако, для подземных сооружений вопрос выбора характерных частот собственных колебаний остается открытым. Поэтому поступим следующим образом, положим  $\alpha = 0$ , и предположим, что для каждого конечного элемента известно значение вязкости при осевом деформировании, тогда значение  $\beta$  для этого конечного элемента можно вычислить, разделив величину вязкости на значение продольной жесткости конечного элемента. В этом случае матрица демпфирования конечного элемента вычисляется умножением коэффициента пропорциональности  $\beta$  на матрицу жесткости этого элемента.

Граничными условиями на торцах могут быть различные условия:

- Полное (три перемещения и три поворота) закрепление к неподвижному телу;
- Полное (три перемещения и три поворота) закрепление к грунту;
- Вязкоупругое взаимодействие с грунтом по трем направлениям перемещений и трем поворотам;
- Частичное закрепление к неподвижному телу, т.е. по отдельным перемещениям и отдельным поворотам имеется степень свободы и по этим направлениям могут быть заданы действующие силы и моменты;
- Частичное закрепление к грунту, т.е. по отдельным перемещениям и отдельным поворотам имеется степень свободы и по этим направлениям могут быть заданы действующие силы и моменты.

Начальные условия имеют вид:

$$\{U\}^0 = \{U_{ст}\}, \quad \{\dot{U}\}^0 = 0, \quad (4.1.21)$$

где  $\{U_{ст}\}$  – решение статической задачи.

Для определения начальных условий решается задача статики при заданных внешних силах и перемещениях некоторых узлов

$$([K_p] + [K_v])\{U_{ст}\} = \{F\}. \quad (4.1.22)$$

Для решения этой системы алгебраических уравнений применяется метод Холесского при профильном хранении матрицы жесткости пространственной системы подземного трубопровода [36].

Далее рассмотрим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными и начальными условиями.

## 4.2. Алгоритм численного решения задач сейсродинамики пространственных систем подземных трубопроводов

Опишем численный метод решения уравнений сейсродинамики пространственных систем подземных трубопроводов.

Для решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (4.1.19) с начальными условиями (4.1.21) используем неявную аппроксимацию системы конечными разностями [37]

$$\begin{aligned} & \frac{[M_p]}{\tau^2} (\{U\}^{n+1} - 2\{U\}^n + \{U\}^{n-1}) + \frac{[C_p]}{2\tau} (\{U\}^{n+1} - \{U\}^{n-1}) + \\ & + \frac{[K_p]}{2} (\{U\}^{n+1} + \{U\}^{n-1}) + \frac{[C_v]}{2\tau} (\{U\}^{n+1} - \{U0\}^{n+1} - \{U\}^{n-1} + \{U0\}^{n-1}) + \\ & + \frac{[K_v]}{2} (\{U\}^{n+1} - \{U0\}^{n+1} + \{U\}^{n-1} - \{U0\}^{n-1}) = \frac{1}{2} (\{F\}^{n+1} + \{F\}^{n-1}), \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

где  $\tau$  – шаг по времени; верхний индекс  $n$  – номер шага по времени.

Часто в практических задачах скорости узлов в начальный момент времени являются нулевыми, поэтому для удобства принимается:

$$\{U\}^0 = \{U_{CT}\}; \quad \{U\}^1 = \{U_{CT}\}. \quad (4.2.2)$$

Далее на каждом слое по времени решаем систему линейных алгебраических уравнений (4.2.1) методом Холесского при профильном хранении матриц.

Итак, определяются перемещения центров узловых элементов на дискретных слоях времени. Соответственно на каждом слое времени можно вычислить внутренние реакции.

Остановимся на вопросе устойчивости разностной схемы (4.2.1). Анализ устойчивости конечно-разностной схемы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений проведем, следуя работе [38]. Пусть  $\omega_i$ ,  $\{U_i\}$  – собственные числа и векторы матрицы  $[M]^{-1}[K]$ , тогда

$$\{U\}^n = \sum_{p=1}^m C_n^p \{v_p\}; \quad (4.2.3)$$

$$\sum_{p=1}^m \left[ \frac{C_{n+1}^p - 2C_n^p + C_{n-1}^p}{\tau^2} + \frac{\omega_p^2}{2} (C_{n+1}^p + C_{n-1}^p) \right] \{v_p\} = 0. \quad (4.2.4)$$

Вследствие линейной независимости векторов  $\{v_p\}$  в уравнении (4.2.4) каждый коэффициент перед  $\{v_p\}$  обращается в нуль. Таким образом, задача исследования устойчивости разностной схемы (4.2.1) сводится к исследованию устойчивости следующей конечно-разностной схемы

$$C_{n+1}^p - 2C_n^p + C_{n-1}^p + \frac{\omega_p^2 \tau^2}{2} (C_{n+1}^p + C_{n-1}^p) = 0. \quad (4.2.5)$$

Для доказательства устойчивости схемы (4.2.5) используем метод гармоник [37, 38]

$$C_n^p = A \ell^{(v+i\mu)n\tau} = A \ell^{v n \tau} \ell^{i \mu n \tau} = A q^n, \quad q = \ell^{(v+i\mu)\tau}, \quad (4.2.6)$$

где  $A$  – произвольная комплексная постоянная. Множитель  $\ell^{i \mu n \tau}$  описывает колебательное движение с круговой частотой  $\mu$ , а множитель  $\ell^{v n \tau}$  характеризует изменение амплитуды колебаний с течением времени; решение будет устойчивым в случае  $v \leq 0$ .

Из (4.2.5) и (4.2.6) получим для  $q$  квадратное уравнение

$$q^2 - \frac{4}{2 + \omega_p^2 \tau^2} q + 1 = 0.$$

Отсюда находим

$$q_{1,2} = \frac{2}{2 + \omega_p^2 \tau^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2 + \omega_p^2 \tau^2}\right)^2 - 1}.$$

Выражение под корнем при любых значениях  $\tau$  отрицательно, значит корни квадратного уравнения комплексно сопряженные и по модулю оба корня равны единице. Отсюда следует, что для обоих частных решений, соответствующих  $q_1$  и  $q_2$ , величина  $v$  равна нулю, т.е. получаемое здесь приближенное решение, так же как и точное, описывает гармонические колебания с постоянной амплитудой. Поэтому для получения приемлемой точности при интегрировании  $p$  – составляющей решения необходимо, хотя для устойчивости не обязательно, выполнение соотношения

$$\frac{\omega_p \tau}{2\pi} \leq \frac{1}{10}. \quad (4.2.7)$$

Когда конструкция имеет большое число узловых элементов, то наименьшая собственная частота от наибольшей частоты отличается на несколько порядков. Поэтому при исследовании колебательных процессов попытка удовлетворить условию (4.2.7) для всех частот приводит к очень маленькому значению  $\tau$  и не позволяет получить решение для больших значений времени. В принципе необязательно выполнение условия (4.2.7) для всех частот, достаточно удовлетворения для нескольких низших частот при сравнительно гладком внешнем воздействии. Если внешнее воздействие имеет высокочастотные составляющие, то в пространственной системе подземных трубопроводов будут задействованы формы колебаний, частоты которых близки к частотам внешнего воздействия. В этом случае условие (4.2.7) должно удовлетворяться хотя бы для такого значения  $\omega_p$ , который является первой большей частотой по отношению к частоте внешнего воздействия.

Теперь встает вопрос, как реагирует вычислительная схема (4.2.1) на высокочастотные составляющие решения при больших значениях шага по времени  $\tau$ . Из разностной схемы (4.2.4) легко получить следующую рекуррентную формулу:

$$C_{n+1}^p = \frac{4}{2 + \omega_p^2 \tau^2} C_n^p - C_{n-1}^p. \quad (4.2.8)$$

Отсюда видно, что при  $\omega_p^2 \tau^2 > 2$ ,  $|C_n^p|$  убывает с увеличением  $n$ . Это означает затухание высокочастотных составляющих решения со временем при вычислениях на основе схемы (4.2.1) со сравнительно большим значением шага по времени  $\tau$ .

По описанным выше алгоритмам разработан комплекс программ [39, 40], который протестирован на множествах примеров для подземных конструкций при заданных трехмерных сейсмических волнах, в том числе на реальные записи землетрясений [41 – 52]. В комплексе программ реализованы все варианты граничных условий, выбор которых устанавливается заданием условий и сосредоточенных нагрузок на торцах. Ниже приводим результаты некоторых решенных задач по сейсродинамике подземных трубопроводов по сейсмограммам реальных землетрясений.

Рассмотрим действие 8 балльного Манжилского землетрясения (Иран, 20 июля 1990г.) на подземный трубопровод, в плане который показан на рис. 4.1. Трубопровод 1 имеет длину 250 м, левый торец которого закреплен к грунту вязкоупругой связью, а правый торец жестко соединяется с колодцем и трубопроводами 2 и 3. Трубопровод 2 имеет длину 50 м, его нижний торец свободен от напряжений. Трубопровод 3 имеет длину 200 м, его правый торец закреплен к грунту, т.е. движется совместно с заданным перемещением грунта.

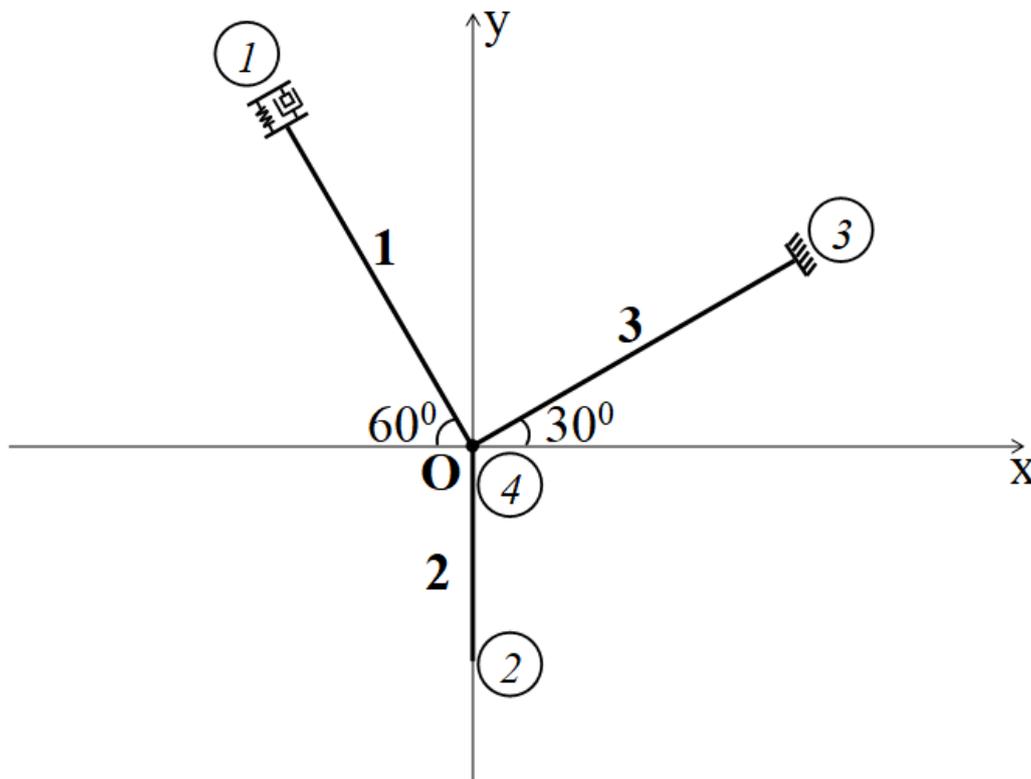


Рис. 4.1. Вид сверху трубопроводной системы

Исходные данные для труб:  $EF=3.95 \cdot 10^9$  Н,  $EJ_z=17.81 \cdot 10^7$  Нм<sup>2</sup>,  $EJ_y=17.81 \cdot 10^7$  Нм<sup>2</sup>,  $GJ_x=2.0 \cdot 10^9$  Нм<sup>2</sup>,  $GF_{(z)}=1.5 \cdot 10^9$  Н,  $GF_{(y)}=1.5 \cdot 10^9$  Н,

$\pi DK_x=1.5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ,  $\pi DK_y=3.75 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ,  $\pi DK_z=3.75 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ,  $\alpha=0$ ,  $\beta=0.01 \text{ с}$ ,  $\beta_{zp}=0.02 \text{ с}$ ,  $D_H=0.61 \text{ м}$ ,  $F=0.019 \text{ м}^2$ ,  $F\rho=148.2 \text{ кг/м}$ ; для колодца: масса=200 кг, массовые моменты инерции (кгм) 0.01, 0.01, 0.01, жесткости взаимодействия с грунтом (Н/м) по трем направлениям  $1.0 \cdot 10^8$ ,  $1.0 \cdot 10^8$ ,  $1.0 \cdot 10^8$ ; для граничного условия на левом торце 1-го трубопровода: жесткости на растяжение – сжатие  $0.1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$ , на изгиб в двух плоскостях  $0.1 \cdot 10^7 \text{ Нм}$ ,  $0.1 \cdot 10^7 \text{ Нм}$ , на кручение  $0.01 \cdot 10^9 \text{ Нм}$ , на сдвиг в двух плоскостях  $0.01 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$  и  $0.01 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$ ,  $\alpha=0$ ,  $\beta=0.01 \text{ с}$ .

Сейсмическое воздействие имеет три компоненты по трем осям, направление распространения волны в грунте со скоростью 500 м/с совпадает с осью  $Ox$  (рис. 4.1). При  $t=0$  сейсмическая волна слева подходит к точке с координатами (-126 м, 0, 1.5 м). Время действия волны 38 с, шаг оцифрования и шаг вычислений (аппроксимации) по времени 0.005 с.

Максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении трубопровода вычисляется по формуле

$$\sigma_{\max} = \sigma_n + \text{sign}(\sigma_n) \sqrt{(M_z \cdot D_H / (2 \cdot J_z))^2 + (M_y \cdot D_H / (2 \cdot J_y))^2},$$

при этом в разное время максимальное нормальное напряжение получается у наружного диаметра в разных точках поперечного сечения.

На рис. 4.2 представлены графики изменения максимального нормального напряжения в трубах возле колодца. Во второй и третьей трубах значение этого напряжения больше чем в первой трубе, что связано с углом атаки этих труб и влиянием изгибной деформации на вторую трубу. На рис. 4.3 показано изменение максимального нормального напряжения вдоль труб, здесь явно видно влияние сложного узла на напряженное состояние во второй и третьей трубах возле узла.

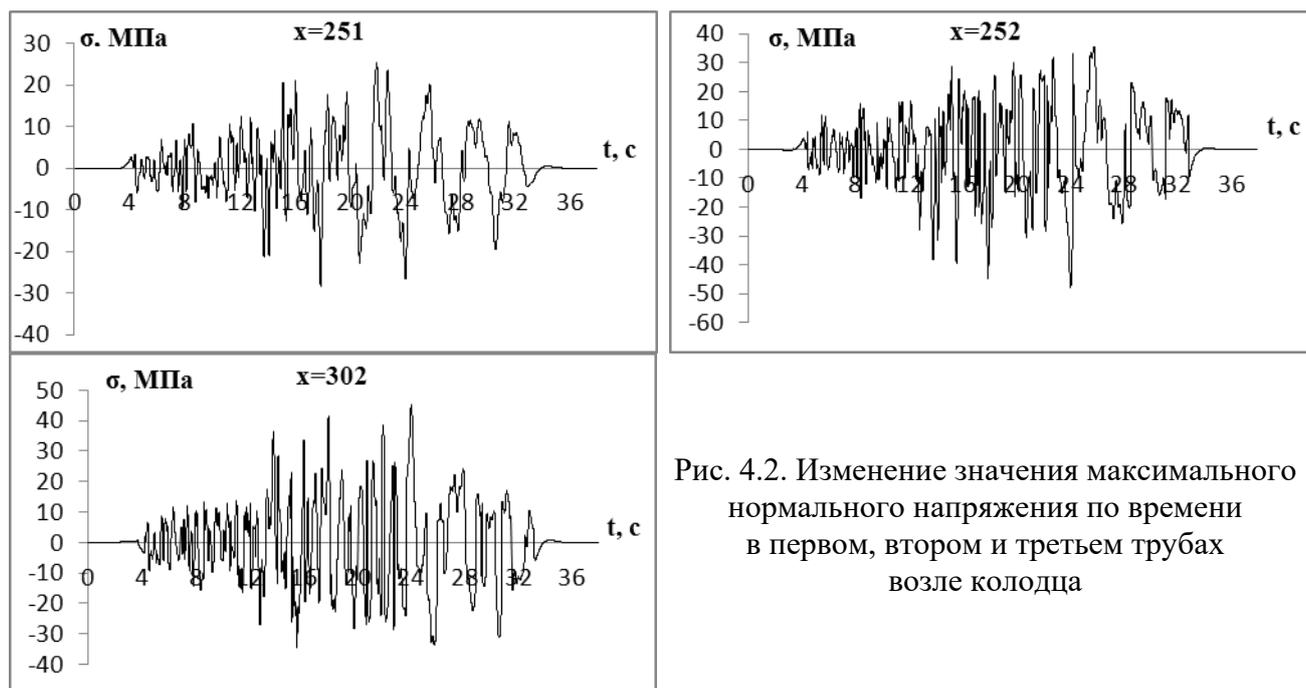
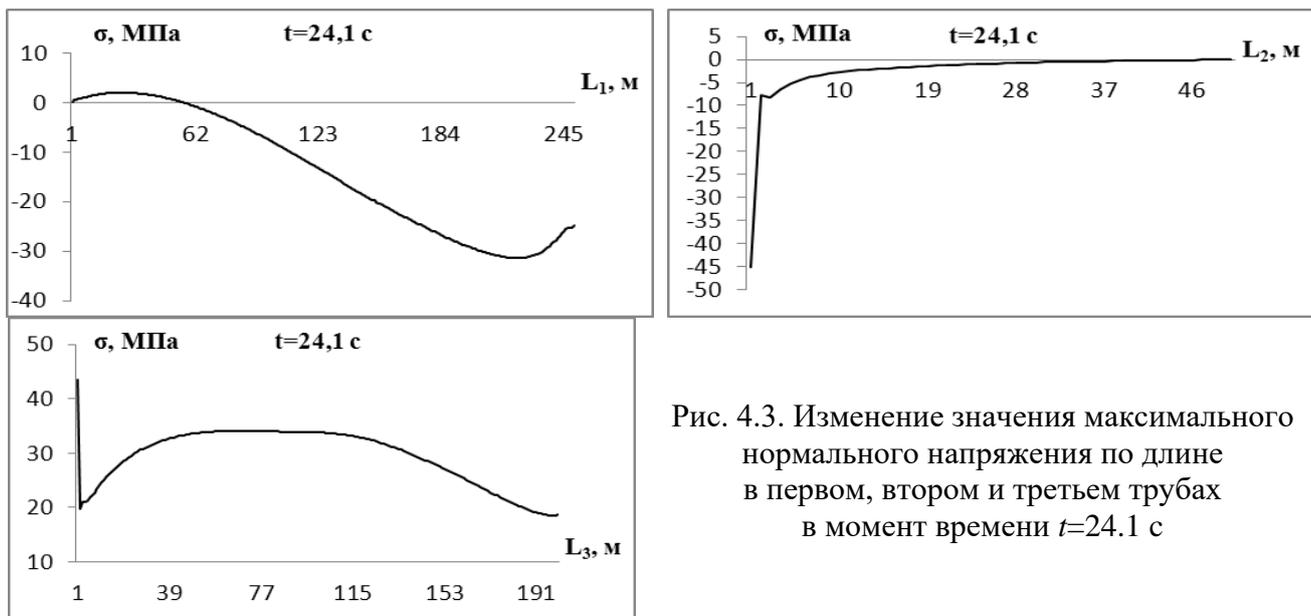


Рис. 4.2. Изменение значения максимального нормального напряжения по времени в первом, втором и третьем трубах возле колодца



Далее рассмотрим влияние массы сложного узла на сейсродинамический процесс в подземном трубопроводе.

#### 4.3. Исследование влияния массы сложного узла подземных трубопроводов ортогональной конфигурации на основе реальных записей землетрясений

В сейсродинамике подземных сооружений важен не только характер взаимодействия системы трубопроводов с окружающей средой, но и конструктивная особенность сооружения [51]. Проанализированы сотни материалов по последствиям последних сильных землетрясений, связанные с исследованием систем жизнеобеспечения типа подземных газо-, водо-нефтепроводов и тоннелей различного назначения, с целью дополнить разработанную теорию новыми данными и оценить результативность работы.

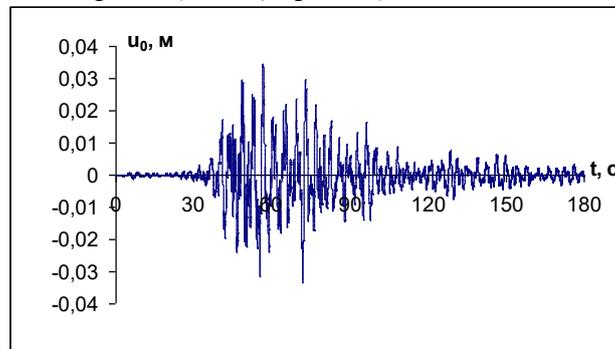
На рис. 4.4 приведена система трубопроводов и колодцев ортогональной конфигурации. Колодец моделируется как твердое тело, жестко соединенное с трубопроводами, при этом колодец взаимодействует с грунтом. Изучим влияние величины массы колодца на напряженное состояние подземного трубопровода, торцы которого закреплены к грунту, при действии трехмерной волны, записанной во время землетрясения. Рассмотрим подземный трубопровод длиной 172 м, к которому присоединены 4 узла на отметках 41 м, 84 м, 89 м и 132 м (рис. 4.4).



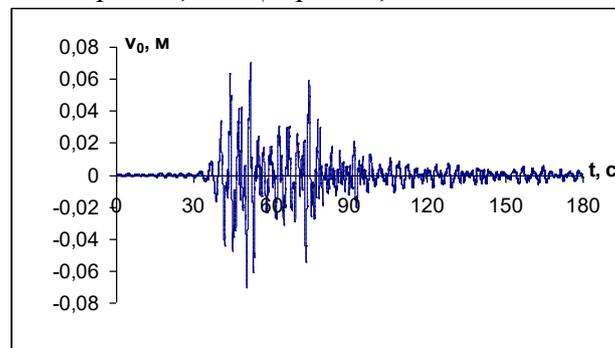
Рис. 4.4. Участок сложной системы подземных трубопроводов ортогональной конфигурации

Пусть внешнее воздействие (сейсмограмма) имеет вид, представленный на рис. 4.5. Оцифрованные записи сейсмограмм землетрясения предоставлены нам заведующим лабораторией Университета Беркли Ш. Тахировым.

а) продольное перемещение (перемещение по ОХ землетрясения)



б) поперечное перемещение (перемещение по ОУ землетрясения)



в) вертикальное перемещение (перемещение по ОZ землетрясения)

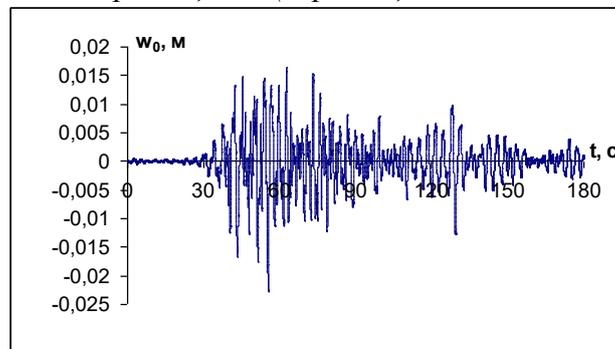


Рис. 4.5. Оцифрованные записи сейсмограмм землетрясения 24 января 2016 г. в Чили

В качестве примера рассмотрим задачу при следующих исходных данных: механические и геометрические параметры подземного трубопровода и грунта выбираем в следующем виде:  $E=2 \cdot 10^5$  МПа;  $\rho=7.8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $D_H=0.5$  м;  $D_B=0.49$  м;  $\mu_{\text{грунт}}=0.2$ ;  $\mu_{\text{труба}}=0.3$ ;  $l=172$  м; на прямолинейном участке  $k_x=1.5 \cdot 10^4$  кН/м<sup>3</sup>;  $k_{y,z}=3.9 \cdot 10^4$  кН/м<sup>3</sup>; на сложном участке  $k_x=0.5 \cdot 10^4$  кН/м<sup>3</sup>;  $k_{y,z}=1.3 \cdot 10^4$  кН/м<sup>3</sup>;  $C_p=1000$  м/с. Для колодца:  $E=2.5 \cdot 10^4$  МПа;  $\rho=2.5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $D_H^{uz}=4$  м;  $D_B^{uz}=3.5$  м;  $H_{uz}=1.5$  м;  $m_1=\pi \cdot H_{uz}/4 \cdot (D_H^{uz2} - D_B^{uz2}) \cdot \rho$ ;  $m_2=\pi \cdot R_H^{uz2} \cdot h_{uz} \cdot \rho$ ;  $m_{uz}=V_1 \cdot \rho$ ;  $I_x^{uz}=I_y^{uz}=m_1/12 \cdot H_{uz}^2 + 1/2 \cdot m_2 \cdot R_H^{uz2}$  м<sup>2</sup>;  $I_z^{uz}=m_1/2 \cdot (R_H^{uz2} + R_B^{uz2}) + m_2 \cdot R_H^{uz2}$  м<sup>2</sup>;  $V_1=\pi \cdot H_{uz}/4 \cdot (D_H^{uz2} - D_B^{uz2}) + 2 \cdot \pi \cdot R_H^{uz2} \cdot h_{uz}$ ;  $k_x^{uz}=0.5 \cdot 10^4$  кН/м<sup>3</sup>;  $k_{y,z}^{uz}=1.3 \cdot 10^4$  кН/м<sup>3</sup>,

масса узла (колодца)  $m_{уз}=2 \cdot 10^3$  кг.

На рис. 4.6 приведены изменения значения продольного перемещения по времени в заданных сечениях подземного трубопровода ( $x=0$  м,  $x=41$  м,  $x=81$  м,  $x=84$  м,  $x=89$  м,  $x=92$  м,  $x=132$  м,  $x=172$  м).

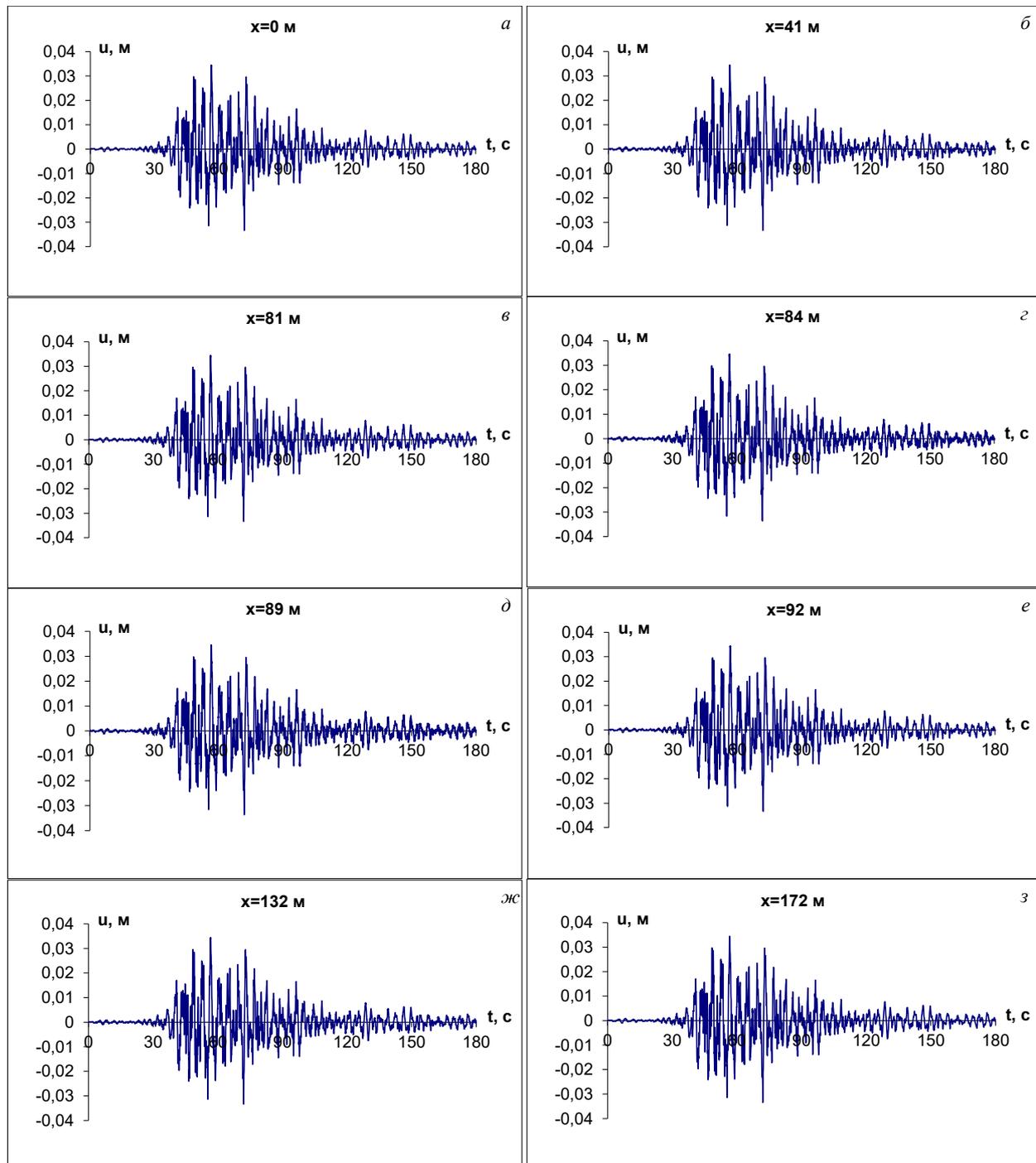


Рис. 4.6. Изменения продольного перемещения по времени в заданных сечениях подземного трубопровода

Значения продольного перемещения по времени в заданных сечениях подземного трубопровода  $x=0$  м,  $x=41$  м,  $x=81$  м,  $x=84$  м,  $x=89$  м,  $x=92$  м,  $x=132$  м,  $x=172$  м отличаются высокочастотными составляющими, которые на рис. 4.6 мало заметны, но они сильно влияют на значения продольного усилия.

Продольные перемещения во всех сечениях подземного трубопровода близки по значениям к воздействующим сейсмограммам в соответствующих сечениях (рис. 4.6). Графики показывают, что значения поперечного перемещения подземного трубопровода больше чем значения продольного перемещения подземного трубопровода (см. рис. 4.6 и 4.7). Это связано с амплитудами сейсмических волн в продольном и поперечном направлениях.

На рис. 4.7 приведены изменения значений поперечного перемещения по времени в заданных сечениях подземного трубопровода ( $x=0$  м,  $x=41$  м,  $x=81$  м,  $x=84$  м,  $x=89$  м,  $x=92$  м,  $x=132$  м,  $x=172$  м).

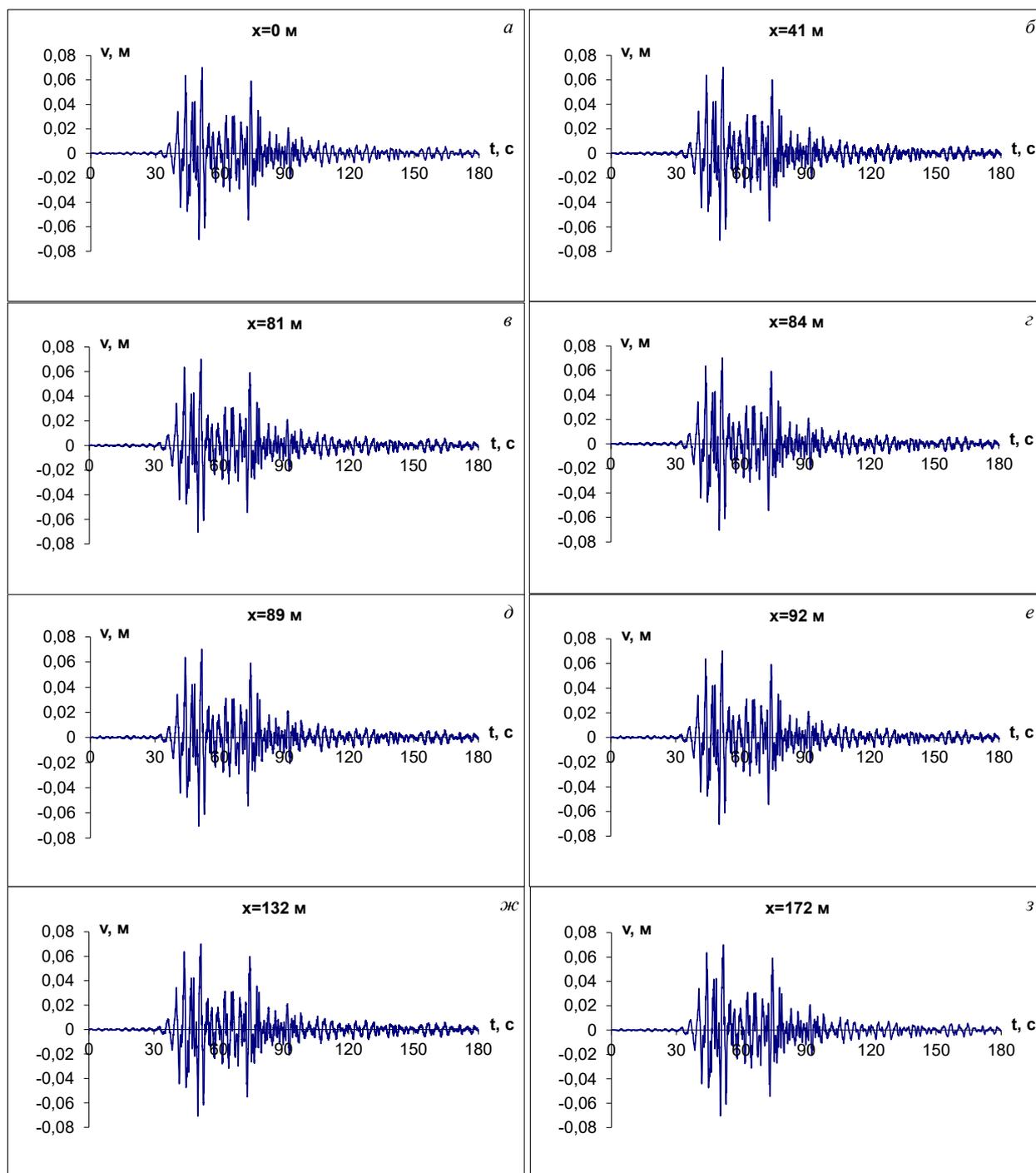


Рис. 4.7. Изменения поперечного перемещения по времени в заданных сечениях подземного трубопровода

На рис. 4.8 приведены изменения вертикального перемещения по времени в заданных сечениях ( $x=0$  м,  $x=41$  м,  $x=81$  м,  $x=84$  м,  $x=89$  м,  $x=92$  м,  $x=132$  м,  $x=172$  м) подземного трубопровода.

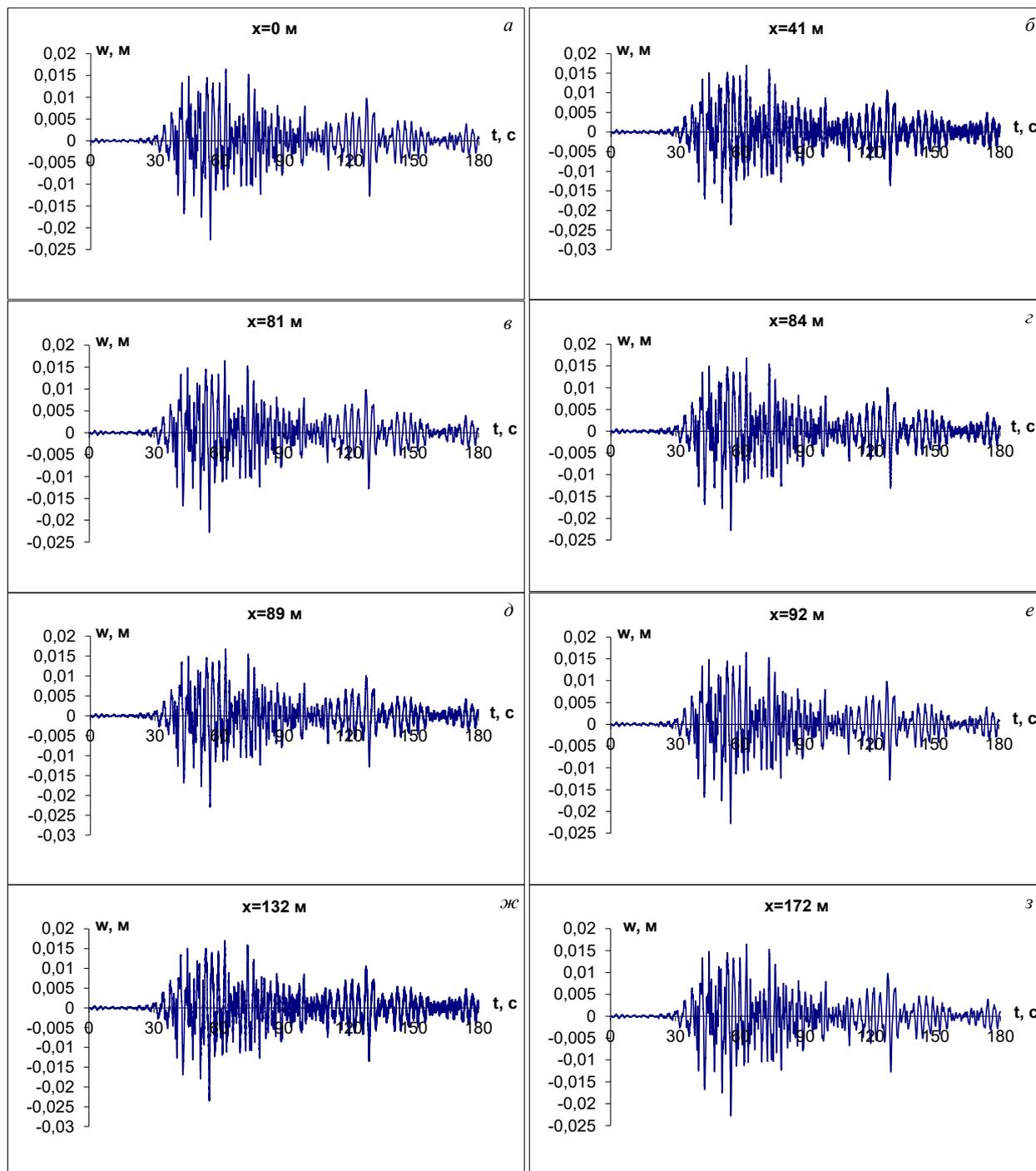


Рис. 4.8. Изменения вертикального перемещения по времени в заданных сечениях подземного трубопровода

Из графика (рис. 4.8) видно, что амплитуды вертикальных перемещений подземного трубопровода меньше по сравнению с результатами, приведенными на рис. 4.6 и 4.7. Графики показывают, что значения поперечного перемещения подземного трубопровода больше чем значения продольного перемещения подземного трубопровода (см. рис. 4.6 и 4.7). Это связано с амплитудами

сейсмических волн в продольном и поперечном направлениях. В этом случае уже на графиках (рис. 4.7) на глаз можно заметить влияние узлов на динамический процесс в подземном трубопроводе.

На рис. 4.9–4.11 представлены изменения значений продольного, поперечного и вертикального перемещений вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени.

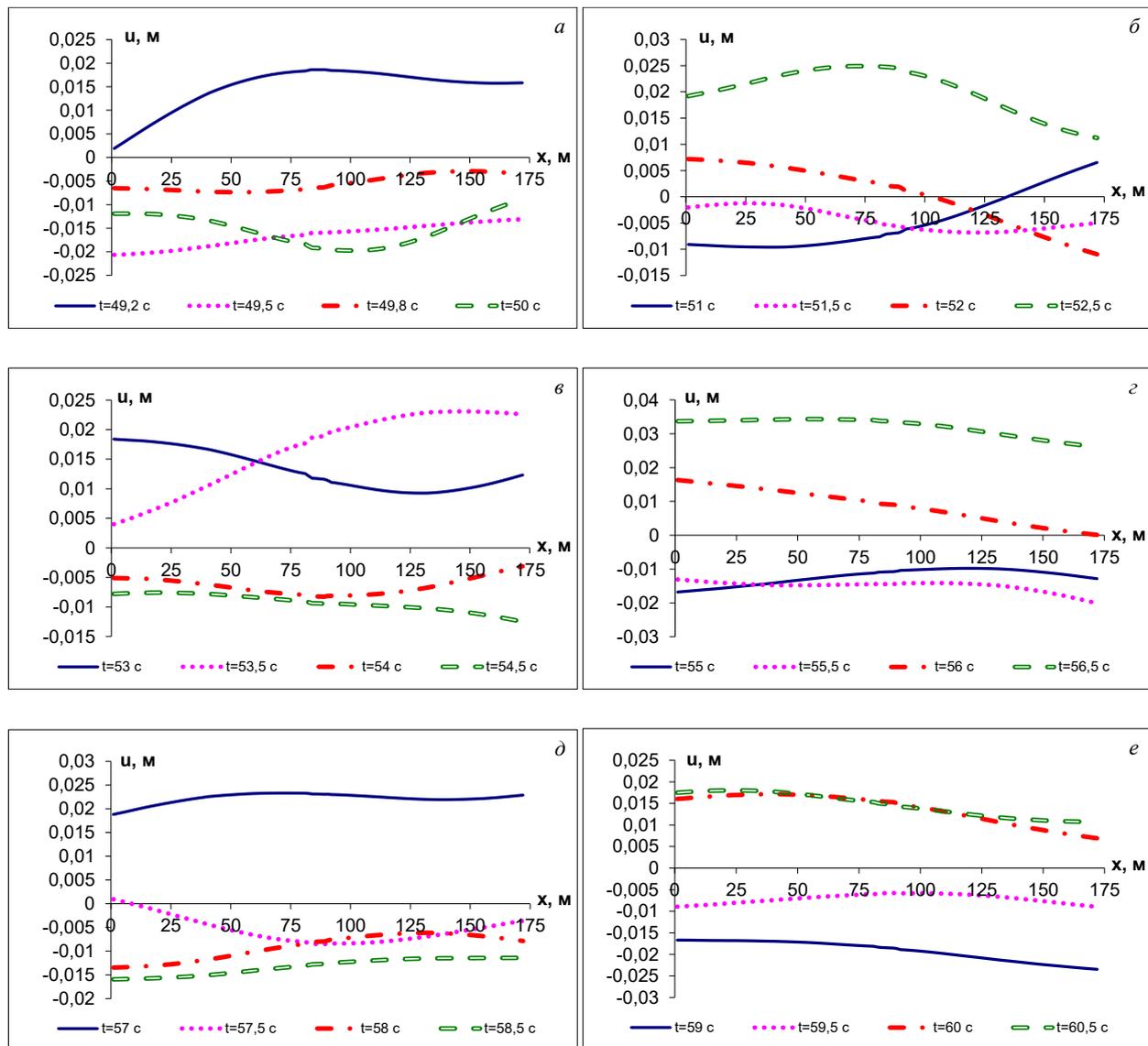


Рис. 4.9. Изменения значений продольного перемещения вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

На графиках видно, что при продольных перемещениях подземного трубопровода влияние узлов слабо заметно (рис. 4.9).

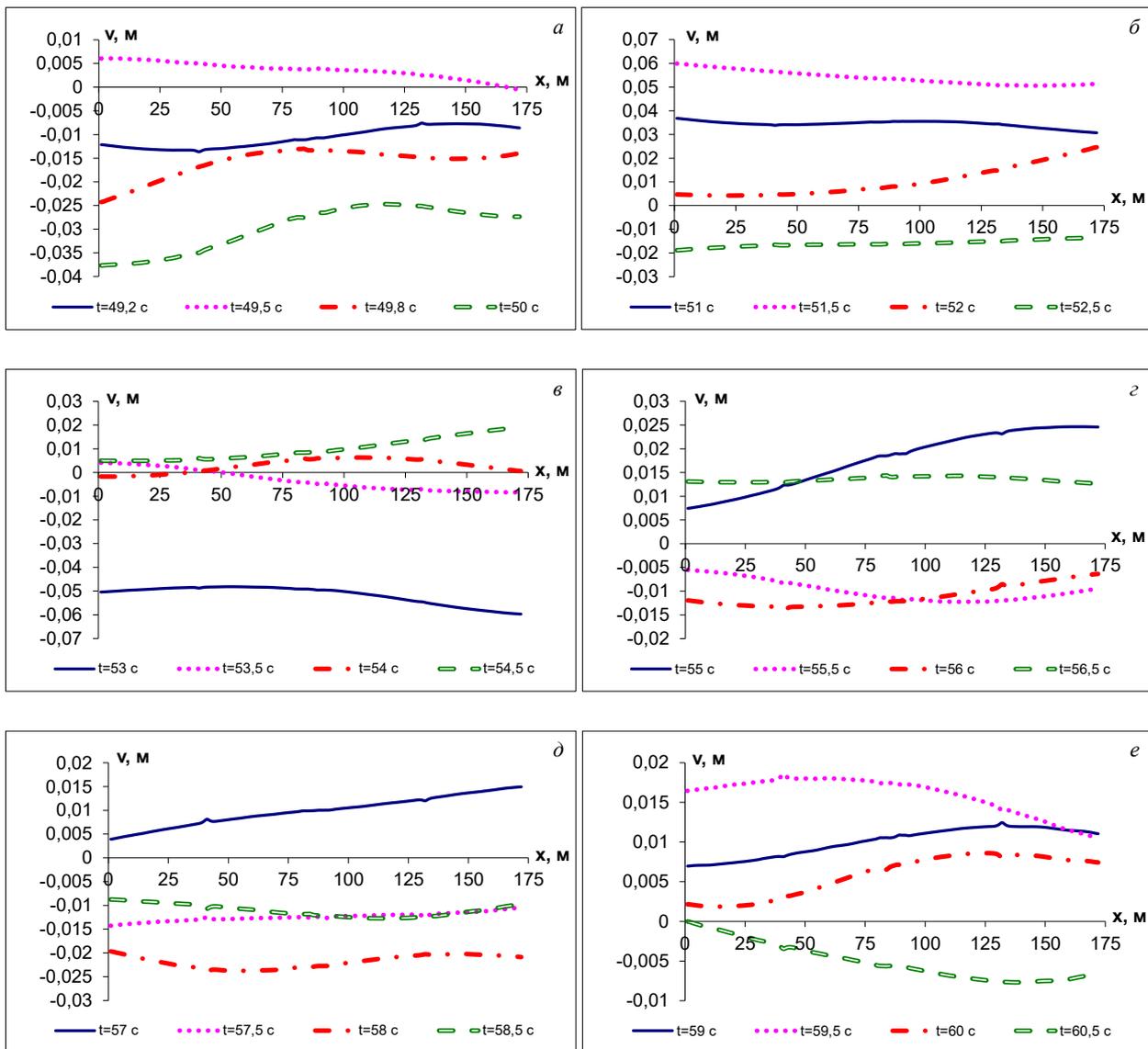


Рис. 4.10. Изменения значений поперечного перемещения вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

На графиках видны маленькие зубцы, которые увеличивают значения усилий. Отсюда следует вывод, что узловая масса играет важную роль в узлах ( $x=41$  и  $132$  м), а также в геометрически сложных участках ( $x=81 - 92$  м).

В сечениях ( $x=41$  и  $132$  м) значения поперечных и вертикальных перемещений сравнительно увеличивается (рис. 4.10 и 4.11, в, г, д, е), за счет большой массы узла. На рис. 4.11 представлен динамический процесс изменения вертикального перемещения вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени. Здесь также видны зубцы на перемещениях около колодцев.

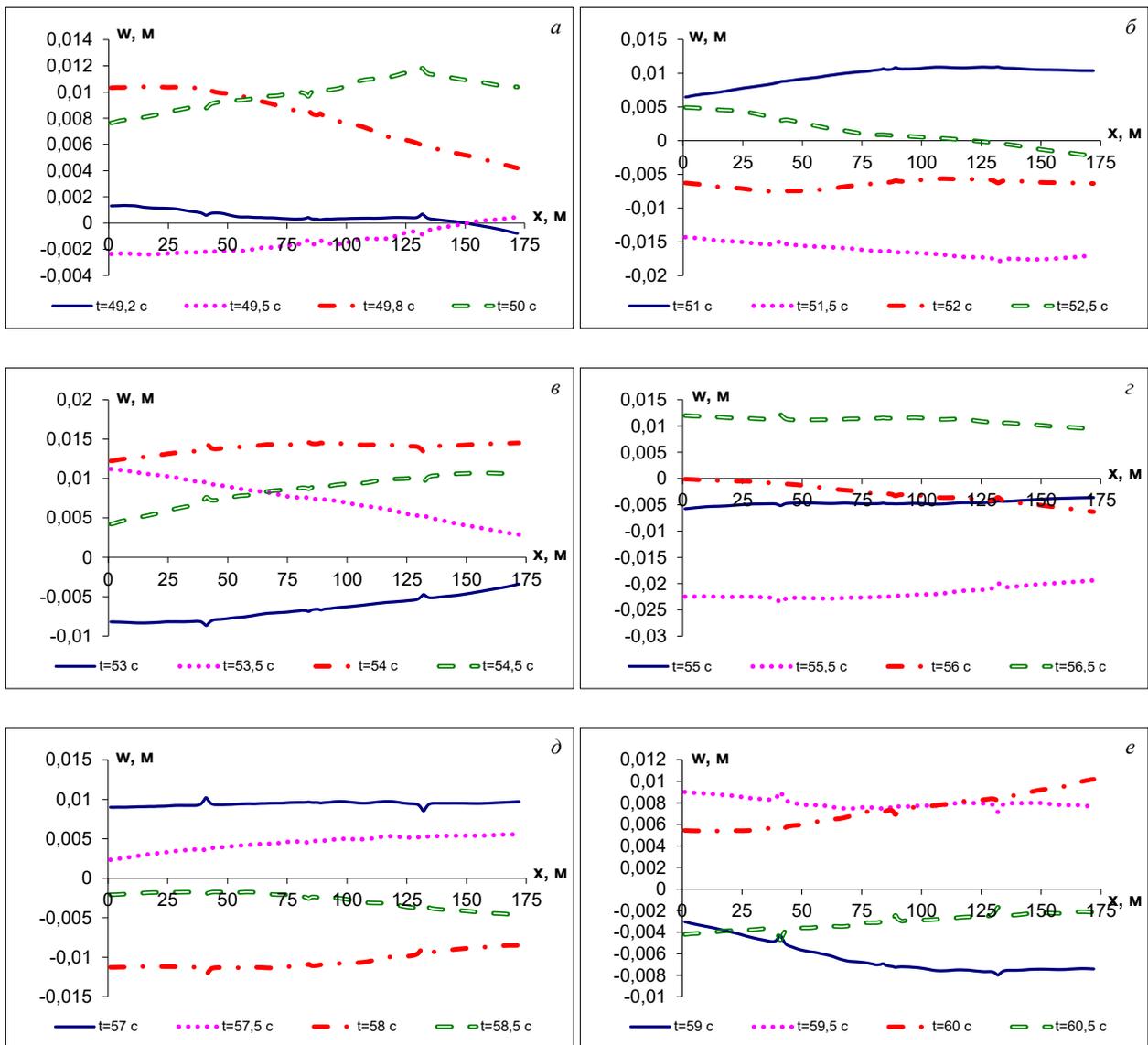


Рис. 4.11. Изменения значений вертикального перемещения вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

На рис. 4.12 представлены изменения значений сжимающего (растягивающего) напряжения вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени. Сжимающие (растягивающие) напряжения в прямолинейных участках подземного трубопровода от наличия узловой массы изменяются незначительно (рис. 4.12, в сечениях  $x=41$  и  $132$  м).

Наличие компенсаторов со сложной конфигурацией в подземных трубопроводах способствуют уменьшению продольных усилий подземного трубопровода около этого участка до расстояния 20 – 30 м.

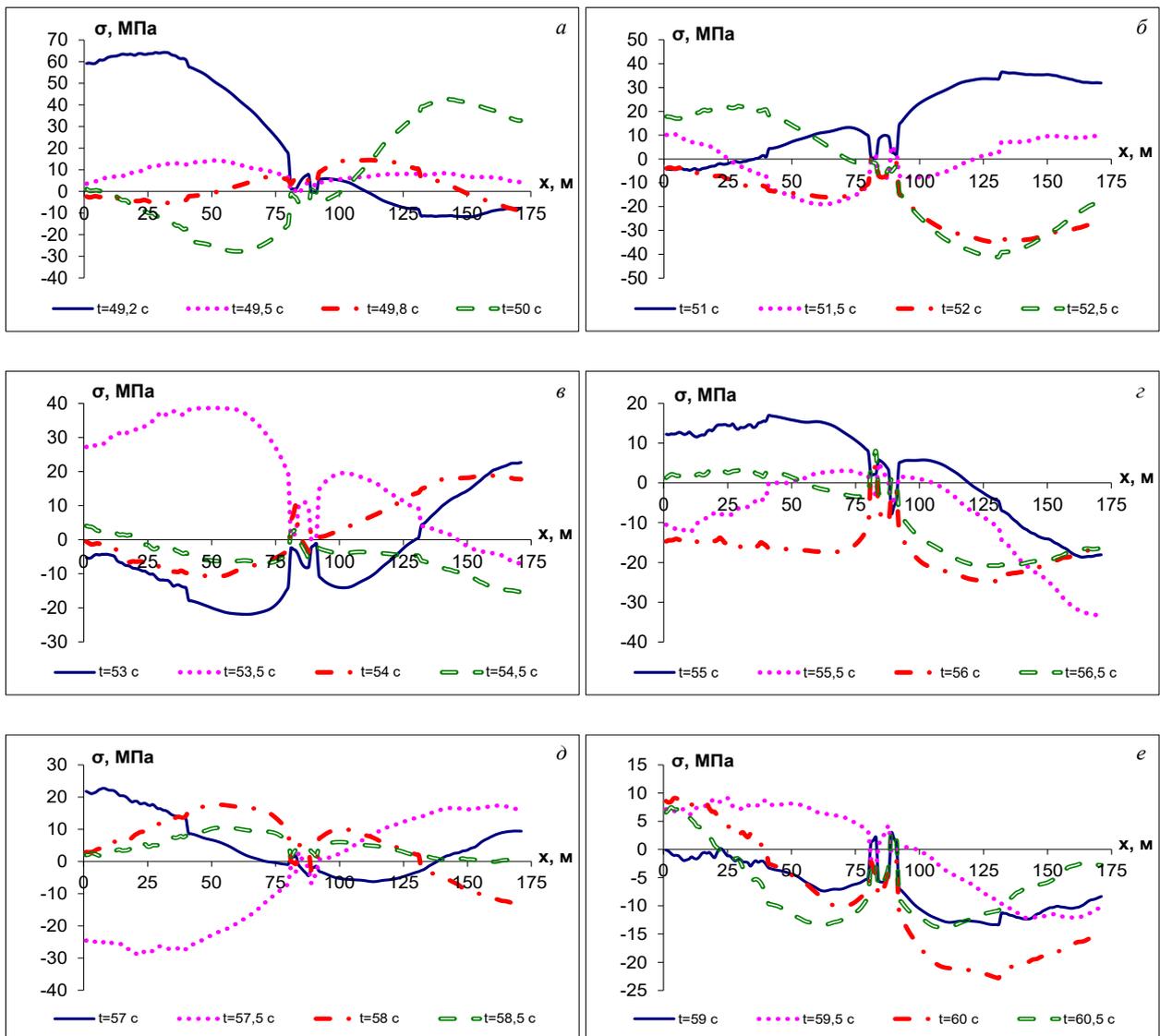


Рис. 4.12. Изменения значений сжимающего (растягивающего) напряжения вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

При сжимающих (растягивающих) напряжениях на прямолинейных участках подземного трубопровода влияние узла ( $x=41$  и  $132$  м) незначительное. В этом случае длина сейсмической волны позволяет набрать нужную инерцию узловой массе, взаимодействующей с грунтом.

На рис. 4.13 и 4.14 показаны изменения значений полных напряжений ( $\sigma_y^+$ ,  $\sigma_y^-$ ) вдоль оси (изгиб относительно оси  $Oy$ ) подземного трубопровода при фиксированных значениях времени.

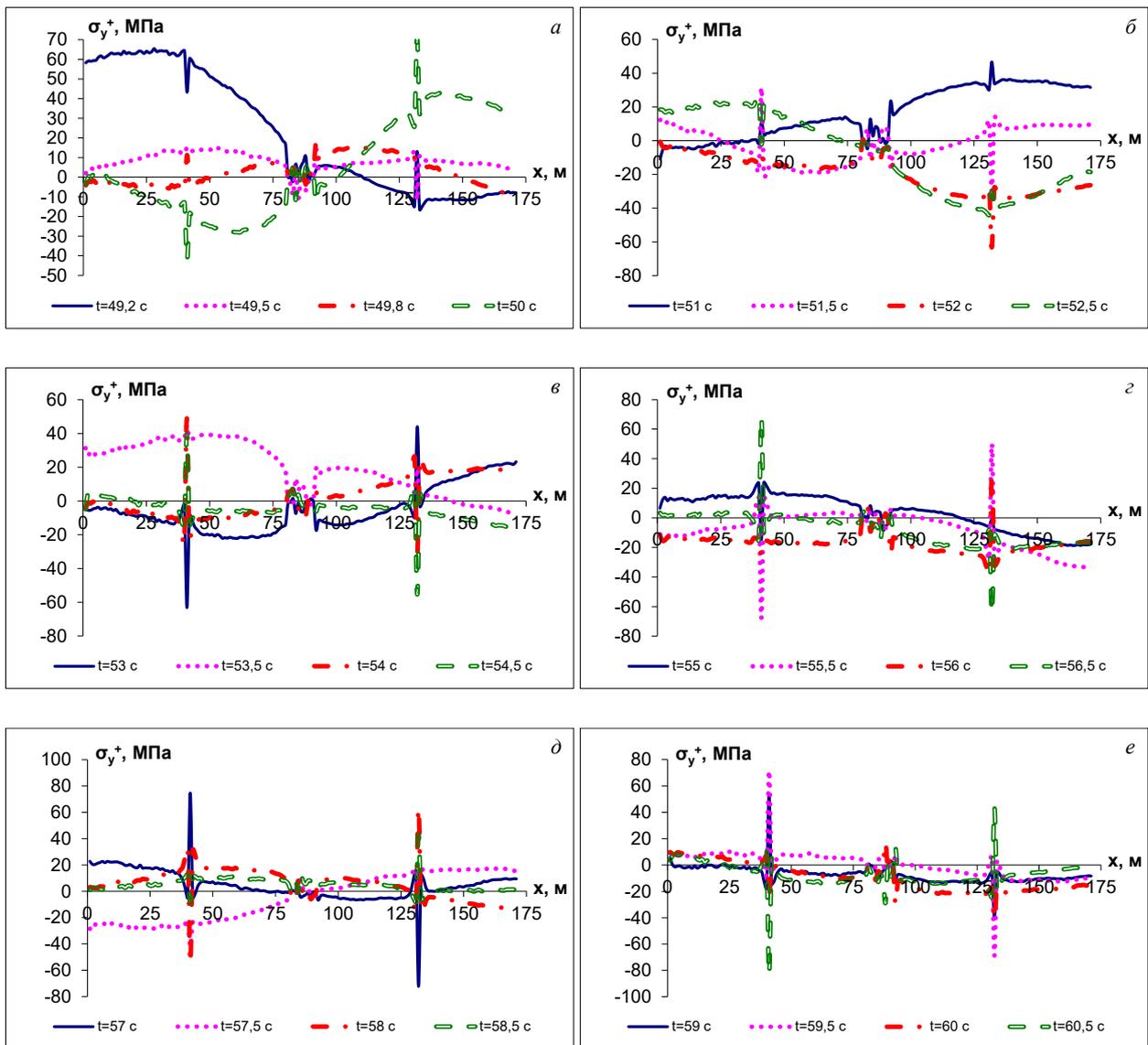


Рис. 4.13. Изменения значений полных напряжений ( $\sigma_y^+$ ) вдоль оси (изгиб относительно оси  $Oy$ ) подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

Здесь узлы на прямолинейных участках подземного трубопровода играют важную роль, так как около узлов подземного трубопровода полные напряжения увеличиваются (см. рис. 4.13 и 4.14, в  $x=41$  и  $132$  м). Это связано с изгибными деформациями, которые имеют большие значения возле узловой массы, так как узловая масса имеет достаточно большую величину и большую поверхность контакта с грунтом и, следовательно, характер движения этой точки изменяет напряжения.

В сечениях подземного трубопровода ( $x=81$  и  $92$  м) со сложной конфигурацией значения полных напряжений уменьшаются.

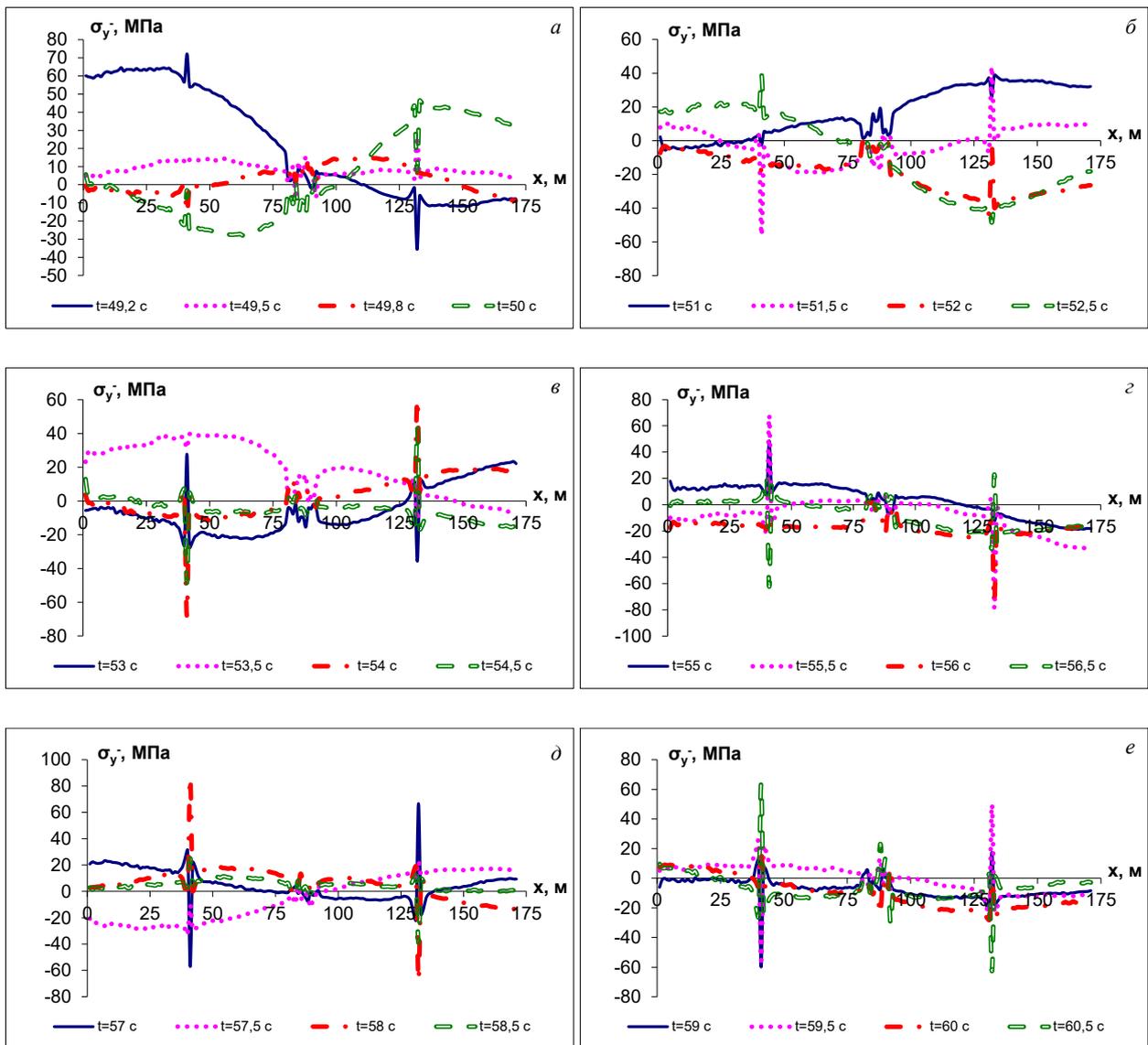


Рис. 4.14. Изменения значений полных напряжений ( $\sigma_y^-$ ) вдоль оси (изгиб относительно оси  $Oy$ ) подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

На рис. 4.15 и 4.16 приведены изменения значений полных напряжений ( $\sigma_z^+$ ,  $\sigma_z^-$ ) вдоль оси (изгиб относительно оси  $Oz$ ) подземного трубопровода при фиксированных значениях времени.

На прямолинейных участках около узлов подземного трубопровода полные напряжения увеличиваются (рис. 4.15 и 4.16, в  $x=41$  и  $132$  м). В сечениях подземного трубопровода ( $x=81$  и  $92$  м) со сложной конфигурацией значения полных напряжений уменьшаются за счет возможности особого деформирования на этом участке от совместного действия разных волн.

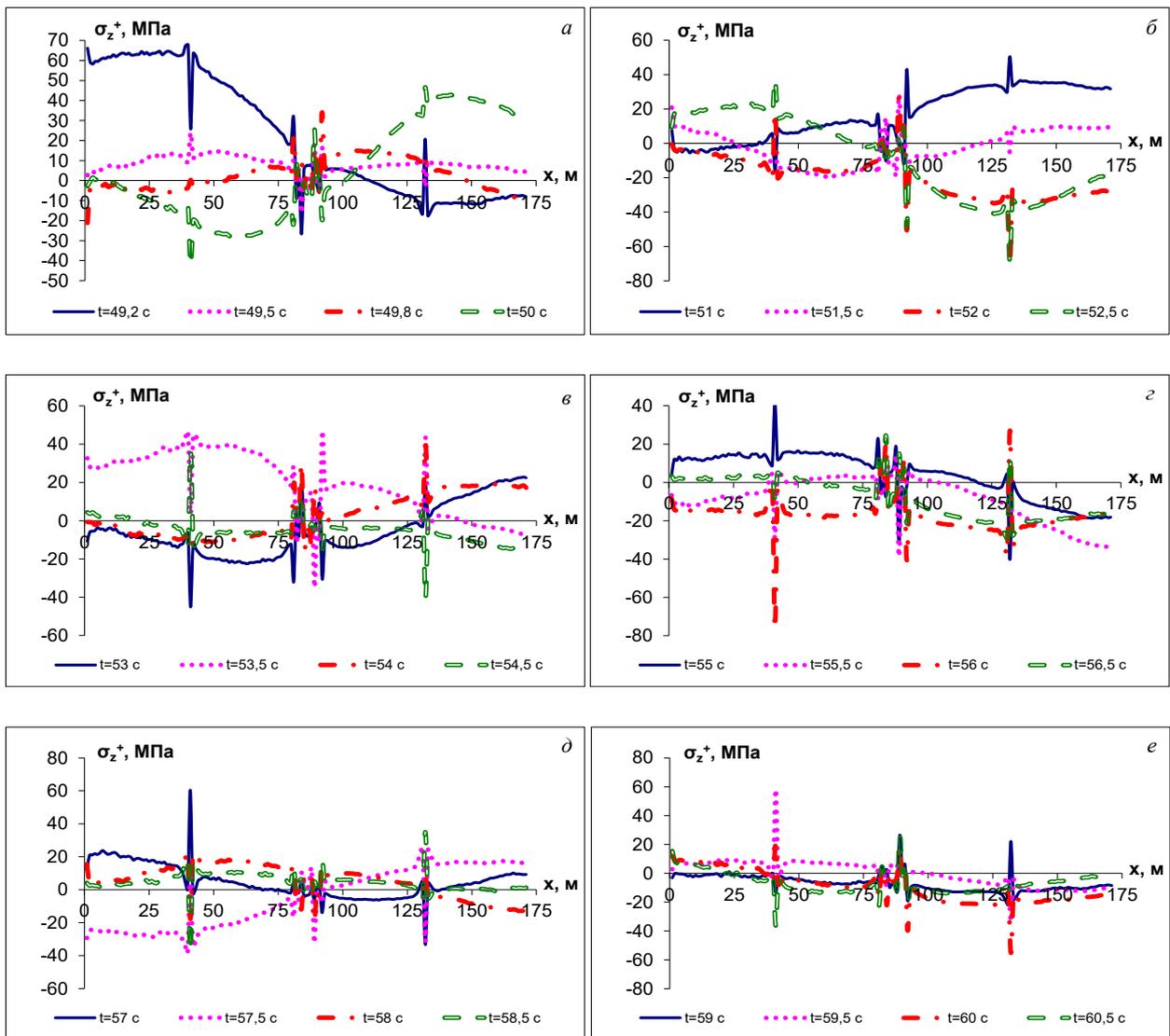


Рис. 4.15. Изменения значений полных напряжений ( $\sigma_z^+$ ) вдоль оси (изгиб относительно оси  $Oz$ ) подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

Из рисунков видно, что наличие больших полных напряжений около узловой массы связано с деформациями, которые имеют большие значения возле узловой массы, так как узловая масса имеет достаточно большую величину и большую поверхность контакта с грунтом и, следовательно, характер движения этой точки изменяет напряжения (рис. 4.13 и 4.16).

Наличие узловых масс большой величины приводит к увеличению полных напряжений на стыке к этой массе, даже при длинных сейсмических волнах. Используемые на практике колодцы имеют небольшую массу и при действии длинных сейсмических волн не приводят к значительному увеличению полных напряжений на стыке к колодцу.

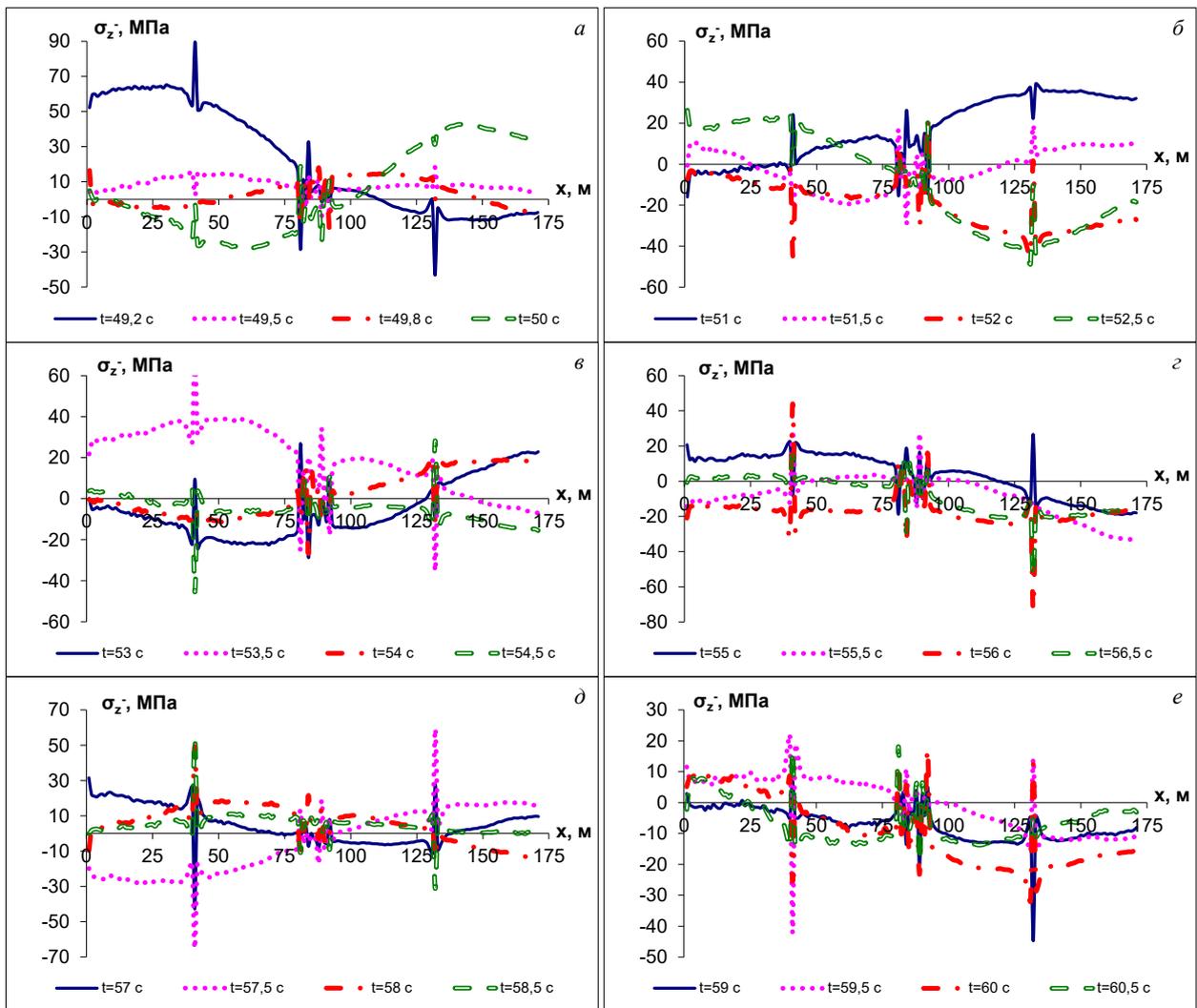
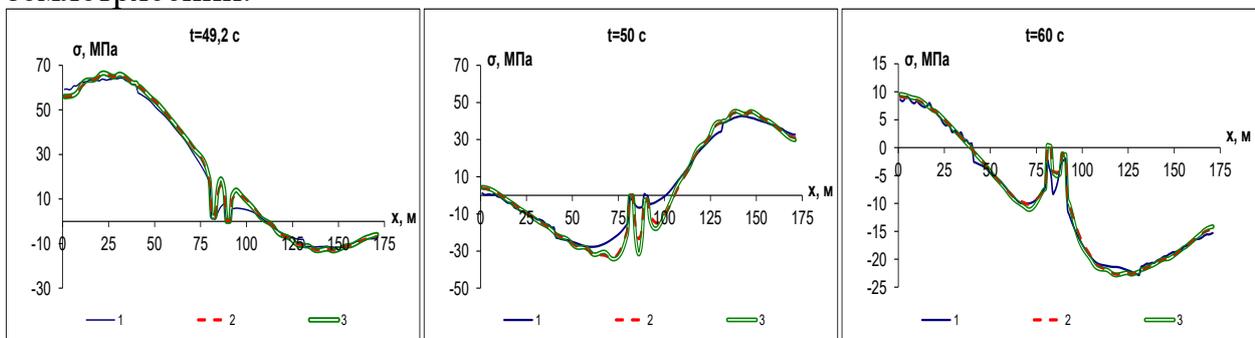


Рис. 4.16. Изменения значений полных напряжений ( $\sigma_z$ ) вдоль оси (изгиб относительно оси  $Oz$ ) подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

Подземные сооружения при землетрясении взаимодействуют с окружающей средой, силы взаимодействия которых обладают вязкоупругими свойствами. В этом смысле ниже проанализируем напряженно-деформированное состояние подземного трубопровода при вязкоупругих взаимодействиях с окружающим грунтом на основе реальных записей землетрясений.



1- $\mu=0$ , масса узла  $m_{уз}=2 \cdot 10^3$  кг; 2- $\mu=1300$  кНс/м<sup>3</sup>, масса узла  $m_{уз}=1,1 \cdot 10^2$  кг;  
3- $\mu=2600$  кНс/м<sup>3</sup>, масса узла  $m_{уз}=1,1 \cdot 10^2$  кг.

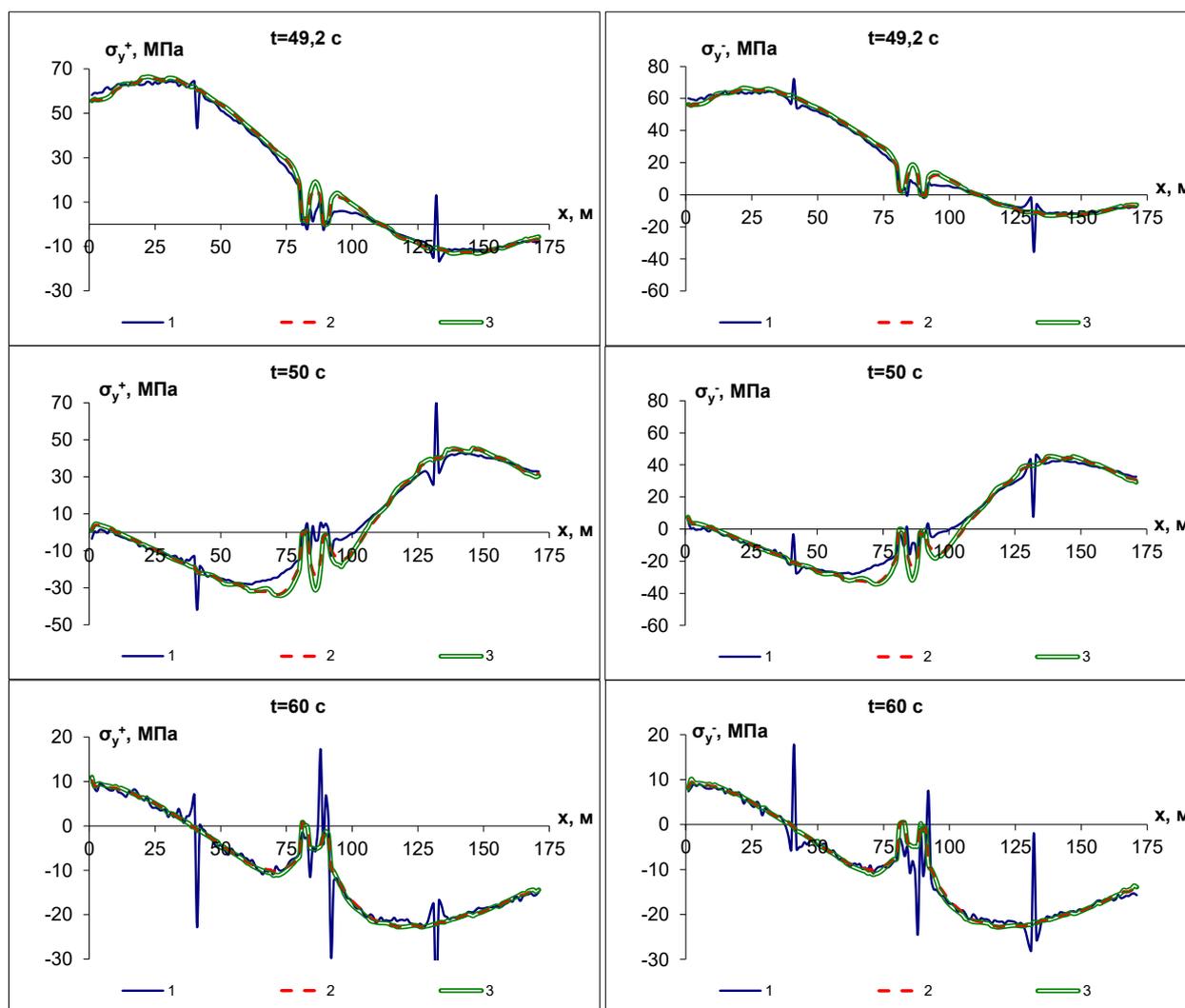
Рис. 4.17. Изменения значений сжимающего (растягивающего) напряжения вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

На рис. 4.17 приведены изменения значений сжимающего (растягивающего) напряжения вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени.

Из графиков видно, что на сжимающие (растягивающие) напряжения, т.е. на напряжение только от осевой силы, подземного трубопровода влияние узла мало заметно (рис. 4.17).

Величина вязкости взаимодействия изменяет картину. Чем больше значение коэффициента вязкости взаимодействия, тем больше обмен энергией между грунтом и трубопроводом. Поэтому напряжения при одинаковых значениях коэффициентов упругого взаимодействия и различных значениях коэффициентов вязкости взаимодействия отличаются. При этом увеличение значения коэффициента вязкости взаимодействия приводит к увеличению напряжения вблизи пиковых значений деформации в сейсмической волне.

На рис. 4.18 представлены изменения значений полных напряжений ( $\sigma_y^+$ ,  $\sigma_y^-$ ) вдоль оси трубопровода при фиксированных значениях времени.



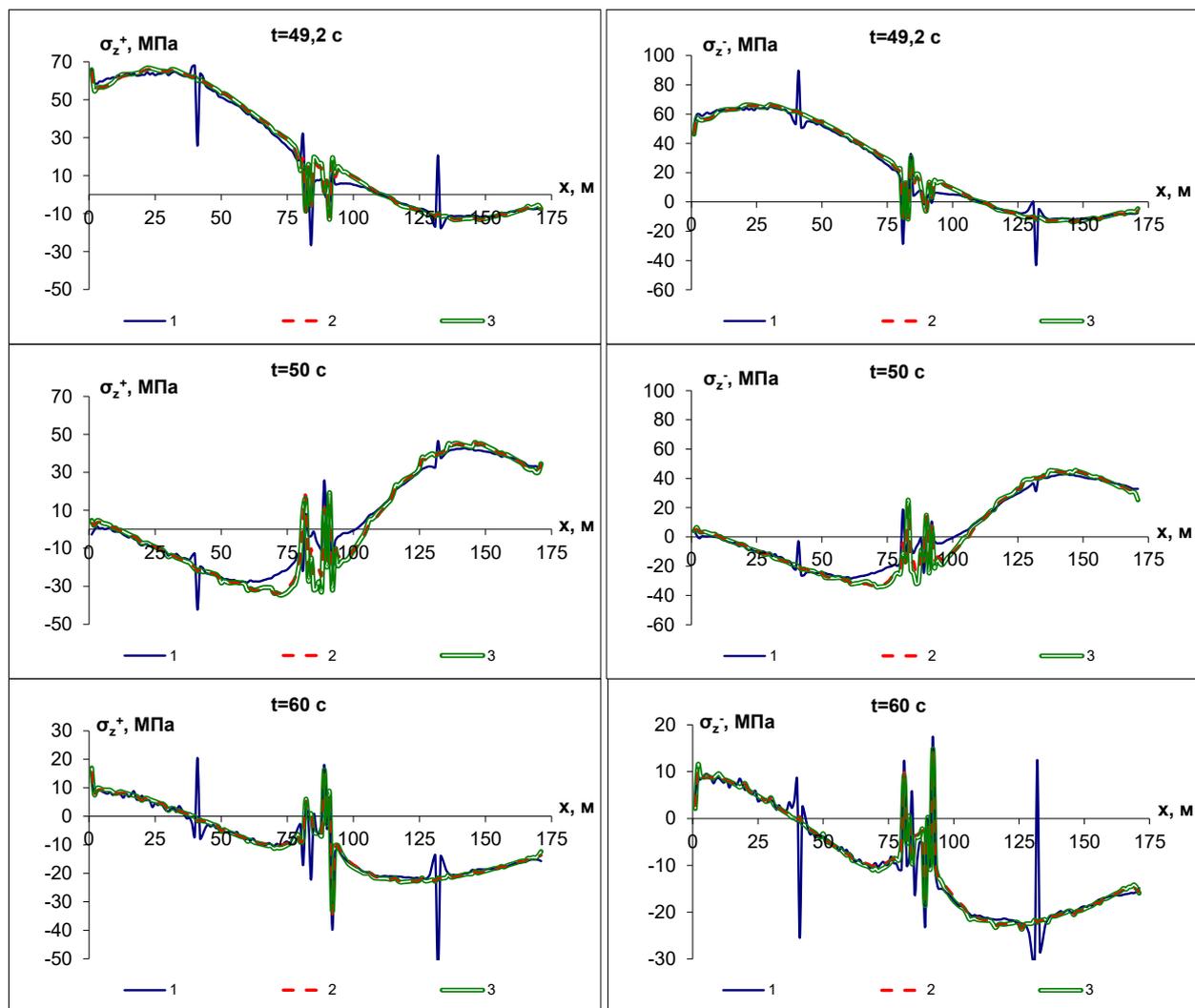
1— $\mu=0$ , масса узла  $m_{уз}=2 \cdot 10^3$  кг; 2— $\mu=1300$  кНс/м<sup>3</sup>, масса узла  $m_{уз}=1,1 \cdot 10^2$  кг;  
3— $\mu=2600$  кНс/м<sup>3</sup>, масса узла  $m_{уз}=1,1 \cdot 10^2$  кг.

Рис. 4.18. Изменения значений полных напряжений ( $\sigma_y^+$ ,  $\sigma_y^-$ ) вдоль оси трубопровода при фиксированных значениях времени

Из приведенных графиков видно, что с увеличением значения коэффициента вязкости соответственно увеличиваются значения расчетных величин полного напряжения в геометрически сложных участках ( $x=81, 84, 89$  и  $92$  м). Это связано с тем, что вязкость (как поршень в вязкой жидкости) как дополнительная возможность обмена энергией между грунтом и подземным трубопроводом при неизменном коэффициенте упругого взаимодействия.

Здесь узлы ( $1-\mu=0$ , масса узла (колодца)  $m_{uz}=2 \cdot 10^3$  кг) на прямолинейных участках подземного трубопровода играют важную роль, так как около узлов подземного трубопровода полные напряжения увеличиваются (рис. 4.18 и рис. 4.19, в сечениях  $x=41$  и  $132$  м).

Из графиков видно, что в сечениях подземного трубопровода (рис. 4.19,  $1-\mu=0$ , масса узла (колодца)  $m_{uz}=2 \cdot 10^3$  кг;  $x=81$  м и  $x=92$  м) со сложной конфигурацией значения полных напряжений уменьшаются за счет возможности особого деформирования на этом участке от совместного действия разных волн и возможности изгиба поперечно расположенных подземных трубопроводов.

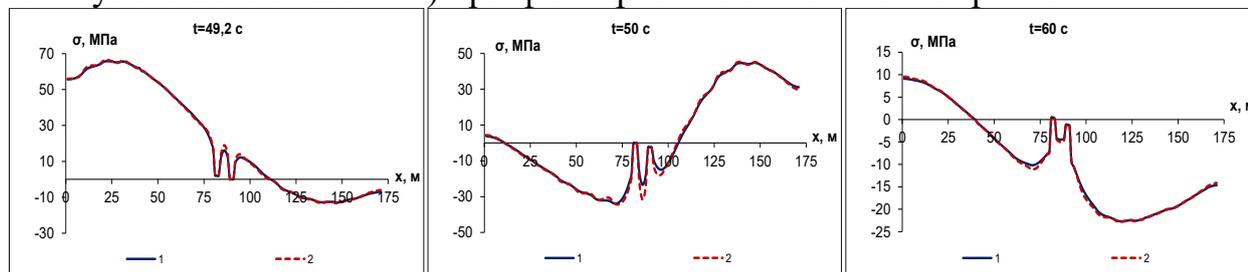


$1-\mu=0$ , масса узла  $m_{uz}=2 \cdot 10^3$  кг;  $2-\mu=1300$  кНс/м<sup>3</sup>, масса узла  $m_{uz}=1,1 \cdot 10^2$  кг;  
 $3-\mu=2600$  кНс/м<sup>3</sup>, масса узла  $m_{uz}=1,1 \cdot 10^2$  кг.

Рис. 4.19. Изменения значений полных напряжений ( $\sigma_z^+$ ,  $\sigma_z^-$ ) вдоль оси трубопровода при фиксированных значениях времени

Из графиков видно, что на пике акселерограмм полные напряжения имеют большие значения по отношению к другим моментам времени (в сечениях  $x=41, 81, 84, 89, 92$  и  $132$  м).

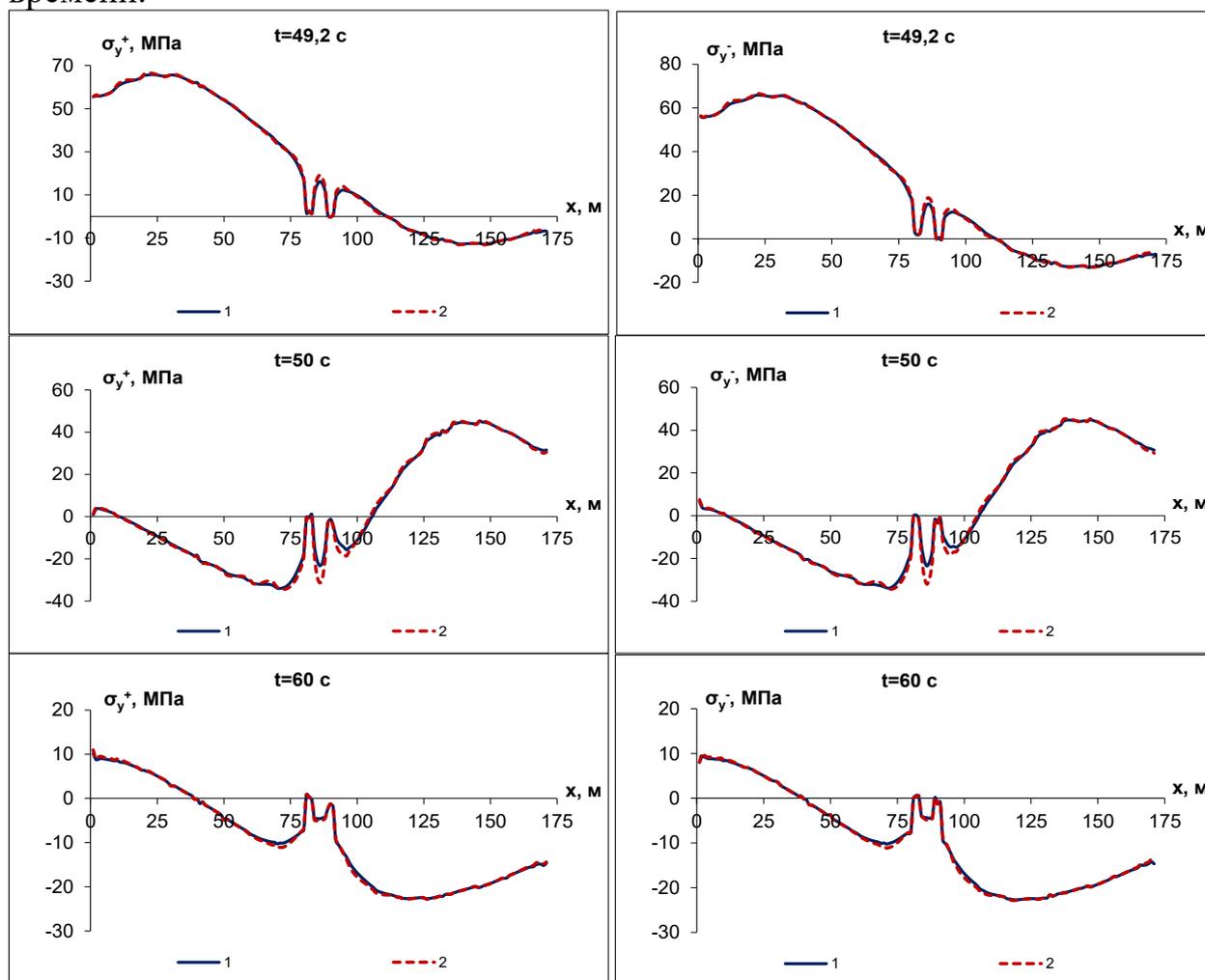
На рис. 4.20 представлены изменения значений сжимающего (растягивающего) напряжения вдоль оси подземного трубопровода (значения масс узлов не изменяются) при фиксированных значениях времени.



$$1-\mu=1300 \text{ кНс/м}^3, m_{uz}=1,1 \cdot 10^2 \text{ кг}; 2-\mu=2600 \text{ кНс/м}^3, m_{uz}=1,1 \cdot 10^2 \text{ кг}.$$

Рис. 4.20. Изменения значений сжимающего (растягивающего) напряжения вдоль оси подземного трубопровода при фиксированных значениях времени

На рис.4.21 и 4.22 представлены изменения значений полных напряжений ( $\sigma_y^+, \sigma_y^-, \sigma_y^+, \sigma_y^-$ ) вдоль оси трубопровода при фиксированных значениях времени.

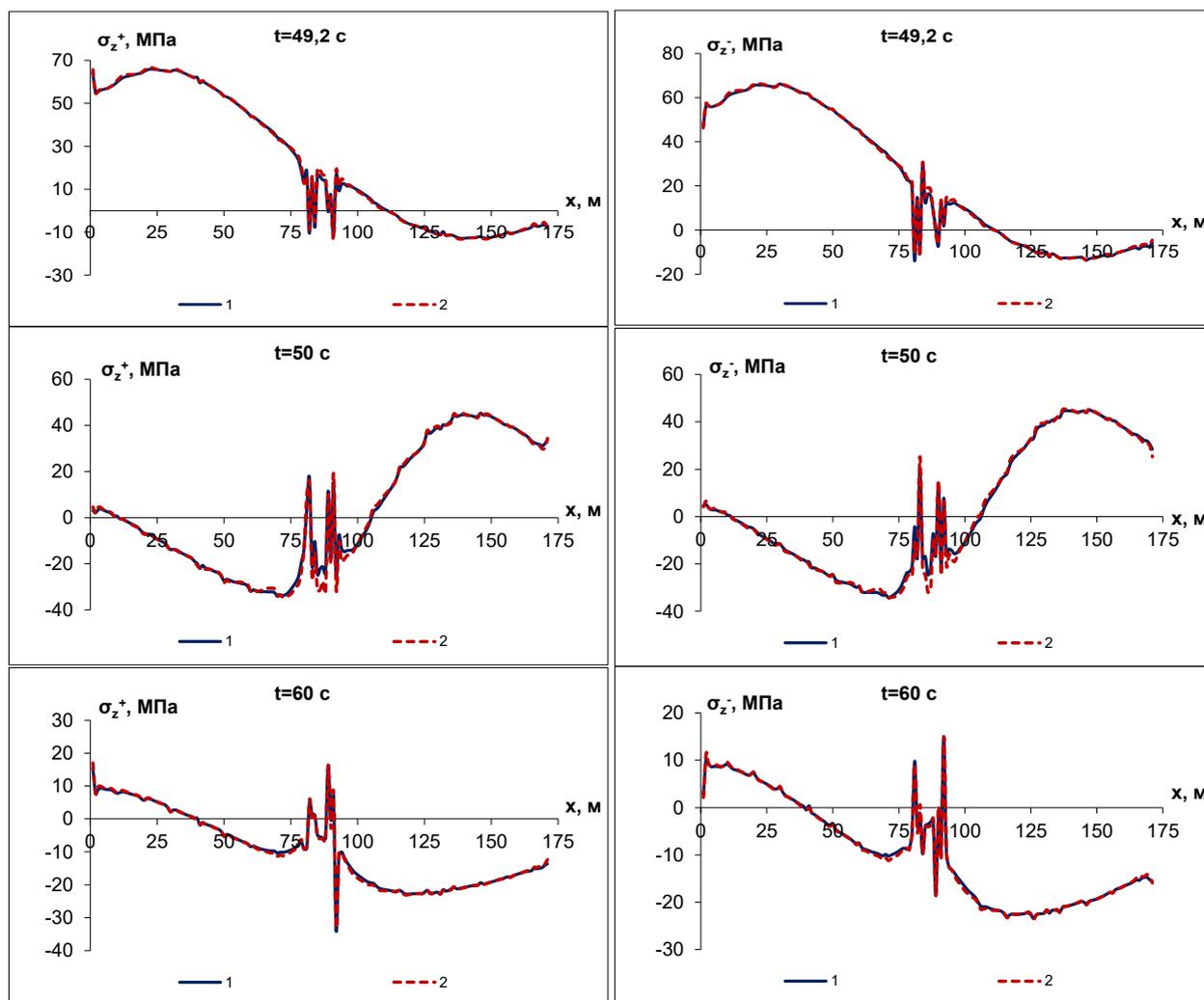


$$1-\mu=1300 \text{ кНс/м}^3, m_{uz}=1,1 \cdot 10^2 \text{ кг}; 2-\mu=2600 \text{ кНс/м}^3, m_{uz}=1,1 \cdot 10^2 \text{ кг}.$$

Рис. 4.21. Изменения значений полных напряжений ( $\sigma_y^+, \sigma_y^-$ ) вдоль оси трубопровода при фиксированных значениях времени

Анализ численных результатов показывает, что вязкоупругое взаимодействие оказывает существенное влияние на НДС подземных трубопроводов. В рассмотренных примерах разница между результатами упругих и вязкоупругих решений составляет 15 – 20% (рис. 4.21 и 4.22).

При проведении расчетов на сейсмостойкость подземных трубопроводов необходимо учитывать обмен (передача и унос) энергии через разницу скоростей частиц грунта и трубопровода.



1— $\mu=1300$  кНс/м<sup>3</sup>,  $m_{uz}=1,1 \cdot 10^2$  кг; 2— $\mu=2600$  кНс/м<sup>3</sup>,  $m_{uz}=1,1 \cdot 10^2$  кг.

Рис. 4.22. Изменения значений полных напряжений ( $\sigma_z^+$ ,  $\sigma_z^-$ ) вдоль оси трубопровода при фиксированных значениях времени

Учет вязкости грунта увеличивает обмен энергией между грунтом и подземным трубопроводом. Желательно в динамических задачах взаимодействия трубопровода с грунтом коэффициенты упругого и вязкого взаимодействия определять из динамических экспериментов.

При проектировании подземных трубопроводов для сейсмоопасных районов необходимо обеспечить условия для гашения колебаний. Существенного снижения сейсмических нагрузок на подземные трубопроводы можно добиться при использовании компенсаторов различных конструкций.

#### **4.4. Численное моделирование сейсродинамических процессов в протяженном подземном трубопроводе по реальным записям землетрясений**

Как известно, степень повреждения трубопроводов во время землетрясения зависит от целого ряда факторов. Это – интенсивность сейсмического воздействия и направление распространения сейсмических волн, геологические и гидрогеологические условия, глубина заложения трубопровода, эксплуатационно-технологические нагрузки и воздействия, конструкции трубопровода и стыков, характеристики материалов труб и опор, степень изношенности трубопровода [53 – 54].

Сейсмические волны имеют сложный характер, они нестационарны, отличаются спектром частот и максимальными амплитудами колебаний, а также длительностью воздействия (от нескольких секунд до нескольких минут). Амплитудно-частотный состав сейсмограммы, эпицентр землетрясения которой расположен очень близко к объекту, зависит от глубины очага, величины освобождаемой энергии, структуры земли от очага до ее поверхности и многих других факторов [53 – 54]. Пространственные задачи воздействия сейсмических волн рассмотрены в [17, 33, 51, 52, 55 – 57].

В данном параграфе исследуется напряженное состояние на примере прямолинейного подземных трубопроводов разной длины при воздействии на них набора сейсмограмм реальных землетрясений. Сравним с воздействием гармонических волн для случая совпадения направления распространения волны с осью трубопровода. Предполагаем, что распространяющаяся сейсмическая волна задана и отраженное от трубопровода возмущение не влияет на поле перемещений в грунтовой среде. Так как длина сейсмической волны намного больше диаметра трубопровода, последнее моделируется стержнем, а взаимодействие с окружающим его грунтом – по различным упрощенным моделям. Сейсмическое воздействие, распространяющееся в грунте, передается к трубопроводу через сочетание упругих и вязких контактных элементов. Граничными условиями на торцах трубопровода примем жесткое закрепление к грунту, т.е. движется вместе с грунтом.

Для решения данной задачи применяются метод конечных элементов и неявная конечно-разностная схема аппроксимации по времени.

В практических расчетах [18, 36] обычно используют в качестве сейсмического воздействия гармоническую функцию с соответствующей амплитудой и частотой. Для протяженных подземных сооружений требуется рассмотрение сейсмического воздействия в виде сейсмической волны [51]. Далее рассмотрим определение значения амплитуды и частоты волны перемещения в форме синусоиды на основе реальных записей землетрясения Газли от 15 мая 1976г. [33]. Во время этого землетрясения было разрушено сварное соединение прямолинейного участка стальной водопроводной трубы диаметром 1.02м и толщиной 0.008м. В расчетах начало координат разместим на левом торце трубопровода и направим по оси трубопровода.

Так как предел упругости стали равен 180 МПа, то вычисленные для линейной задачи численным методом значения напряжения на основе инструментальной записи позволяют сделать заключение о возможности разрушения трубопровода в результате данного землетрясения, как и было в реальности.

На рис. 4.23 приведен метод определения доминантного периода сейсмической волны выбором максимального значения ускорения грунта и установлением значения времени его достижения, а затем из графика перемещения измеряем длину отрезка времени по одному полному колебанию значения перемещения около установленного значения времени. Следует отметить, что амплитуда гармонической волны перемещения определяется максимальным значением ускорения грунта по реальной записи землетрясения, а не максимальным значением перемещения грунта.

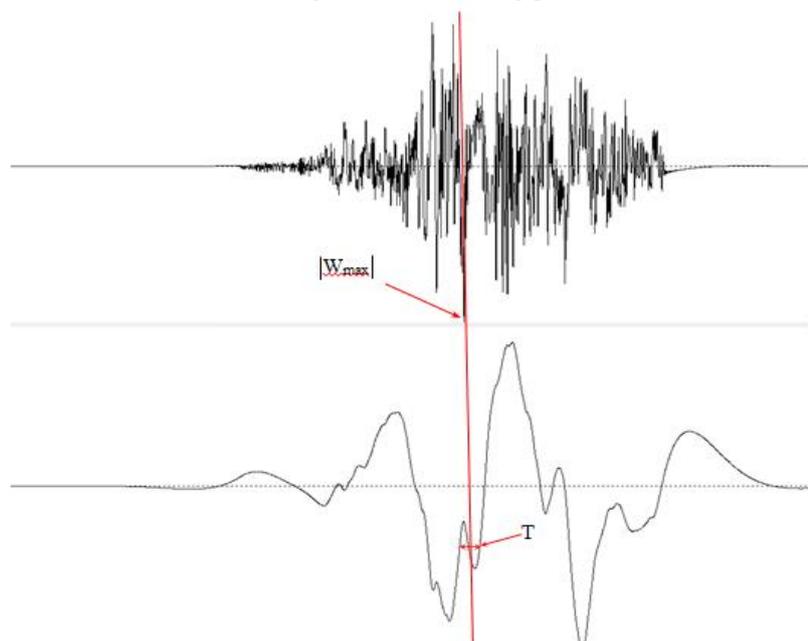


Рис. 4.23. Определение доминантного периода сейсмической волны

В таблице приведены значения максимальных напряжений на торцах и середине трубопровода при действии разных землетрясений. Здесь сравнение результатов воздействия Газлийского, Южно-Исландского и Бухарестского землетрясений на трубопроводы различной длины показывает, что интенсивность землетрясения определяется для подземного трубопровода не только максимальным значением ускорения грунта, но и значением доминантного периода (доминантной частоты) сейсмической волны. Это можно увидеть, сравнивая результаты расчетов по Манжилскому и Измитскому землетрясениям. Амплитудно-частотные характеристики этих землетрясений имеются в базе данных записей землетрясений [58].

Таблица 4.1 – Максимальные напряжения в трубопроводе при действии разных землетрясений

Территория и балльность (сейсмическая шкала интенсивности MSK-64)	Доминантный период (по реальной записи) T, (с)	Максимальное значение ускорения грунта w, м/с <sup>2</sup>	Вычисленное максимальное напряжение прямым методом на основе реальных записей $\sigma_{max}$ , МПа								
			длина трубопровода x=50 м			длина трубопровода x=100 м			длина трубопровода x=400 м		
			x=0.5 м	x=24.5 м	x=49.5 м	x=0.5 м	x=49.5 м	x=99.5 м	x=0.5 м	x=199.5 м	x=399.5 м
Газли (Узбекистан) 9+ баллов	0.63	6.67	206.1	202.1	204	205.1	201.2	204	205.1	200.1	204
Бухарест (Румыния) 8 баллов	2.3	1.939	273	273	275	273	271	275	273	271	275
Манжил (Иран) 8 баллов	0.57	1.26	50.7	50.4	50.4	50,5	49.4	50	50.5	49.1	50
Измит (Турция) 7 балл	1.57	0.836	61.8	61.5	61.6	61.7	60.7	61.3	61.7	60.5	61.3
Южная Исландия 9 баллов	0.27	7.72	153	152	153	152	147	152	152	145	152

На рис. 4.24 – 4.28 приведены сравнения напряжений у левых торцов трубопроводов длиной 50 и 100м при действии гармонического воздействия и реального землетрясения.

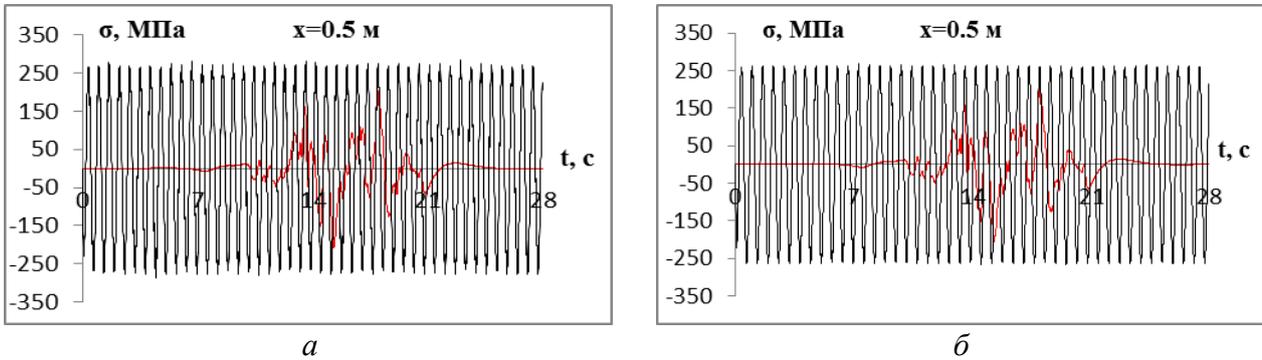


Рис. 4.24. Сравнение напряжений при действии гармонической волны и волны по реальной записи Газлийского землетрясения возле левого торца трубопровода:

a – l= 50 м; б – l=100 м

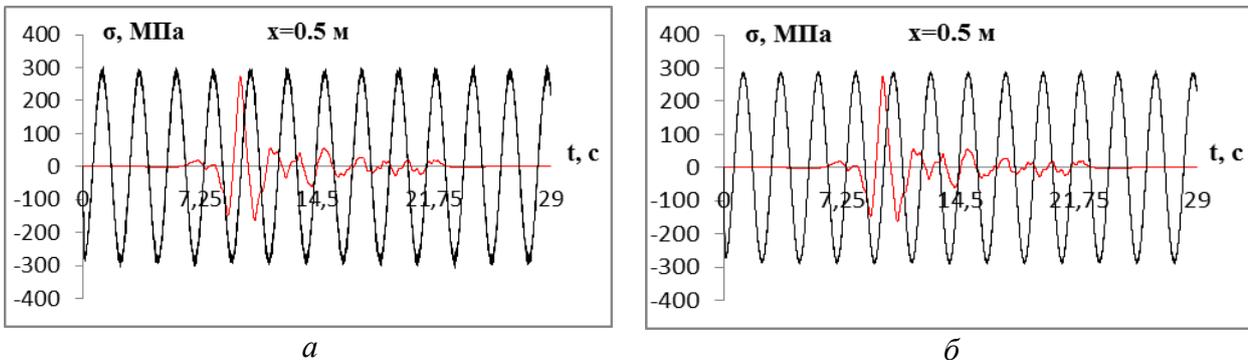


Рис. 4.25. Сравнение напряжений при действии гармонической волны и волны по реальной записи Бухарестского землетрясения возле левого торца трубопровода:

a – l= 50 м; б – l=100 м

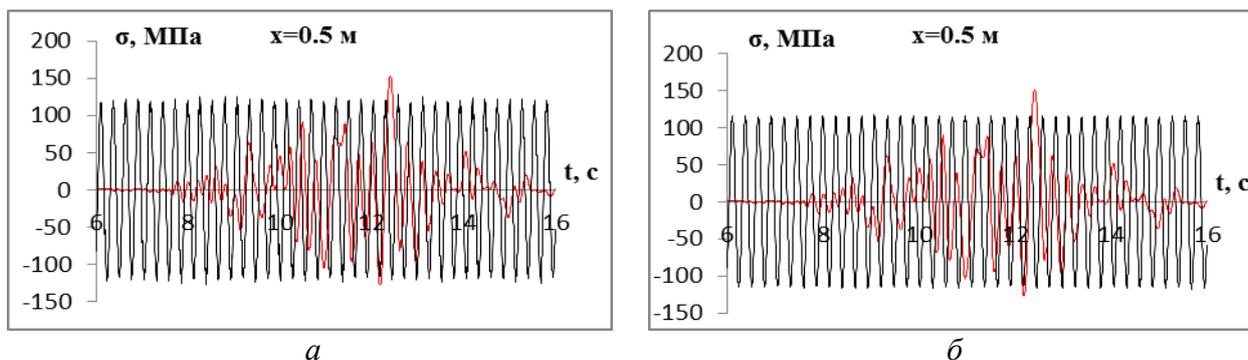


Рис. 4.26. Сравнение напряжений при действии гармонической волны и волны по реальной записи Исландского землетрясения возле левого торца трубопровода:  
 $a - l = 50$  м;  $b - l = 100$  м

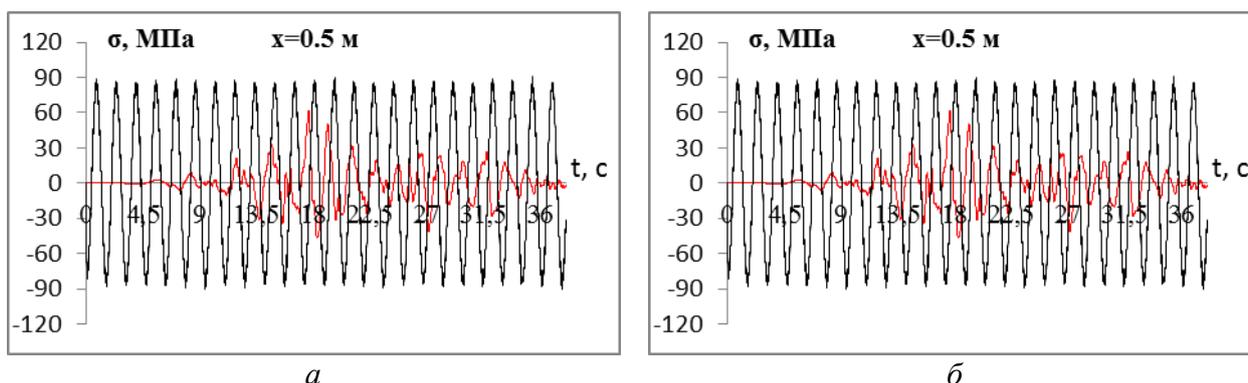


Рис. 4.27. Сравнение напряжений при действии гармонической волны и волны по реальной записи Измитского землетрясения возле левого торца трубопровода:  
 $a - l = 50$  м;  $b - l = 100$  м

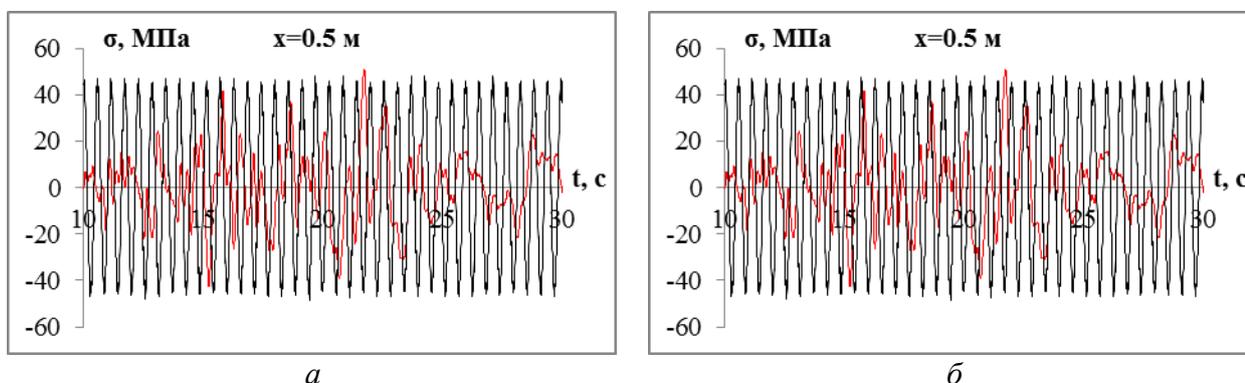


Рис. 4.28. Сравнение напряжений при действии гармонической волны и волны по реальной записи Манжилского землетрясения возле левого торца трубопровода: :  
 $a - l = 50$  м;  $b - l = 100$  м

Проведенные вычисления показали, что выбор амплитуды и частоты гармонической волны для замены в расчетах реальной записи землетрясения затруднителен и часто может привести к грубым ошибкам, поэтому необходимо проводить расчеты по набору реальных записей землетрясений. Интенсивность землетрясения определяется для подземного трубопровода не только максимальным значением ускорения грунта, но и значением доминантной частоты сейсмической волны. При расчетах на действие реальных записей землетрясений необходимо учитывать грунтовые и другие условия, в том числе скорость распространения волны в грунте.

#### 4.5. Волновые процессы в протяженном подземном трубопроводе при взаимодействии с грунтом по модели «идеального упругопластического тела»

Исследование поведения подземных трубопроводов как системы жизнеобеспечения при землетрясениях является важной задачей. Обзор работ по этому направлению приведен в работах [17, 18, 59]. Экспериментальные исследования [17, 18, 60] позволили обосновать упрощенные модели вязкоупругого и упругопластического взаимодействия грунта и трубопровода. Здесь, при определенных условиях, основную роль играет свойство грунта, это подтверждается проведенными экспериментами по определению модуля сдвига мелкозернистого грунта при различных скоростях нагружения [61].

В линейных задачах сейсродинамики подземных сооружений в систему уравнений движения входят члены без производных от перемещений и углов поворотов [1, 17]. Построение конечно-разностных схем для таких уравнений без паразитных осцилляций приведено в [62 – 64]. Пространственные задачи для сложных систем подземных трубопроводов рассмотрены в [46, 50 – 52].

В нелинейных задачах сейсродинамики подземных сооружений используют различные модели взаимодействия трубопровода с грунтом. В [65] рассмотрена задача воздействия заданной волны, распространяющейся в грунте, на бесконечный прямолинейный трубопровод при сухом трении. Построено решение для стационарной задачи и описано поведение её решения. Нестационарные задачи для стержня с внешним сухим трением решены методом характеристик в работах [60, 66, 67]. В [68] построена конечно-разностная аппроксимация уравнения движения стержня с внешним сухим трением и построен алгоритм решения, позже этот алгоритм использован в [69 – 71]. Стационарная задача сейсродинамики протяженного прямолинейного трубопровода с нелинейными моделями взаимодействия с использованием функции пластичности рассмотрена в [72].

В настоящей работе задача сейсродинамики протяженного прямолинейного подземного трубопровода с моделью взаимодействия «идеального упругопластического тела» решается конечно-разностным методом с использованием логического алгоритма определения переходов в предельное состояние и обратно. Здесь для удобства анализа динамики процесса влияние динамического давления от распространяющегося в грунте волны на форму зависимости между касательным напряжением и относительным перемещением не учитывается.

Пусть по грунту распространяется со скоростью  $c_g$  плоская продольная волна  $v_g(t-x/c_g)$ , нормаль, к фронту которой, параллельна к оси трубопровода длины  $l$ . Начало координатной оси  $Ox$  расположим на левом торце трубопровода. Предположим, что движение грунта задано и не искажается из-за присутствия трубопровода, который моделируется упругим стержнем. При этом взаимодействие трубопровода с окружающим его грунтом учитывается по модели «идеального упругопластического тела», константы которой

определены экспериментальным путем. Уравнения динамики протяженного подземного трубопровода представим в форме

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\pi D}{F\rho} \tau, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\tau = \left\{ \begin{array}{l} \tau_s + k_x (u_g - u - U_s), \quad \text{при } |\tau| < \tau_p; \\ \text{sign}(v_g - v) \cdot \tau_p, \quad \text{при достижении предельного значения;} \end{array} \right\} \quad (4.5.1)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0,$$

а также граничными условиями, свободными от напряжения.

Здесь  $c = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения волны в трубопроводе;  $E, \rho$  – модуль упругости и плотность материала трубопровода;  $\varepsilon, v, u$  – деформация, скорость и перемещение частиц по оси трубопровода;  $v_g, u_g$  – скорость и перемещение частиц грунта по оси трубопровода;  $D, F$  – диаметр и площадь поперечного сечения трубопровода;  $k_x$  – коэффициент упругого взаимодействия поверхности трубопровода с грунтом;  $\tau_p$  – абсолютное значение предельного касательного напряжения;  $\tau_s, U_s$  – значение предельного бокового касательного напряжения и разность перемещений соответствующих точек грунта и трубопровода в момент  $s$ -того перехода из предельного состояния в состояние упругого взаимодействия ( $\tau_0=0; U_0=0$ ). Необходимо обратить внимание на два обстоятельства: скорости распространения волны в грунте и трубопроводе различаются в несколько раз, и взаимодействие трубопровода с грунтом описывается кусочно-линейной моделью.

Разобьем трубопровод длиной  $l$  на отрезки размером  $\Delta x$  на  $m$  частей  $l=m \cdot \Delta x$ . По переменной  $t$  определим шаг по времени  $\Delta t = \Delta x/c$ , являющийся предельным условием устойчивости Куранта для явной конечно-разностной схемы. Введем обозначение:  $k = \pi D/(F\rho)$ . Дискретные значения деформации возьмем на концах отрезков  $\Delta x$ , а скорости частиц в середине отрезков  $\Delta x$ . По времени дискретные значения деформации возьмем в середине шага, а скорости частиц на каждом шаге по времени. Представим уравнения (4.5.1) их конечно-разностной аппроксимацией первого порядка точности по  $\Delta x$  и  $\Delta t$

$$\frac{v_{i+1/2}^{j+1} - v_{i+1/2}^j}{\Delta t} = c^2 \frac{\varepsilon_{i+1}^{j+1/2} - \varepsilon_i^{j+1/2}}{\Delta x} + k \frac{\tau_{i+1/2}^{j+1} + \tau_{i+1/2}^j}{2};$$

$$\tau_{i+1/2}^{j+1} = \left\{ \begin{array}{l} \tau_s + k_x (u_{g\ i+1/2}^{j+1} - u_{i+1/2}^j - \Delta t v_{i+1/2}^{j+1} - U_s), \quad \text{при } |\tau_{i+1/2}^{j+1}| < \tau_p; \\ \text{sign}(v_{g\ i+1/2}^{j+1} - v_{i+1/2}^{j+1}) \cdot \tau_p, \quad \text{при достижении предельного значения;} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1}^{j+1/2} - \varepsilon_i^{j-1/2}}{\Delta t} = \frac{v_{i+1/2}^j - v_{i-1/2}^j}{\Delta x}; \quad (4.5.2)$$

$$u_{i+1/2}^{j+1} = u_{i+1/2}^j + \Delta t (v_{i+1/2}^{j+1} + v_{i+1/2}^j) / 2;$$

$$u_{g\ i+1/2}^{j+1} = u_{g\ i+1/2}^j + \Delta t (v_{g\ i+1/2}^{j+1} + v_{g\ i+1/2}^j) / 2,$$

где нижний индекс соответствует координате, а верхний – времени. Достаточным условием устойчивости разностной схемы (4.5.2) является следующее условие:  $k \cdot k_x \cdot (\Delta t)^2 \ll 1$ .

Из уравнений (4.5.2) определяем последовательно:  $\varepsilon_{i+1}^{j+1/2}, v_{i+1/2}^{j+1}, u_{i+1/2}^{j+1}, u_{g\ i+1/2}^{j+1}$ .

На каждом шаге по времени проверяем значение  $\tau$  во всех точках. В тех точках, где значение  $|\tau| \geq \tau_p$ , заново вычисляем скорости частиц с осредненным значением  $\tau$  с предыдущего шага по времени и  $sign(v_{g\ i+1/2}^{j+1} - v_{i+1/2}^{j+1}) \cdot \tau_p$ . Далее производим итерационное уточнение решения методом Ньютона-Рафсона. Сохраним информацию о переходе в этой точке в предельное состояние с направлением силы трения. На последующих шагах по времени в этих точках последний член первого уравнения системы (4.5.2) необходимо поменять на предельное значение силы трения. Далее, производится проверка на переход в состояние упругой разгрузки по изменению знака относительной скорости  $v_g - v$ . В момент начала разгрузки запоминаются значения  $\tau_s, U_s$ , первый шаг разгрузки сопровождается вычислением скорости с осредненным значением  $\tau$  на этом шаге по времени и  $sign(v_{g\ i+1/2}^{j+1} - v_{i+1/2}^{j+1}) \cdot \tau_p$  с учетом значений  $\tau_s, U_s$ . Здесь так же производим итерационное уточнение решения. На последующих шагах по времени вычисления производятся в соответствии с состоянием процесса взаимодействия в каждой точке. Следует отметить, что итерационное уточнение решения не вносит существенного изменения решения, в конкретных расчетах количество итерации было равно единице, а итерационное приращение имеет значение порядка  $10^{-5} - 10^{-6} \text{ м/с}$ .

Вычисления производились при следующих исходных данных:  $l=1000 \text{ м}$ ;  $D=0.61 \text{ м}$ ;  $F=0.019 \text{ м}^2$ ;  $c_g=500 \text{ м/с}$ ;  $c=5000 \text{ м/с}$ ;  $\rho=7800 \text{ кг/м}^3$ ;  $k_x=10^7 \text{ Н/м}^3$ ;  $\tau_p=10 \text{ кПа}$ ;  $\Delta t=0.0001 \text{ с}$ .

Проведем расчет действия ступенчатой волны амплитудой  $v_{gm}=0.19 \text{ м/с}$ . На рис. 4.29 представлены безразмерные скорости частиц грунта и трубопровода в различные моменты времени, под осью абсциссы указаны номера точек дискретизации по длине трубопровода. Впереди фронта волны в грунте по трубопроводу распространяется возмущение, в котором по мере дальнейшего распространения амплитуда уменьшается. Если левый торец трубопровода перемещался бы одинаково с грунтом, тогда фронт волны в трубопроводе был бы разрывным и распространялся бы без затухания [1]. На рис. 4.29, б, в, г видно, что процесс распространения волны в трубопроводе почти выходит на стационарный режим [66], здесь заметны влияние отраженных от торцов трубопровода волн небольшой амплитуды. На рис. 4.30 представлены нормированные графики деформации грунта  $\varepsilon_{gn} = \varepsilon_g / \varepsilon_{gm}$  (здесь  $\varepsilon_{gm}=0.00038$ ) и трубопровода  $\varepsilon_n = \varepsilon / \varepsilon_{gm}$ , а также бокового касательного напряжения  $\tau n = \tau / \tau_p$  в различные моменты времени. Здесь видны разрывность деформации на фронте волны в грунте и участки с предельным состоянием по графику бокового касательного напряжения. Следует заметить, что боковое касательное напряжение достигает предельного состояния перед разрывным фронтом волны в грунте.

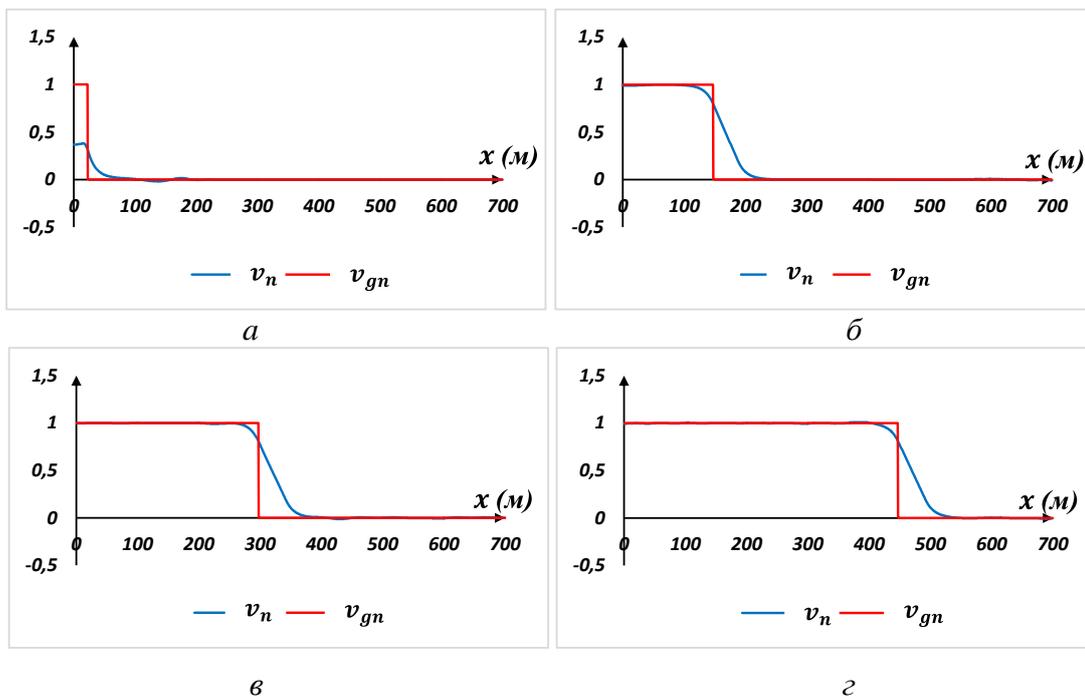


Рис. 4.29. Безразмерные скорости частиц грунта  $v_{gn}=v_g/v_{gm}$  и трубопровода  $v_n=v/v_{gm}$  в моменты времени:  $t=0.05$  с (а),  $t=0.3$  с (б),  $t=0.6$  с (в),  $t=0.9$  с (г)

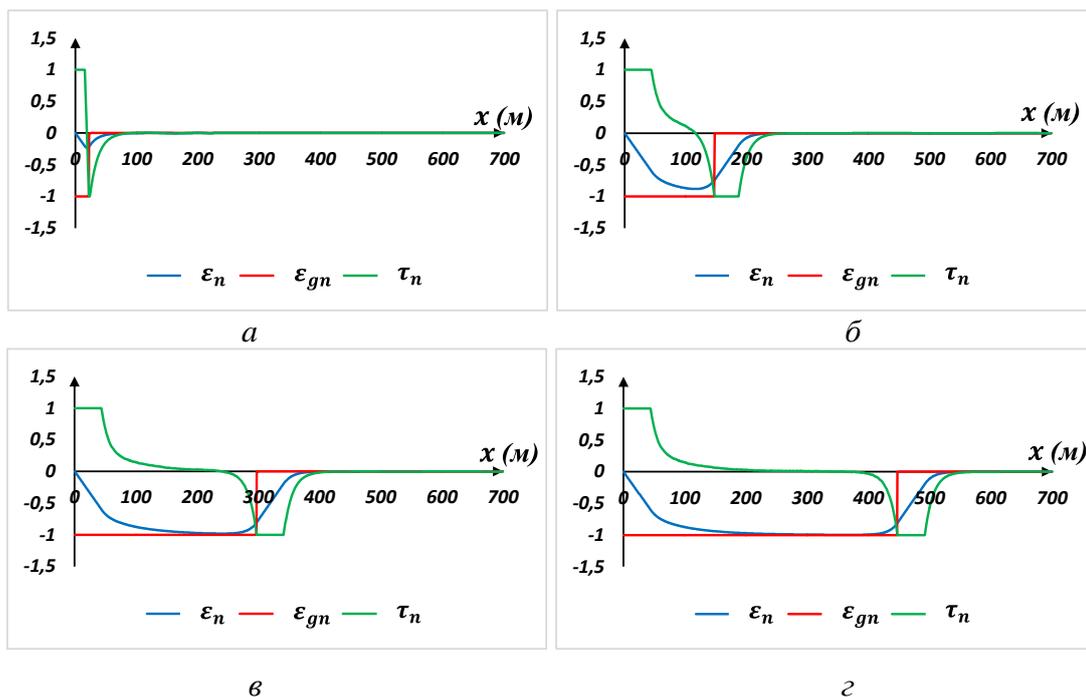


Рис. 4.30. Нормированные деформации грунта  $\varepsilon_{gn}=\varepsilon_g/\varepsilon_{gm}$  и трубопровода  $\varepsilon_n=\varepsilon/\varepsilon_{gm}$ , а также боковое касательное напряжение  $\tau_n=\tau/\tau_p$  в моменты времени:  $t=0.05$  с (а),  $t=0.3$  с (б),  $t=0.6$  с (в),  $t=0.9$  с (г)

На рис. 4.31 и 4.32 приведены результаты расчетов, когда заданная волна представляется в виде импульса  $v_g=2v_{gm}\sin[\pi(t-x/c_g)/t_0]\cos[\pi(t-x/c_g)/t_0][H(t-x/c_g)-H(t-t_0-x/c_g)]$ , где  $H(t)$  – функция Хевисайда,  $t_0=0.165$  с. На рис. 4.31 можно увидеть процесс формирования волны в трубопроводе. Так как разрывный фронт волны в грунте в этом случае отсутствует, предельное состояние

бокового касательного напряжения наступает за фронтом волны в грунте (рис. 4.32). На небольшом участке у левого торца трубопровода так же боковое касательное напряжение может достичь предельного состояния из-за отражения волн от этого свободного от напряжения торца. Передняя часть волны деформации грунта является сжимающей, и в этой области происходит переход к предельному состоянию, переданная энергии трубопроводу распространяется по нему с большой скоростью и тратится на преодоление сопротивления пружин. Задняя часть этой волны является растягивающей, а переданная трубопроводу энергия вызывает растягивающую волну, которая распространяясь с большой скоростью, достигает зоны с предельным состоянием, уменьшая значение сжимающих деформаций. В итоге получается эффект обратного выталкивания трубопровода за счет наличия областей скольжения с трением. Это показано на рис. 4.32,  $\varepsilon$ , где  $u$ ,  $u_g$  – перемещения точек трубопровода и грунта, соответственно, указаны в метрах. Такой картины в случае модели упругого взаимодействия не наблюдается.

На рис. 4.33 и 4.34 приведены результаты расчетов, когда заданная волна представляется в виде  $v_g = v_{gm} \cos[\pi(t-x/c_g)/t_0] H(t-x/c_g)$ ,  $t_0 = 0.165$  с. На этих рисунках виден процесс выхода на стационарный режим после первого полупериода  $t_0$  волны, распространяющейся в грунте. Вблизи разрывного фронта волны, распространяющейся в грунте, на левом торце скорости частиц трубопровода начинает расти, затем по мере удаления от этого торца начинает уменьшаться и далее на некотором расстоянии от левого торца переходит в стационарный режим.

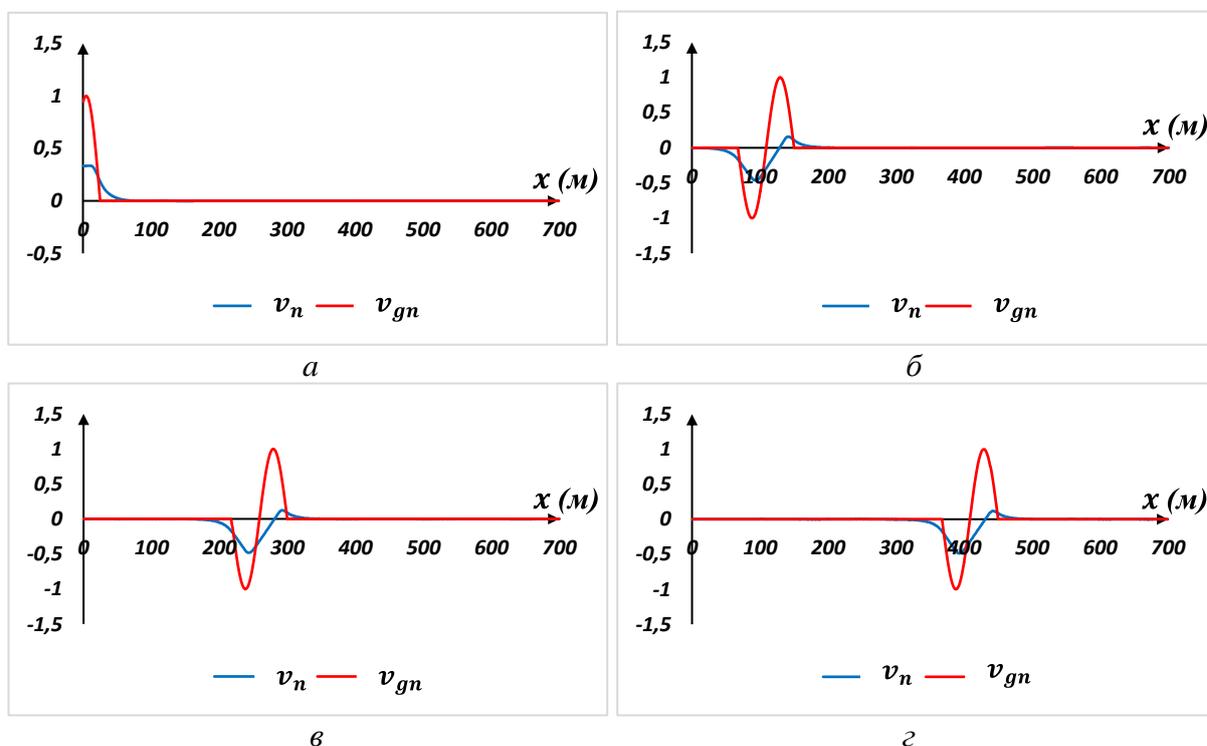


Рис. 4.31. Безразмерные скорости частиц грунта  $v_{gn} = v_g/v_{gm}$  и трубопровода  $v_n = v/v_{gm}$  в моменты времени:  $t=0.05$  с (а),  $t=0.3$  с (б),  $t=0.6$  с (в),  $t=0.9$  с (г)

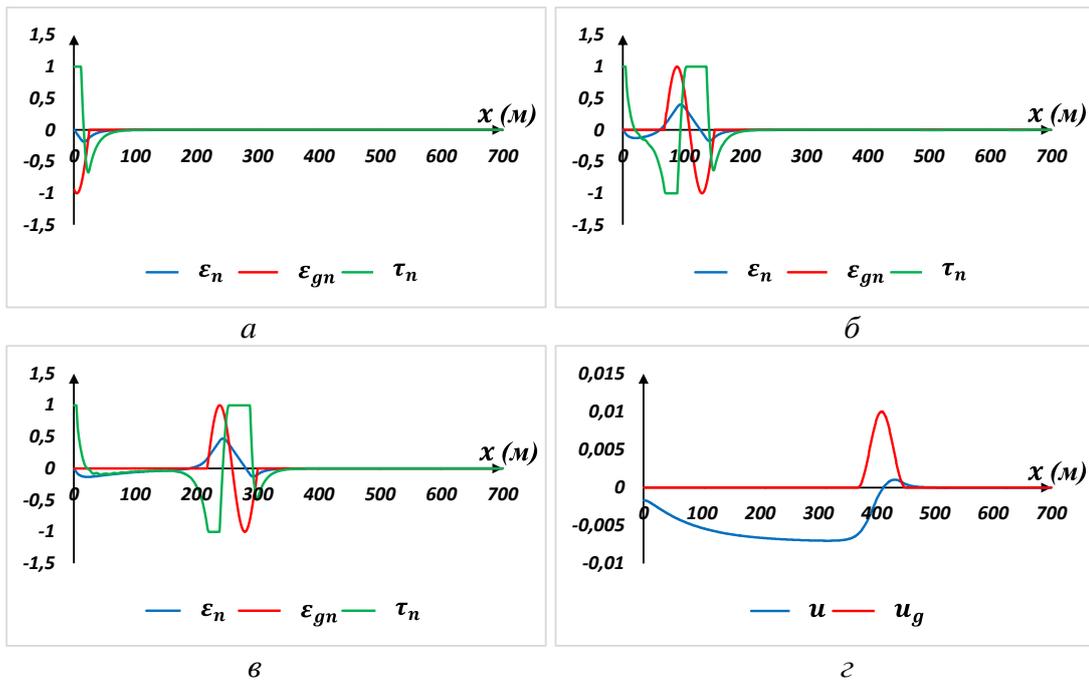


Рис. 4.32. Нормированные деформации грунта  $\varepsilon_{gn}=\varepsilon_g/\varepsilon_{gm}$  и трубопровода  $\varepsilon_n=\varepsilon/\varepsilon_{gm}$ , а также боковое касательное напряжение  $\tau_n=\tau/\tau_p$  в моменты времени:  $t=0.05$  с (а),  $t=0.3$  с (б),  $t=0.9$  с (в), а также перемещения (в метрах) при  $t=0.9$  с (г)

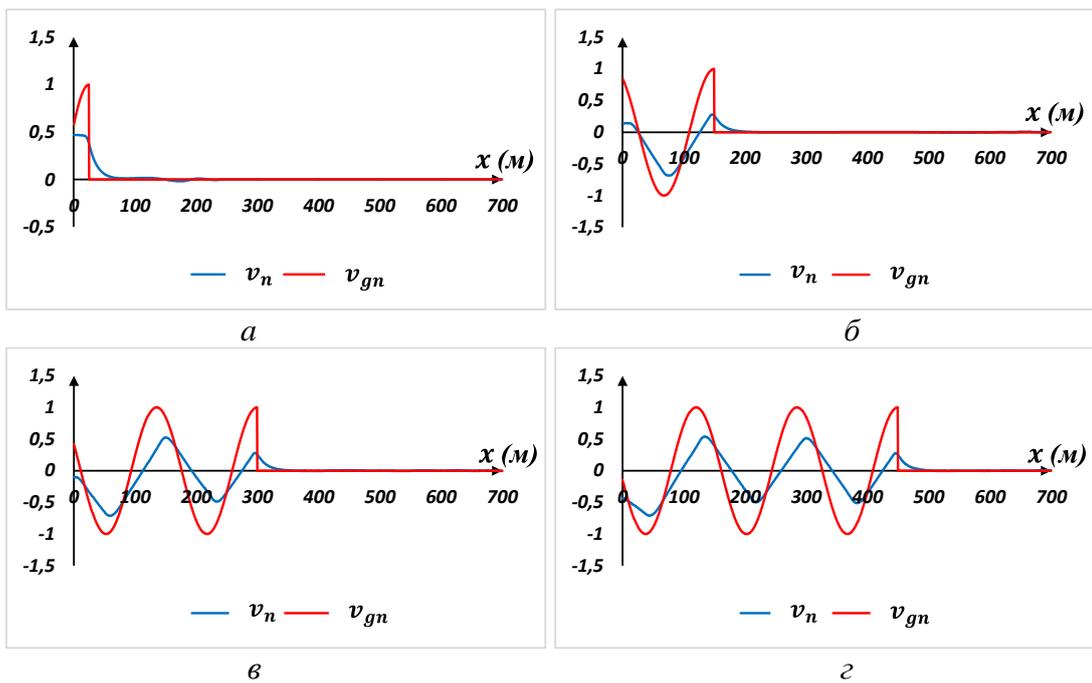


Рис. 4.33. Безразмерные скорости частиц грунта  $v_{gn}=v_g/v_{gm}$  и трубопровода  $v_n=v/v_{gm}$  в моменты времени:  $t=0.05$  с (а),  $t=0.3$  с (б),  $t=0.6$  с (в),  $t=0.9$  с (г)

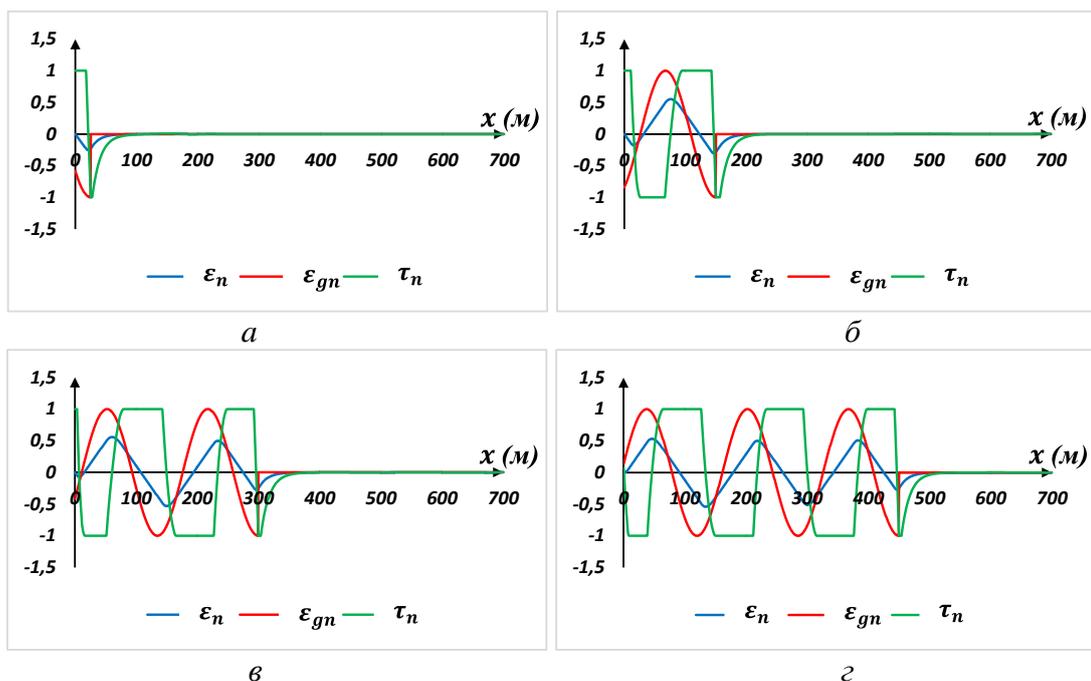


Рис. 4.34. Нормированные деформации грунта  $\varepsilon_{gn}=\varepsilon_g/\varepsilon_{gm}$  и трубопровода  $\varepsilon_n=\varepsilon/\varepsilon_{gm}$ , а также боковое касательное напряжение  $\tau_n=\tau/\tau_p$  в моменты времени:  $t=0.05$  с (а),  $t=0.3$  с (б),  $t=0.6$  с (в),  $t=0.9$  с (г)

Методом конечных разностей по явной схеме решена нестационарная задача о воздействии плоской продольной волны, распространяющейся в грунте, на подземный трубопровод конечной длины при взаимодействии его с грунтом по модели «идеального упругопластического тела». Получены численные значения скоростей, деформаций и боковых касательных напряжений для трех форм волны: ступенчатой, импульса и гармонической. Показан процесс формирования волны в трубопроводе. Получен эффект обратного выталкивания трубопровода при действии импульса перемещения, распространяющегося в грунте, в виде синуса в квадрате. Для синусоидальной волны в грунте показан выход на стационарный режим распространения волны в трубопроводе.

#### 4.6. Постановка и численное решение нелинейных задач об устойчивости подземного трубопровода при статических нагрузках и на действие реальных землетрясений

Строительство магистральных трубопроводов является одной из важнейших отраслей строительства, необходимое для развития нефтяной и газовой промышленности.

В настоящее время в трубопроводной практике имеются некоторые данные экспериментов и наблюдений, связанных с выпучиванием подземных трубопроводов, взаимодействующих с окружающим грунтом. Одним из

основных факторов, влияющих на устойчивость подземных магистральных трубопроводов, является изменение температуры. Выпучивание горячего трубопровода наиболее опасно из-за высокого давления и температурных напряжений, уже присутствующих в трубе. Повышенные температуры и давления создают высокие осевые усилия сжатия вдоль закрепленного трубопровода. Их воздействие проявляется в слабых точках, зонах сниженного слоя засыпки и в зоне дефекта трубопровода или грунтовой подсыпки. В этих местах трубопровод теряет устойчивость и по мере развития процесса наблюдается коромыслообразное выпучивание трубопровода над поверхностью земли. Результатом обычно являются значительный перегиб и овальность трубопровода, высокий риск повреждения стенки трубы а, следовательно, утечки транспортируемого продукта.

Рассмотрим задачу об устойчивости подземного трубопровода конечной длины, имеющего линейные участки с двух сторон и куполообразный в середине недеформированный вид в вертикальной плоскости, при действии статических и сейсмических воздействий. Перед решением динамической задачи необходимо решить статическую задачу, так как решение статической задачи является начальным условием динамической задачи. Считаем, что торцы трубопровода имеют степень свободы в вертикальном направлении, углы их поворота равны нулю, вдоль оси подвергается действию продольной сжимающей силы, которая возникает за счет температуры и давления транспортируемого продукта. В дальнейшем в качестве сейсмического воздействия принимаем сейсмические волны по записям реальных землетрясений. Взаимодействие трубопровода с окружающим грунтом описывается моделью, приведенной в [17, 73, 74].

Так как трубопровод состоит из двух линейных участков и одного нелинейного участка описать движение трубопровода в целом известными уравнениями для линейного участка с предварительным прогибом [75] представляет определенные трудности, поэтому для решения задачи применяется метод конечных элементов. Для этого трубопровод разбивается на линейные конечные элементы. Известно, что любую кривую можно аппроксимировать набором линейных участков.

Рассмотрим линейный конечный элемент в локальной системе координат. Начало локальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  расположено в центре торцевого сечения линейного конечного элемента трубы [33]. Ось  $O\xi$  направим вдоль продольной оси трубопровода, а оси  $O\eta$  и  $O\zeta$  – по главным центральным осям поперечного сечения трубопровода.

Линейный участок трубопровода моделируется как стержневой элемент, тогда дифференциальное уравнение равновесия этого элемента в упругой среде имеет вид

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \pi DK_{\xi}(u - u_g) = q_{\xi},$$

$$\rho F \frac{\partial^2 w_{\zeta}}{\partial t^2} + EJ_{\eta} \frac{\partial^4 w_{\zeta}}{\partial \xi^4} + P \frac{\partial^2 w_{\zeta}}{\partial \xi^2} + \pi DK_{\zeta}(w_{\zeta} - w_{g_{\zeta}}) = q_{\zeta}, \quad (4.6.1)$$

где  $EF$ ,  $EJ_\eta$  – продольная, изгибная относительно оси  $O\eta$  жесткости стержня;  $u$ ,  $w_\zeta$  – перемещения точек срединной продольной оси стержня по осям  $O\xi$ ,  $O\zeta$ ;  $u_g$ ,  $w_{g\zeta}$  – перемещения грунта по осям  $O\xi$ ,  $O\zeta$  (зависят от координаты и времени) в процессе распространения сейсмической волны;  $D$  – внешний диаметр трубопровода;  $P = EF(\partial u/\partial \xi - \varepsilon_0 - \alpha T)$  – продольное усилие;  $\varepsilon_0$ ,  $T$ ,  $\alpha$  – предварительная продольная деформация, температура транспортируемого продукта в трубопроводе и коэффициент линейного расширения материала трубы;  $K_\xi$ ,  $K_\zeta$  – погонные жесткости грунта в направлении осей  $\xi$ ,  $\zeta$ ;  $q_\xi$ ,  $q_\zeta$  – интенсивности распределенных внешних нагрузок (собственный вес единицы длины трубопровода, вес грунта над трубопроводом, сопротивление грунта к подъему трубопровода по модели внутреннего трения);  $\rho$  – плотность материала трубопровода;  $F$  – площадь поперечного сечения трубопровода.

Часть распределенной внешней нагрузки  $q_{m\zeta}$ , связанная с массой грунта над трубой и сопротивлением грунта к подъему трубопровода по модели внутреннего трения, вычисляется по следующей формуле из работы [73]:

$$q_{m\zeta} = -\rho_2 g [D(h - 0.39D) + h^2 \operatorname{tg}(0.7\varphi)], \quad (4.6.2)$$

где  $\rho_2$  – плотность грунта;  $g$  – ускорение свободного падения;  $D$  – внешний диаметр трубопровода;  $h$  – расстояние от верха засыпки трубопровода до ее осевой линии;  $\varphi$  – угол внутреннего трения.

При расчете газопровода на устойчивость следует учитывать температуру и давление газа, поступающего в трубопровод. Как выше отмечено, эквивалентное осевое усилие сжатия  $P$  обусловлено изменением температуры и высоким давлением газа, определяемое по следующей формуле [76]:

$$P = \left( \alpha E \Delta t + \frac{\mu p d}{2\delta} \right), \quad (4.6.3)$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения металла;  $E$  – модуль упругости материала;  $\Delta t$  – температурный перепад;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $p$  – внутреннее давление;  $d$ ,  $\delta$  – внутренний диаметр и толщина стенки трубы.

Начальный недеформированный вид средней части трубопровода задаем в соответствии с рельефом местности в виде полуволны синуса.

Для каждого элемента составляются выражения энергии деформации, внутренних усилий для трубы, работы сил взаимодействия с грунтом и внешних сил, общий вид которых приведен в работе [33]. Перемещения ( $u$ ,  $w_\zeta$ ) точек срединной оси стержня выражаются через перемещения ( $u_0$ ,  $w_{\zeta 0}$ ,  $u_\ell$ ,  $w_{\zeta \ell}$ ) и повороты ( $\varphi_{\eta 0}$ ,  $\varphi_{\eta \ell}$ ) центров его торцевых сечений в следующем виде [33]:

$$u = u_0 + (u_\ell - u_0) \frac{\xi}{\ell};$$

$$w_\zeta = \left( 1 - 3 \frac{\xi^2}{\ell^2} + 2 \frac{\xi^3}{\ell^3} \right) w_{\zeta 0} - \xi \left( 1 - \frac{\xi}{\ell} \right)^2 \varphi_{\eta 0} + \frac{\xi^2}{\ell^2} \left( 3 - 2 \frac{\xi}{\ell} \right) w_{\zeta \ell} + \xi \left( 1 - \frac{\xi}{\ell} \right) \frac{\xi}{\ell} \varphi_{\eta \ell}. \quad (4.6.4)$$

Представляя усилия и моменты через обобщенные перемещения торцов трубопровода и, используя принцип возможных перемещений, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений движения конечного элемента трубопровода в векторном виде:

$$[M^\ell] \left\{ \ddot{U}^\ell \right\} + [K^\ell] \{U^\ell\} = -\{Q^\ell\} + \{R^\ell\}, \quad (4.6.5)$$

Здесь  $[M^\ell]$  – матрица масс [33],  $[K^\ell] = \begin{bmatrix} K_{11}^\ell & K_{12}^\ell \\ K_{21}^\ell & K_{22}^\ell \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{p11}^\ell & K_{p12}^\ell \\ K_{p21}^\ell & K_{p22}^\ell \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{N11}^\ell & K_{N12}^\ell \\ K_{N21}^\ell & K_{N22}^\ell \end{bmatrix}$ ,

причем  $[K_{12}^\ell] = [K_{21}^\ell]^T$ ,  $[K_{p12}^\ell] = [K_{p21}^\ell]^T$  и  $[K_{N12}^\ell] = [K_{N21}^\ell]^T$ ;

$\{U^\ell\} = \begin{Bmatrix} U^{ij} \\ U^{ji} \end{Bmatrix} = \{u_0, w_{\zeta_0}, \varphi_{\eta_0}, u_\ell, w_{\zeta_\ell}, \varphi_{\eta_\ell}\}^T$ ;  $\{Q^\ell\} = \begin{Bmatrix} Q^{ij} \\ Q^{ji} \end{Bmatrix}$ ;  $\{R^\ell\} = \begin{Bmatrix} R^{ij} \\ R^{ji} \end{Bmatrix}$ , где  $[K^\ell]$  –

матрица жесткости элемента;  $K_{11}^\ell$ ,  $K_{12}^\ell$ ,  $K_{21}^\ell$ ,  $K_{22}^\ell$  – матрицы жесткости стержневого элемента;  $K_{p11}^\ell$ ,  $K_{p12}^\ell$ ,  $K_{p21}^\ell$ ,  $K_{p22}^\ell$  – матрицы взаимодействия стержневого элемента;  $K_{N11}^\ell$ ,  $K_{N12}^\ell$ ,  $K_{N21}^\ell$ ,  $K_{N22}^\ell$  – матрицы продольной силы стержневого элемента;  $\{Q^\ell\}$  – вектор обобщенных внешних сил;  $\{R^\ell\}$  – вектор узловых реакций.

Матрицы жесткости стержневого элемента с учетом деформации сдвига [37, 77] имеют следующий вид:

$$[K_{11}^\ell] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_\eta a_\eta}{\ell^3} & -\frac{6EJ_\eta a_\eta}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6EJ_\eta a_\eta}{\ell^2} & \frac{EJ_\eta (1+3a_\eta)}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$[K_{12}^\ell] = [K_{21}^\ell]^T = \begin{bmatrix} -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_\eta a_\eta}{\ell^3} & -\frac{6EJ_\eta a_\eta}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ_\eta a_\eta}{\ell^2} & \frac{EJ_\eta (1+3a_\eta)}{2\ell} \end{bmatrix}$$

$$[K_{22}^\ell] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_\eta a_\eta}{\ell^3} & \frac{6EJ_\eta a_\eta}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ_\eta a_\eta}{\ell^2} & \frac{EJ_\eta(1+3a_\eta)}{\ell} \end{bmatrix},$$

$$a_\eta = \left[ 1 + \frac{12k_\eta EJ_\eta}{\ell^2 GF} \right]^{-1}.$$

При отсутствии деформации сдвига  $a_\eta = 1$ .

Матрицы взаимодействия стержневого элемента с грунтом имеют вид:

$$[K_{p11}^\ell] = \begin{bmatrix} K_\zeta \frac{\ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & K_\zeta \frac{13\ell}{35} & -K_\zeta \frac{11\ell^2}{210} \\ 0 & -K_\zeta \frac{11\ell^2}{210} & K_\zeta \frac{\ell^3}{105} \end{bmatrix}$$

$$[K_{p12}^\ell] = [K_{p21}^\ell]^T = \begin{bmatrix} K_\zeta \frac{\ell}{6} & 0 & 0 \\ 0 & K_\zeta \frac{9\ell}{70} & K_\zeta \frac{13\ell^2}{420} \\ 0 & -K_\zeta \frac{13\ell^2}{420} & -K_\zeta \frac{\ell^3}{140} \end{bmatrix}$$

$$[K_{p22}^\ell] = \begin{bmatrix} K_\zeta \frac{\ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & K_\zeta \frac{13\ell}{35} & K_\zeta \frac{11\ell^2}{210} \\ 0 & K_\zeta \frac{11\ell^2}{210} & K_\zeta \frac{\ell^3}{105} \end{bmatrix}$$

Матрицы продольной силы для стержневого элемента имеют вид:

$$[K_{N11}^\ell] = P \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2\ell}{15} \end{bmatrix}$$

$$[K_{N12}^\ell] = [K_{N21}^\ell]^T = P \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{-\ell}{30} \end{bmatrix}$$

$$[K_{N22}^\ell] = P \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2\ell}{15} \end{bmatrix}$$

Матрица реакций элемента имеет порядок 6, а ее подматрицы – 3. Элементы этой матрицы получаются из системы уравнений (4.6.1). После соответствующих преобразований из локальной системы координат в глобальную [33], получим векторное дифференциальное уравнение для трубопровода в целом. Для определения начального состояния трубопровода необходимо решить статическую задачу, которая также является нелинейной из-за коэффициента  $P$  – продольного усилия в элементе. На торцах трубопровода заданы осевые усилия от действия температуры и внутреннего давления, а также нулевые вертикальные перемещения и поворот относительно оси  $O\eta$ . Для решения статической задачи используем метод последовательных приближений следующим образом. Вначале  $P$  ставим равным нулю, определяем значение  $P$  в каждом конечном элементе, найденные эти значения подставляем в векторное уравнение и находим второе приближение, затем процесс итерации продолжится до обеспечения заданной точности в последовательности приближений. По мере деформирования (поднятия трубопровода вверх) давление верхнего слоя грунта уменьшается, это учитывается формулой (4.6.2) через  $h$ . Разработанный ранее комплекс [39] был переработан для задач о выпучивании подземных трубопроводов.

В качестве тестовой задачи рассмотрен газопровод, уложенный в песке, на который действуют внешняя распределенная нагрузка, продольная сила, обусловленная изменением температуры и высоким давлением газа. В расчетах используем определенные физико-механические характеристики грунта, геометрические размеры трубопровода и значение внешней силы, рассмотренные А.Б. Айнбиндером и А.Г. Камерштейном в работе [74], в которой авторами выполнен анализ опыта эксплуатации. Цитируем: «Обследована система газопроводов, проложенных в районах Средней Азии, и проанализированы случаи выпучивания отдельных участков. Качественный характер выпучивания примерно одинаков (рис. 4.35). Рассмотрим случай выпучивания подземного участка газопровода диаметром 1020 мм на расстоянии около 10 км от компрессорной станции. Газопровод проходит по участку, сложенному сухими пылеватými песками барханного типа. Высота засыпки на примыкающих к месту выпучивания участках составляла 0.2 - 0.3 м. Из информации эксплуатирующей организации известно, что при работе первой очереди компрессорной станции, когда температура газа на данном участке составляла 34<sup>0</sup>С, глубина заложения трубы (до верхней образующей) в среднем была 0.3 м. Используя результаты геодезической съемки примыкающих к месту выпучивания участков, можно предположить, что радиус изгиба оси трубы в вертикальной плоскости составлял примерно 1000 м. С пуском второй очереди компрессорной станции температура газа повысилась до 43<sup>0</sup>С, на участке кривой началось выпучивание на длине 15 м и стрелка изгиба составляла 30 см. В дальнейшем при пуске компрессорной станции на полную мощность температура газа возросла до 48<sup>0</sup>С, при этом продолжалось дальнейшее выпучивание и стрелка изгиба увеличилась до 308 см, а длина приподнятой части достигла 66.5 м.» [74].

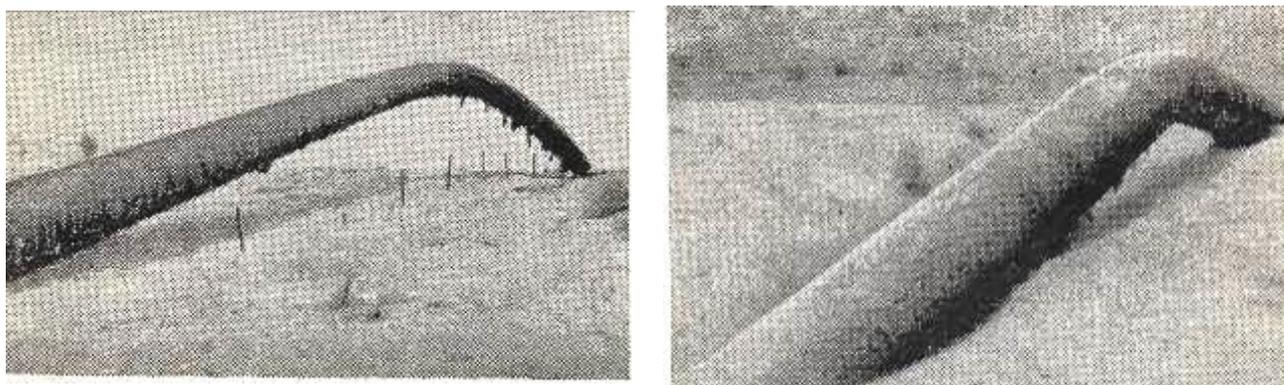


Рис. 4.35. Характер выпучивания разных участков подземного трубопровода, образовавших пологие арки

Для следующих физико-механических характеристик грунта: объемный вес грунта  $\gamma_{gp}=15.4$  кН/м<sup>3</sup>, угол внутреннего трения  $\varphi_{gp}=16^0$ , сцепление  $c_{gp}=0$  из работы [74] проведем численные расчеты продольной устойчивости подземных газопроводов. Полученные результаты представлены на рис. 4.36, 4.37 и в табл. 4.2.

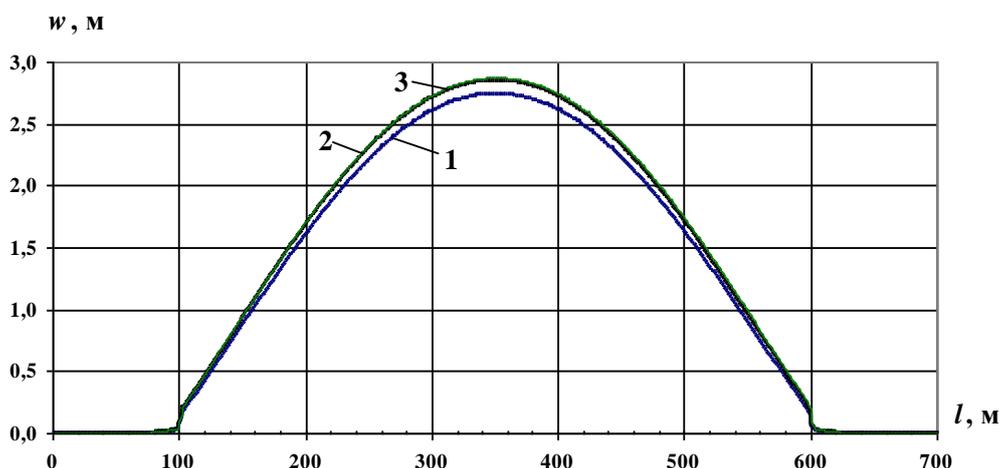


Рис. 4.36. Выпучивание газопровода диаметром 1020 мм при осевом усилии сжатия 7.22 МПа: 1 –  $f_0=38$  м; 2 –  $f_0=42$  м; 3 –  $f_0=45$  м

Для анализа результатов и наблюдения за поведением выпучивания трубопровода в табл. 4.2 приведем значения точки максимального подъема при соответствующих значениях начального прогиба.

Таблица 4.2 – Максимальные значения стрелы изгиба трубопровода при разных значениях стрелы начального прогиба

$f_0$ , м	$(w_{\zeta})_{\max}$ , м
38	2.7435
40	2.8109
42	2.8536
45	2.8741
48	2.8483
50	2.8092
52	2.7558

Из табл. 4.2 видно, что при  $f_0 < 45$  м длина выпучивания и стрелка изгиба трубопровода увеличиваются; при  $f_0 = 45$  м достигается максимальное значение стрелы изгиба  $w_{\zeta} = 2.874$  м, а при  $f_0 > 45$  м длина выпучивания и стрелка изгиба трубопровода уменьшаются. Процесс выпучивания трубопровода происходит как точка бифуркации и зависит от определенного сочетания всех параметров, характеризующих физико-механические свойства грунта, геометрические размеры трубопровода и их взаимодействие.

В магистральных газопроводах давление газа достигает 7.5 МПа. Коэффициент линейного расширения для стали  $\alpha = 0.000012$ . При температурном перепаде  $34^{\circ}\text{C} - 50^{\circ}\text{C}$  соответственно осевое усилие сжатия изменяется в диапазоне от 6.16 – 7.38 МПа.

С увеличением температуры транспортируемого продукта в газопроводе увеличиваются значения длины выпучивания и стрелы изгиба трубопровода (рис. 4.37).

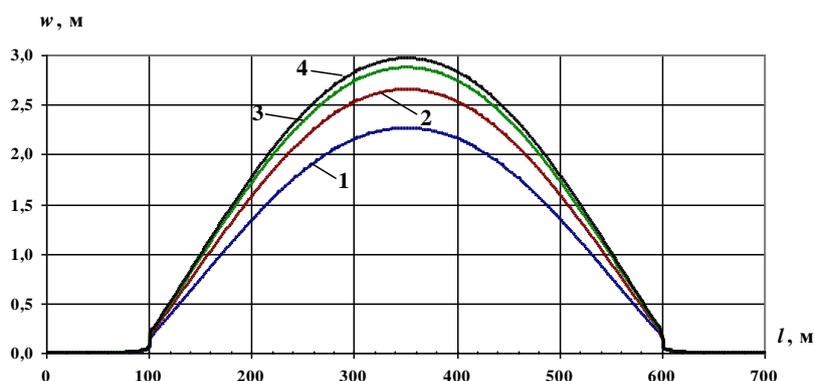


Рис. 4.37. Выпучивание газопровода диаметром 1020 мм при стреле начального прогиба равном 45 м: 1 –  $t=34^{\circ}\text{C}$ ; 2 –  $t=43^{\circ}\text{C}$ ; 3 –  $t=48^{\circ}\text{C}$ ; 4 –  $t=50^{\circ}\text{C}$

В отличие от случая, рассматриваемого в работе [74], где выбранный участок газопровода находился на расстоянии примерно 10 км от компрессорной станции с радиусом изгиба оси трубы в вертикальной плоскости 1000 м, в расчетах выбрали ограниченную длину трубопровода  $l=700$  м и соответственно начальный прогиб трубы  $f_0=45$  м. Поэтому можно считать, что при соответствующих значениях температурных перепадов фактическая длина выпучивания и стрела изгиба газопровода близки к полученным результатам. Таким образом, полученные нами результаты МКЭ находятся в соответствии с результатами наблюдений за поведением трубопроводов в реальных условиях, которые проявляются в виде выпучивания.

Решение задачи дополнительного действия сейсмических волн на существующее статическое напряженно-деформированное состояние будет выполнено в последующие годы. Здесь на каждом шаге по времени также можно использовать метод последовательных приближений или значения продольной силы и величину массы над трубопроводом взять с предыдущего шага по времени.

## Глава 5. Сейсмические подушки и барьеры из метаматериалов для защиты зданий и сооружений от сейсмических воздействий

### 5.1. Введение

Сейсмические подушки, располагаемые под фундаментом сооружения, предназначены для защиты всего сооружения, включая фундаментные конструкции, от объемных сейсмических  $S$  и  $P$  волн. Обеспечением защиты фундаментных конструкций объясняется одно из основных преимуществ систем, создаваемых на основе сейсмических подушек, от сейсмоизоляторов различных типов, – последние оставляют фундаментные конструкции, фактически без защиты, что может приводить к нерасчетным усилиям в фундаментных плитах и, в итоге, вызвать разрушения фундаментных плит и всего сооружения в целом. Еще одно неоспоримое преимущество большинства систем на основе сейсмических подушек, – их долговечность, сопоставимая со сроком службы всего сооружения. Это обстоятельство выгодно отличает сейсмические подушки от наиболее распространенных резинометаллических сейсмоизоляторов, срок службы которых, как правило, ограничен 20–30 годами.

Термин «сейсмическая подушка» в литературе по сейсмической защите, по-видимому, впервые появился в связи со строительством Императорского отеля в г. Токио (Япония) в 1923 г., см. рис. 5.1.



Рис. 5.1. Императорский отель в г. Токио (Япония, 1923 г.), проект Frank Lloyd Wright

Отель сооружен на относительно плотных грунтах, однако ниже отметки 6 м вплоть до глубин 10 – 12 м находились слабые илистые грунты, обусловленные находившимся когда-то на этом месте болотом. В сентябре 1923 г. в Токио произошло одно из самых разрушительных землетрясений

магнитудой  $M_w$  7.9 – 8.2, вызвавшее гибель десятков тысяч жителей и массовые разрушения: по данным японских страховых компаний более 80 % зданий с железобетонным или стальным каркасом были признаны, имеющими те или иные разрушения, еще больший процент разрушений был зафиксирован в кирпичных и каменных сооружениях (рис. 5.2).



Рис. 5.2. Разрушенные кварталы Токио в окрестности Императорского отеля, вызванные землетрясением  $M_w$  7.9 – 8.2 (1 сентября 1923 г.)

На последующей сейсмологической конференции (1925 г., Япония) был проведен анализ сооружений, выдержавших последствия Великого Токийского землетрясения 1923 г., на котором было отмечено, что мягкие и податливые грунты под основанием здания Императорского отеля послужили своеобразной «сейсмической подушкой», препятствовавшей проникновению сейсмических волн (в основном объемных S-волн) к фундаменту сооружения. На рис. 5.3, где показана принципиальная схема экранирования S-волн мягкими водонасыщенными грунтами на пути к фундаменту сооружения.

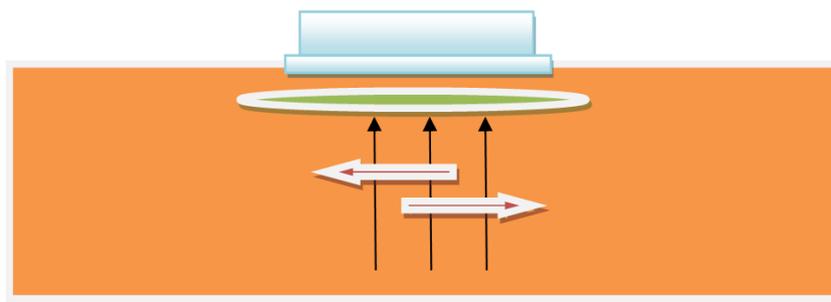


Рис. 5.3. Принципиальная схема экранирования S-волн мягкими грунтами

В дальнейшем идея использования слабых грунтов под подошвой сооружения, названная впоследствии основанием с «плавающим фундаментом» или «сейсмической подушкой» нашла свое отражение в многочисленных дальнейших исследованиях. В этих исследованиях было отмечено, что наряду с

положительными факторами, способствующими рассеиванию сейсмической энергии, слабые грунты, расположенные на некоторой глубине под основанием сооружения, в особенности, если их мощность превышает несколько метров (более 2 м) способны при динамических воздействиях вызвать значительную и, возможно, неравномерную осадку сооружения. Кроме того, такие массивы слабых грунтов при сейсмических воздействиях способны вызвать разжижение и потерю их несущей способности. Для исключения этих негативных факторов рекомендовано уменьшать толщину подушки, до значений менее одного метра и выполнять подушку из материалов сохраняющих свои диссипативные свойства при значительных давлениях. На практике, требование уменьшения толщины подушки при сохранении хороших диссипативных свойств в отношении энергии сейсмических волн, означает отказ от применения естественных гравийно-песочных материалов. Вместо естественных гравийно-песчаных материалов рекомендовано применение искусственных материалов, обладающих свойствами диссипации волновой энергии в заданных диапазонах частот. Далее такие материалы будут называться сейсмическими метаматериалами.

В сейсродинамике такого рода метаматериалы, обеспечивающие стабильную диссипацию энергии сейсмических волн в широком диапазоне частот, часто именуют метаматериалами, обладающими свойствами широкодиапазонных фононных кристаллов, поскольку позволяют поглощать энергию сейсмических волн в широком диапазоне частот. Для строительных сооружений общего назначения диапазон частот, на которых требуется поглощение энергии, обычно составляет 2 – 15 Гц, а для специальных сооружений соответствующий частотный диапазон 2 – 35 Гц.

## 5.2. Сейсмические подушки для защиты мостовых конструкций

Сейсмические подушки применяются при защите мостовых опор, включая опоры самого протяженного вантового моста Рион-Антирион через Коринфский залив (Греция), рис. 5.4.

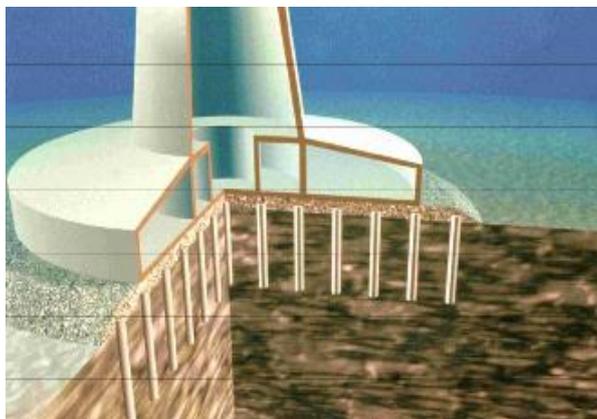


Рис. 5.4. Подушка из гранулированных материалов между сваями и ростверком опорной части моста Рион-Антирион [78, 79]

При создании этого моста под его опорами были размещены подушки из специальных гранулированных материалов, позволяющих рассеивать энергию сейсмических S-волн и отражать энергию Р-волн. Недавнее мощное землетрясение в Южной Греции ( $M_w$  6.5) с эпицентром всего в 36 км от одной из опор моста, не привело к каким-либо повреждениям опор и пролетной части моста, что подтвердило правильность принятых решений по устройству сейсмических подушек под мостовыми опорами, рассеивающих энергию сейсмических волн.

Моделирование на основе метода конечных элементов конструктивных решений размещения подушки под фундаментом сооружения и традиционно используемых решений в виде ростверка жестко связанного со сваями, показало уменьшение амплитуд скоростей и ускорений пилона моста в случае с подушкой более чем в 4 раза, по сравнению с жестким соединением.

### 5.3. Сейсмическая защита зданий атомной энергетики

Особую опасность сейсмические воздействия могут оказывать на объекты атомной энергетики. В этой связи показателен пример Тайваня, вся территория которого буквально пронизана тектоническими разломами и подвержена многочисленным землетрясениям (рис. 5.5).

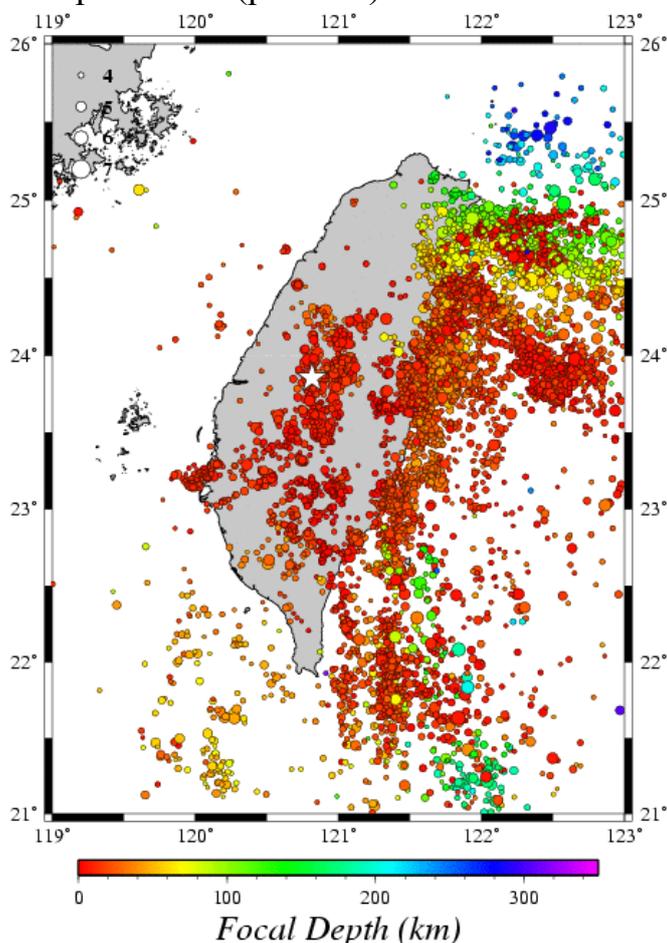


Рис. 5.5. Карта землетрясений острова Тайвань

Несмотря на неблагоприятную сейсмологическую обстановку, на Тайване имеется четыре атомных электростанции. Действующая АЭС Nanwan, расположенная в южной части острова, показана на рис. 5.6.

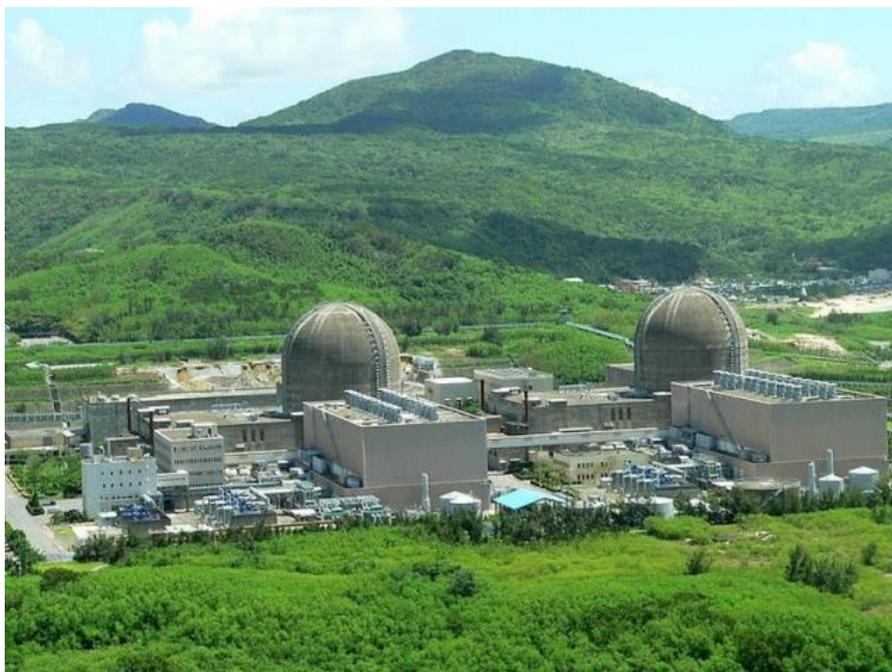


Рис. 5.6. АЭС Nanwan (Taiwan)

Для сейсмической защиты подобного рода особо опасных объектов применяют сейсмические подушки, выполненные из многослойных материалов с контрастными свойствами (см. рис. 5.7).

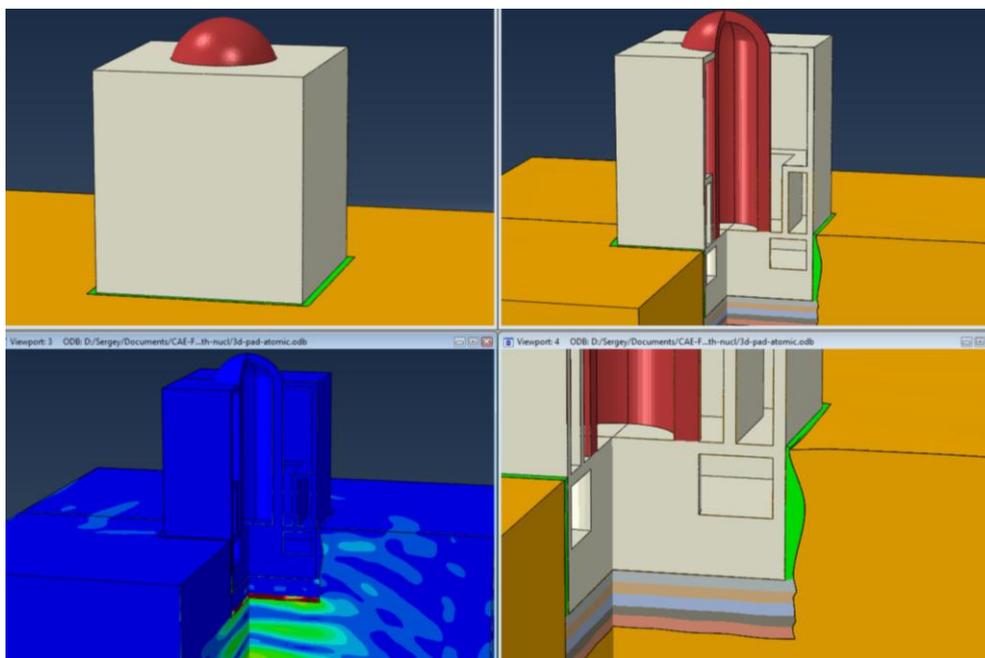


Рис. 5.7. Здание энергоблока и конечно-элементное моделирование отражения и диссипации энергии  $S$ -волн (зеленым цветом выделены боковые компенсаторы, препятствующие передаче динамического бокового давления при сейсмическом воздействии)

## 5.4. Сейсмическая защита зданий повышенной этажности

В настоящее время имеются проектные решения, основанные на использовании сейсмических подушек, для сейсмической защиты зданий различного назначения, в том числе жилых зданий повышенной этажности (рис. 5.8).

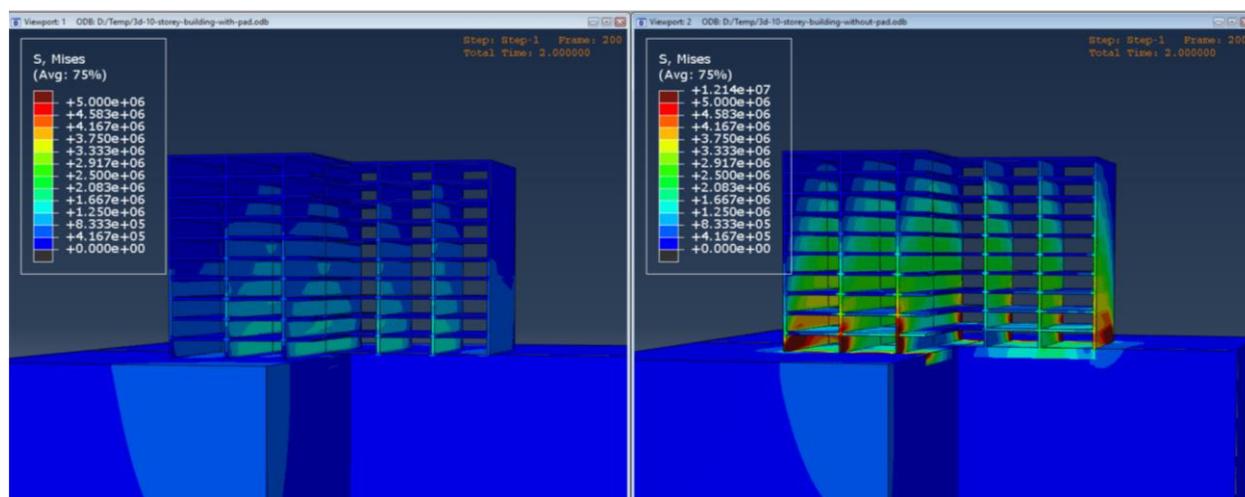


Рис. 5.8. Модели десятиэтажного жилого здания снабженного сейсмической подушкой (слева) и здания без сейсмической защиты; показаны поля динамических инвариантных напряжений Мизеса

На рис. 5.9 показан комплекс центрального госпиталя в г. Веллингтон (Новая Зеландия), снабженный рассматриваемой системой сейсмической защиты в виде подушек из метаматериалов.



Рис. 5.9. Комплекс центрального госпиталя с сейсмическими подушками в г. Веллингтон (Новая Зеландия)

По данным компании Marathon Alliance (Австралия) для этого сооружения: площадь основания госпиталя и подземного паркинга – 14тыс. кв. м, расчетное давление под опорами фундамента 33 КПа, толщина сейсмической подушки – 0.4 м. Стоимость всего комплекса 350 млн. USD, сейсмической защиты – 7 млн. USD (2% от стоимости всего сооружения), расчетное снижение амплитуд ускорений 4.2 раза (более чем на два балла).

## **5.5. Некоторые преимущества систем сейсмической защиты на основе метаматериалов**

Надо отметить, что у анализируемой системы сейсмической защиты имеется несколько неоспоримых преимуществ: (1) защита фундаментных конструкций, поскольку сейсмические подушки позволяют защитить как вышележащие части сооружения, так и его фундаментные конструкции; (2) долговечность обусловлена тем обстоятельством, известные метаматериалы, обладающие свойствами широкодиапазонных фононных кристаллов, используемые для заполнения сейсмических барьеров и сейсмических подушек, изготовлены из расплавов неорганических материалов, содержащих только базальтовые и кварцевые компоненты. Эти материалы обеспечивают поддержание заданных условий эксплуатации в течение более 250 лет, что соответствует или превышает расчетный срок эксплуатации зданий и сооружений. В то же время, типичный расчетный срок службы резинометаллических сейсмоизоляторов не превышает 25 – 30 лет, что вызвано, в основном, деградацией свойств резины; (3) диапазон демпфируемых частот значительно превышает требуемый диапазон, применяемый в атомной энергетике, 2 – 35 Гц; (4) стоимость является еще одним преимуществом, поскольку сейсмические подушки при сопоставимой начальной стоимости с резинометаллическими сейсмоизоляторами, существенно выигрывают в стоимости уже после необходимой однократной замены последних через 20 – 25 лет эксплуатации.

## **5.6. Математические модели, применяемые при динамических расчетах гранулированных метаматериалов**

В качестве основной модели для описания динамического поведения гранулированных метаматериалов, используемых в качестве сейсмических подушек и барьеров, применяется модифицированная кэм-клей модель.

Надо отметить, что кэм-клей модель, также как и ее модификация, применяются на протяжении многих лет для моделирования поведения безкогезионных или слабо когезионных сыпучих грунтов при их упругопластическом деформировании [79, 80]. Впервые эта модель с логарифмической поверхностью пластичности в докритической зоне построена в [28, 29]. Позже, в работе [81] предложено логарифмическую поверхность пластичности заменить эллипсоидальной (рис. 5.10). Такая модель именуется модифицированной кэм-клей моделью. Как кэм-клей, так и модифицированная кэм-клей модель относятся к упругопластическим моделям с изотропным упрочнением.

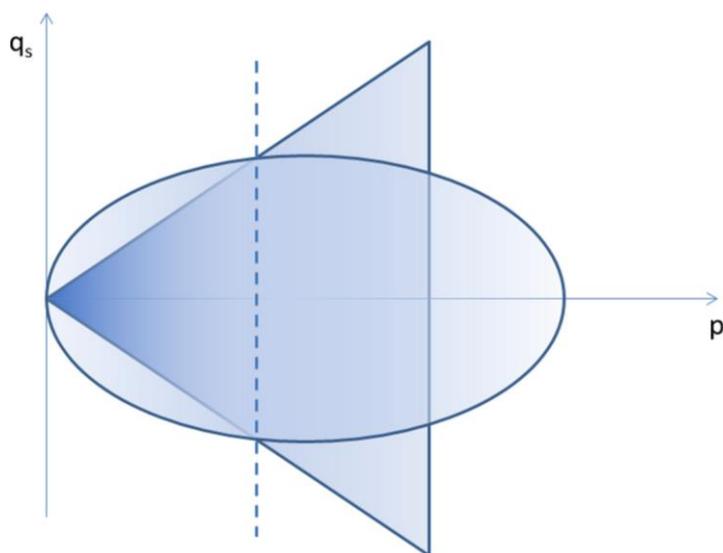


Рис. 5.10. Поверхность пластичности и критический конус для модифицированной кэм-клей модели: штриховая линия отвечает пересечению эллипсоидальной поверхности текучести с критическим конусом [81]

Имеется значительное число работ по применению как кэм-клей модели, так и ее модификации для исследования поведения различных гранулированных материалов с малой когезией в условиях как монотонных нагрузений [78 – 80, 82 – 89], так и при циклических воздействиях [90 – 102]. Большая часть рассматриваемых работ посвящена либо одноосному [96, 98], либо трехосному силовому нагружению [90 – 92, 94, 95, 99, 100].

В работах [90, 94, 100] предложен аналог модифицированной кэм-клей модели с кинематическим упрочнением, что позволяет учитывать в расчетах эффект Баушингера. В некоторых моделях вводят дополнительные параметры, учитывающие частоту циклических нагружений, а также деградацию материала [92, 101 – 103].

Ниже рассматривается модифицированная кэм-клей модель в условиях циклического кинематического нагружения при линейной связи между напряжениями и деформациями в упругой области и отсутствием упрочнения при объемном нагружении.

## 5.7. Основные уравнения

В этом разделе вводятся основные уравнения модифицированной кэм-клей модели для инфинитезимальных деформаций.

*5.7.1. Основные обозначения.* Для дальнейшего потребуется представление произвольного симметрического разложимого тензора второго ранга вида

$$\mathbf{S} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3 \quad (5.1)$$

на шаровую и девиаторную части:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}), \quad \mathbf{D} = \mathbf{S} - \mathbf{V}, \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{I} \in R^3 \otimes R^3$  - единичный тензор второго ранга.

Ниже вводятся тензорные инварианты тензора  $\mathbf{S}$

$$I_{\mathbf{S}} \equiv \sum_{k=1}^3 S_{kk}, \quad II_{\mathbf{S}} \equiv \|\mathbf{S}\|^2, \quad III_{\mathbf{S}} \equiv \det(\mathbf{S}), \quad (5.3)$$

где  $\|\mathbf{S}\|$  – норма Шура тензора  $\mathbf{S}$ :

$$\|\mathbf{S}\| = \sqrt{\sum_{k,j} S_{kj}^2}. \quad (5.4)$$

Объединение (5.2) и (5.3) дает

$$II_{\mathbf{D}} \equiv \|\mathbf{S}\|^2 - \frac{1}{3}I_{\mathbf{S}}^2. \quad (5.5)$$

Декомпозиция (5.2) для тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и инфинитезимального тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  обычно записывается в несколько измененном виде

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = -\frac{1}{3}\theta\delta_{ij} + e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.6)$$

где обозначено

$$p = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}, \quad \theta = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}, \quad d_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} \quad (5.7)$$

в разложении **Ошибка! Источник ссылки не найден.**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (5.8)$$

*Замечание 1.* При решении задач динамики грунтовых сред знак объемной деформации обычно принимается таким же, как знак соответствующего первого инварианта тензора деформаций, однако, в кэм-клей модели (и некоторых других моделях критического состояния) знак объемной деформации берется противоположным знаком первого инварианта, по аналогии со знаком давления, см. (5.7).

В соответствии с определениями (5.3) – (5.7) удобно ввести следующую норму для девиаторов напряжений и деформаций:

$$N_{\mathbf{s}} = \sqrt{II_{\mathbf{s}}}, \quad N_{\mathbf{e}} = \sqrt{II_{\mathbf{e}}}. \quad (5.9)$$

Наряду с девиаторными нормами (5.9) для дальнейшего потребуются следующие параметры, основанные на нормах (5.9), см. [104]

$$N_{\mathbf{s}}^{\pm} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma})}{|f(\boldsymbol{\sigma})|} \sqrt{II_{\mathbf{s}}}, \quad N_{\mathbf{e}}^{\pm} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma})}{|f(\boldsymbol{\sigma})|} \sqrt{II_{\mathbf{e}}}, \quad (5.10)$$

где  $f(\boldsymbol{\sigma})$  – функция от соответствующих тензорных инвариантов. В большинстве приложений функция  $f(\boldsymbol{\sigma})$  выбирается совпадающей с первым инвариантом [104], таким образом (5.10) принимают вид

$$N_s^\pm = -\frac{p}{|p|} \sqrt{\Pi_s}, \quad N_e^\pm = -\frac{\theta}{|\theta|} \sqrt{\Pi_e}. \quad (5.11)$$

Вместо норм (5.9), в теориях пластичности могут использоваться девиаторные нормы, известные как напряжения и деформации Треска

$$\sigma_{Tresca} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \varepsilon_{Tresca} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad (5.12)$$

где  $\sigma_k, \varepsilon_k, k=1,2,3$  – главные компоненты соответствующих тензоров, ранжированные по убыванию. По аналогии с (5.10) могут быть введены параметры  $N_s^\pm$  и  $N_e^\pm$ , основанные на нормах Треска.

5.7.2. *Упругое состояние.* Тензор деформаций может быть разбит на тензоры упругой и пластической деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e. \quad (5.13)$$

В случае упругих деформаций, закон состояния в кэм-клей моделях формулируется либо в виде

(А) линейной связи между напряжениями и деформациями

$$\sigma = \lambda_e \theta^e \mathbf{I} + 2\mu_e \varepsilon^e, \quad (5.14)$$

где  $\lambda_e, \mu_e$  – упругие модули (константы Ламе);

(Б) гипоупругих соотношений, записываемых в виде [81, 84]

$$\begin{cases} \frac{p_0 - p_t}{p - p_t} \dot{p} = K_e \dot{\theta}^e \\ \dot{\sigma} + \frac{1}{3} \dot{p} \mathbf{I} = 2\mu_e \dot{\varepsilon}^e \end{cases} \quad (5.15)$$

где  $p_t \leq 0$  нижняя граница давлений, – параметр, позволяющий избежать сингулярности в первом уравнении (5.15) при малых  $p$ ;  $p_0$  начальное давление при  $\theta^e = 0$ ; либо в виде

(В) гиперупругого потенциала [79, 80]

$$W = p_0 e^{\theta^*} (k + \alpha \Pi_\varepsilon), \quad (5.16)$$

где  $\theta^*$  имеет вид

$$\theta^* = (\gamma k)^{-1} \theta, \quad \gamma = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}. \quad (5.17)$$

Безразмерные константы  $k, \alpha$  соответствуют объемному и сдвиговому модулям.

*Замечание 2.* а) Гипоупругие соотношения (5.15) могут быть записаны в терминах инкрементов  $dp, d\theta^e$  или соответствующих скоростей:

$$\dot{p} = K_e^*(p) \dot{\theta}^e, \quad (5.18)$$

где  $K_e^*(p) = (p - p_t) K_e$ .

б) В гипотупругих соотношениях (5.15) сдвиговой модуль обычно считают либо постоянным [92], либо определяют из (5.15) в предположении постоянного коэффициента Пуассона [78], в этом случае

$$\mu_e = \gamma K_e^*(p). \quad (5.19)$$

Надо отметить, что случай постоянного коэффициента Пуассона и формула для модуля сдвига (5.19) представляются более реалистичными, чем условие постоянного модуля сдвига [78].

5.7.3. *Поверхность пластичности.* В модифицированных кэм-клей моделях поверхность пластичности описывается следующим уравнением [81, 84]

$$f(p, q_s, p_c) \equiv \frac{1}{\beta} \left( \frac{p^2}{a^2} - 2 \frac{p}{a} + 1 \right) + \frac{q_{D_\varepsilon}^2}{(Ma)^2} = 1, \quad (5.20)$$

где  $\beta$  – безразмерный параметр, определяющий форму эллипсоида: в докритической зоне (левая часть эллипсоида)  $\beta=1$ , в закритической зоне (правая часть)  $\beta \leq 1$ ; безразмерный параметр  $M$ , определяемый углом раствора критического конуса, определяет размер эллипсоида по оси  $q_s$ ;  $q_{D_\varepsilon}$  – одна из эквивалентных норм девиатора деформаций, часто в качестве  $q_{D_\varepsilon}$  используют норму Шура:

$$q_{D_\varepsilon} = \sqrt{D_\varepsilon \cdot D_\varepsilon}. \quad (5.21)$$

Причем девиатор соответствует упругим деформациям. В уравнении (5.20)  $a$  – параметр, определяющий собой размер эллипсоида по оси  $p$ :

$$a = \frac{p_c}{1+\beta}, \quad (5.22)$$

где  $p_c$  – текущее значение пластических давлений.

5.7.4. *Объемное упрочнение.* В соответствии с [80, 84], объемное упрочнение может быть задано в виде (i) кусочно-линейного продолжения соотношений (5.14); или (ii) с помощью соотношений гипотупругости (5.15), или (iii) с помощью гиперупругого потенциала (5.16). Надо отметить, что в моделях кэм-клей задается только объемное упрочнение.

(i) Объемное упрочнение, задаваемое в терминах кусочно-линейного продолжения уравнений (5.10), записывается в виде соответствующих скоростей

$$\dot{p} = K(p)\dot{\theta}. \quad (5.23)$$

Обычно для объемного модуля принимают ступенчатую зависимость от  $p$

$$K(p) = \begin{cases} K_e, & 0 < p < p_{c0} \\ K_p, & p > p_{c0} \end{cases} \quad (5.24)$$

где  $K_p$  – модуль упрочнения ( $K_p < K_e$ ), а  $p_{c0}$  – начальное значение давления,

отвечающего началу пластического течения. Интегрирование уравнений (5.23) дает

$$p = \begin{cases} K_e \theta, & 0 < p < p_{c0} \\ p_{c0} + K_p \theta_p, & p > p_{c0} \end{cases}, \quad (5.25)$$

где  $\theta_p = \theta - \theta_{c0}$  и  $\theta_{c0} = p_{c0} / K_e$ . При разгрузке  $K(p)$  совпадает с  $K_e$ .

(ii) Продолжение уравнений (5.15) для учета пластичности осуществляется, фактически, теми же уравнениями: первое уравнение в (5.15) можно переписать в терминах двух модулей, по аналогии с (5.23) [105, 106]

$$\frac{p_0 - p_t}{p - p_t} \dot{p} = \begin{cases} K_e \dot{\theta}_e, & 0 < p < p_{c0} \\ K_p \dot{\theta}_p, & p > p_{c0} \end{cases}. \quad (5.26)$$

*Замечание 3.* Аналогично уравнению (5.18), второе уравнение в (5.26) можно записать в терминах касательного модуля:

$$\dot{p} = K_p^*(p) \dot{\theta}_p, \quad (5.27)$$

где  $K_p^*(p) = (p - p_t) K_p$ .

(iii) Продолжение гиперупругого потенциала (5.16) в зону пластичности осуществляется с помощью введения зависимостей параметров  $\alpha$  и  $k$  от давления при  $p > p_{c0}$ :

$$W = p_0 e^{\theta^*} (k(p) + \alpha(p) I_{\epsilon}). \quad (5.28)$$

Наиболее простые зависимости  $\alpha(p)$ ,  $k(p)$  получаются в случае билинейных функций:

$$k(p) = \begin{cases} k_e & 0 < p < p_{c0} \\ k_p, & p > p_{c0} \end{cases}, \quad \alpha(p) = \begin{cases} \alpha_e & 0 < p < p_{c0} \\ \alpha_p, & p > p_{c0} \end{cases}. \quad (5.29)$$

**5.7.5. Закон пластического течения.** Для описания пластического течения, уравнение (5.20) должно быть дополнено уравнением, описывающим пластическое течение. В большинстве работ по кэм-клей пластичности [78, 81, 107, 108] принимается ассоциированный закон пластического течения. Это означает совпадение потенциалов течения и уравнения, определяющего поверхность пластичности (5.20), в каждой точке поверхности  $f(p, q_s, p_c) = 0$ :

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \nabla_{\sigma} f, \quad (5.30)$$

где  $\dot{\gamma}$  – параметр, определяющий скорость пластического течения. Уравнение (5.30) можно представить в виде двух уравнений в терминах шаровых и девиаторных тензоров

$$\dot{\epsilon}_p \equiv \dot{\gamma} \nabla_s f(p, q_s, p_c), \quad \dot{\theta}_p = 3 \dot{\gamma} \partial_p f(p, q_s, p_c). \quad (5.31)$$

Выполняя дифференцирование в (5.31), получаем

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \frac{2s}{(Ma)^2}, \quad \dot{\theta}_p = \dot{\gamma} \frac{6}{\beta a} \left( \frac{p}{a} - 1 \right). \quad (5.32)$$

Учитывая (5.22), второе уравнение в (5.32) принимает вид

$$\dot{\theta}_p = \dot{\gamma} \frac{6(1+\beta)}{\beta p_c} \left( \frac{p(1+\beta)}{p_c} - 1 \right). \quad (5.33)$$

В предположении  $p = p_c$  и, следовательно  $s = 0$ , уравнение (5.33) дает

$$\dot{\theta}_p = \dot{\gamma} \frac{6(1+\beta)}{p_c}. \quad (5.34)$$

Поскольку в точке  $(p_c, 0)$  выполняется одно из условий упрочнения (5.23) – (5.29), уравнение (5.34) может быть записано в терминах скорости  $\dot{p}_c$

$$\dot{p}_c = \dot{\gamma} \frac{6(1+\beta)}{p_c} g(p_c), \quad (5.35)$$

где функция  $g(p_c)$  определена соответствующим уравнением, описывающим упрочнение. Например, для уравнения упрочнения (5.25)

$$g(p_c) = K_p. \quad (5.36)$$

Ввиду (5.35) скорость  $\dot{\gamma}$  может быть определена из условия совместности Прагера:

$$\nabla_{\sigma} f \cdot \dot{\sigma} + \partial_{p_c} f \dot{p}_c = 0. \quad (5.37)$$

Подстановка в уравнение (5.37) представления для  $\dot{p}_c$  из уравнения (5.35) дает искомое уравнение для скорости  $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = - \frac{\nabla_{\sigma} f \cdot \dot{\sigma}}{\partial_{p_c} f} \times \frac{p_c}{6(1+\beta)g(p_c)}. \quad (5.38)$$

Уравнение (5.38) является дополняющим уравнением для уравнения пластического течения (5.32).

*5.7.6. Обобщение на случай конечных деформаций.* Модификация кэм-клей моделей для учета конечных деформаций предложена в [80, 109, 110 – 112]. В [110] в рамках теории конечных деформаций рассматривалась линейная зависимость  $\nu - \ln p$  и принималось предположение о постоянном модуле сдвига, а в [80, 109] построена аналогичная модель для постоянного коэффициента Пуассона.

Для обобщения кэм-клей модели на случай конечных деформаций, необходимо ввести безразмерный параметр  $\nu$  (относительный объем)

$$\nu = \frac{V}{V_{solid}}, \quad (5.39)$$

где  $V$  – текущий объем, содержащий поры, а  $V_{solid}$  – объем твердой фракции. В терминах относительного объема, может быть определена (конечная) объемная деформация

$$\theta = \det \mathbf{F} - \det \mathbf{I} = \frac{V - V_0}{V_0}, \quad (5.40)$$

где  $\mathbf{F}$  – градиент смещений;  $V_0$  – начальный объем.

Как правило [110] в теориях, учитывающих конечные деформации гранулированных сред, объемным деформированием твердой фракции пренебрегают, это позволяет представить объемную деформацию в виде

$$\theta = \frac{v - v_0}{v_0}. \quad (5.41)$$

Следуя [110, 112], закон состояния в упругой зоне удобно представить в виде

$$\dot{s} = 2\mu(p, \|e\|) \left( I_{6 \times 6} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \dot{e} \quad (5.42)$$

где  $\dot{s}$  – инкремент девиатора напряжений,  $I_{6 \times 6}$  – единичный тензор, действующий в шестимерном пространстве  $R^6$ ,  $\dot{e}$  – инкремент девиатора упругих деформаций,  $\mu(p, \|e\|)$  – модуль сдвиговых деформаций, зависящий от текущего объема и какой-либо нормы текущего девиатора упругих деформаций. Наиболее часто [110, 112] в качестве нормы используется шуровская норма:

$$\|e\| = \sqrt{e \cdot e}. \quad (5.43)$$

Заметим, что в законе гипоупругости (5.42) соответствующие инкременты предполагаются малыми, – это позволяет использовать линейные инкрементальные соотношения.

Для описания закона состояния при объемном упругом деформировании применяют следующий линейный в полулогарифмических координатах закон состояния [105, 110]

$$\ln \left( \frac{p}{p_0} \right) = -K_0 \theta_e, \quad (5.44)$$

где  $\theta_e$  – упругая часть объемной деформации;  $K_0$  – постоянный (в полулогарифмических координатах) объемный модуль;  $p_0$  – начальное давление.

Закон состояния (5.44) позволяет записать соответствующее уравнение состояния в терминах инкрементов

$$\frac{\dot{p}}{p} = -K_0 \dot{\theta}_e. \quad (5.45)$$

Именно в инкрементальной форме (5.45) уравнения гипоупругости применяются для описания объемного упругого деформирования.

Объединяя (5.42) и (5.45), уравнение состояния рассматриваемой гранулированной среды представимо в виде тензорного уравнения для гипоупругой среды

$$\dot{\sigma} = K(p) \dot{\theta}_e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu(p, \|e\|) \left( I_{6 \times 6} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \dot{e}, \quad K(p) = K_0 \frac{1}{p}. \quad (5.46)$$

В пластической стадии при учете больших деформаций используют уравнения (5.23) – (5.29), применявшиеся для описания пластичности с объемным упрочнением и отсутствием упрочнения в девиаторной плоскости, таким предполагается, что при больших деформациях инкременты девиаторных

компонент напряжений отсутствуют [105, 110], а объемная пластическая деформация описывается следующим соотношением (5.27). Заметим, что поверхность пластичности обычно [110] описывается уравнением (5.20). С учетом уравнений состояния (5.46), удастся решить задачу о деформировании гранулированной среды в условиях больших деформаций.

*5.7.7. Дальнейшее развитие модифицированных кэм-клей моделей.* Одна из модификаций, связанная с заменой эллипсоидальной поверхности пластичности на яйцеобразную, предложена в [113].

Еще одно развитие кэм-клей моделей связано с введением концепции ограничивающей поверхности (BS) [114]. Введение BS-поверхности позволяет охватить все допустимые в процессе нагружения поверхности пластичности. Модуль объемного упрочнения в этой теории задается как функция расстояния между текущей поверхностью пластичности и BS-поверхностью. Дальнейшее обобщение этой теории известно, как теория общей пластичности (General Plasticity, GP). Эта теория, развитая в работах [115, 116], позволяет рассматривать несколько BS-поверхностей. Как BS, так и GP модели обеспечивают задание гладкого перехода от упругого к пластическому состоянию.

В недавних работах [111, 112, 117, 118] рассмотрены приложения модифицированных кэм-клей моделей для описания поведения гранулированных сред в условиях циклических квазистатических [111, 112, 117, 118] нагружений, причем, как показано в [112, 117], в закритической области циклическое деформирование в девиаторной плоскости необходимо приводит к размягчению в плоскости, определяемой параметрами  $\theta - p$  (см. рис. 5.11) [112]; в то же время в докритической области, при циклическом деформировании в девиаторной плоскости наблюдается упрочнение в плоскости  $\theta - p$ .

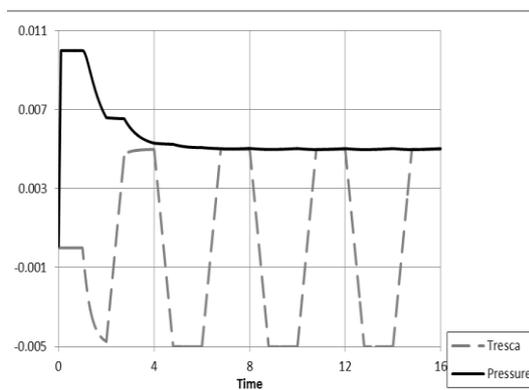


Рис. 5.11. Сверхкритическая зона: изменение девиаторных компонент напряжений и давления от времени: штриховая линия – девиаторные компоненты напряжений Треска; сплошная линия – гидростатическое давление; напряжения в МПа, [112]

Некоторые задачи нестационарной сейсродинамики, описываемые модифицированными кэм-клей моделями, рассмотрены в [119 – 122]. В недавних исследованиях [123 – 127] рассмотрены обобщения кэм-клей моделей на случай (трансверсальной) анизотропии как в упругой, так и в пластической зонах, причем в [127] наряду с трансверсальной анизотропией рассмотрен несколько более общий случай кубической сингонии.

## 5.8. Заключительные замечания

Примеры сейсмической защиты с помощью подушек из гранулированных метаматериалов, в том числе естественного происхождения, а также конечно-элементные модели зданий и сооружений, рассмотренные в п. 5.3 и 5.4, указывают на несколько неоспоримых преимуществ сейсмической защиты с помощью метаматериалов, по сравнению с широко применяемыми резинометаллическими сейсмоизоляторами. В частности, подушки из гранулированных метаматериалов отличаются значительно более широким диапазоном частот, в котором обеспечено демпфирование энергии сейсмических волн, существенно большая долговечность, соизмеримая со сроком службы самого сооружения, и меньшая стоимость.

Рассмотренные модели критического состояния и, в том числе кэм-клей модели, применяемые для анализа безкогезионных или слабо когезионных сред, можно рассматривать, как частный случай моделей с изотропным упрочнением и замкнутой поверхностью пластичности [100]. В этой связи кэм-клей модели наследуют свойства таких моделей и им присущи те же ограничения, что и другим моделям кэп-пластичности: это прежде всего выраженная область упругих деформаций, ограниченная поверхностью текучести и, принимаемый в большинстве исследований ассоциированный закон пластического течения.

Надо отметить, что известны также подходы, в которых рассматриваются модели с распределенной поверхностью пластичности (по терминологии [100] это модели с микропластичностью). Эти модели позволяют достичь эффектов, аналогичным эффектам, реализуемым в моделях критического состояния, в частности, в моделях микропластичности удается реализовать эффект разупрочнения, реализуемый в моделях критического состояния. Некоторые приложения моделей критического состояния к задачам волновой динамики рассматривались в [128].

В связи с моделированием поведения гранулированных метаматериалов с помощью кэм-клей моделей, возникает вопрос о применении других моделей, не связанных с кэм-клей моделями микропластичностью. По-видимому, наиболее перспективными моделями являются модели гипопластичности [129]. На основе гипопластичности могут моделироваться процессы динамического моделирования гранулированных метаматериалов без начальной когезии (т.е. при нулевом давлении) и, фактически, без зоны упругого деформирования. Последнее обстоятельство является представляется исключительно важным для механики рассматриваемых сред. Однако, использованию гипопластических моделей в нестационарной динамике пока препятствуют несколько обстоятельств, важнейшим из которых, является недостаток экспериментальных данных.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рашидов Т.Р., Кузнецов С.В., Мардонов Б.М., Мирзаев И. Прикладные задачи сейсродинамики сооружений. Книга 1. Действие сейсмических волн на подземный трубопровод и фундаменты сооружений, взаимодействующих с грунтовой средой. Ташкент: Navro'z, 2019. – 268 с.
2. Будах Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТЛ, 1955. – 684 с.
3. Мардонов Б.М., Джанзаков И.И., Бараев А.Б., Муханжанов Р.Х. Прикладные задачи механики бурения нефтяных и газовых скважин. Книга 2. Алматы: Мир, 2015. – 171 с.
4. Бабаков И.М. Теория колебаний. М: Дрофа, 2004. – 591 с.
5. Ципенюк И.Ф., Проскурина С.Ф., Мардонов Б.М., Мубораков Я.Н., Каюмов А.К. Сейсмические воздействия на здания и заглубленные сооружения. Ташкент. Фан, 1986. – 296 с.
6. Рашидов Т.Р., Шамисиев У.Ш., Мушеев Р.Н., Бовшовер А.З. Сейсродинамика пространственных систем. Ташкент: Фан, 1992. – 152 с.
7. Yoon S., Kim S., Park D. Estimation of Seismically Induced Longitudinal Strain in Pipelines Subjected to Incident Shear Wave // KSCE Journal of Civil Engineering. 2020.
8. Khakimov A.G. Reflection of a flexural wave from distributed mass attached to a pipeline // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. Vol. 6. P. 108 – 113.
9. Киселев В.А. Строительная механика. М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
10. Справочник по динамике сооружения М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
11. Муравский Г.Б. Действие движущейся системы сил на балку, лежащую на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 190 – 195.
12. Мардонов Б. Осмонкулов Д.С., Бараев А. К определению зон отрыва балки бесконечной длины от основания при действии на нее сосредоточенных сил // Газовая и волновая динамика. Вып. 2 . Изд.-во Московского университета. 1979. С. 191 – 198.
13. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
14. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Издательство иностранной литературы. 1960. – 832 с.
15. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Наука, 1963. – 879 с.
16. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 3. 1981. – 480 с.

17. Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.
18. Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. Ташкент: Фан, 1985. – 153 с.
19. Hajime Shinkai. Seismic design guidelines to mitigate upheaval buckling of small diameter pipes // Second European conference on earthquake engineering and seismology. Istanbul, 2014. (Pdf.437).
20. Tobita T., Iai S., Kang G.C., Konishi Y. Observed and estimated sewer manhole uplifts during earthquakes // Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering. Japan. 2009. Pp. 1061 – 1069.
21. Wakamatsu K., Yoshida N. Ground failures and their effects on structures in Midorigaoka district, Japan during recent successive earthquakes // Proceedings of the International conference on performance-based design in earthquake geotechnical engineering. Tokyo, 2009: Earthquake geotechnical case histories for performance-based design. Pp. 159 – 176.
22. Yasuda S., Tanaka T., Kiku H. Uplift of sewage man-holes during 1993 Kushiro-oki EQ., 2003 Tokachi-oki EQ. and 2004 Niigataken Chuetsu EQ// Proceeding of International conference on performance-based design in earthquake geotechnical engineering. – Tokyo, 2009: Earthquake geotechnical case histories for performance-based design. Pp. 95 – 108.
23. Ан Е.В. Устойчивость подземных трубопроводов при продольных пульсирующих нагрузениях // Безопасность энергетических сооружений. М., 2015. № 2(20). С. 43 – 47.
24. An E.V., Rashidov T.R. Seismodynamics of underground pipelines interacting with water-saturated fine-grained soil // Mechanics of solids. Vol. 50. 2015. Issue 3. P. 305 – 317.
25. Rashidov T.R., An E.V. Geometrically nonlinear buckling stability analysis of axially loaded underground pipelines // Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol. 54. No. 2. May, 2017. Pp. 76 – 80.
26. Rashidov T.R., Mardonov B.M., An E.V. Transverse vibrations of buried pipelines under axial loading within geometrically nonlinear theory // International Applied Mechanics. Vol. 55. No. 2. March, 2019. Pp. 229 – 238.
27. Ан Е.В. Подъем колодцев при сейсмическом нагружении подземных трубопроводов и меры по их недопущению // Узбекский журнал «Проблемы механики». Ташкент, 2016. № 3. С. 11– 14.
28. Меркин Д.Р., Бауэр С.М., Смирнов А.Л. Задачи по теории устойчивости М., 2002. – 128 с.
29. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней.

30. Пановко Я.Г. Введение в теории механических колебаний. М.: Наука, 1991. – 256 с.
31. Бекмирзаев Д.А. Численный метод решения сейсродинамики подземных трубопроводов. Ташкент: Fan va texnologiya, 2018. – 148 с.
32. Шапошников Н.Н., Тарабасов А.Д., Петров В.В., Мяченков В.И. Расчёт машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
33. Мяченков В.И., Мальцев В.П., Майборода В.П. и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов / Под общ.ред. В.И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
34. Дудаев М.А. Матрица жесткости балки Тимошенко в конечноэлементном анализе динамического поведения роторных турбомашин // Вестник ИрГТУ. 2014. №6 (89). С. 59 – 65.
35. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1986. – 512 с.
36. Джорж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир. 1984. – 333 с.
37. Зенкевич О., Морган А. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. – 318 с.
38. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. -552с.
39. Мирзаев И., Бекмирзаев Д. Комплекс программ для исследования сейсродинамики пространственных систем подземных трубопроводов. Государственное патентное ведомство РУз. Свидетельство № DGU 05586. 17.07.2018 г.
40. Мирзаев И., Бекмирзаев Д. Анимационное представление динамики пространственной системы подземных трубопроводов при сейсмических воздействиях. № DGU 08746, 07.08.2020 г.
41. Мирзаев И. Математические модели и методы расчета зданий и сооружений на сейсмостойкость // Узбекский журнал «Проблемы механики». 2017. № 2-3. С. 72 – 74.
42. Мирзаев И. Анимационное представление динамики пространственных конструкций // Узбекский журнал «Проблемы механики». 2017. №4. С. 32–35.
43. Рашидов Т., Мирзаев И., Юлдашев Т., Бекмирзаев Д. Численное решение задач сейсродинамики пространственной системы подземных трубопроводов // “Вестник”. Международной ассоциации экспертов по сейсмостойкому строительству. Бишкек. 2018. №1. С. 131 – 136.

44. Рашидов Т.Р., Мардонов Б., Мирзаев И. О колебаниях подземных сооружений под действием сейсмических волн // Сборник материалов совместной Международной научно-практической конференции, посвященной году Узбекистана в Казахстане «Актуальные проблемы и перспективы развития строительных конструкций: инновации, модернизация и энергоэффективность в строительстве». Алматы, 2018. С. 7 – 14.
45. Рашидов Т., Мирзаев И., Бекмирзаев Д. Сейсродинамика пространственной системы подземных трубопроводов на основе реальных записей землетрясений // Международная конференция “Перспективы интенсивного подхода к инновационному развитию”. Т.1. Наманган, 2018. С. 197 – 201.
46. Рашидов Т.Р., Мардонов Б., Мирзаев И. О колебаниях подземных трубопроводов под действием сейсмических волн // Узбекский журнал «Проблемы механики». Ташкент, 2018. № 4. С. 19 – 24.
47. Рашидов Т.Р., Мардонов Б.М., Мирзаев И.М. Действие сейсмических волн на трубопровод конечной длины, сопряженный с узлами упругими элементами // Узбекский журнал «Проблемы механики». Ташкент, 2019. № 1. С. 3 – 8.
48. Мирзаев И., Бекмирзаев Д.А. Численное решение задач сейсродинамики пространственных систем подземных трубопроводов // Тезисы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий». 14 – 15 ноября, 2019. Ташкент. С. 88
49. Мирзаев И., Бекмирзаев Д.А. Исследование влияние массы сложного узла подземных трубопроводов на действие реальных записей землетрясений // Республиканской научно-практической конференции «Прикладные и фундаментальные проблемы естественных наук» 23-октября 2019. Ташкент. С. 212 – 215.
50. Mirzaev, I., Bekmirzaev, D.A., Kosimov, E.A. Formation of Bending Waves in Underground Extended Pipelines under the Action of Seismic Wave // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. 2019. 6(8): P. 10553 – 10557.
51. Bekmirzaev D.A., Mirzaev I. Dynamic Processes in Underground Pipelines of Complex Orthogonal Configuration at Different Incidence Angles of Seismic Effect // International Journal of Scientific & Technology Research. Vol. 9. India, 2020. Issue 4. P. 2449 – 2453.

52. Bekmirzaev D.A., Mirzaev I., Mansurova N.Sh., Kosimov E.A., Juraev D.P. Numerical methods in the study of seismic dynamics of underground pipelines // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. № 869. 052035.
53. Ишихара К. Поведение грунтов при землетрясениях. СПб.: НПО «Геореконструкция-фундаментпроект», 2006. – 384 с.
54. Хачиян Э.Е. Прикладная сейсмология. Ереван: Гитутюн, 2008. – 491 с.
55. Rashidov T.R., Bekmirzaev D.A. Seismodynamics of Pipelines Interacting with the Soil // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2015. Vol. 52. № 3. Pp. 149 – 154.
56. Rashidov T.R., Yuldashev T., Bekmirzaev D.A. Seismodynamics of underground pipelines with arbitrary direction of seismic loading // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2015. V. 55. № 4. P. 243 – 247.
57. Bekmirzaev D.A., Mansurova N.Sh., Nishonov N.A, Kosimov E.A., Numonov A.T. Solution of the problem of dynamics of underground pipelines under longitudinal seismic loading // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. № 883. 012045.
58. Газлийские землетрясения 1976 г. Инженерный анализ последствий. М.: Наука, 1982. – 196 с.
59. Исраилов М.Ш. Сейсмодинамика протяженных подземных сооружений: границы применимости инженерных подходов и неправомочность аналогии с наземными сооружениями // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2017. № 1. С.55 – 60.
60. Султанов К.С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. – 392 с.
61. Массарш К.Р. Деформационные свойства мелкозернистых грунтов на основе показателей сейсмических испытаний // Реконструкция городов и геотехническое строительство. 2005. № 9. С. 203 – 220.
62. Mirzaev I.M., Nikiforovskii V.S. Plane wave propagation and fracture in elastic and imperfectly elastic jointed structures // Soviet Mining Science 9. 1973. P. 161 – 165.
63. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979. – 272 с.
64. Virginia Corrado, Berardino D’Acunto, Nicola Fontana, Maurizio Giugni. Inertial Effects on Finite Length Pipe Seismic Response // Mathematical Problems in Engineering. Hindawi Publishing Corporation. Vol. 2012. 2012.
65. Ильюшин А.А., Рашидов Т.Р. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод // Изв. АН РУз. Сер. Техн. Наук, 1971. № 1. С. 3–11.

66. Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Московский лицей, 1998. – 261 с.
67. Mogilevsky R.I., Ormonbekov T.O., Nikitin L.V. Dynamics of rods with interfacial dry friction // *J. Mech. Behav. Mater.* V.5. N 1. 1993. P. 85 – 93.
68. Мирзаев И.М. Динамика предварительного напряженного стержня при действии ударной нагрузки // *Динамические задачи неупругой среды: Динамика сплошной среды. Институт гидродинамики СО РАН СССР. Вып. 71. 1985. С. 65 – 74.*
69. Исаков А.Л., Шмелев В.В. Анализ волновых процессов при забивании металлических труб в грунт с использованием генераторов ударных импульсов // *Физико-технологические проблемы разработки полезных ископаемых. 1998. № 2. С. 48 – 58.*
70. Смирнов А.Л. Расчет процесса ударного погружения свай в грунт // *Физико-технологические проблемы разработки полезных ископаемых. 1989. № 4. С. 72 – 79.*
71. Александрова Н.И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I: Внешняя среда не деформируема // *Физико-технологические проблемы разработки полезных ископаемых. 2012. № 5. С. 104 – 119.*
72. Колмакова Е. Действие стационарной сейсмической волны на длинный трубопровод при учете пластических свойств взаимодействия с грунтом. В кн.: *Трение, износ и смазочные материалы. Т.5 // Труды международной научной конф., Ташкент: Фан, 1985. С. 139 – 140.*
73. Якупов Р.Г., Зарипов Д.М. Сейсмостойкость подземного магистрального трубопровода // *Труды Института механики УНЦ РАН, 2011. С. 275 – 286.*
74. Айнбиндер А.Б., Камерштейн А.Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1982. – 342с.
75. Ан Е.В. Динамическая устойчивость трубопроводов, расположенных в водонасыщенных грунтах. Ташкент: Fan va texnologiya, 2013. – 112 с.
76. <https://helpiks.org/6-62558.html>
77. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. Киев: Наук. Думка. 1985. – 262 с.
78. Borja R.I., Lee S.R. Cam-Clay plasticity. Part I: Implicit integration of elastoplastic constitutive relations // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1990. Vol. 78. P. 49 – 72.
79. Borja R., Sama K., Sanz P. On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2003. Vol. 192. P. 1227 – 1258.

80. Borja R., Tamagnini C. Cam-Clay plasticity, Part III: Extension of the infinitesimal model to include finite strains // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1998. Vol. 155. P. 73 – 95.
81. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress – strain behavior of wet clay // In: *Engineering Plasticity*, eds. J. Heyman and F.A. Leckie. Cambridge Univ. Press. 1968. P. 535 – 609.
82. Alawaji H., Runesson K., Sture S. and Axelsson K. (1992). Implicit integration in soil plasticity under mixed control for drained and undrained response // *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 1992. Vol. 13. P. 737 – 756.
83. Armero F., Pérez-Foguet A. On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity. Part I: The variational structure // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2002. Vol. 53. P. 297 – 329.
84. Bigoni D., Hueckel T. Uniqueness and localization associative and non-associative elasto–plasticity // *Int. J. Solids Struct.*, 1991. Vol. 28. P. 197 – 213.
85. Buscarnera G., Dattola G., di Prisco C. Controllability, uniqueness and existence of the incremental response: A mathematical criterion for elastoplastic constitutive laws // *Int. J. Solids Struct.* 2011. Vol. 48. P. 1867 – 1878.
86. Conti R., Tamagnini C., De Simone A. Critical softening in Cam-Clay plasticity: Adaptive viscous regularization, dilated time and numerical integration across stress–strain jump discontinuities // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2013. Vol. 258. P. 118 – 133.
87. Dal Maso G., De Simone A. Quasistatic evolution for cam-clay plasticity: Examples of spatially homogeneous solutions // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2009. Vol. 19. P. 1643 – 1711.
88. Dal Maso G., De Simone A., Solombrino F. Quasistatic evolution for cam-clay plasticity: A weak formulation via viscoplastic regularization and time rescaling // *Calc.Var.* 2011. Vol. 40. P. 125 – 181.
89. Dal Maso G., Solombrino F. Quasistatic evolution for Cam-Clay plasticity: The spatially homogeneous case // *Netw. Heter. Media.* 2010. Vol. 5. P. 97 – 132.
90. Al Tabbaa A., Wood D.M. An experimentally based bubble model for clay // In: *Proc. 3rd Int. Symp. Num. Models Geomech. (NUMOG III)*. 1989. P. 90 – 99.
91. Andersen K.H. Bearing capacity under cyclic loading - offshore, along the coast, and on land // *Can. Geotech J.* 2009. Vol. 46. P. 513 – 535.
92. Carter J.P., Booker J.R., Wroth C.P. A critical state soil model for cyclic loading // In: *Soil mechanics – Transient and cyclic loading*, G.N. Pande, O.C. Zienkiewicz, eds., Wiley, Chichester. 1982. P. 219 – 252.

93. Liu J., Xiao J. (2010). Experimental study on the stability of railroad silt subgrade with increasing train speed // *J. Geotech. Geoenviron. Eng.* 2010. Vol. 10. P. 833 – 841.
94. Mroz Z. On the description of anisotropic work hardening // *J. Mech. Phys. Solids.* 1967. Vol. 15. P. 163 – 175.
95. Puppala A.J., Mohammad L.N., Allen A. Permanent deformation characterization of subgrade soils from RLT test // *J. Materials Civil Eng.* 1999. Vol. 11. P. 274 – 282.
96. Sangrey D.A. Cyclic loading of sands, silts and clays. *Earthquake engineering and soil dynamics* // *Proc. ASCE Geot. Eng. Div. Conf.* 1978. P. 836 – 851.
97. Selig E.T. Soil failure modes in undrained cyclic loading // *J. Geot. Eng. Div.* 1981. P. 539 – 551.
98. Takahashi M., Hight D.W., Vaughan P.R. Effective stress changes observed during undrained cyclic triaxial tests on clay // In: *Proc. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading*, G.N. Pande and O. C. Zienkiewicz, eds., Balkema, Rotterdam. 1980. P. 201 – 209.
99. Uzan J. Characterization of granular materials // *Transportation Research Record 1022*, TRB. Washington DC: National Research Council. 1985. P. 52– 59.
100. Wood D.M. *Soil behaviour and critical state soil mechanics.* Cambridge University Press. 1990.
101. Zhou J., Gong X. Strain degradation of saturated clay under cyclic loading // *Can. Geotech. J.* 2001. Vol. 38, P. 208 – 212.
102. Ni J., Indraratna B., Geng X., Carter J., Chen Y. Model of soft soils under cyclic loading // *Int. J. Geomech. Eng.* 2014. Vol. 10. P. 1 – 10.
103. Shahin M.A., Loh R.B.H., Nikraz H.R. Some observations on the behaviour of soft clay under undrained cyclic loading // *J. Geo Engineering*, 2011. Vol. 6. P. 109 – 112.
104. Papuga J. A survey on evaluating the fatigue limit under multiaxial loading // *Int. J. Fatigue.* 2011. Vol. 33. P. 153 – 165.
105. Hashiguchi K. On the linear relations of  $V-\ln p$  and  $\ln v-\ln p$  for isotropic consolidation of soils // *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.* 1995. Vol. 19. P. 367 – 376.
106. Schofield A.N., Wroth C.P. *Critical State Soil Mechanics.* McGraw-Hill, 1968.
107. Roscoe K.H., Schofield A.N., Wroth C.P. On the yielding of soils // *Geotechnique.* 1958. Vol. 8. P. 22 – 53.
108. Roscoe K.H. and Schofield A.N. Mechanical behavior of an idealized \wet clay // In: *Proc. 2nd European Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Wiesbaden. Vol. 1. 1963. P. 47 – 54.

109. Callari C., Auricchio F. and Sacco E. A finite-strain cam-clay model in the framework of multiplicative elasto-plasticity // *Int. J. Plasticity*. 1998. Vol. 14. P. 1155 – 1187.
110. Simo J.C., Meschke G. A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials // *Comput. Mech*. 1993. Vol. 11. P. 253 – 278.
111. Гольдштейн Р.В., Кузнецов С.В. Модифицированная КЭМ-кляй модель. Основы теории и численный анализ // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. № 2. С. 162 – 172.
112. Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V. The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // *Archive of Applied Mechanics*. 2016. Vol. 86. P. 2021 – 2031.
113. Van Eekelen S.J., Van den Berg P. The delft egg model, a constitutive model for clay // In: *DIANA Computational Mechanics '94*, 1994. P. 103 – 116.
114. Dafalias Y.F., Herrmann L.R. A bounding surface soil plasticity model // In: *Proc. Int. Symp. Soils Cyclic Trans. Load*. Swansea. 1980. P. 335 – 345.
115. Auricchio F., Taylor R. A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes // *Int. J. Plasticity*. 1999. Vol. 15. P. 1359 – 1378.
116. Auricchio F., Taylor R.L., Lubliner J. Application of a return map algorithm to plasticity models // In: Owen D.R.J. et al. (Eds.), *Computational Plasticity*. CIMNE, Barcelona. 1992. P. 2229 – 2248.
117. Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V. The modified Mohr–Coulomb and Drucker–Prager models. influence of eccentricity on hysteresis loop and energy loss // *Int. J. Comp. Civil Struct. Eng*. 2017. Vol. 13. P. 35 – 44.
118. Ilyashenko A.V. Kuznetsov S.V. Cam-clay models in mechanics of granular materials // *Mech. Eng*. 2017. Vol. 21. P. 813 – 821.
119. Гольдштейн Р.В., Ильяшенко А.В., Кузнецов С.В. Волны Лэмба в анизотропных средах: шестимерный формализм Коши // *Математическое моделирование*. 2017. № 10. С. 86 – 94.
120. Sijja L., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // *Computers and Geotechnics*. 2019. Vol. 109. P. 69 – 81.
121. Kuznetsov S.V., Maigre H. Granular metamaterials for seismic protection. Hyperelastic and hypoelastic models // *IOP Conference Series*. 2020. Vol. 1425. Page # 012184.

122. Pham H.V., Dias D., Dudchenko A.V. 3D modeling of geosynthetic-reinforced pile-supported embankment under cyclic loading // *Geosynthetics Int.*, 2020. Vol. 27. P. 157 – 169.
123. Coombs W.M. Continuously unique anisotropic critical state hyperplasticity // *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 2017. Vol. 41. P. 578 – 601.
124. Sivasithamparam N., Castro J. An anisotropic elastoplastic model for soft clays based on logarithmic contractancy // *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 2016. Vol. 40. P. 596 – 621.
125. Mo P.Q., Yu H.S. Undrained cavity contraction analysis for prediction of soil behavior around tunnels // *Int. J. Geomech.* 2017. Vol. 17. Paper # 04016121.
126. Liu K., Chen S.L. Theoretical analysis on drained cylindrical cavity expansion in anisotropic modified cam clay // In: *GeoShanghai International Conference 2018*. Shanghai. China. May 27 – 30. Paper # A0555.
127. Chen S.L. and Liu K. Undrained cylindrical cavity expansion in anisotropic critical state soils // *Geotechnique*. 2019. Vol. 69. P. 189 – 202.
128. Zienkiewicz O., Mroz Z. Generalized plasticity formulation and applications to geomechanics // In: *Mech. Eng. Materials*. Wiley. Chichester. 1984. P. 655 – 679.
129. Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V. Continuum models in dynamics of granular media. Review // *Computational Continuum Mechanics*. Vol. 8(1). P. 35 – 59.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Глава 1. Колебания системы «подземный трубопровод – узлы – грунтовая среда» при действии продольной волны.....</b>	<b>4</b>
1.1. Исследование волновых процессов в протяженном подземном трубопроводе при кусочно-однородном изменении коэффициента взаимодействия по его длине.....	4
1.2. Колебания трубопровода при наличии зоны контакта по закону сухого трения.....	15
1.3. Действие волн на трубопровод, сопряженный с одним массивным узлом, и кусочно-однородным коэффициентом взаимодействия с грунтовой средой.....	21
1.4. Действие волны на трубопровод, несущий на концах массивные узлы, с упругими элементами контакта с грунтом.....	25
1.5. Колебания трубопровода сопряженного с узлами через упругие элементы.....	33
1.6. Действие сейсмических волн на систему подземных трубопроводов сопряженных с массивными узлами.....	38
<b>Глава 2. Поперечные колебания подземного трубопровода, сопряженного с массивными узлами .....</b>	<b>47</b>
2.1. Воздействие плоской продольной волны на трубопровод конечной длины с шарнирно закрепленным массивным узлом...	47
2.2. Поперечные колебания подземных трубопроводов при различных законах взаимодействия их с окружающим грунтом..	54
2.3. Продольный изгиб трубопровода в грунтовой среде при наличии зоны отрыва.....	60
2.4. Действие сейсмических волн на трубопровод, взаимодействующий с грунтом по различным законам.....	63
2.5. Продольно-поперечные колебания трубопровода с учетом конечных деформаций изогнутой оси при действии волны	

Релея.....	68
<b>Глава 3. Устойчивость и колебания подземного трубопровода, сопряженного с массивными узлами .....</b>	<b>74</b>
3.1. Исследование устойчивости и оценка напряженного состояния трубопровода, сопряженного с массивным узлом .....	74
3.2. Устойчивость подземного трубопровода при шарнирном закреплении с массивным узлом.....	83
3.3. Устойчивость трубопровода с учетом конечных деформаций изогнутой оси.....	87
<b>Глава 4. Численное решение задач сейсродинамики пространственных систем подземных трубопроводов сложной структуры.....</b>	<b>89</b>
4.1. Метод конечных элементов в сейсродинамике пространственных систем подземных трубопроводов.....	89
4.2. Алгоритм численного решения задач сейсродинамики пространственных систем подземных трубопроводов.....	103
4.3. Исследование влияния массы сложного узла подземных трубопроводов ортогональной конфигурации на основе реальных записей землетрясений.....	107
4.4. Численное моделирование сейсродинамических процессов в протяженном подземном трубопроводе по реальным записям землетрясений.....	124
4.5. Волновые процессы в протяженном подземном трубопроводе при взаимодействии с грунтом по модели «идеального упругопластического тела».....	128
4.6. Постановка и численное решение нелинейных задач об устойчивости подземного трубопровода при статических нагрузках и на действие реальных землетрясений.....	134

<b>Глава 5. Сейсмические подушки и барьеры из метаматериалов</b>	
<b>для защиты зданий и сооружений от сейсмических</b>	<b>143</b>
<b>воздействий.....</b>	
5.1. Введение.....	143
5.2. Сейсмические подушки для защиты мостовых конструкций.....	145
5.3. Сейсмическая защита зданий атомной энергетики.....	146
5.4. Сейсмическая защита зданий повышенной этажности.....	148
5.5. Некоторые преимущества систем сейсмической защиты на основе метаматериалов.....	149
5.6. Математические модели, применяемые при динамических расчетах гранулированных метаматериалов.....	149
5.7. Основные уравнения.....	150
5.7.1. Основные обозначения.....	150
5.7.2. Упругое состояние.....	152
5.7.3. Поверхность пластичности.....	153
5.7.4. Объемное упрочнение.....	153
5.7.5. Закон пластического течения.....	154
5.7.6. Обобщение на случай конечных деформаций.....	155
5.7.7. Дальнейшее развитие модифицированных кэм-клей моделей.....	157
5.8. Заключительные замечания.....	158
Список использованной литературы.....	159

**Т.Р. РАШИДОВ, С.В. КУЗНЕЦОВ, Б.М. МАРДОНОВ, И. МИРЗАЕВ**

# ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ

Книга 2

## КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Редактор И.Халилов  
Технический редактор Л.П.Шарафутдинова  
Компьютерная верстка М. Хакимов

Издательство «Навруз».  
Лиц. № АІ.170. Адрес: Ташкент, ул. А.Темур - 19.  
Разрешено в печать 12.12.2020. Формат 60x84 1/16.

---

Гарнитура «Times New Roman». Офсетная печать.  
Усл. печ.л. 11. Заказ № 7513134. Тираж 100.  
Отпечатано в типографии ООО «Munis design group».  
г.Ташкент. 100170, ул. Э.Циолковского - 356.

ISBN 978-9943-659-43-8



9 789943 659438