

Г. М. Розенблат

Сухое трение в задачах и решениях



Москва ♦ Ижевск

2009

УДК ???
ББК ???
???

Интернет-магазин
МАТЕС

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - нефтегазовые технологии
-

Розенблат Г. М.

Сухое трение в задачах и решениях. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. — 52 с.

В представленном учебном пособии рассматриваются и обсуждаются постановки и решения некоторых часто встречающихся в учебно-преподавательской практике задач по теоретической механике с сухим (кулоновым) трением. В заключительной части рассмотрены постановки и решения двух известных задач из теории удара с исследованием послеударного движения.

Пособие предназначено для студентов вузов, которых теоретическая механика интересует не в формальном смысле этого слова, а также для школьников старших классов. Задачи и решения из пособия могут оказать определенную помощь в работе преподавателей механики и физики в школах и вузах.

ISBN 978-5-93972-???-?

ББК ???

© Г. М. Розенблат, 2009

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Введение

Примеры учат не меньше, чем правила,
а ошибки — больше, чем правильные,
но непонятные доказательства.

Арнольд В. И.¹

Задачи о равновесии и перемещении тел при наличии сил сухого трения занимают особое место среди задач классической механики, учитывающих диссипацию (силы сопротивления). Дело в том, что элементарная сила сухого трения такова, что модуль ее, вообще говоря, не зависит от скорости относительного перемещения контактирующих точек, но направление всегда антипараллельно вектору этой скорости. Аналитически этот факт выражается формулой:

$$d\vec{F}_{\text{тр}} = -k \cdot p \cdot dS \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad (0.1)$$

где k — коэффициент (трения), p — нормальное давление в рассматриваемом элементе площади dS , \vec{v} — скорость (относительная) элемента dS . Особенность и неопределенность возникает тогда, когда в (0.1) скорость \vec{v} обращается в нуль. Кроме того, из (0.1) мы видим, что $d\vec{F}_{\text{тр}}$ при переходе вектора \vec{v} через значение $\vec{v} = 0$ может скачком изменить свое направление, сохраняя свой модуль неизменным. Этот факт является причиной многих интересных механических (динамических) эффектов, встречающихся на практике, например легкость перевода движущегося ремня с одного шкива на другой, легкость поворачивания автомобиля на ходу, занос заблокированных колес автомобиля на скользкой дороге и т. д.

Неопределенность в (0.1) при $v = 0$ приводит к рассмотрению такого понятия, как сила трения покоя. Направление и модуль этой силы,

¹ Арнольд В. И. Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора). — М.: МЦНМО, 2009. — 144 с.

вообще говоря, неопределенны. Для модуля можно указать лишь верхнюю границу, близкую к соответствующей силе трения скольжения. Для направления принимается гипотеза Пэнлеве [1], которая предписывает антипараллельность вектора силы трения покоя главному вектору сил, стремящихся заставить рассматриваемый элемент скользить. Эти факты обуславливают наличие интересных эффектов в статических задачах, например эффекты заклинивания и самоторможения, которые используются при проектировании тормозных устройств для транспортных средств.

В представленном пособии обсуждаются решения нескольких «элементарных» задач часто встречающихся в учебно-научно-методической литературе при рассмотрении вопросов, связанных с силами сухого трения. Кроме того, (с точки зрения автора) эти задачи представляют самостоятельный интерес и доступны для понимания школьниками старших классов и студентам вузов. Некоторым задачам присвоено имя автора, из публикации которого они были почерпнуты.

В настоящем пособии помещено десять задач, восемь из которых касаются непосредственно сухого трения, а две последние — неупругого удара, с последующим исследованием послеударного движения. Полученные решения и результаты докладывались автором в марте 2009 года на заседании Научно-методического совета по теоретической механике при Минобрнауки РФ (председатель, академик МАН ВШ, профессор Мартыненко Ю. Г.). Пользуясь случаем, автор выражает свою благодарность за обсуждение и полезные замечания всем участникам этого заседания и, в особенности, профессорам Самсонову В. А., Формальскому А. М. и Иванову А. П. Последние две задачи об ударе обсуждались с академиком РАН Журавлевым В. Ф., которому автор также выражает свою искреннюю благодарность за высказанные замечания и полезные дополнения. Проблема, связанная с постановкой и решением задачи 8 настоящего пособия, обсуждалась с академиком РАН В. В. Козловым, которому автор выражает свою признательность за внимание, высказанные замечания и поддержку.

Отдельную благодарность автор выражает профессору А. В. Борису и сотрудникам издательства РХД за оперативную поддержку при оформлении настоящего пособия.

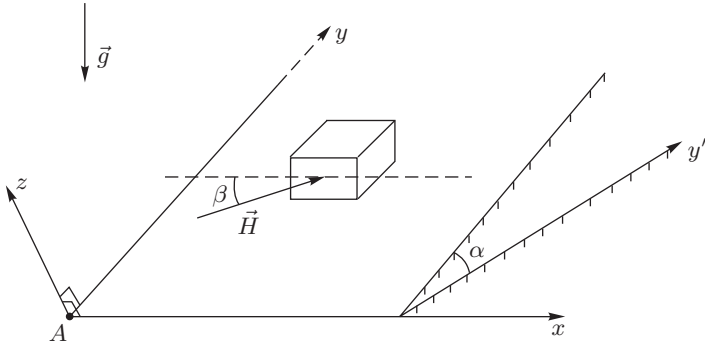


Рис. 1. Задача Р.Фейнмана. Тело на наклонной плоскости с трением [2]: $Axyz$ — система координат, связанная с наклонной плоскостью; xy' — горизонтальная плоскость; \vec{H} — сдвигающая сила, параллельная плоскости xy' ; β — угол, образуемый вектором \vec{H} с горизонталью Ax ; α — угол наклона шероховатой плоскости

1. **Задача Р. Фейнмана** (задача 12.3 из [2], стр. 39, решение — стр. 184). Цитируем по книге [2].

«Тело весом W покоится на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α (см. рис. 1).

а) **Коэффициент статического трения $\mu = 2 \operatorname{tg} \alpha$; найти минимальную горизонтальную (курсив Р. Фейнмана) силу H_{\min} , которая способна будет привести тело в движение (см. рис. 1).**

б) **В каком направлении начнет двигаться тело?»**

Приведем кратко *решение* этой задачи. На рис. 1 показана система координат $Axyz$, связанная с наклонной плоскостью, β — угол, образуемый силой \vec{H} с горизонталью Ax , причем \vec{H} параллельна горизонтальной плоскости xy' . Имеем:

$$H_x = H \cos \beta, \quad H_y = H \sin \beta \cos \alpha, \quad H_z = -H \sin \beta \sin \alpha,$$

где $H > 0$, если \vec{H} направлена к наклонной плоскости, $H < 0$, если наоборот, причем $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Принимая в учет силу тяжести \vec{W} , мы полу-

чаем для равнодействующей $\vec{\Phi}$ сил, которые действуют на тело (кроме силы трения $\vec{F}_{\text{тр.}}$):

$$\Phi_x = H \cos \beta, \quad \Phi_y = H \sin \beta \cos \alpha - W \sin \alpha,$$

$$\Phi_z = N - H \sin \alpha \sin \beta - W \cos \alpha = 0,$$

где N — нормальная реакция плоскости.

Сила трения $\vec{F}_{\text{тр.}}$ в момент начала сдвига тела действует в наклонной плоскости, направлена против вектора $\{\Phi_x, \Phi_y, 0\}$ и в точности равна ему по модулю. В момент начала скольжения $F_{\text{тр.}} = \mu N$. Поэтому величина H удовлетворяет уравнению:

$$\mu^2 (W \cos \alpha + H \sin \alpha \sin \beta)^2 = H^2 \cos^2 \beta + (H \sin \beta \cos \alpha - W \sin \alpha)^2, \quad (1.1)$$

которое имеет (как квадратное относительно H) в точности два корня. Отметим, что уравнение (1.1) может быть получено из уравнений статики с использованием понятия *силы трения покоя!*

Примем $W = 1$ и обозначим $y = \sin \beta$ ($\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$). Тогда, учитывая, что $\text{tg } \alpha = \frac{\mu}{2}$, получим решения уравнения (1.1):

1°) если $H > 0$ (сила \vec{H} к наклонной плоскости):

$$H_{1,2} = \mu \left[-\frac{2y(1 + \mu^2)}{z} \pm \frac{\sqrt{4y^2(1 + \mu^2)^2 - 3z}}{|z|} \right], \quad (1.2)$$

где $z = y^2 \mu^2 (1 + \mu^2) - 4 - \mu^2$.

2°) если $H < 0$ (сила \vec{H} от наклонной плоскости):

$$|H| = H_{1,2} = \mu \left[\frac{2y(1 + \mu^2)}{z} \pm \frac{\sqrt{4y^2(1 + \mu^2)^2 - 3z}}{|z|} \right], \quad (1.3)$$

где $z = y^2 \mu^2 (1 + \mu^2) - 4 - \mu^2$.

Рассмотрим случай 1°. Если $y = \sin \beta$ таково, что $z > 0$, то оба корня в (1.2) отрицательны, т. е. сила \vec{H} при таких β не может сдвинуть

тело (заклинивание!). Если $y = \sin \beta$ таково, что $z < 0$, то положительный корень в (1.2) получается при выборе знака + и равен

$$H_1 = \mu \left[\frac{2y(1 + \mu^2) + \sqrt{4y^2(1 + \mu^2)^2 + 3|z|}}{|z|} \right].$$

Нетрудно видеть, что минимум этой функции достигается при $y = \sin \beta = 0 \rightarrow \beta = 0$ и равен

$$H_1^* = \frac{\sqrt{3}\mu}{\sqrt{4 + \mu^2}}.$$

Рассмотрим случай 2°. Нетрудно установить, что наименьший положительный корень из (1.3) будет такой:

$$\begin{aligned} H_2 &= \mu \left[\frac{2y(1 + \mu^2)}{z} - \frac{\sqrt{4y^2(1 + \mu^2)^2 - 3z}}{z} \right] \\ &= \frac{3\mu}{2y(1 + \mu^2) + \sqrt{4y^2(1 + \mu^2)^2 - 3z}}. \end{aligned}$$

Несложное вычисление показывает, что максимум знаменателя в последнем выражении, т. е. минимум H_2 , достигается при $y = \sin \beta = 1$, т. е. при $\beta = \frac{\pi}{2}$. Получим:

$$H_2^* = \frac{\mu}{2 + \mu^2}.$$

Ясно, что $H_2^* < H_1^*$, т. е. минимальное усилие реализуется при $\beta = \frac{\pi}{2}$ и сила \vec{H} направлена от плоскости. Такой же ответ приведен в книге [2], однако составители решения *заранее* предположили, что минимальное усилие \vec{H} реализуется при $\beta = \frac{\pi}{2}$, а затем выбрали из двух сил ($H > 0$ и $H < 0$) меньшую. Ясно, что этот факт не очевиден, тем более, как показано в настоящем решении, при требовании $H > 0$ (сила направлена к плоскости) минимум реализуется при $\beta = 0$ (сила направлена вдоль плоскости, т. е. параллельна оси Ax !).

Отметим, что этот же ответ ($H < 0$, $\beta = \pi/2$) справедлив при $\text{tg } \alpha = \varepsilon \cdot \mu$, где $\varepsilon \in (0, 1)$.

2. Задача С. П. Тимошенко. В книге С. Тимошенко, Д. Юнг [3, стр. 56] приведена следующая задача. Цитируем по книге [3].

«Человек с помощью веревки AB (см. рис. 2) тащит по горизонтальному бетонному полу каменную глыбу весом $G = m_2g$. Определить, при каком угле α между веревкой и горизонтом тянущая сила, необходимая для создания скольжения камня, будет минимальной? Какова будет величина этой минимальной силы, если угол трения равен $\varphi = \arctg \mu$?»

Авторы книги [3] приводят элегантное и короткое решение, составляя треугольник сил для глыбы в момент начала скольжения (т. е. в момент предельного равновесия). Это решение представлено на рис. 3, откуда получаются ответы:

$$\alpha = \varphi = \arctg \mu, \quad P_{\min} = G \sin \varphi = G \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Однако более внимательный анализ этой задачи должен учитывать возможность скольжения самого человека при попытке сдвинуть глыбу! Такая возможность реально существует, т. к. масса человека меньше массы глыбы, а коэффициент трения для человека небескопечен. Примем (для простоты), что коэффициент трения для человека также равен μ . Решение такой задачи (т. е. с учетом требования *неподвижности* человека) подробно приведено в книге [4], поэтому сформулируем лишь результат, предполагая $\mu < 1$.

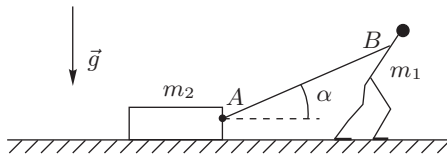


Рис. 2. Задача С. П. Тимошенко [3]: m_2 — масса груза; m_1 — масса человека; α — угол наклона веревки к горизонтالي

- 1) Если $m_1 > m_2 \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$, то $P_{\min} = G \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$; $\alpha = \arctg \mu$, $G = m_2g$.

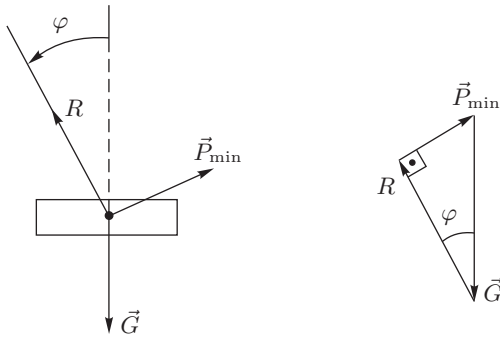


Рис. 3. Треугольник сил, действующих на тело m_2 в момент начала скольжения [3]

2) Если $m_1 < m_2 \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$, то

$$P_{\min} = \frac{g}{2} \sqrt{\mu^2(m_1 + m_2)^2 + (m_2 - m_1)^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{m_2 - m_1}{\mu(m_2 + m_1)} \right].$$

Этот результат нетрудно обобщить и на тот случай, когда коэффициенты трения для глыбы и человека разные.

Приведем числовой пример. Пусть $\mu = 1/2$, $m_1 = 100$ кг, $m_2 = 1000$ кг. Тогда реализуется случай 2, и мы имеем $P_{\min} = 25 \cdot g\sqrt{445} \approx 525g$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{18}{11} \approx 60^\circ$.

Ответы из книги [3] приводят к таким числам: $P_{\min} \approx 484g$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$. Таким образом, чтобы оставаться на месте и сдвинуть глыбу, человек должен тянуть с чуть большей силой, но под углом, близким к 60° !

3. *Задача Л. Б. Левенсона [5, стр. 145]. Цитируем по книге [5]. «Определите, как выгоднее, в смысле скорейшей остановки, тормозить поезд: чтобы колеса еще катились или же затормозить их полностью, чтобы началось скольжение поезда по рельсам? Трением качения колес по его незначительности можно пренебречь.»*

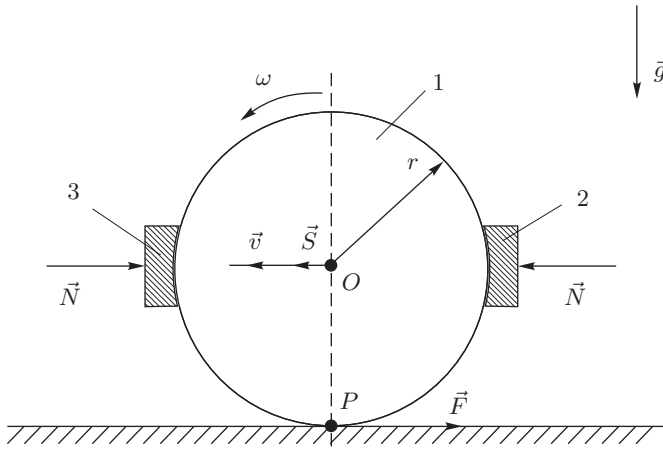


Рис. 4. Задача Л. Б. Левенсона. Схема торможения колеса: 1 — диск колеса, масса которого m , а радиус — r ; 2 — тормозные колодки, \vec{N} — нормальная сила, прижимающая колодки к поверхности колеса; \vec{v} — скорость центра масс O колеса; ω — угловая скорость колеса; \vec{F} — касательная сила реакции плоскости (сила трения покоя); \vec{S} — горизонтальная сила реакции со стороны поезда; P — мгновенный центр скоростей колеса

Ответ в этой задаче прост. Тормозить выгоднее *катящимися* без проскальзывания в точке контакта колесами, т. к. в этом случае в точке контакта реализуется сила трения покоя, верхняя граница которой превосходит силу трения скольжения. Причем не следует также пренебрегать и моментом сопротивления качению, что особенно важно для автомобильных (упругих) колес. Именно эти *внешние* силы замедляют движение центра масс поезда. Автор цитированной книги [5] приходит к тому же выводу о преимуществе торможения катящимися колесами, однако приписывает этот факт наличию трения

центра масс кузова, получим:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -F_1 + S_1, & \frac{m}{2}\dot{v} &= F_1 - 2\mu_1 N_{01}, \\ m\dot{v} &= -F_2 + S_2, & \frac{m}{2}\dot{v} &= F_2 - 2\mu_1 N_{02}, \\ M\dot{v} &= -S_1 - S_2, \end{aligned}$$

где S_1, S_2 — горизонтальные силы взаимодействия центров колес с кузовом.

Предполагая N_{01}, N_{02} заданными, из этой системы нетрудно получить соотношения:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\mu_1}{3m + M} \left[(5m + 2M)N_{01} - mN_{02} \right], \\ F_2 &= \frac{\mu_1}{3m + M} \left[(5m + 2M)N_{02} - mN_{01} \right], \\ \dot{v} &= -\frac{2\mu_1}{3m + M} (N_{01} + N_{02}). \end{aligned}$$

Далее, применяя принцип Даламбера для кузова, мы получим для вертикальных реакций T_1, T_2 в центрах колес выражения:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{M}{2} \left[g + \frac{a}{b} \frac{2\mu_1}{3m + M} (N_{01} + N_{02}) \right], \\ T_2 &= \frac{M}{2} \left[g - \frac{a}{b} \frac{2\mu_1}{3m + M} (N_{01} + N_{02}) \right], \end{aligned}$$

где a, b — расстояния от центров масс колес до центра масс кузова соответственно по вертикали и горизонтали. И наконец, для нормальных реакций N_1 и N_2 , действующих на колеса, мы получим:

$$N_1 = mg + T_1, \quad N_2 = mg + T_2.$$

Полученные соотношения служат для проверки условий $F_1 \leq \mu N_1$, $F_2 \leq \mu N_2$, где μ — коэффициент статического трения. Эти условия означают отсутствие проскальзывания в точках контакта колес.

Полученные формулы служат также для выбора тормозящих усилий N_{01}, N_{02} на колодки с целью достижения определенного режима торможения.

Отметим, что рассмотренная плоская задача допускает обобщения и для пространственного случая. Движение железнодорожных составов по криволинейным траекториям при наличии трения рассматривалось Н. Е. Жуковским в его работе [6].

4. *Задача о вынужденном движении точки по двум шероховатым поверхностям* [7, стр. 13, пример 6]. Приводим формулировку задачи, следуя [7].

«Материальная точка массой m движется по расположенной в вертикальной плоскости круговой направляющей радиуса r под действием кривошипа, ось вращения которого находится на левом конце горизонтального диаметра направляющей (см. рис. 6). Вращение кривошипа начинается из положения, совпадающего с горизонтальным диаметром, и происходит по закону $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$. Коэффициенты трения при движении точки по кривошипу и направляющей одинаковы и равны f . При каком значении угла φ движение точки станет невозможным при любой силе давления кривошипа на точку?»

Эта задача посвящена эффекту «заклинивания», который часто имеет место в реальных механизмах. Приведем ответ из [7, стр.14]: заклинивание происходит при $\varphi = \varphi_*$ таком, что $\varphi_* = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{2f}{1-f^2}$,

т. е. $\varphi_* = \text{arctg} \frac{1-f^2}{2f}$.

Ниже будет показано, что этот ответ неполон и заклинивание имеет место не всегда. **Правильный ответ таков:**

- а) если $f \in [0, 1/\sqrt{3}]$ и $0 < \omega^2 < \frac{g(1-3f^2)}{4rf(1+f^2)} = \omega_0^2$, то заклинивания не будет при всех $\varphi \in [0, \pi/2]$;
- б) если $f \in [0, 1/\sqrt{3}]$ и $\omega^2 > \omega_0^2$, то заклинивание будет при $\varphi = \varphi_* = \text{arctg} \frac{1-f^2}{2f}$;
- в) если $f \in [1/\sqrt{3}, 1]$, то заклинивание будет при любом ω и случится оно при $\varphi = \varphi_*$;
- г) если $f \in [1, \infty)$, то заклинивание будет при любом ω и случится оно при $\varphi = 0$.

Приведем полное решение задачи, опуская несущественные детали. На рис. 6 \vec{v} — абсолютная скорость точки, причем $\vec{v} \perp O_1\vec{M}$ и $v = 2\omega r$. Силы \vec{R} и \vec{F} — это силы трения, направленные против соответствующих скоростей: \vec{R} — против скорости \vec{v} , а \vec{F} — против скорости \vec{v}_r — относительной скорости точки M по кривошипу OB (см. рис. 6). Ясно,

что направления \vec{v} и \vec{v}_r , а вместе с ними и силы трения \vec{R} и \vec{F} фиксированы и таковы, как они указаны на рис. 6. Однако направления сил нормальных давлений \vec{N} и \vec{Q} могут в процессе движения, вообще говоря, меняться. Те направления \vec{N} и \vec{Q} , которые указаны на рис. 6, примем за положительные. Полагая $m = 1$, запишем уравнения движения точки M в проекциях на $\vec{\tau}$ и \vec{n} (см. рис. 6):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -R - g \cos 2\varphi - F \sin \varphi + Q \cos \varphi \\ \frac{v^2}{r} &= N + g \sin 2\varphi - F \cos \varphi - Q \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Так как в процессе движения знаки сил трения \vec{R} и \vec{F} не меняются, то справедливы соотношения:

$$R = f|N|, \quad F = f|Q|,$$

которые учитывают возможное изменение знаков сил нормального давления N и Q . Обозначая $Q = x$, $N = y$, из (4.1) получим систему:

$$\left. \begin{aligned} x \cos \varphi - |x| \cdot f \sin \varphi - f|y| &= g \cos 2\varphi \\ -x \sin \varphi - |x| \cdot f \cos \varphi + y &= h - g \sin 2\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где обозначено $h = v^2/r$.

Отметим, что в [7] при записи системы (4.2) отсутствовали знаки модулей, что и привело к неполному результату.

Дальнейшее решение состоит в исследовании кусочно-линейной алгебраической системы (4.2). Возможны 4 варианта: 1) $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, 2) $x_2 > 0$, $y_2 < 0$, 3) $x_3 < 0$, $y_3 > 0$, 4) $x_4 < 0$, $y_4 < 0$. Тогда соответ-

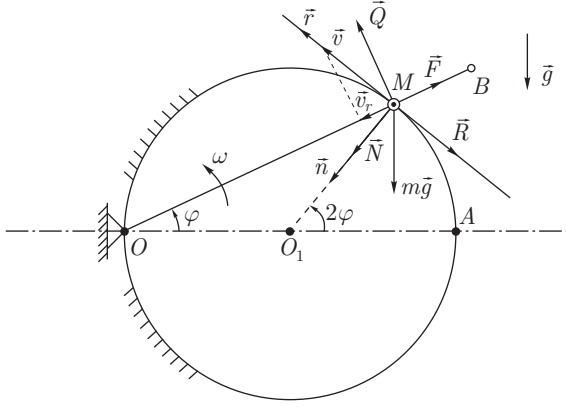


Рис. 6. Движение точки по двум шероховатым направляющим. OB — кривошип, M — материальная точка (втулка), \vec{v} — абсолютная скорость точки (по кругу), \vec{v}_r — относительная скорость точки (по кривошипу), \vec{N} , \vec{Q} — силы нормального давления, \vec{R} , \vec{F} — силы трения для круга и кривошипа, соответственно

ствующие решения:

$$1) x_1 = \frac{-h \cdot (\varepsilon - f) \cdot S_1(z) \cos \varphi}{1 - f^2 - 2fz}, \quad y_1 = \frac{h[(1 + \varepsilon f) - (\varepsilon + f)z]}{1 - f^2 - 2fz}, \quad (4.3)$$

$$2) x_2 = \frac{-h(\varepsilon + f)S_2(z) \cos \varphi}{1 + f^2}, \quad y_2 = \frac{h[(1 + \varepsilon f) - (\varepsilon + f)z]}{1 + f^2}, \quad (4.4)$$

$$3) x_3 = \frac{-h(\varepsilon - f)S_1(z) \cos \varphi}{1 + f^2}, \quad y_3 = \frac{h[(1 - \varepsilon f) - (\varepsilon - f)z]}{1 + f^2}, \quad (4.5)$$

$$4) x_4 = \frac{-h(\varepsilon + f)S_2(z) \cos \varphi}{1 - f^2 + 2fz}, \quad y_4 = \frac{h[(1 - \varepsilon f) - (\varepsilon - f)z]}{1 - f^2 + 2fz}, \quad (4.6)$$

где обозначено: $\varepsilon = g/h = gr/v^2$, $z = \operatorname{tg} \varphi$, $S_1(z) = z^2 + \frac{2f\varepsilon}{\varepsilon - f}z - \frac{\varepsilon + f}{\varepsilon - f}$,

$$S_2(z) = z^2 - \frac{2f\varepsilon}{\varepsilon + f}z - \frac{\varepsilon - f}{\varepsilon + f}.$$

Если $0 < \varepsilon < f/\sqrt{1 + f^2}$, то квадратные трехчлены $S_1(z)$ и $S_2(z)$ в нуль не обращаются, т.е. $S_1 > 0$, $S_2 > 0$. Тогда решение (4.4) не

реализуется, т. к. $x_2 < 0$, а решение (4.5) не реализуется т. к. $x_3 > 0$ ($\varepsilon < f!$). Далее, при $0 < f < 1$ имеем $\varepsilon f < f^2 < 1$, т. е. $y_4 > 0$, и не реализуется (4.6). Остается решение (4.3), в котором заклинивание (т. е. $x_1 \rightarrow \infty, y_1 \rightarrow \infty$) будет при $z = (1 - f^2)/(2f) = \operatorname{tg} \varphi_*$. Если же $f > 1$, то не реализуется (4.3), т. к. $x_1 < 0$, а (4.6) не подходит, т. к. при $z = 0$ будет $x_4 > 0$.

Таким образом, незаклинивание может иметь место лишь при $\varepsilon > f/\sqrt{1+f^2}$.

В этом случае функции $S_1(z)$ и $S_2(z)$ имеют вещественные корни:

$$\begin{aligned} S_1(z) = 0 \rightarrow z_1 &= \frac{\varepsilon + f}{\varepsilon f + \sqrt{f^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 - f^2}}, \\ z_2 &= -\frac{\varepsilon + f}{-\varepsilon f + \sqrt{f^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 - f^2}}, \\ S_2(z) = 0 \rightarrow \tilde{z}_1 &= \frac{1}{z_1}, \quad \tilde{z}_2 = \frac{1}{z_2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тогда мы имеем

$$S_1(z) = (z - z_1)(z - z_2), \quad S_2(z) = \left(z - \frac{1}{z_1}\right) \left(z - \frac{1}{z_2}\right). \quad (4.8)$$

Рассмотрим интервал $f/\sqrt{1+f^2} < \varepsilon < f$.

Пусть $0 < f < 1$. Тогда непосредственной проверкой убеждаемся, что на интервале $0 \leq z < z_* = \frac{1-f^2}{2f}$ реализуется лишь решение (4.3) (используется неравенство $z_2 > z_1 > z_*$!), т. е. заклинивание будет при $z = z_*$.

Если $1 < f < \infty$, то опять же проверкой убеждаемся в том, что при $z = 0$ ни одно из решений (4.3)–(4.6) не реализуется, т. е. заклинивание будет сразу при $z = 0$!

Рассмотрим интервал $f < \varepsilon < \infty$.

Если $1 < f < \infty$, то при $z = 0$ имеем $y_1 < 0, y_2 > 0, y_3 < 0, y_4 > 0$, т. е. ни одно из решений (4.3)–(4.6) не реализуется, и заклинивание происходит сразу при $z = 0$, т. е. $\varphi = 0$.

Пусть $0 < f < 1$. Так как $f < \varepsilon$, то из (4.7) имеем $z_1 > 0, z_2 < 0$. Выпишем решения из (4.3)–(4.6), отбросив сомножители, не влияющие

на знак:

$$x_1 = -\frac{z - z_1}{z_* - z} > 0, \quad y_1 = \frac{1 + \varepsilon f}{\varepsilon + f} - z > 0, \quad (4.9)$$

$$x_2 = -\left(z - \frac{1}{z_1}\right) > 0, \quad y_2 = \frac{1 + \varepsilon f}{\varepsilon + f} - z < 0, \quad (4.10)$$

$$x_3 = -(z - z_1) < 0, \quad y_3 = \frac{1 - \varepsilon f}{\varepsilon - f} - z > 0, \quad (4.11)$$

$$x_4 = -\left(z - \frac{1}{z_1}\right) < 0, \quad y_4 = \frac{1 - \varepsilon f}{\varepsilon - f} - z < 0, \quad (4.12)$$

где z_1 дается формулой из (4.7).

Сначала выбираем то решение, которое реализуется при $z = 0$ ($\varphi = 0$). Ясно, что это — решение (4.9). Нетрудно показать (доказательства здесь опускаются), что при $f \in (1/\sqrt{3}, 1)$ и $\varepsilon > f$ справедливы неравенства

$$\frac{1 + \varepsilon f}{\varepsilon + f} > f > z_* = \frac{1 - f^2}{2f}, \quad (4.13)$$

$$z_1 > z_*, \quad \frac{1}{z_1} > z_*. \quad (4.14)$$

Неравенства (4.13) проверяются непосредственно, а неравенства (4.14) следуют из того факта, что z_1 является монотонно возрастающей функцией от ε , а $1/z_1$ — монотонно убывающей функцией от ε . Поэтому:

$$z_1 \geq z_1 \Big|_{\varepsilon=f} = f > z_*, \quad \frac{1}{z_1} \geq \frac{1}{z_1} \Big|_{\varepsilon=\infty} = \frac{1}{f + \sqrt{1 + f^2}} > z_*.$$

Из неравенств (4.13), (4.14) следует, что при $0 < z < z_*$ реализуется лишь решение (4.9), которое дает заклинивание при $z = z_*$.

Пусть теперь $0 < f < 1/\sqrt{3}$ и $\varepsilon > f$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $f < \varepsilon < 1$ и $f \in (0, \sqrt{2} - 1)$. Тогда $z_* = \frac{1 - f^2}{2f} > 1$. Тогда справедливы неравенства:

$$z_1 \geq 1 \geq 1/z_1, \quad \frac{1 - \varepsilon f}{\varepsilon - f} > \frac{1 + \varepsilon f}{\varepsilon + f} \geq 1.$$

Функции z_1 и $\frac{1+\varepsilon f}{\varepsilon+f}$ — монотонно убывающие по ε функции, причем при

$$\varepsilon = \varepsilon_* = \frac{f(1+f^2)}{1-3f^2} < 1$$

они одновременно (!) принимают значение z_* . Следовательно, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ реализуется только решение (4.9) (при $0 < z < z_*$!), в котором случится заклинивание при $z = z_*$. Если же $\varepsilon_* < \varepsilon < 1$, то при $0 < z < z_1$ реализуется решение (4.9), при $z_1 \leq z < \frac{1-\varepsilon f}{\varepsilon-f}$ реализуется решение (4.11), а при $\frac{1-\varepsilon f}{\varepsilon-f} < z < \infty$ реализуется решение (4.12) т. е. заклинивание не происходит.

2) $1 < \varepsilon < \infty$ и $f \in (0, \sqrt{2}-1)$. Тогда справедливы неравенства:

$$z_* \geq 1 > z_1 > \frac{1+\varepsilon f}{\varepsilon+f} > \frac{1-\varepsilon f}{\varepsilon-f}.$$

В этом случае при $0 < z < \frac{1+\varepsilon f}{\varepsilon+f}$ реализуется решение (4.9), при $\frac{1+\varepsilon f}{\varepsilon+f} \leq z < \frac{1}{z_1}$ реализуется решение (4.10), а при $\frac{1}{z_1} \leq z < \infty$ реализуется решение (4.12), т. е. заклинивание не происходит.

3) $f \in (\sqrt{2}-1, 1/\sqrt{3})$. Тогда $z_* < 1$, и мы имеем, по аналогии с предыдущими пунктами, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ заклинивание в реализующемся решении (4.9) при $z = z_* < 1$. Если же $\varepsilon \geq \varepsilon_* > 1$, то мы имеем неравенства:

$$\frac{1}{z_1} > 1 > z_* > z_1 > \frac{1+\varepsilon f}{\varepsilon+f}.$$

Тогда при $0 \leq z < \frac{1+\varepsilon f}{\varepsilon+f}$ реализуется решение (4.9), при $\frac{1+\varepsilon f}{\varepsilon+f} \leq z < \frac{1}{z_1}$ реализуется решение (4.10), а при $\frac{1}{z_1} \leq z < \infty$ реализуется решение (4.12) (т. к. $\frac{1-\varepsilon f}{\varepsilon-f}$ при $\varepsilon > \varepsilon_* > 1$), т. е. заклинивание не происходит.

Таким образом, все возможные ситуации исчерпаны, и ответ к задаче обоснован. Отметим в заключении, что все переходы решений друг в друга осуществляются при обнулении x или y , при этом ненулевая переменная сохраняет свою непрерывность (это проверяется непосредственно).

5. *Задача Пэнлеве – Рауса.* В книге Э. Д. Рауса [8, стр. 147] приведена следующая задача (цитируем по книге [8]):

«Однородный шар брошен без начальной угловой скорости прямолинейно вверх по шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α . Коэффициент трения равен μ . Показать, что полное время, в течение которого шар поднимался по плоскости, будет таким же, как и в случае гладкой плоскости, и что время, в течение которого он скользил, относится по времени, в течение которого он катится, как $2 \operatorname{tg} \alpha / (7\mu)$ »

Отметим, что приведенное утверждение справедливо лишь при $\mu \geq 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha / 7$. Если же $\mu < 2 \operatorname{tg} \alpha / 7$, то утверждение неверно потому, что у шара во время его подъема (т.е. пока скорость его центра не обратится в нуль) не будет существовать режима качения. Кроме того, время его подъема в этом случае зависит от μ . Очень подробно решение подобной задачи (для обруча и однородного шара) приведено в книге Пэнлеве ([1, стр. 119, 135]), причем для произвольных начальных условий. Поэтому здесь для начальных условий, рассматриваемых Раусом, приведем лишь основные пункты решения.

Пусть \vec{v} — скорость центра шара, $\vec{\omega}$ — его угловая скорость (ясно, что задача плоская, т.е. ω — угловая скорость качения шара).

Имеем $v(0) = v_0$, $\omega(0) = 0$. Направление положительных отсчетов — вдоль наклонной плоскости вверх. Обозначим $v_1 = v - \omega r$ — скорость точки касания шара. В этой точке возникает сила трения F , удовлетворяющая условиям:

$$\vec{F} = -\frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} \mu mg \cos \alpha, \quad v_1 \neq 0, \quad |\vec{F}| \leq \mu mg \cos \alpha, \quad v_1 = 0.$$

Уравнение движения при $v_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha \cdot (\operatorname{sgn} v_1), \\ (2/5)mr^2\dot{\omega} &= \mu mg \cos \alpha \cdot (\operatorname{sgn} v_1) \cdot r, \end{aligned}$$

где m — масса, r — радиус шара.

Из полученных уравнений имеем:

$$\dot{v}_1 = (v - \omega r)' = -g \sin \alpha - \frac{7}{2} \mu g \cos \alpha (\operatorname{sgn} v_1).$$

а) Пусть $\mu \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha$. Тогда $v_1(t)$ монотонно убывает от v_0 до нуля по закону:

$$\dot{v}_1 = -g \sin \alpha - \frac{7}{2} \mu g \cos \alpha.$$

Этот процесс происходит в течение времени:

$$t_1 = v_0 / (g \sin \alpha + \frac{7}{2} \mu g \cos \alpha).$$

Далее будет $v_1(t) = 0$, $t > t_1$ (т. е. качение). Другие варианты ведут к противоречию. При качении реализуется сила трения F такая, что:

$$F = \frac{2}{7} mg \cos \alpha \leq \mu mg \cos \alpha \quad (\text{т. к. } \mu > \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha),$$

причем направлена F строго вверх. Тогда скорость центра меняется по закону:

$$\dot{v} = -g \sin \alpha + \frac{2}{7} g \sin \alpha = -\frac{5}{7} g \sin \alpha \quad (t \geq t_1).$$

Ясно, что $v(t)$ обратится в нуль через время t_2 :

$$t_2 = \frac{1}{\frac{5}{7} g \sin \alpha} \cdot v(t_1) = \frac{1}{\frac{5}{7} g \sin \alpha} \cdot \frac{v_0 \frac{5}{2} \mu g \cos \alpha}{g \sin \alpha + \frac{7}{2} \mu g \cos \alpha}.$$

Тогда получим $t_* = t_1 + t_2 = v_0 / (g \sin \alpha)$, т. е. утверждение Рауса.

б) Пусть $\mu < \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha$. Тогда опять $v_1(t)$ будет монотонно убывать от $v_1(0) = v_0$ до нуля в течение времени t_1 из пункта а).

Однако в точке t_1 , где $v_1(t_1) = 0$, мы должны принять $\dot{v}_1(t_1) < 0$ (другие варианты ведут к противоречию). Тогда процесс уменьшения $v_1(t)$ пойдет дальше, причем сила трения F меняет знак и будет направлена вверх, т. к. точка касания скользит против скорости центра шара. Уравнения движения такие:

$$\dot{v} = -g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha, \quad (\omega r)' = -\frac{5}{2} \mu g \cos \alpha, \quad t \geq t_1.$$

Таким образом, $v(t)$ уменьшается от $v(t_1)$ до нуля в течение времени:

$$t_{21} = \frac{1}{g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha} \cdot \frac{v_0 \cdot \frac{5}{2} \mu g \cos \alpha}{g \sin \alpha + \frac{7}{2} \mu g \cos \alpha}.$$

Тогда имеем полное время подъема:

$$t_1^* = t_1 + t_{21} = \frac{v_0}{g} \frac{\sin \alpha + \frac{3}{2} \mu \cos \alpha}{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(\sin \alpha + \frac{7}{2} \mu \cos \alpha)} < t_* = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$$

при $\mu < \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha$. И так, здесь утверждение Рауса становится неверным ($t_1^* < t_*$ и t_1^* явно зависит от коэффициента μ). Отметим в заключение, что здесь $t_1^*(\mu) \leq t_*$ при $0 \leq \mu \leq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha$. Причем:

$$t_1^*(\mu = 0) = t_* \quad \text{и} \quad t_1^*(\mu = \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha) = t_*.$$

Минимальное же значение времени $t_1^*(\mu)$ достигается при

$$\mu = \mu_* = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{40}{7}} - 2 \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

При этом $\min t_1^*(\mu) = 0,944 \cdot t_*$, т. е. ошибка невелика!

6. Задача Зоммерфельда. В книге [А. Зоммерфельд, «Механика», М., Государственное издательство иностранной литературы, 1947, 391 с.] на странице 114 рассматривается следующая задача. Цитируем:

«... К вертикальной оси прикреплен под углом $\frac{\pi}{2} + \alpha$ боковой стержень, на который надета подвижная втулка (см. рис. 7). Если ось не вращается, то втулка покоится, смотря по тому, имеет ли место $\alpha < \phi$ или $\alpha > \phi$ ($\phi = \arctg f$, f — коэффициент трения)... »

В этой задаче А. Зоммерфельд предлагает определить область равновесия (относительного) втулки при $\omega \neq 0$. Приводим полное решение этой задачи (решение, приведенное в цитированной книге [9], с точки зрения автора настоящего пособия, представляется запутанным и неполным).

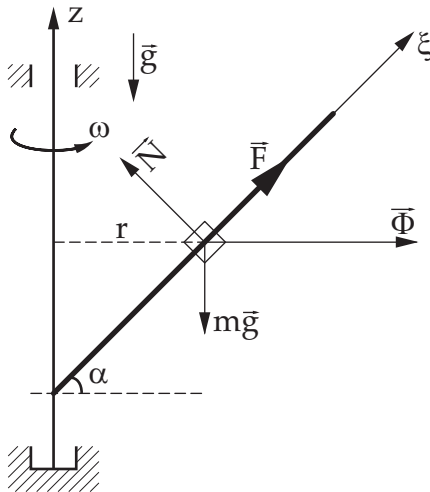


Рис. 7

Пусть r — расстояние втулки до оси вращения z , \vec{N} — сила нормальной реакции, действующей на втулку со стороны бокового стержня, \vec{F} — сила трения (покоя при относительном равновесии втулки), $\vec{\Phi}$ — сила инерции. Обозначим ξ — ось, направленную вдоль положительного направления бокового стержня. Если $\omega = \text{const}$, то можно утвер-

ждать, что силы \vec{N} и $\vec{\Phi}$ лежат в плоскости $z\xi$ (см. рис. 7). Применяя принцип Даламбера к втулке в состоянии её относительного равновесия, получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} F + \Phi \cos \alpha - mg \sin \alpha &= 0 \\ N - \Phi \sin \alpha - mg \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Кроме того имеет место неравенство Кулона:

$$|F/N| < f. \quad (6.2)$$

Учитывая, что $\Phi = m\omega^2 r$, мы получим из (6.1) и (6.2) неравенства:

$$r > k \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + f \operatorname{tg} \alpha}, \quad (6.3)$$

$$r(1 - f \operatorname{tg} \alpha) < k(\operatorname{tg} \alpha + f), \quad (6.4)$$

где $k = g/\omega^2$. Рассмотрим два случая:

- а) $0 < f \operatorname{tg} \alpha < 1$. Тогда из (6.3) и (6.4) следует, что зона равновесия определяется неравенствами:

$$r_1 < r < r_2, \quad (6.5)$$

где $r_2 = k \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}$, $r_1 = \max\{0, k \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + f \operatorname{tg} \alpha}\}$;

- б) $1 < f \operatorname{tg} \alpha < \infty$. Тогда (6.4) выполнено заведомо при любом $r > 0$, а зона равновесия задаётся неравенствами (6.5), где где следует полагать $r_2 = \infty$. **Именно этот случай бесконечной зоны относительного равновесия был упущен А. Зоммерфельдом!**

7. *Задача о равновесии стержня на шероховатой плоскости.*

Однородный стержень веса P опирается своим нижним концом A (см. рис. 8) на шероховатую горизонтальную плоскость и удерживается в равновесии под углом α к горизонту веревкой, привязанной к его верхнему концу B . Веревка перекинута через неподвижный шероховатый цилиндр и на другом конце несет груз весом Q . Коэффициент трения стержня о плоскость и коэффициент трения веревки о цилиндр равны f . Найти максимальное значение Q .

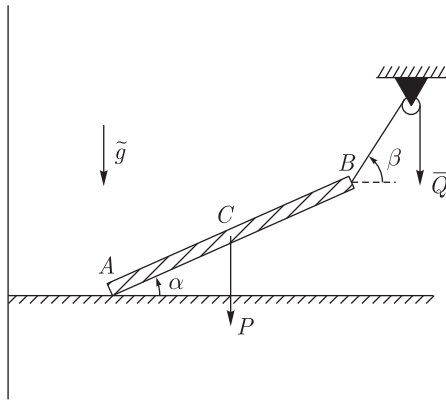


Рис. 8

Решение. По условию задачи угол α фиксирован. Зафиксируем также угол β — угол, составляемый нитью с горизонтом. Будем искать допустимые значения Q для равновесия, а затем будем их максимизировать по $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Причем ясно, что $\beta > \alpha$, т.к. в противном случае стержень AB будет вращаться по часовой стрелке вокруг точки A .

Пусть натяжение нити в точке B есть S . Тогда уравнения равновесия для стержня суть следующие:

$$\begin{aligned} F + S \cos \beta &= 0, & N - P + S \sin \beta &= 0, \\ -\frac{P}{2} l \cos \alpha + S l \sin \beta \cos \alpha - S l \cos \beta \sin \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где F , N — силы, соответственно, *трения покоя* и нормальной реакции в точке опоры A , причем, т.к. связь односторонняя, то $N \geq 0$; S — натяжение нити, для которого полагаем $S > 0$; l — длина стержня.

Из (7.1) получаем соотношения:

$$\begin{aligned} F &= -S \cos \beta, \quad N = P - S \sin \beta > 0, \\ S &= \frac{P}{2 \cos \beta (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Кроме того, должно соблюдаться неравенство Кулона:

$$\left| \frac{F}{N} \right| \leq f. \quad (7.3)$$

Из соотношений (7.2) и (7.3) следует, что для равновесия стержня необходимо выполнение следующих неравенств:

$$\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \beta \geq 2 \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \beta \geq 2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{f}.$$

Все эти неравенства эквивалентны одному неравенству

$$\operatorname{tg} \beta \geq 2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{f} = u_1. \quad (7.4)$$

В дальнейшем будем предполагать неравенство (7.4) выполненным.

Натяжение веревки слева от блока дается формулой из (7.2), которую запишем так

$$S = \frac{P \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{2 \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}. \quad (7.5)$$

Далее, для натяжения S , даваемого формулой (7.5), ищем интервал изменения значений силы Q , при которых не реализуется скольжения веревки по окружности блока (как против, так и по часовой стрелкам). В соответствие с формулой Эйлера (вывод которой приведен, например, в учебнике под ред. К. С. Колесникова [10], изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005, стр. 243–245) имеем следующий интервал:

$$\begin{aligned} Q_2 < Q < Q_1, \quad Q_2 &= S \exp \left[-f \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) \right], \\ Q_1 &= S \cdot \exp \left[f \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) \right], \end{aligned} \quad (7.6)$$

где S дается формулой (7.5), а угол β удовлетворяет неравенству (7.4). Так как в задаче требуется найти максимальное Q , при котором реализуется равновесие, то будем искать максимум Q_1 по углу β , удовлетворяющему неравенству (7.4).

Обозначим $u = \operatorname{tg}\beta$. Тогда задача сводится к поиску максимума функции:

$$Q_1(u) = \frac{P}{2} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u - \operatorname{tg}\alpha} \exp \left[f \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} u \right) \right], \quad (7.7)$$

при $u \in [u_1, \infty)$, где $u_1 = 2\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{f}$.

Берем производную этой функции по u :

$$\frac{dQ_1}{du} = \frac{P}{2} \exp \left[f \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} u \right) \right] \cdot \frac{u(f - \operatorname{tg}\alpha) - (1 + f\operatorname{tg}\alpha)}{\sqrt{1+u^2}(u - \operatorname{tg}\alpha)^2}. \quad (7.8)$$

Возможны два случая: а) $0 < f < \operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha < f < \infty$.

а) $0 < f < \operatorname{tg}\alpha$. Тогда, в соответствии с формулой (7.8), имеем $\frac{dQ_1}{du} < 0$ при всех $u > u_1$, т.е. максимум функции Q_1 реализуется в точке $u = u_1$:

$$\max Q = Q_1(u_1) = \frac{P}{2} \frac{\sqrt{f^2 + (2f\operatorname{tg}\alpha + 1)^2}}{1 + f\operatorname{tg}\alpha} \exp \left[f \left(\frac{\pi}{2} + \beta_1 \right) \right],$$

где $\beta_1 = \operatorname{arctg} \frac{1 + 2f\operatorname{tg}\alpha}{f}$.

б) $\operatorname{tg}\alpha < f < \infty$. Тогда функция Q_1 из (7.7) достигает строгого, изолированного и единственного минимума в точке

$$u = u_* = \frac{1 + f\operatorname{tg}\alpha}{f - \operatorname{tg}\alpha}. \quad (7.9)$$

Иными словами, график этой функции выпуклый книзу. Здесь следует различать два случая: б1) $u_* < u_1 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{f} \right)$,

б2) $u_* > u_1 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{f} \right)$. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

б1) $\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{f} \right)$. Ясно, что этот случай реализуется лишь при $f > 1$. Тогда функция $Q_1(u)$ из (7.7) монотонно возрастает при

всех $u > u_1$, т.е. ее максимум реализуется при $u = \infty$ ($\beta = \frac{\pi}{2}$) и равен, в соответствии с формулой (7.7):

$$\max Q = Q_1(\infty) = \frac{P}{2} \exp(f\pi).$$

б2) $\operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{f} \right)$. Кроме того, здесь (по исходному предположению) $\operatorname{tg}\alpha < f$, т.е. множество таких α непусто! Ясно, что в этом случае, в силу выпуклости графика функции $Q_1(u)$, максимум реализуется на одном из концов интервала $[u_1, \infty)$, т.е.

$$\max Q = \max \{Q_1(u_1), Q_1(\infty)\}.$$

Таким образом, здесь максимум может достигаться как в точке $u = u_1$, так и в точке $u = \infty$. Отметим, что реализация максимума Q в точке $u = \infty$ соответствует углу $\beta = \frac{\pi}{2}$ (оба конца веревки вертикальны), причем нарушение равновесия при $Q > Q_1(\infty)$ происходит с проскальзыванием веревки по блоку по часовой стрелке с одновременным поворотом стержня против часовой стрелки вокруг точки опоры A , в которой при этом реализуется *почти нулевая* сила трения покоя, т.е. точка A остается неподвижной!

Реализация же максимума Q в точке $u = u_1$ соответствует углу $\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 2f \operatorname{tg}\alpha}{f} \right) < \frac{\pi}{2}$, причем нарушение равновесия при $Q > Q_1(u_1)$ происходит с проскальзыванием веревки по блоку по часовой стрелке с одновременным движением стержня AB , *происходящим со скольжением в точке A (вправо!)*. Однако доказательство этого факта достаточно громоздко и здесь не приводится.

Подведем итоги и сформулируем результат и ответы к задаче.

I. $f \in (0, \operatorname{tg}\alpha)$. Тогда $\max Q$ реализуется при $\beta = \beta_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 2f \operatorname{tg}\alpha}{f} \right)$ и он равен:

$$\max Q = \frac{P}{2} \frac{\sqrt{f^2 + (2f \operatorname{tg}\alpha + 1)^2}}{1 + f \operatorname{tg}\alpha} \exp \left[f \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} u_1 \right) \right] = Q_1(u_1);$$

где $u_1 = 2 \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{f}$.

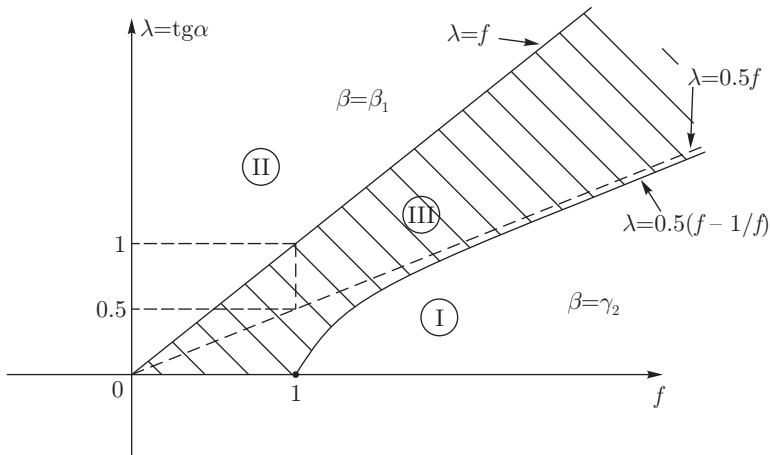


Рис. 9. Диаграмма реализации $\max Q$ при различных параметрах $\{\text{tg}\alpha, f\}$

II. $f \in (\text{tg}\alpha, \infty)$. Тогда

II.1. Если $\text{tg}\alpha > \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{f} \right)$ (т.к. $\text{tg}\alpha < f$, то это множество заведомо непусто!), то $\max Q$ реализуется либо при $\beta = \beta_1$, либо при $\beta = \frac{\pi}{2}$, и он равен:

$$\max Q = \max \left\{ Q_1(u_1), \frac{P}{2} e^{f\pi} \right\}.$$

II.2. Если $0 < \text{tg}\alpha < \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{f} \right)$ (это множество непусто лишь при $f > 1$), то $\max Q$ реализуется при $\beta = \frac{\pi}{2}$, и он равен:

$$\max Q = \frac{P}{2} e^{f\pi}.$$

Изобразим этот результат на диаграмме в области параметров $\{\lambda = \text{tg}\alpha, f\}$.

Область I — $\left(f > 1; \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{f}\right)\right)$, $\max Q$ реализуется при $\beta = \frac{\pi}{2}$ и равен $\max Q = \frac{P}{2} e^{f\pi}$.

Область II — $(\operatorname{tg} \alpha = \lambda > f)$, $\max Q$ реализуется при $\beta = \beta_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 2f\lambda}{f}\right)$ и равен $\max Q = Q_1(u_1)$.

Область III — $\left\{\frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{f}\right) < \lambda < f\right\}$, $\max Q$ реализуется либо при $\beta = \beta_1$, либо при $\beta = \frac{\pi}{2}$ и равен $\max Q = \max \left\{Q_1(u_1), \frac{P}{2} e^{f\pi}\right\}$.

8. Задача с трением из сборника И. В. Мещерского [11, стр. 55, задача 5.14]:

Цилиндр веса Q лежит на двух опорах A и B , расположенных симметрично относительно вертикали, проходящей через центр цилиндра (см. рис. 10). Коэффициент трения между цилиндром и опорами равен f .

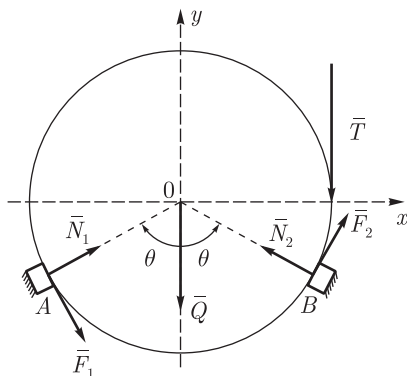


Рис. 10. К задаче 8

1) При какой величине тангенциальной силы \bar{T} цилиндр начнет вращаться?

2) При каком угле θ это устройство будет самотормозящимся?

Поясним формулировку задачи. В пункте 1) следовало бы говорить о величине *минимальной* силы T , при которой цилиндр начнет вращаться вокруг своего центра O . А еще точнее, следует искать значение *минимальной* силы T , при которой нарушается равновесие цилиндра, т.к. связи в точках A и B предполагаются *односторонними* и до начала этого вращения цилиндра может начаться его опрокидывание вокруг опоры B с отрывом от опоры A . Можно, конечно, исключить возможность опрокидывания, сделав контакты в точках A и B *неточечными*, однако это усложнит постановку задачи. В пункте 2) следует говорить *об углах* θ , т.к. таких углов бесконечно много. Кроме того, термин «самоторможение» следует понимать, как возможность

равновесия цилиндра при *любой* (как угодно большой) величине силы T , т.е. «заклинивание» («зона застоя»).

Цитируем ответы из указанных выше источников. Для пункта 1):

$$T = T_1 = Q \frac{f}{\cos \theta (1 + f^2) - f}. \quad (8.1)$$

Для пункта 2):

$$\cos \theta \leq \frac{f}{1 + f^2}. \quad (8.2)$$

Отметим, что в цитированном сборнике [11] в числителе правой части неравенства (8.2) стоит 1 (а не $f!$), однако это, скорее всего, опечатка!

Нетрудно восстановить принцип решения, с помощью которого были получены ответы (8.1) и (8.2). Этот принцип был реализован (в частности) в пособиях [12, 13]. Заключается он в следующем: рассматривается *самое начало движения цилиндра*, которое (априори) полагается вращением вокруг точки O по часовой стрелке и без отрыва от точек контакта A и B . В этом случае в точках контакта возникают силы трения скольжения, направленные строго против вращения цилиндра, причем модули этих сил совершенно однозначно выражаются через коэффициент трения f и соответствующие нормальные реакции. Составляя уравнения равновесия цилиндра в таком *предельном* состоянии, приходят к формуле (8.1) для силы T , а затем делается вывод (если знаменатель в формуле (8.1) положителен!), что это и есть минимальная сила T , нарушающая равновесие тела. Если исключить возможный поворот тела вокруг точки B с отрывом от точки A , то этот результат является вполне корректным. Однако, в противном случае, минимальная сила T может даваться формулой:

$$T = T_2 = Q \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta}. \quad (8.3)$$

Нетрудно проверить, что при $f \cdot \operatorname{tg} \theta < 1$ имеем неравенства:

$$T_1 < T_2 \quad \text{при} \quad \operatorname{tg} \theta > f,$$

$$T_1 > T_2 \quad \text{при} \quad \operatorname{tg} \theta < f.$$

Если же $f \operatorname{tg} \theta > 1$, то все наоборот.

Кроме того, отметим, что формула (8.1) является корректной только при выполнении следующего двойного неравенства:

$$f < \operatorname{tg} \theta < \sqrt{(1 + f^2 + 1/f^2)}.$$

При нарушении правой части этого неравенства будет $\cos\theta(1 + f^2) - f < 0$, т. е. $T_1 < 0$, а это противоречит постановке задачи, в которой тангенциальная сила T является прижимающей. А при нарушении левой части приведенного неравенства будет **отрицательна нормальная реакция в точке A** , которая в условиях **начала** вращения цилиндра вокруг точки O дается (как это нетрудно проверить) формулой:

$$N_1 = Q \frac{\cos\theta(\operatorname{tg}\theta - f)}{2 \sin\theta[(1 + f^2) \cos\theta - f]},$$

что является недопустимым, если связь в точке A предполагается односторонней!

Условие же (8.2), скорее всего, получено из такого «правдоподобного» рассуждения: если (8.2) выполнено, то $T_1 < 0$, что противоречиво, значит, минимальной силы T , вращающей цилиндр, не существует, а следовательно, будет покой при любой силе $T > 0$! Похожее рассуждение (оставшееся непонятным для автора настоящей работы) приведено в [12, 13].

Однако, условие (8.2) означает только, что равновесие цилиндра реализуется при любой силе $T > 0$ и силах трения покоя в точках A и B , *которые обе направлены строго против часовой стрелки*. Если же направление сил трения покоя в точках A и B иное (например, сила трения покоя в точке B ориентирована *по часовой стрелке*, что физически может быть осуществлено, например, «вбиванием» цилиндра между опорами A и B !), то равновесие может быть обеспечено и с нарушением неравенства (8.2) при $T > T_1$ (или $T > T_2$). Здесь следует только применить принцип Аппеля и Пэнлеве (см. [1]) восходящий к Желле о стремлении системы избежать скольжения при равновесии в условиях трения покоя. Для реализации этого принципа необходимо составлять уравнения равновесия для тела, в предположении, что в точках A и B действуют силы трения покоя, имеющие неопределенные (априори!) направления и модули которых стеснены *неравенствами* Кулона. Разрешимость (или неразрешимость) этих условий свидетельствует о возможности (или невозможности) равновесия тела. Необходимость применения этих принципов нам кажется логичной (приемлемой) еще и потому, что в реальности коэффициент трения покоя превосходит коэффициент трения скольжения. Кроме того, особенность сил сухого трения заключается еще и в том, что они могут менять свое направление (и, возможно, модуль) *скачком*. Именно такая ситуация возникает при переходе тела из состояния покоя в состояние движения в усло-

виях сухого трения. Аналогичный эффект имеет место, например, в момент перехода управляемого движения автомобиля в неуправляемое движение — его «заноса».

Для рассматриваемой задачи применение описанного принципа приводит к следующим результатам.

1. $f \operatorname{tg} \theta \in (1, \infty)$ — равновесие при любом $T \geq 0$ («самоторможение», «зона застоя»).

2. $f \operatorname{tg} \theta \in (0, 1)$ — равновесие при $T \in [0, T_1)$, движение при $T \in [T_1, \infty)$, если $\operatorname{tg} \theta > f > 0$; равновесие при $T \in [0, T_2)$, движение при $T \in [T_2, \infty)$, если $0 < \operatorname{tg} \theta < f$.

Отметим, что область, даваемая неравенством (8.2) целиком лежит в области, определяемой неравенством $f \operatorname{tg} \theta > 1$ ($f > 0, \operatorname{tg} \theta > 0$). Изобразим полученный результат на диаграмме (Рис. 11) в пространстве параметров $\{f, \lambda\}$, где $\lambda = \operatorname{tg} \theta$.

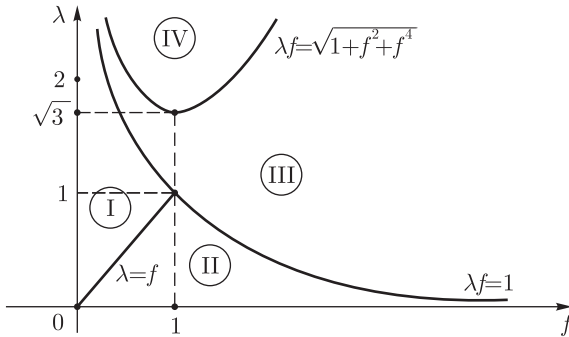


Рис. 11

Область I: $0 < \lambda f < 1, \lambda > f > 0$ ($T_1 < T_2$): равновесие при $T \in (0, T_1)$, движение при $T \in (T_1, \infty)$.

Область II: $0 < \lambda f < 1, f > \lambda > 0$ ($T_1 > T_2$): равновесие при $T \in (0, T_2)$, движение при $T \in (T_2, \infty)$.

Область III: $1 < \lambda f < \infty, \lambda f < \sqrt{1+f^2+f^4}$ (т. е. $\cos \theta(1+f^2) - f > 0$): равновесие при любом $T > 0$ (самоторможение).

Область IV: $1 < \lambda f < \infty, \lambda f > \sqrt{1+f^2+f^4}$ (т. е. $\cos \theta(1+f^2) - f < 0$): равновесие при любом $T > 0$ (самоторможение).

Опишем как обосновать приведенный результат. На рис. 10 вво-

дим систему координат Oxy , ось Oy — по вертикали вверх, O — центр тяжести цилиндра, \vec{Q} — вес цилиндра, \vec{T} — тангенциальная сила, $\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$ — нормальные реакции в точках A , B ; $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ — силы трения покоя в точках A , B ; θ — угол, образуемый силами $\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$ с вертикалью. Предполагая связи односторонними, всюду далее считаем, что $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ направлены так, как указано на рис. 10 (к центру O цилиндра), т. е. $N_1 > 0$, $N_2 > 0$. На направления сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ никаких ограничений не налагаем. Известно только, что модули этих сил удовлетворяют неравенствам Кулона:

$$|\overline{F_1}| \leq fN_1, \quad |\overline{F_2}| \leq fN_2, \quad N_1 > 0, \quad N_2 > 0. \quad (8.4)$$

При покое цилиндра соблюдаются следующие три уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 : -N_2 \sin \theta + N_1 \sin \theta + F_1 \cos \theta + F_2 \cos \theta = 0, \\ \Sigma F_y = 0 : N_2 \cos \theta + N_1 \cos \theta - F_1 \sin \theta + F_2 \sin \theta - T - Q = 0, \\ \Sigma M_O = 0 : -Tr + F_1 r + F_2 r = 0 \quad (r - \text{радиус цилиндра}). \end{array} \right. \quad (8.5)$$

Всюду в дальнейшем будет использоваться обозначение $\lambda = \operatorname{tg} \theta$. Будем искать условия разрешимости уравнений (8.5) совместно с неравенствами (8.4). Из (8.5) имеем соотношения:

$$N_2 = N_1 + \frac{1}{\lambda} T, \quad F_2 = T - F_1. \quad (8.6)$$

Подставляя полученные равенства во второе уравнения системы (8.5), получаем:

$$F_1 = \frac{1}{\lambda} N_1 + \frac{T}{2\lambda^2} (1 + \lambda^2 - \lambda \sqrt{1 + \lambda^2}) - Q \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{2\lambda}. \quad (8.7)$$

Тогда из (8.6) имеем:

$$-F_2 = \frac{1}{\lambda} N_1 + \frac{T}{2\lambda^2} (1 - \lambda^2 - \lambda \sqrt{1 + \lambda^2}) - Q \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{2\lambda}. \quad (8.8)$$

Обозначая в дальнейшем:

$$\begin{aligned} N_1 = x > 0, \quad Q_* = Q \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{2\lambda}, \\ y_1 = \frac{T}{2\lambda^2} (1 + \lambda^2 - \lambda \sqrt{1 + \lambda^2}), \\ y_2 = \frac{T}{2\lambda^2} (1 - \lambda^2 - \lambda \sqrt{1 + \lambda^2}), \end{aligned} \quad (8.9)$$

мы получаем, подставляя (8.7), (8.8) и (8.6) в неравенства (8.4):

$$\begin{cases} \left(-f + \frac{1}{\lambda}\right)x + y_1 < Q_* < x\left(f + \frac{1}{\lambda}\right) + y_1, \\ \left(-f + \frac{1}{\lambda}\right)x + y_2 - \frac{fT}{\lambda} < Q_* < x\left(f + \frac{1}{\lambda}\right) + y_2 + \frac{fT}{\lambda}. \end{cases} \quad (8.10)$$

Если неравенства (8.10) совместны (разрешимы), то и уравнения (8.5) вместе с неравенствами (8.4) имеют решения, т.е. равновесие возможно в описанном выше смысле (реализуется допустимыми силами трения покоя). Если же неравенства (8.10) при каком-либо наборе параметров $\{f, Q, \lambda, T\}$ несовместны, то это означает невозможность статического равновесия, т.е. начало движения.

Несложный анализ неравенств (8.10) показывает, что при $f \in \left(\frac{1}{\lambda}, \infty\right)$ и выборе достаточно большого $N_1 = x > 0$ неравенства (8.10) всегда совместны при любом наборе параметров $\{f, Q, \lambda, T\}$ (левые части этих неравенств при $x \rightarrow +\infty$ становятся отрицательными, а правые как угодно большими и положительными). Физически реализация таких достаточно больших нормальных реакций N_1 и, соответственно, N_2 достигается, например, уже упомянутым выше «вбиванием» цилиндра между опорами A и B . При этом, в соответствие с формулами (8.7) и (8.8), *силы трения покоя F_1 и F_2 будут направлены в разные стороны, что и обеспечивает равновесие для больших T и при нарушении неравенства (8.2)!*

Рассмотрим случай $f \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$. В этом случае неравенства (8.10) можно переписать так:

$$0 < x < \frac{Q_* - y_1}{-f + \frac{1}{\lambda}}, \quad x > \frac{Q_* - y_1}{f + \frac{1}{\lambda}}, \quad (8.11)$$

$$0 < x < \frac{Q_* - y_2 + \frac{fT}{\lambda}}{-f + \frac{1}{\lambda}}, \quad x > \frac{Q_* - y_2 - \frac{fT}{\lambda}}{f + \frac{1}{\lambda}}. \quad (8.12)$$

Для совместности неравенств (8.11) необходимо и достаточно, чтобы $Q_* > y_1$. Вспоминая про обозначения (8.9), мы получим неравенство:

$$0 < T < Q \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2} - \lambda} = Q \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} = T_2. \quad (8.13)$$

Будем предполагать неравенство (8.13) выполненным. Из (8.11) и (8.12) мы получим такие двойные неравенства:

$$0 < \frac{Q_* - y_1}{f + \frac{1}{\lambda}} < x < \frac{Q_* - y_1}{-f + \frac{1}{\lambda}}, \quad (8.14)$$

$$\frac{Q_* - y_2 - \frac{fT}{\lambda}}{f + \frac{1}{\lambda}} < x < \frac{Q_* - y_2 + \frac{fT}{\lambda}}{-f + \frac{1}{\lambda}}. \quad (8.15)$$

Неравенства (8.14) и (8.15) представляют собой отрезки на вещественной оси $\{x : -\infty < x < \infty\}$. Для того, чтобы эти отрезки имели непустое пересечение необходимо и достаточно, чтобы нижняя оценка одного из них не превосходила верхней границы другого. Отсюда получим следующие два неравенства:

$$0 < \frac{Q_* - y_1}{f + \frac{1}{\lambda}} < \frac{Q_* - y_2 + \frac{fT}{\lambda}}{-f + \frac{1}{\lambda}}, \quad (8.16)$$

$$\frac{Q_* - y_2 - \frac{fT}{\lambda}}{f + \frac{1}{\lambda}} < \frac{Q_* - y_1}{-f + \frac{1}{\lambda}}. \quad (8.17)$$

Использование обозначений (8.9) и несложная проверка показывают, что неравенство (8.16) выполнено заведомо, а неравенство (8.17) эквивалентно неравенству:

$$0 < T < Q \frac{f\sqrt{1+\lambda^2}}{1+f^2-f\sqrt{1+\lambda^2}} = Q \frac{f}{\cos\theta(1+f^2)-f} = T_1. \quad (8.18)$$

Итак, одновременное выполнение неравенств (8.13) и (8.18) эквивалентно разрешимости (совместности) неравенств (8.10), т.е. возможности статического равновесия тела при $f \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$. Нарушение одного из неравенств (8.13), (8.18) влечет несовместность неравенств (8.10), т.е. невозможность статического равновесия тела. Отметим, что в силу условия $0 < f\lambda < 1$ мы всегда будем иметь неравенство $\cos\theta(1+f^2) - f > 0$, т.е. неравенство (8.18) корректно.

На этом все утверждения приведенного результата можно считать доказанными.

Отметим, что приведенное аналитическое решение задачи может быть также получено геометрическим способом с использованием конусов трения в точках A и B и теоремы о трех силах, которые должны пересекаться в одной точке при равновесии системы. В данном случае эти три силы суть силы реакции \overline{R}_A , \overline{R}_B в точках A , B и равнодействующая двух параллельных сил \overline{Q} и \overline{T} .

Замечание. Постановку задачи 8 можно интерпретировать как процесс постепенного («квазистатического») нагружения лежащего на опорах A , B цилиндра касательной силой $T(t)$ от 0 при $t = 0$ до (вообще говоря) ∞ . Задача тогда заключается в том, чтобы определить условия, при которых цилиндр всегда будет находиться в равновесии. Оказывается ответ на этот вопрос (помимо прочих условий) зависит от начальных сил реакций, действующих на цилиндр (при $t = 0$). Сформулируем полученные результаты для случая $Q = 0$.

Теорема 1. Пусть $Q = 0$, $\lambda f > 1$ ($\lambda = \operatorname{tg} \theta$), и сила $T(t)$ монотонно и непрерывно возрастает от $T(0) = 0$ до ∞ . Тогда:

1). Если при $t = 0$ начальное состояние цилиндра является **напряженным** и он находится в равновесии (т. е. при $t = 0$ связи в опорах A , B напряжены, и имеем $N_1(0) = N_2(0) > 0$ (строго!), $F_1(0) = -F_2(0) = = N_1(0)/\lambda$), то при $t > 0$ сохранится равновесие при любом непрерывном изменении силы $T(t)$ в интервале $(0, \infty)$ и любых непрерывных законах изменения реакций $N_i(t)$, $F_i(t)$, $i = 1, 2$, предписываемых какой-либо конструктивной реализацией односторонних связей в опорах A , B . При этом должно соблюдаться условие $\lambda^2 \neq 1 + f^2 + 1/f^2$.

2). Если при $t = 0$ начальное состояние цилиндра является **ненапряженным** и он находится в равновесии (т. е. при $t = 0$ связи в опорах A , B ослаблены, и имеем $N_i(0) = 0$, $F_i(0) = 0$, $i = 1, 2$), то при $t > 0$ может быть либо равновесие, либо движение, причем:

2.1) при $\lambda^2 > 1 + f^2 + 1/f^2$, т. е. при $\cos \theta < f/(1 + f^2)$, обязательно сохранится равновесие при указанных в п. 1) условиях;

2.2) при $\lambda^2 < 1 + f^2 + 1/f^2$, т. е. при $\cos \theta > f/(1 + f^2)$, обязательно (сразу!) будет движение (либо вращение цилиндра вокруг точки O , либо поворот его вокруг точки B с отрывом от точки A и, возможно, с проскальзыванием в точке B).

Теорема 2. Пусть $Q = 0$, $0 < \lambda f < 1$. Тогда при $t = 0$ в равновесии цилиндра напряженного его состояния быть не может, и (сразу!)

возникнет одно из описанных в п. 2.2) теоремы 1 движений, т. е. равновесия цилиндра в этом случае быть не может.

Доказательства сформулированных теорем осуществляются непосредственным перебором всех возможных ситуаций при непрерывном изменении касательной силы и сил реакций и здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Аналогичные результаты (которые мы здесь подробно не приводим) могут быть получены и в случае $Q > 0$ (строго). Разница только в том, что при $Q > 0$ начальное состояние цилиндра (при $t = 0$ и $T(0) = 0$) всегда будет напряженным, причем выполнено неравенство

$$N_1(0) > N_{10} = Q \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{2(1 + \lambda f)}.$$

Тогда вопрос о равновесии или движении цилиндра при дальнейшем монотонном и непрерывном увеличении тангенциальной силы $T(t)$ зависит также и от того, насколько **сильно напряженным** было начальное состояние (т. е. от величины $N_1(0)$). Можно показать, что при $\lambda f > 1$ существует такое N_{1*} , зависящее только от параметров Q , λ , f , при котором для любого $N_1(0) > \max\{N_{10}, N_{1*}\}$ будет сохраняться равновесие при $t > 0$ и произвольном монотонном и непрерывном изменении тангенциальной нагрузки $T(t)$ в интервале $(0, \infty)$. Если же $0 < \lambda f < 1$, то начальное напряженное состояние равновесия характеризуется двойным неравенством

$$0 < Q \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{2(1 + \lambda f)} < N_1(0) < Q \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{2(1 - \lambda f)}.$$

Тогда нетрудно показать, используя неравенства (8.10), что при $T > \max\{T_1, T_2\}$, где T_1, T_2 даются формулами (8.1), (8.3), обязательно нарушится равновесие цилиндра.

В заключение отметим, что рассмотренная задача представляет собой упрощенную модель так называемой контактной задачи с трением, которая является одной из труднейших в аналитической теории упругости. Приведем здесь слова члена-корреспондента РАН Р. В. Гольдштейна из предисловия к книге [15, стр. 6]: **«В контактных задачах с трением важна история нагружения (курсив наш), а не только текущие значения нормальных и сдвиговых нагрузок.»**

9. О некоторых задачах теории удара с односторонними связями

Задача № 1. (Задача № 16.21 из [14]).

В цирковом аттракционе используется подкидная доска, на правый конец которой с высоты H падает шар A массы M_1 и остается на доске в точке контакта. На другом конце доски находится шар B массы M_2 , который, приобретая скорость, отделяется от доски при повороте ее вокруг горизонтальной оси. Момент инерции доски относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через точку O , равен J , угол наклона доски к горизонту равен α .

- а) Определить наибольшую высоту подъема шара B , если $OA_1 = l_1$, $OB = l_2$.
- б) Решить задачу, если шару B сообщена в конце удара относительно по отношению к доске скорость v , направленная перпендикулярно к доске.

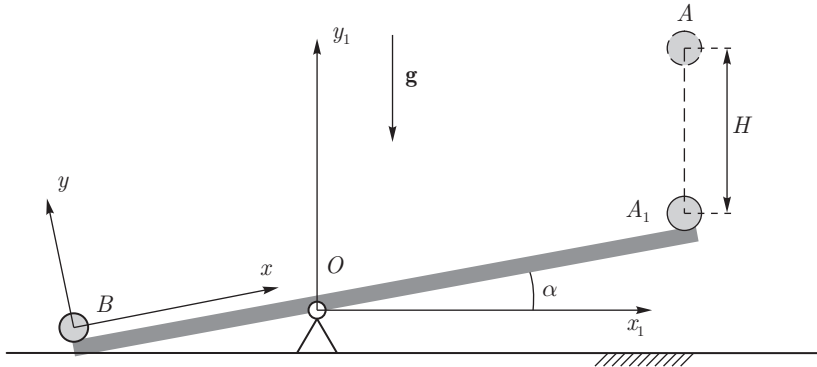


Рис. 12.

Замечание 1. Фраза, выделенная в условии задачи, нуждается в уточнении. Дело в том, что на шар B наложена существенно односторонняя геометрическая связь, а поэтому процесс и момент схода с этой связи (о котором идет речь в формулировке задачи) должен быть определен строго, как с формальной, так и с физической точек

зрения. В приводимом ниже решении предпринята попытка изложить этот вопрос научно–методически так, чтобы сделать его понятным для студентов ВУЗа.

Замечание 2. Пункт 2) в формулировке задачи также нуждается в уточнении. Непонятно, как сообщить шару B дополнительную скорость в конце удара. Наверное, речь идет о той дополнительной скорости, которую сообщает своему телу цирковой акробат (шар B) в момент удара, отталкиваясь от доски.

Решение задачи. а) Доударное состояние системы известно: доска и шар B в покое, т. е. $\omega^- = 0$, где ω^- — угловая скорость доски до удара, шар A непосредственно перед ударом имеет вертикальную скорость $v_1^- = \sqrt{2gH}$ (эта скорость определяется из закона полной механической энергии для процесса свободного падения шара A с высоты H : $M_1 g H = \frac{1}{2} M_1 (v_1^-)^2$). Послеударное состояние системы также определено: доска вместе с шарами A и B начинает поворачиваться вокруг точки O . Неизвестна только послеударная угловая скорость этого поворота, которую обозначим ω^+ .

Подчеркнем еще раз, что непосредственно после удара оба шара сохраняют свой контакт с доской (шар A по условию «прилипает к доске», а шар B может оторваться от доски только при дальнейшем ее вращении!). Для определения ω^+ , применяем теорему об изменении кинетического момента при ударе относительно точки O . Выбор точки O связан с тем, что внешние ударные импульсы возникают только в шарнире O , т. е. их момент относительно этой точки равен 0, а поэтому кинетический момент всей системы относительно точки O сохраняется.

До удара имеем

$$K_O^- = M_1 v_1^- l_1 \cos \alpha,$$

после удара имеем

$$K_O^+ = J\omega^+ + M_1 \omega^+ l_1^2 + M_2 \omega^+ l_2^2.$$

Т. к. $K_O^- = K_O^+$, то получим

$$\omega^+ = \frac{M_1 \sqrt{2gH} l_1 \cos \alpha}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} \quad (9.1)$$

б) Исследуем теперь вопрос отрыва шара B от доски. Будем предполагать, что доска абсолютно шероховатая, или шар помещен в небольшом желобе доски, чтобы исключить возможность перемещения

его вдоль доски. Введем систему координат Bxy с началом в точке B и осью y , перпендикулярной доске (рис. 12). Основным критерием безотрывного движения груза B на доске является положительность нормальной (т. е. вдоль оси Bx) силы, действующей на шар со стороны доски. Запишем уравнение динамики для груза B вдоль оси y при безотрывном движении (т. е. вместе с доской):

$$M_2 \dot{\omega} l_2 = N - M_2 g \cos \varphi, \quad (9.2)$$

где N — нормальная реакция, $\dot{\omega}$ — угловое ускорение доски, φ — угол наклона доски к горизонту: $\varphi \in (-\alpha, \alpha)$. Здесь мы для простоты предполагаем, что граничные положения доски симметричны при опоре на A или B , т. е. угол наклона φ доски к горизонтали меняется в пределах от $-\alpha$ до $+\alpha$. Этого всегда можно добиться, подняв или опустив уровень пола под точкой A (или B).

Пусть M_3 — масса доски, x_3 — координата центра ее масс в системе Bxy , тогда уравнение моментов для системы относительно точки O в послеударном движении имеет вид:

$$\dot{\omega}(J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2) = M_1 g l_1 \cos \varphi - M_2 g l_2 \cos \varphi + M_3 g (x_3 - l_2) \cos \varphi. \quad (9.3)$$

Из (9.2) и (9.3) получим следующую формулу для N :

$$N = M_2 g \cos \varphi + \frac{M_2 l_2 g \cos \varphi}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 (x_3 - l_2)]. \quad (9.4)$$

Изучим следующие две возможные ситуации:

- 1⁰. отрыв происходит сразу, т. е. при $\varphi = -\alpha$;
- 2⁰. отрыва при $\varphi \in [-\alpha, \alpha)$ нет, и он происходит «естественным» образом при $\varphi = \alpha$, когда конец A доски ударится об опорную горизонтальную плоскость, и доска начнет обратное вращение (если, конечно, у системы хватит приобретенной, в результате удара, кинетической энергии!).

Из формулы (9.4) видно, что случай 1⁰ имеет место при выполнении неравенства:

$$J + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 + M_3 l_2 (x_3 - l_2) < 0. \quad (9.5)$$

При выполнении противоположного неравенства

$$J + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 + M_3 l_2 (x_3 - l_2) > 0 \quad (9.6)$$

будет иметь место случай 2⁰.

Пусть, например, доска является однородной, тогда:

$$x_3 = \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad J = M_3 \frac{(l_1 + l_2)^2}{12} + M_3 \frac{(l_1 - l_2)^2}{4}.$$

Неравенства (9.5) и (9.6) принимают вид:

$$\frac{1}{6} M_3 (2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2) + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 < 0, \quad (9.7)$$

$$\frac{1}{6} M_3 (2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2) + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 > 0. \quad (9.8)$$

Из этих формул видно, что если M_3 достаточно велико и $2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2 < 0$ ($l_2 > 2l_1!$), то груз B отскочит сразу, а если $l_2 < 2l_1$, то груз B отскочит лишь в момент удара конца A доски о землю!

Пусть выполнено неравенство (9.5). Тогда груз B , получив скорость $v_2^+ = \omega^+ l_2$ перпендикулярно к доске, сразу после удара не будет контактировать с доской и полетит по параболе влево от доски (т. к. предположение контакта приводит к отрицательности нормальной реакции, действующей на шар B вдоль оси Bu). Наибольшую высоту его подъема мы определим опять же из закона сохранения полной механической энергии, записанного в неподвижных осях Ox_1y_1 (см. рис. 12):

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{2} [(v_{2x_1}^+)^2 + (v_{2y_1}^+)^2] &= M_2 g y_{\max} + \frac{M_2}{2} (v_{2x_1}^+)^2 \\ \Rightarrow y_{\max} &= \frac{1}{2g} (v_{2y_1}^+)^2 = \frac{1}{2g} (\omega^+)^2 l_2^2 \cos^2 \alpha = \\ &= H \cos^4 \alpha \left(\frac{M_1 l_1 l_2}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Этот же ответ приведен в задачке [14], правда, без неравенства (9.5).

Пусть выполнено неравенство (9.6). Тогда груз B оторвется лишь при $\varphi = \alpha$, т. е. в момент удара конца A доски о землю. В этот момент он будет иметь скорость $v_2 = \omega_2 l_2$, где $\omega_2 \neq \omega^+$, $\omega_2 > \omega^+$. Причем эта скорость будет перпендикулярна доске и направлена вправо. Скорость ω_2 мы найдем из закона сохранения полной механической энергии для системы «доска + шары A и B »:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2) [\omega_2^2 - (\omega^+)^2] &= M_1 g l_1 2 \sin \alpha - \\ &- M_2 g l_2 2 \sin \alpha + M_3 g (x_3 - l_2) 2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\omega_2^2 = (\omega^+)^2 + 4g \sin \alpha \frac{M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2)}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} \quad (9.10)$$

Теперь нетрудно найти максимальную высоту подъема. Ясно, что при малых α эта высота количественно будет мало отличаться от уже полученного ответа (9.9). Однако *качественно* результаты отличаются сильно: в одном случае шар B полетит влево, а в другом — вправо.

Отметим еще одну возможную ситуацию, которая может реализоваться в рассматриваемом случае выполнения неравенства (9.6). Если вместе с неравенством (9.6) выполнено неравенство

$$M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2) < 0, \quad (9.11)$$

то ситуация 2 имеет место при выполнении неравенства

$$(\omega^+)^2 + 4g \sin \alpha \frac{M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2)}{J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2} > 0.$$

Используя формулу (9.1), отсюда получим:

$$M_1^2 H l_1^2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha (J + M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2) [M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3(x_3 - l_2)] > 0.$$

Если будет выполнено противоположное неравенство (например, H очень мало или α близко к $\frac{\pi}{2}$), то после удара доска с шарами будет совершать *замедленное* вращение, и, кроме того, будет существовать также $\varphi^* \in (-\alpha, \alpha)$, при котором $\omega(\varphi^*) = 0$. После этого доска начнет вращаться против часовой стрелки и ударится о землю уже концом B .

Покажем, что множество, задаваемое неравенствами (9.6) и (9.11), не пусто. Пусть доска однородная. Тогда имеем неравенства:

$$\frac{1}{6} M_3 (2l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2) + M_1 l_1^2 + M_1 l_1 l_2 > 0,$$

$$M_1 l_1 - M_2 l_2 + M_3 \frac{l_1 - l_2}{2} < 0.$$

Ясно, что при выборе достаточно большой массы M_2 эти неравенства заведомо имеют решения.

Подведем итоги. Возможны три варианта послеударного движения шара B .

- (I) После удара шар B отрывается от доски и летит по параболе влево от нее.
- (II) После удара шар B вращается вместе с доской, и этот процесс длится вплоть до удара конца A о землю, после чего шар B отрывается от доски и летит по параболе вправо от нее.
- (III) После удара шар B вращается по часовой стрелке вместе с доской замедленно вплоть до того момента, когда доска остановится в своем вращении (не ударившись концом A). Затем продолжается ускоренное вращение против часовой стрелки вплоть до момента удара доски о землю концом B .

Задача № 2. (Задача № 16.38 из [14]).

Колесо массы m и радиуса r , катясь без скольжения по горизонтальной направляющей LL , наталкивается на уступ O и, огибая его, поднимается на горизонтальную направляющую OM . Высота уступа h . Удар колеса об уступ неупругий, скольжение при ударе и огибании уступа отсутствует.

- a) *Определить, какова должна быть скорость центра C колеса перед ударом, чтобы колесо вкатилось на верхнюю направляющую.*
- b) *При заданной скорости центра колеса v_C до удара определить импульс ударной реакции уступа S . Колесо считать однородным диском.*

Замечание. Фраза, выделенная в формулировке задачи, нуждается в разъяснении и уточнении. Прежде всего, подразумевается, что точка колеса, контактирующая в момент столкновения (и удара) с уступом O , остается неподвижной и после удара. Поэтому рассматриваемый в задаче удар, следует называть абсолютно неупругим (коэффициент восстановления равен 0). Далее, предположение об отсутствии скольжения при ударе и последующем огибании уступа подразумевает наличие *положительной нормальной реакции*, действующей на колесо со стороны уступа, т. к. связь в точке контакта является односторонней. Конечно, можно для упрощения предполагать эту связь двухсторонней, однако, такая модель является нереалистичной.

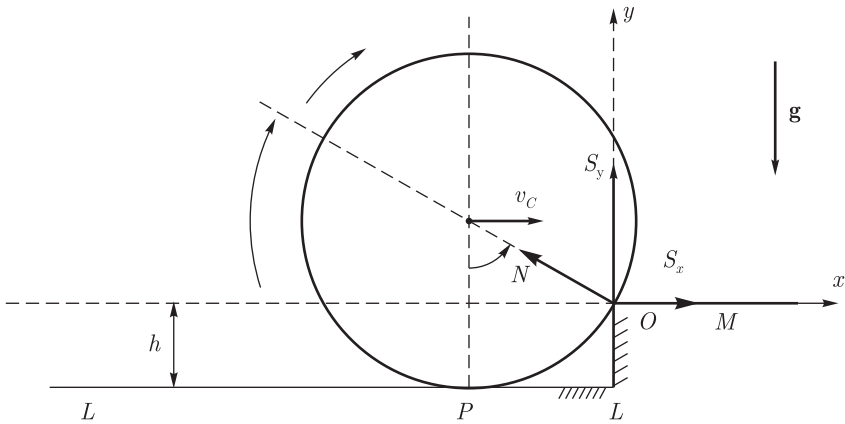


Рис. 13.

Решение задачи. Пусть S_x и S_y — ударные импульсы, приложенные в точке контакта O (см. рис. 13). Обозначим через α угол, образуемый радиусом CO с вертикалью ($\alpha = \angle OCP$). Ясно, что

$$\cos \alpha = 1 - \varepsilon, \quad \sin \alpha = \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = h/r. \quad (9.12)$$

Доударное состояние колеса является качением без проскальзывания, а послеударное — это вращение без проскальзывания вокруг точки O . В системе координат Oxy (рис. 13) имеем для скоростей центра масс C и угловой скорости ω колеса:

$$\left. \begin{aligned} v_{Cx}^- &= v_C, & v_{Cy}^- &= 0, & \omega &= \omega^- = \frac{v_C}{r} \\ v_{Cx}^+ &= \omega^+ r \cos \alpha, & v_{Cy}^+ &= \omega^+ r \sin \alpha, & \omega &= \omega^+ \end{aligned} \right\}, \quad (9.13)$$

где знак «-» относится к доударному состоянию, а знак «+» относится к состоянию, наступившему сразу после момента удара. Т.к. ударные импульсы S_x и S_y не создают момента относительно точки O , то сохраняется кинетический момент колеса относительно точки O . Имеем, используя (9.2):

$$\begin{aligned} K_O^- &= mv_C(r - h) + J_C \omega^- = \frac{3}{2}mv_C r \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right), \\ K_O^+ &= m(\omega^+ r) + J_C \omega^+ = \frac{3}{2}mr^2 \omega^+. \end{aligned}$$

Приравнивая полученные выражения, найдем ω^+ :

$$\omega^+ = \frac{v_C}{r} \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon \right). \quad (9.14)$$

Для определения ударных импульсов запишем, используя формулы (9.13), уравнения изменения количества движения в проекциях на выбранные оси координат:

$$S_x = m(\omega^+ r \cos \alpha - v_C), \quad S_y = m\omega^+ r \sin \alpha.$$

Подставляя сюда формулу (9.14) и используя формулу (9.12), получим:

$$S_x = mv_C \frac{\varepsilon}{3} (2\varepsilon - 5), \quad S_y = mv_C \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon \right) \sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)}.$$

Это и есть ответы к пункту 2 задачи.

Переходим к решению пункта 1 задачи. После удара колесо начинает вращаться вокруг точки O по часовой стрелке, т. е. поднимается вверх. Если не рассматривать процесс этого движения в деталях, то ясно, что колесо поднимается до уровня вкатывания на OM , если у него будет достаточный запас послеударной кинетической энергии. Т. к. полная механическая энергия при таком движении без проскальзывания в точке O сохраняется, то минимальное ω_1 , необходимое для такого вкатывания, находится из соотношения $T^+ = \Pi$, где

$$T^+ = \frac{m}{2}(\omega_1 r)^2 + \frac{J_C}{2}\omega_1^2 \quad \Pi = mgh.$$

Отсюда $\omega_1^2 = \frac{4gh}{3r^2}$.

Таким образом, для вкатывания необходимо, чтобы

$$(\omega^+)^2 \geq \omega_1^2 = \frac{4gh}{3r^2}. \quad (9.15)$$

Используя (9.14), получим соответствующее неравенство для v_C :

$$v_C^2 \geq \frac{4}{3} \frac{gh}{\left(1 - \frac{2h}{3r} \right)^2}. \quad (9.16)$$

Формула (9.16) приведена в [14], где указано также и неравенство, при котором этот ответ справедлив: $0 \leq \frac{h}{r} \leq 1$. Это неравенство, вообще говоря, очевидно, т. к. при $h > r$ колесо может отскочить только назад или «прилипнуть» к уступу в момент удара, а далее, скорее всего, останется в покое.

Рассмотрим процесс послеударного движения колеса более детально, предполагая, что в точке O отсутствует проскальзывание. Пусть φ — угол между радиусом CO и отрицательной горизонтальной осью Ox (рис. 13). Запишем уравнение движения центра масс C колеса в проекции на радиус CO :

$$m\dot{\varphi}^2 r = mg \sin \varphi - N, \quad (9.17)$$

где N — нормальная реакция, действующая на колесо со стороны уступа O .

Для осуществимости такого безотрывного движения колеса необходимо, чтобы $N > 0$, т. е. из (9.17) имеем неравенство:

$$N = mg \sin \varphi - m\dot{\varphi}^2 r > 0. \quad (9.18)$$

Ясно, что $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} \right]$.

Запишем теорему об изменении кинетического момента колеса относительно точки O :

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\varphi} = -mgr \cos \varphi,$$

откуда следует, что $\ddot{\varphi} < 0$, т. е. $\dot{\varphi}(\varphi)$ — монотонно убывающая функция, а $\sin \varphi$ — монотонно возрастающая функция при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} \right]$. Тогда, если неравенство (9.18) выполнено в начальный момент при $\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то оно будет выполнено вплоть до вкатывания колеса на OM . Таким образом, нарушение неравенства (9.18) (т. е. неосуществимость описанного движения) может произойти лишь при $\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, т. е. сразу после удара выполняется соотношение:

$$g \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - (\omega^+)^2 r < 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega^+)^2 > \frac{g \cos \alpha}{r}.$$

Итак, получен следующий результат:

а) если

$$\frac{4}{3} \frac{gh}{r^2} \leq (\omega^+)^2 \leq \frac{g}{r} \left(1 - \frac{h}{r}\right), \quad (9.19)$$

то безотрывное вкатывание колеса возможно и реализуется при отсутствии проскальзывания в точке O ;

б) если $(\omega^+)^2 \leq \frac{4}{3} \frac{gh}{r^2}$, то вкатывание невозможно, а если $(\omega^+)^2 > \frac{g}{r} \left(1 - \frac{h}{r}\right)$, то безотрывное движение вообще невозможно реализовать при отсутствии проскальзывания в точке O .

Непустота множества движений, удовлетворяющих пункту а), может быть обеспечена только при соблюдении неравенства, вытекающего из (9.19):

$$\frac{4}{3} \frac{gh}{r^2} \leq \frac{g}{r} \left(1 - \frac{h}{r}\right) \Rightarrow 0 \leq h \leq \frac{3}{7}r.$$

Если $h > \frac{3}{7}r$, то вкатывание колеса при отсутствии проскальзывания в точке O , не реализуется. **Таким образом, ответ в данной задаче к пункту 1 должен быть таким: послеударное вкатывание колеса на верхнюю направляющую OM при отсутствии проскальзывания в точке контакта O возможно только при соблюдении неравенств:**

$$\frac{4}{3} \frac{gh}{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{r}\right)^2} < v_C^2 < \frac{g(r-h)}{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{r}\right)^2}, \quad 0 \leq h \leq \frac{3}{7}r.$$

Нарушение одного из этих неравенств свидетельствует о невозможности вкатывания колеса в рамках рассматриваемой модели движения с отсутствием проскальзывания колеса в точке O .

Отметим, что дальнейшее исследование данной задачи (которое здесь не приводится) ведет к возникновению парадоксальных ситуаций типа «парадоксов Пэнлеве».

Литература

- [1] Пэнлеве П. *Лекции о трении*. — М.: Гостехтеориздат, 1954. — 316 с.
- [2] Фейнман, Лейтон, Сендс. *Задачи и упражнения с ответами и решениями*. М.: Мир. — 1969. — 624 с.
- [3] Тимошенко С., Юнг Д. *Инженерная механика*. — М.: Машгиз, 1960. — 507 с.
- [4] Розенблат Г. М. *Механика в задачах и решениях*. — М.: Эдиториал УРСС, 2004. — 160 с.
- [5] Левенсон Л. Б. *Статика и динамика машин*. ОНТИ НКТП СССР. — Госмашметиздат, 1934. — 476 с.
- [6] Жуковский Н. Е. *Трение бандажей железнодорожных колес о рельсы*. Собр. соч., т. VII. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. — 426–478 с.
- [7] *Динамика материальной точки. Методические указания к решению задач и выполнению курсовой работы по теоретической механике* / В. Н. Баранов, О. П. Феоктистова, Ю. С. Саратов, Н. Н. Щеглова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 36 с.
- [8] Раус Э. Дж. *Динамика системы твердых тел*. — М.: Наука, 1983. — Т. I. — 463 с.
- [9] Зоммерфельд А. *Механика*. — М.: Государственное издательство иностранной литературы. — 1947.- 391 с.
- [10] *Теоретическая механика*. Учебник для вузов. Под ред. К. С. Колесникова. — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. — 2003. — 787 с.

- [11] Мещерский И. В. *Сборник задач по теоретической механике*. М.: Наука. — 1986. — 448 с.
- [12] *Теоретическая механика. Руководство к решению задач*. Под ред. проф. С. К. Слезкинского. 2007. — Спб, Изд-во ПОЛИТЕХНИКА. — 487 с.
- [13] Игнашов И. А. *Теоретическая механика. Статика и кинематика*. Решения задач из сборника И. В. Мещерского, 36 издание, 1986 г. — Вологда. — 2000. — 444 с.
- [14] Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. 3-е изд., стер. / Под ред. К. С. Колесникова. — Спб.: Издательство «Лань», 2007. — 448 с.
- [15] Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. М.: Мир, 1989. — 509 с.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. (499) 135-54-37

2. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)

3. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный, Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409-93-28)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Григорий Маркович Розенблат

СУХОЕ ТРЕНИЕ В ЗАДАЧАХ И РЕШЕНИЯХ

Дизайнер ? . ? . ?

Технический редактор ? . ? . ?

Компьютерный набор и верстка ? . ? . ?

Корректор ? . ? . ?

Подписано в печать 17.08.2009. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. ???, Уч. изд. л. ????

Гарнитура ???, Бумага офсетная №1.

Тираж ??? экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500-295
