ШАМРОВСКИЙ А.Д.

# АСИМПТОТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ЗАПОРОЖЬЕ 1997 А.Д. Шамровский

## АСИМПТОТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Издательство Запорожской государственной инженерной академии 1997

#### Александр Дмитриевич Шамровский

Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости – Запорожье, Издательство Запорожской государственной инженерной академии, 1997 – 169 с.

#### ISBN 966-7101-10-X

Книга предназначена для научных работников и студентов, интересующихся современными методами исследования сложных систем, описываемых алгебраическими и дифференциальными уравнениями.

В издании изложен синтетический метод, объединяющий возможности теории групп и асимптотического анализа. На основе этого метода получены асимптотически обоснованные динамические уравнения теории пластин и оболочек. Решен ряд задач об излучении нестационарных волновых процессов в пластинах и оболочках.

Ил. 22. Библиогр. 73 назв.

Монография печатается по рекомендации Ученого Совета Запорожской государственной инженерной академии.

Рецензенты: Доктор физико-математических наук, профессор Андрианов И.В., доктор физико-математических наук, профессор Смирнов С.А.

ISBN 966-7101-10-X

© А.Д. Шамровский, 1997

## оглавление

введение	3
1. Дифференциальные уравнения плоской задачи теории	
упругости для ортотропной среды	8
1.1. Оцениваемые величины	8
1.2. Поиск параметров асимптотического интегрирования в случае	
естественного малого параметра	12
1.3. Поиск параметров асимптотического интегрирования в случае	
формального малого параметра	15
1.4. Связь между асимптотическим анализом и теорией групп	19
2. Уравнение Клейна-Гордона	23
2.1. Нахождение параметров асимптотического интегрирования	23
2.2. Построение процедур последовательных приближений	25
2.3. Прифронтовая асимптотика	28
2.4. Медленноизменяющиеся асимптотики	34
3. Динамические уравнения теории упругости в декартовых	
координатах	37
3.1. Введение параметров асимптотического интегрирования	37
3.2. Поиск параметров асимптотического интегрирования	39
3.3. Построение процедуры последовательных приближений	41
3.4. Обобщенное плоское напряженное состояние	42
3.5. Уточненное плоское напряженное состояние	46
3.6. Классические уравнения изгиба пластины	49
3.7. Уравнения изгиба пластины с учетом сдвига и инерции	
вращения	52
3.8. Уравнения типа Тимошенко	59
4. Решение задач о распространении переходных волновых	
процессов в тонком слое	62
4.1. Асимптотико-групповой анализ уточненных дифференциальных	
уравнений плоского напряженного состояния	62
4.2. Решение задачи о распространении продольной одномерной волн	ЫВ
слое	65
4.3. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений	
изгиба пластины с учетом сдвига и инерции вращения	72
4.4. Решение задачи о действии внезапно приложенного изгибающего	
момента на торец полубесконечной пластины	76
4.5. Решение задачи о действии внезапно приложенной перерезываюц	цей
силы на торец полубесконечной пластины	83
4.6. Решение задач в рамках классической теории изгиба пластины	86
4.7. Решение задач в рамках теории типа Тимошенко	90
5. Динамические уравнения теории упругости в криволинейной	
ортогональной системе координат	93
5.1. Введение параметров асимптотического интегрирования	93
5.2. Поиск параметров асимптотического интегрирования	97

5.3. Построение процедуры последовательных приближений	99
5.4. Коэффициенты уравнений теории упругости в специализированно	ой
системе координат	101
5.5. Вывод динамических уравнений теории оболочек	102
5.6. Безразмерная форма динамических уравнений теории оболочек	109
5.7. Коэффициенты уравнений теории упругости в произвольной	
криволинейной системе координат	111
5.8. Динамические уравнения теории оболочек в произвольной систем	ıe
координат	112
6. Асимптотико-групповой анализ уточненных уравнений теории	
оболочек	119
6.1. Построение процедуры последовательных приближений	119
6.2. Прифронтовые асимптотики	122
6.3. Быстроизменяющиеся напряженно-деформированные состояния	125
6.4. Уравнения изгиба пологой оболочки	128
6.5. Варианты безмоментных уравнений оболочки	130
6.6. Квазиодномерные уравнения изгиба оболочки	136
7. Решение некоторых задач для осесимметричной цилиндрическ	ой
оболочки	138
7.1. Уравнения цилиндрической оболочки	138
7.2. Решение задач о действии внезапно приложенных изгибающего	
момента и продольного усилия на торец полубесконечной	
оболочки	140
7.3. Решение задачи о действии внезапно приложенной перерезывающ	цей
силы на торец полубесконечной оболочки	143
7.4. Исследование прифронтовых зон	147
7.5. Приграничная асимптотика для случая продольной нагрузки	149
7.6. Приграничные асимптотики для случаев изгибных нагрузок	153
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	163

В теории дифференциальных уравнений – как обыкновенных, так и в частных производных – видную роль играют два подхода. Один, основанный на использовании каких-либо соображений симметрии и математически связанный с применением теории групп; другой, основанный на упрощении рассматриваемых уравнений и известный как асимптотический анализ.

Как известно, применение теории групп к проблеме решения алгебраических уравнений произвольной степени в радикалах связано, в первую очередь, с именем Э. Галуа. В дальнейшем работы Э. Галуа были продолжены и развиты К. Жорданом.

Ученик К. Жордана С. Ли рассмотрел задачу применения методов теории групп к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. С. Ли были заложены основы теории непрерывных групп преобразований. Широкий класс непрерывных групп известен ныне под его именем.

Однако в дальнейшем получили развитие, в первую очередь, теоретические аспекты теории групп. Те же результаты, которые касались связи теории групп с исследованием дифференциальных уравнений, были временно забыты.

Как указывает Л.В. Овсянников [30], это объясняется несколькими обстоятельствами. Во-первых, задача нахождения группы преобразований, обыкновенных допускаемой системой дифференциальных уравнений, оказалась, вообще говоря, не проще, чем задача интегрирования этой системы. Во-вторых, аппарат С. Ли не позволял решать краевые задачи теории дифференциальных уравнений, поскольку изучению В нем подвергались только локальные свойства семейства решений в окрестности некоторой точки. В-третьих, оказалось, что хотя теория С. Ли применима не только к изучению обыкновенных дифференциальных уравнений, но и к дифференциальных уравнений частных производных, изучению В произвольно взятая система таких уравнений не допускает обычно никакой преобразований, кроме тривиальной, состоящей группы ИЗ одного тождественного преобразования.

Задачу возрождения теории С. Ли применительно к конкретным системам дифференциальных уравнений, возникающим в прикладных вопросах, поставил перед собой Л.В. Овсянников. Оказалось, что имеется целый ряд проблем, решение которых может быть плодотворным при помощи методов теории групп. Это, в первую очередь, относится к изучению дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в различных задачах механики и физики.

Уравнения, описывающие какие-либо конкретные физические процессы, как правило, допускают нетривиальные группы преобразований, глубже изучить свойства этих уравнений. Основным позволяющие Овсянникова было развитие теории результатом Л.В. инвариантногрупповых решений. В рамки этой теории попадает большинство ранее известных частных решений уравнений механики; были найдены также

некоторые новые решения задач гидроаэромеханики. В дальнейшем ряд результатов был получен и для задач теории упругости и пластичности [7].

Тем не менее, чаще всего оказывается, что и при изучении конкретных задач группа преобразований, допускаемая заданной системой уравнений, является сравнительно "бедной" и сведения, полученные о системе уравнений с помощью методов теории групп, не являются новыми или даже носят тривиальный характер.

В работе [31] Л.В. Овсянников отметил, что упрощенные системы уравнений, используемые для моделирования некоторой заданной системы, допускают, как правило, более широкие группы преобразований, чем исходная система. Там же была поставлена задача нахождения общих принципов моделирования данной системы уравнений более простой системой, допускающей более широкую группу по сравнению с исходной системой.

Иными словами, Л.В. Овсянников поставил задачу о нахождении связи между теорией групповых свойств дифференциальных уравнений и методами асимптотического анализа.

Под асимптотическим анализом понимается очень большая область исследований, связанная с теми или иными упрощениями, производимыми в процессе решения уравнений. Совершенно невозможно дать в рамках настоящего введения обзор всех вариантов асимптотического анализа, поэтому остановимся очень кратко только на некоторых вопросах, связанных с теорией пластин и оболочек.

Уравнения оболочек содержат естественный малый параметр, равный отношению толщины оболочки к какому-либо из ее радиусов; это позволяет во многих случаях использовать упрощенные уравнения – моментные, безмоментные, полубезмоментные и так далее. Применение таких уравнений широко распространено, поэтому можно считать, что теория оболочек и асимптотический анализ неразрывно связаны.

Особо выделяется современное направление обоснования уравнений пластин и оболочек при помощи асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости. Здесь следует, в первую очередь, отметить труды А.Л. Гольденвейзера.

Все применения асимптотического анализа к теории оболочек (как и к другим теориям) отличаются общей особенностью. Оценки весов тех или иных членов уравнений производятся, как правило, на основе интуитивных соображений, требующих значительной предварительной информации об искомом решении. Такой подход оправдывает себя в относительно простых случаях (относительно, потому что простых задач здесь не бывает), но приводит к значительным проблемам с увеличением сложности задач. Труднопреодолимые проблемы возникают даже тогда, когда целью асимптотического анализа является не получение новых результатов, а обоснование уже известных, например, уравнений пластин и оболочек, полученных на базе каких-то гипотез. Выделим особо класс динамических задач, поскольку в них все указанные проблемы обостряются.

Как известно, классические динамические уравнения изгиба пластин и оболочек являются уравнениями параболического типа, то есть им соответствует бесконечно большая скорость распространения возмущения.

После того как С.П. Тимошенко вывел уравнения изгиба балки, учитывающие эффекты сдвига от перерезывающей силы и инерции вращения [45], с целью уточнения высоких частот колебаний, было замечено, что эти уравнения имеют гиперболический тип, то есть описывают распространение возмущений с конечной скоростью.

Появились работы, например, [47,54,56–58], посвященные исследованию распространения нестационарных волновых процессов в балке типа Тимошенко.

Я.С. Уфлянд [47] и Р. Миндлин [66] применили идеи С.П. Тимошенко к выводу уточненных уравнений динамики пластин. Это стимулировало дальнейшие исследования в области получения уравнений пластин и оболочек типа Тимошенко [1,2,72], а также еще более точных уравнений.

Значительный вклад в исследования нестационарных задач пластин и оболочек внесла научная школа под руководством Н.А. Алумяэ. В качестве основного инструмента решения задач в ней были приняты интегральные преобразования. Асимптотические методы применялись в процессе обращения искомых функций.

Особо здесь следует выделить исследования У.К. Нигула, рассматривавшего вопросы обоснования динамических уравнений пластин и оболочек при помощи решения трехмерных уравнений теории упругости с применением различных аналитических и численных методов.

Подробные обзоры исследований по динамике пластин и оболочек можно найти, например, в работах [3,19]. Остановимся на некоторых из существующих здесь проблем.

Использование интегральных преобразований, даже в сочетании с асимптотическим анализом, приводит к своим трудностям. В докладах H.A. Алумяэ [5] и У.К. Нигула [29] было указано на отсутствие прогресса в решении двумерных задач теории оболочек, то есть таких, в которых решение зависит от двух пространственных координат. В качестве актуальных указывались задачи о распространении упругих волн от точки приложения сосредоточенной силы или от края кругового выреза в цилиндрической оболочке типа Тимошенко.

Для решения подобных задач нужны были новые идеи. Отметим, в связи с этим, работы Л.И. Маневича, который один из первых обнаружил, что ситуации типа основного состояния и погранслоя могут возникать в самых различных задачах, далеких от традиционных областей применения асимптотического анализа. Он же выяснил, с позиций асимптотического анализа, необходимость совместного применения асимптотического анализа и теории групп. Дело в том, что в асимптотическом анализе отсутствует четкий критерий упрощения, достигаемого при отбрасывании тех или иных членов уравнений. Легко можно представить ситуацию, когда отбрасывание каких-то членов может испортить уравнения, а не упростить их.

В связи с этим Л.И. Маневич предложил считать критерием истинного упрощения при асимптотическом анализе уравнений расширение допускаемой группы преобразований [24]. Более того, он предложил считать расширение допускаемой группы преобразований целью асимптотического анализа, поскольку это создает новые возможности при решении уравнений. Отметим также широкое использование в работах Л.И. Маневича критерия минимального упрощения.

Таким образом, подход Л.И. Маневича можно считать встречным по отношению к подходу Л.В. Овсянникова в проблеме сочетания теории групповых свойств дифференциальных уравнений и асимптотического анализа.

Именно использование идей Л.И. Маневича позволило достичь эффективных результатов при решении одномерных и двумерных задач о распространении нестационарных волновых процессов в рамках теории пластин и оболочек типа Тимошенко. Сочетание методов асимптотического анализа и теории групп [48–51] позволило, в частности, решить и задачу, поставленную Н.А. Алумяэ и У.К. Нигулом.

Здесь нужно отметить, что в принципе, все методы решения дифференциальных уравнений так или иначе основаны на теории групп. В работе [12] показано, что все широко распространенные элементарные и специальные функции связаны с представлениями некоторых групп преобразований.

Использование тригонометрических функций в интегральных преобразованиях опирается на группы переносов по пространственным координатам и времени. Такие группы допускаются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Но при этом в основу кладутся стационарные частные решения уравнений; решения нестационарных задач строятся в виде суперпозиций решений стационарных задач, что и порождает соответствующие проблемы.

В отличие от этого, решение всех задач в работах [48-51] ищется в функций, инвариантных относительно рядов растяжений виде пространственной координаты и времени (автомодельных). При этом уже в приближении определяются разрывы на фронтах первом распространяющегося возмущения, а последующие приближения позволяют описать и зоны, удаленные от фронтов, вплоть до нагруженной границы.

Для дальнейшего развития предложенного метода необходимо было преодолеть некоторые проблемы. Во-первых, оказалось, что малоперспективно тратить усилия на исследования прифронтовых зон в рамках теории типа Тимошенко. Результаты многочисленных трудов различных исследователей привели, к этому времени, к пониманию того, что уравнения типа Тимошенко, несмотря на свой гиперболический тип, непригодны для описания принципиально трехмерных прифронтовых зон. Они дают как неправильные скорости распространения фронтов, так и неверные картины распределения напряженно-деформированного состояния по толщине слоя.

Во-вторых, предложенное сочетание методов теории групп и асимптотического анализа требовало более глубокого обоснования и разработки технологии применения для менее очевидных случаев, чем исследование прифронтовых зон.

Естественным было применение асимптотико-группового анализа вначале для вывода уравнений пластин и оболочек, более точных, чем уравнения типа Тимошенко, а затем уже для решения этих уравнений с исследованием как быстроизменяющихся прифронтовых зон, так и медленноизменяющихся приграничных и других зон с полным охватом всей возмущенной области.

Решению этих задач и посвящена данная работа.

Главное препятствие, которое пришлось преодолевать при синтезе теории групп и асимптотического анализа оказалось, как ни странно, связанным с сильной развитостью этих двух теорий. Их самостоятельное развитие привело к значительным результатам, но осуществлялось в формах, мало пригодных к стыковке.

Поэтому для совместного применения методов теории групп и асимптотического пришлось, фактически, анализа создать заново простейшие варианты этих методов. Особенно это касается теории групп. Применяемые здесь группы преобразований являются, чаще всего, даже не группами локальными Ли, просто группами алгебраических a преобразований. При этом исследуемые дифференциальные уравнения рассматриваются как алгебраические, а дифференциальные операторы воспринимаются как числовые множители.

Именно такие упрощения и позволили решить поставленные задачи. При этом появилась возможность алгоритмизации асимптотико-группового анализа с решением такой сложной задачи, как поиск параметров асимптотического интегрирования, формальным методом с применением ЭВМ.

Несмотря на относительную простоту, предлагаемый здесь метод обладает высокой эффективностью. С его помощью удалось как получить новые, асимптотически обоснованные варианты динамических уравнений пластин и оболочек, так и продемонстрировать достоинства этих уравнений путем решения, на их основе, ряда задач. Во всех случаях решения разыскиваются как инвариантно-групповые и результаты доводятся до наглядных графических представлений и замкнутых асимптотических формул для прифронтовых и приграничных зон.

Указанная выше простота применяемого аппарата облегчает его восприятие. От читателя практически не требуются специальные знания в области теории инвариантно-групповых решений и асимптотического

анализа; все необходимые сведения весьма просты и излагаются по мере применения.

#### 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ

На примере дифференциальных уравнений теории упругости для ортотропной среды рассматриваются основные идеи асимптотикогруппового анализа. Показана связь асимптотического анализа и теории групп, а также связь между естественными параметрами и формальным малым параметром. Приведена процедура поиска параметров асимптотического интегрирования с указанием наименьшего возможного количества этих параметров и способов автоматического поиска их значений.

#### 1.1. ОЦЕНИВАЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим дифференциальные уравнения плоской задачи теории упругости для ортотропной среды:

$$B_{1}\partial_{x}^{2}u + G\partial_{y}^{2}u + (B_{1}\mu_{2} + G)\partial_{x}\partial_{y}v = 0$$

$$B_{2}\partial_{y}^{2}v + G\partial_{x}^{2}v + (B_{2}\mu_{1} + G)\partial_{x}\partial_{y}u = 0$$
(1.1.1)

Здесь x, y – декартовы координаты;  $\partial_x = \partial/\partial x$ ,  $\partial_y = \partial/\partial y$ ; u,v – компоненты вектора перемещений;  $B_1$ ,  $B_2$  – жесткости на растяжениесжатие, G – жесткость на сдвиг;  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – коэффициенты Пуассона;  $B_1\mu_2 = B_2\mu_1$ .

Веса слагаемых в (1.1.1) зависят от постоянных коэффициентов, величин искомых функций и дифференциальных операторов. Оценим каждую из указанных величин:

$$u \sim b_1, v \sim b_2, \partial_x \sim b_3, \partial_y \sim b_4, B_1 \sim b_5, B_2 \sim b_6, G \sim b_7,$$
 (1.1.2)  
 $B_1 \mu_2 + G = B_2 \mu_1 + G \sim b_8$ 

Здесь  $b_1,...,b_8$  – некоторые константы. Для постоянных коэффициентов эти константы являются самими коэффициентами, а для переменных величин всегда возможны локальные оценки вида (1.1.2). При этом также предполагается, что действие операторов  $\partial_x$  и  $\partial_y$  приводит к одинаковым относительным изменениям обеих искомых функций и и v.

Возьмем некоторую величину  $\delta < 1$  и выразим константы  $b_1, \dots, b_8$  в виде:

$$b_i = \delta^{\beta_i} \quad (i = 1, ..., 8), \tag{1.1.3}$$

получая вместо (1.1.2):

$$u \sim \delta^{\beta_1}, \ v \sim \delta^{\beta_2}, \ \partial_x \sim \delta^{\beta_3}, \ \partial_y \sim \delta^{\beta_4}, \ B_1 \sim \delta^{\beta_5}, \ B_2 \sim \delta^{\beta_6}$$
(1.1.4)  
$$G \sim \delta^{\beta_7}, \ B_1 \mu_2 + G = B_2 \mu_1 + G \sim \delta^{\beta_8}$$

Подобная замена оценок вида (1.1.2) на (1.1.4) позволяет перейти в уравнениях (1.1.1) от мультипликативных величин  $b_1,...,b_8$  к аддитивным величинам  $\beta_1,...,\beta_8$ . Преобразуем (1.1.4) к форме:

$$u = \delta^{\beta_1} u^*, \ v = \delta^{\beta_2} v^*, \ \partial_x = \delta^{\beta_3} \partial_x^*, \ \partial_y = \delta^{\beta_4} \partial_y^*, \ B_1 = \delta^{\beta_5} B_1^*$$
(1.1.5)  

$$B_2 = \delta^{\beta_6} B_2^*, \ G = \delta^{\beta_7} G^*, \ B_1 \mu_2 + G = B_2 \mu_1 + G = \delta^{\beta_8} (B_1 \mu_2 + G) *$$
  

$$u^* \sim 1, \ v^* \sim 1, \ \partial_x^* \sim 1, \ \partial_y^* \sim 1, \ B_1^* \sim 1, \ B_2^* \sim 1, \ G^* \sim 1, \ (B_1 \mu_2 + G)^* \sim 1 \ (1.1.6)$$

Преобразования (1.1.5) – это обычные преобразования растяжения, хорошо известные в теории групп. В результате этих преобразований уравнения (1.1.1) приобретают вид:

$$\delta^{\beta_{1}+2\beta_{3}+\beta_{5}}B_{1}^{*}\partial_{x}^{*2}u^{*} + \delta^{\beta_{1}+2\beta_{4}+\beta_{7}}G^{*}\partial_{y}^{*2}u^{*} + \delta^{\beta_{2}+\beta_{3}+\beta_{4}+\beta_{8}}(B_{1}\mu_{2}+G)^{*}\partial_{x}^{*}\partial_{y}^{*}v^{*} = 0 \quad (1.1.7)$$
  
$$\delta^{\beta_{2}+2\beta_{4}+\beta_{6}}B_{2}^{*}\partial_{y}^{*2}v^{*} + \delta^{\beta_{2}+2\beta_{3}+\beta_{7}}G^{*}\partial_{x}^{*2}v^{*} + \delta^{\beta_{1}+\beta_{3}+\beta_{4}+\beta_{8}}(B_{2}\mu_{1}+G)^{*}\partial_{x}^{*}\partial_{y}^{*}u^{*} = 0$$

Найдем, в первую очередь, те преобразования вида (1.1.5), относительно которых уравнения (1.1.1) инвариантны. Эти преобразования не изменяют относительных весов членов уравнений. Их поиск производится очевидным образом путем приравнивания между собой показателей степени δ, соответствующих каждому из уравнений (1.1.7):

$$\beta_{1} + 2\beta_{3} + \beta_{5} = \beta_{1} + 2\beta_{4} + \beta_{7} = \beta_{2} + \beta_{3} + \beta_{4} + \beta_{8}$$

$$\beta_{2} + 2\beta_{4} + \beta_{6} = \beta_{2} + 2\beta_{3} + \beta_{7} = \beta_{1} + \beta_{3} + \beta_{4} + \beta_{8}$$
(1.1.8)

Решая четыре уравнения (1.1.8) относительно восьми искомых величин  $\beta_1,...,\beta_8$ , получаем следующую фундаментальную систему решений: 1.  $\beta_1=\beta_2=\gamma_1, \beta_3=...=\beta_8=0.$  2.  $\beta_3=\beta_4=\gamma_2, \beta_1=\beta_2=\beta_5=...=\beta_8=0.$  3.  $\beta_5=...=\beta_8=\gamma_3, \beta_1=...=\beta_4=0.$  4.  $\beta_1=-\beta_4=\gamma_4, \beta_5=-\beta_6=-2\gamma_4, \beta_2=\beta_3=\beta_7=\beta_8=0.$ 

Этим четырем решениям соответствуют четыре вида преобразований растяжения:

$$\begin{split} &u = \delta^{\gamma_1} u^*, \ v = \delta^{\gamma_1} v^*, \ \partial_x = \partial_x^*, \ \partial_y = \partial_y^*, \ B_1 = B_1^*, \ B_2 = B_2^*, \ G = G^* \ (1.1.9) \\ &B_1 \mu_2 + G = (B_1 \mu_2 + G)^* \\ &u = u^*, \ v = v^*, \ \partial_x = \delta^{\gamma_2} \partial_x^*, \ \partial_y = \delta^{\gamma_2} \partial_y^*, \ B_1 = B_1^*, \ B_2 = B_2^*, \ G = G^* \ (1.1.10) \\ &B_1 \mu_2 + G = (B_1 \mu_2 + G)^* \\ &u = u^*, \ v = v^*, \ \partial_x = \partial_x^*, \ \partial_y = \partial_y^*, \ B_1 = \delta^{\gamma_3} B_1^*, \ B_2 = \delta^{\gamma_3} B_2^* \ (1.1.11) \\ &G = \delta^{\gamma_3} G^*, \ B_1 \mu_2 + G = \delta^{\gamma_3} (B_1 \mu_2 + G)^* \end{split}$$

$$\mathbf{u} = \delta^{\gamma_4} \mathbf{u}^*, \ \mathbf{v} = \mathbf{v}^*, \ \partial_x = \partial_x^*, \ \partial_y = \delta^{-\gamma_4} \partial_y^*, \ \mathbf{B}_1 = \delta^{-2\gamma_4} \mathbf{B}_1^*$$
(1.1.12)

 $B_2 = \delta^{2\gamma_4} B_2^*, \ G = G^*, \ B_1 \mu_2 + G = (B_1 \mu_2 + G)^*,$ 

относительно которых инвариантны уравнения (1.1.1).

Пусть теперь заданы преобразования (1.1.5) с произвольными значениями  $\beta_1,...,\beta_8$ , приводящие к соотношениям (1.1.6). Выполним последовательно преобразования (1.1.5) и (1.1.9),...,(1.1.12), приходя к их суперпозиции:

$$\mathbf{u} = \delta^{\beta_1 + \gamma_1 + \gamma_4} \mathbf{u}^*, \ \mathbf{v} = \delta^{\beta_2 + \gamma_1} \mathbf{v}^*, \ \partial_x = \delta^{\beta_3 + \gamma_2} \partial_x^*, \ \partial_y = \delta^{\beta_4 + \gamma_2 - \gamma_4} \partial_y^*$$
(1.1.13)

$$B_{1} = \delta^{\beta_{5} + \gamma_{3} - 2\gamma_{4}} B_{1}^{*}, \ B_{2} = \delta^{\beta_{6} + \gamma_{3} + 2\gamma_{4}} B_{2}^{*}, \ G = \delta^{\beta_{7} + \gamma_{3}} G^{*}, \ B_{1} \mu_{2} + G = \delta^{\beta_{8} + \gamma_{3}} (B_{1} \mu_{2} + G)^{*}$$

Поскольку преобразования (1.1.9),...,(1.1.12) не изменяют вида уравнений (1.1.1) (после сокращения на возникающие общие множители), то не изменяются, в результате этих преобразований, и асимптотические оценки весов членов этих уравнений. Отсюда следует, что кроме решения, приводящего в результате преобразований (1.1.5) к соотношениям (1.1.6) и соответствующего каким-то фиксированным значениям  $\beta_1,...,\beta_8$ , существует бесконечное множество других решений, связанных с исходным при помощи преобразований (1.1.9),...,(1.1.12) и дающих те же относительные веса членов уравнений (1.1.1). Однако для произвольного решения из этого множества соотношения (1.1.6) уже не выполняются. В самом деле, выполнение, вслед за преобразованиями (1.1.5), преобразований (1.1.9),...,(1.1.12) заменяет (1.1.6) на соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &\sim \delta^{-\gamma_1 - \gamma_4}, \ \mathbf{v}^* \sim \delta^{-\gamma_1}, \ \partial_x^* \sim \delta^{-\gamma_2}, \ \partial_y^* \sim \delta^{-\gamma_2 + \gamma_4}, \ \mathbf{B}_1^* \sim \delta^{-\gamma_3 + 2\gamma_4} \end{aligned} \tag{1.1.14} \\ \mathbf{B}_2^* &\sim \delta^{-\gamma_3 - 2\gamma_4}, \ \mathbf{G}^* \sim \delta^{-\gamma_3}, \ (\mathbf{B}_1 \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{G})^* \sim \delta^{-\gamma_3} \end{aligned}$$

Таким образом, преобразования (1.1.5) и соотношения (1.1.6) заменены эквивалентными для целей асимптотического анализа преобразованиями (1.1.13), приводящими к соотношениям (1.1.14) с произвольными  $\gamma_1,...,\gamma_4$ .

Исключим из (1.1.13) и (1.1.14) величины  $\gamma_1,...,\gamma_4$ , переходя, таким образом, к инвариантам четырехпараметрической группы преобразований (1.1.9),...,(1.1.12):

$$I_{i} = \delta^{\alpha_{i}} I_{i}^{*}; \ I_{i}^{*} \sim 1 \quad (i = 1, ..., 4),$$
(1.1.15)

где:

$$I_{1} = \frac{u}{v}\sqrt[4]{\frac{B_{1}}{B_{2}}}; \quad I_{2} = \frac{\partial_{x}}{\partial_{y}}\sqrt[4]{\frac{B_{1}}{B_{2}}}; \quad I_{3} = \frac{G}{\sqrt{B_{1}B_{2}}}; \quad I_{4} = \frac{B_{1}\mu_{2} + G}{\sqrt{B_{1}B_{2}}}$$
(1.1.16)

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 + 0.25(\beta_5 - \beta_6), \ \alpha_2 = \beta_3 - \beta_4 + 0.25(\beta_5 - \beta_6)$$

$$\alpha_3 = \beta_7 - 0.5(\beta_5 + \beta_6), \ \alpha_4 = \beta_8 - 0.5(\beta_5 + \beta_6)$$
(1.1.17)

Таким образом, фактически, при асимптотическом анализе следует подвергать оценкам не исходные величины, входящие в уравнения, а инварианты группы растяжений, допускаемой уравнениями. При этом количество оцениваемых величин уменьшается на число допускаемых однопараметрических подгрупп растяжений. В данном случае вместо восьми исходных величин оцениваются четыре инварианта (1.1.16).

Если бы уравнения (1.1.1) были алгебраическими, то есть величины  $\partial_x$  и  $\partial_y$  являлись просто числовыми множителями, то можно было бы легко перейти из восьмимерного пространства исходных величин в четырехмерное пространство инвариантов, представляя уравнения в виде:

$$I_1I_2^2 + I_1I_3 + I_2I_4 = 0; \ 1 + I_2^2I_3 + I_1I_2I_4 = 0$$
(1.1.18)

Для дифференциальных уравнений такой непосредственный переход лишен смысла, однако, сохраняя прежнюю форму уравнений (1.1.1), можно для целей асимптотического анализа работать с инвариантами, а не с исходными величинами. Для этого, пользуясь произвольностью величин  $\gamma_1,...,\gamma_4$ , подберем их значения так, чтобы в каждом из инвариантов (1.1.16) подвергалась растяжению только одна из входящих в инвариант величин, а остальные оставались неизменными. Пусть, например, в инварианте  $I_1$  растягивается только величина u, в  $I_2 - \partial_x$ , в  $I_3 - G$ , и в  $I_4 - B_1\mu_2 + G$ , а остальные величины остаются неизменными. Тогда, в соответствии с (1.1.13), нужно положить:  $\beta_2 + \gamma_1 = 0$ ,  $\beta_4 + \gamma_2 - \gamma_4 = 0$ ,  $\beta_5 + \gamma_3 - 2\gamma_4 = 0$ ,  $\beta_6 + \gamma_3 + 2\gamma_4 = 0$ , откуда:

$$\gamma_1 = -\beta_2, \ \gamma_2 = -\beta_4 + 0.25(\beta_5 - \beta_6), \ \gamma_3 = -0.5(\beta_5 + \beta_6), \ \gamma_4 = 0.25(\beta_5 - \beta_6)$$
 (1.1.19)  
В силу (1.1.19) преобразования (1.1.13) примут вид:

$$u = \delta^{\alpha_1} u^*, \ v = v^*, \ \partial_x = \delta^{\alpha_2} \partial_x^*, \ \partial_y = \partial_y^*, \ B_1 = B_1^*, \ B_2 = B_2^*$$
(1.1.20)  
$$G = \delta^{\alpha_3} G^*, \ B_1 \mu_2 + G = \delta^{\alpha_4} (B_1 \mu_2 + G)^*$$

с прежними значениями  $\alpha_1,...,\alpha_4$  (1.1.17).

Преобразования (1.1.20) эквивалентны преобразованиям (1.1.15), однако преобразуются теперь не инварианты, а часть из исходных величин. Величины  $v, \partial_y, B_1$  и  $B_2$  не подвергаются преобразованиям, служа как бы эталонами для преобразуемых величин. При этом соотношения  $I_i^* \sim 1$  (i = 1,...,4) из (1.1.15) целесообразно представить в форме:

$$\mathbf{u}^* \sim \sqrt[4]{\frac{\mathbf{B}_2^*}{\mathbf{B}_1^*}} \mathbf{v}^*, \ \partial_x^* \sim \sqrt[4]{\frac{\mathbf{B}_2^*}{\mathbf{B}_1^*}} \partial_y^*, \ \mathbf{G}^* \sim \sqrt{\mathbf{B}_1^* \mathbf{B}_2^*}, \ \left(\mathbf{B}_1 \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{G}\right)^* \sim \sqrt{\mathbf{B}_1^* \mathbf{B}_2^*} \quad (1.1.21)$$

Таким образом, окончательно получаем, что для оценки весов членов уравнений (1.1.1) необходимо применять преобразования (1.1.20), требуя, чтобы выполнялись соотношения (1.1.21).

Рассмотрим еще один, промежуточный вариант между уравнениями вида (1.1.1) и вида (1.1.18). Среди инвариантов (1.1.16) два –  $I_3$  и  $I_4$  есть величины постоянные, что позволяет свободно оперировать с ними, несмотря на наличие в уравнениях (1.1.1) дифференциальных операторов. В двух других инвариантах –  $I_1$  и  $I_2$  можно легко выполнить замены переменных с целью упрощения вида этих инвариантов. Введем обозначения:

$$U = 4 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} u, \quad V = v, \quad X = x, \quad Y = 4 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} y, \quad a = I_3, \quad b = I_4,, \quad (1.1.22)$$

получая из (1.1.1) уравнения:

$$\partial_{X}^{2}U + a\partial_{Y}^{2}U + b\partial_{X}\partial_{Y}V = 0; \ \partial_{Y}^{2}V + a\partial_{X}^{2}V + b\partial_{X}\partial_{Y}U = 0$$
(1.1.23)

Уравнения (1.1.23) содержат наименьшее возможное количество параметров-коэффициентов по сравнению с уравнениями (1.1.1). Для них преобразования (1.1.20) принимают вид:

U = 
$$\delta^{\alpha_1}$$
U\*, V = V\*,  $\partial_X = \delta^{\alpha_2} \partial_X^*$ ,  $\partial_Y = \partial_Y^*$ , a =  $\delta^{\alpha_3}$ a\*, b =  $\delta^{\alpha_3}$ b\* (1.1.24)  
В силу этих преобразований должны выполняться соотношения:

$$U^* \sim V^*, \ \partial_x^* \sim \partial_y^*, \ a^* \sim 1, \ b^* \sim 1$$
 (1.1.25)

Таким образом, частичный переход к инвариантам позволил записать наиболее простую форму как уравнений, так и выполняемых преобразований растяжения и соответствующих асимптотических соотношений.

#### 1.2. ПОИСК ПАРАМЕТРОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ЕСТЕСТВЕННОГО МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Предположим, что в уравнениях (1.1.23) из физических соображений известно, что коэффициенты а и b являются величинами одного порядка и при этом значительно меньше единицы. Тогда один из этих коэффициентов может быть взят в качестве естественного малого параметра є:

 $b \sim a = \varepsilon < 1$ 

При этом оценки весов членов уравнений (1.1.23) можно выполнять при помощи преобразований:

 $U = \varepsilon^{\alpha_1} U^*, \ V = V^*, \ \partial_X = \varepsilon^{\alpha_2} \partial_X^*, \ \partial_Y = \partial_Y^*,$  (1.2.2) приводящих к соотношениям:

$$\mathbf{U}^* \sim \mathbf{V}^*, \ \partial_{\mathbf{v}}^* \sim \partial_{\mathbf{v}}^* \tag{1.2.3}$$

(1.2.1)

Здесь, в отличие от преобразований (1.1.24) и соотношений (1.1.25), учтено, что веса коэффициентов а и в заранее известны. Однако, как и прежде, рассматриваются не абсолютные значения искомых функций и дифференциальных операторов, а их сравнительные величины.

Выполняя преобразования (1.2.2) получим, в силу (1.2.3), что вес уравнений (1.1.23) будет каждого члена оцениваться возникающим виде некоторой степени множителем В . 3 He выписывая самих преобразованных уравнений, приведем только показатели степени ε. располагая их в том же порядке, что и соответствующие члены уравнений (1.1.23):

$$\alpha_1 + 2\alpha_2, \ \alpha_1 + 1, \ \alpha_2 + 1; \ 0, \ 2\alpha_2 + 1, \ \alpha_1 + \alpha_2 + 1$$
 (1.2.4)

Чем меньше какой-либо показатель степени в таблице (1.2.4), тем больше соответствующий член в том или ином уравнении. Таким образом, таблица (1.2.4) дает полную информацию о весах членов уравнений (1.1.23) в зависимости от значений параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Рассмотрим два способа отыскания значений параметров асимптотического интегрирования, в данном случае,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . Первый из них, наиболее распространенный, основан на какой-то предварительной информации об искомом решении. Например, при U < V будет  $\alpha_1 > 0$ , а при U > V –  $\alpha_1 < 0$ ; при  $\partial_X < \partial_Y$  будет  $\alpha_2 > 0$ , при  $\partial_X > \partial_Y - \alpha_2 < 0$ . Таким

образом, знание искомого решения или, по крайней мере, какие-то интуитивные соображения о его характере могут помочь в отыскании значений  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

Применим здесь другой способ, не использующий никакой предварительной информации об искомом решении, а основанный на формальных рассуждениях. Рассмотрим плоскость  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  (рис 1.1). Произвольному выбору изображающей точки на этой плоскости будет соответствовать, в общем случае, таблица (1.2.4), в которой все показатели степени как в первой, так и во второй строке будут различными. Наименьшему из них в первой строке будет соответствовать наибольший член первого из уравнений (1.1.23), а наименьшему показателю во второй строке – наибольший член второго уравнения. Оставляя наибольшие члены и отбрасывая второстепенные, мы получаем в упрощенных уравнениях по одному члену.



Рис. 1.1. Графическая иллюстрация к поиску параметров асимптотического интегрирования в случае естественного малого параметра

Рассмотрим случаи равных весов двух членов. Соотношения:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_1 + 1 \le \alpha_2 + 1 \tag{1.2.5}$$

задают луч на плоскости  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , любой точке которого соответствуют равные веса двух первых членов первого из уравнений (1.1.23) с преобладанием над третьим членом. Аналогично, соотношения:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_2 + 1 \le \alpha_1 + 1 \tag{1.2.6}$$

задают луч, соответствующий преобладанию первого и третьего членов над вторым, а соотношения:

 $\alpha_1 + 1 = \alpha_2 + 1 \le \alpha_1 + 2\alpha_2 \tag{1.2.7}$ 

– луч, соответствующий наибольшим весам второго и третьего членов.

Соответствующий веер из трех лучей изображен на рис. 1.1. Вершиной этого веера является точка с координатами  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ , соответствующая равным весам всех трех членов первого из уравнений (1.1.23).

Аналогично строится веер и для второго уравнения. Его вершина имеет координаты  $\alpha_1 = -0.5$ ,  $\alpha_2 = -0.5$ .

Кроме вершин вееров привлекают внимание точки пересечения лучей, принадлежащих разным веерам. Всего получается четыре точки, соответствующие случаям наименьшего упрощения исходных уравнений. Вершины вееров – точки III и IV на рис. 1.1 – соответствуют случаям, когда в одном из уравнений в упрощенном варианте остаются все три члена, а в другом – только один. Точки пересечения лучей – I и II – соответствуют случаям, когда в каждом из упрощенных уравнений остаются по два слагаемых.

Рассмотрим точки I и II подробнее.

Случай I:  $\alpha_1 = -1.5$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ . Таблица (1.2.4) принимает вид:

-0.5, -0.5, 1.5; 0, 2, 0 (1.2.8)

Ей соответствуют упрощенные уравнения:

$$\partial_X^2 \mathbf{U} + \mathbf{a} \partial_Y^2 \mathbf{U} = \mathbf{0}, \ \partial_Y^2 \mathbf{V} + \mathbf{b} \partial_X \partial_Y \mathbf{U} = \mathbf{0}$$
(1.2.9)

Из (1.2.2) и (1.2.3) вытекают асимптотические оценки:

$$U \sim \varepsilon^{-1.5} V, \ \partial_X \sim \varepsilon^{0.5} \partial_Y,$$
 (1.2.10)

соответствующие преобладанию U над V и более медленному изменению искомых функций по координате X, чем по Y.

Случай II. 
$$\alpha_1 = 1.5$$
,  $\alpha_2 = -0.5$ . При помощи таблицы (1.2.4):

0.5, 2.5, 0.5; 0, 0, 2 (1.2.11) получаем упрощенные уравнения:

$$\partial_X^2 \mathbf{U} + \mathbf{b}\partial_X \partial_Y \mathbf{V} = \mathbf{0}, \ \partial_Y^2 \mathbf{V} + \mathbf{a}\partial_X^2 \mathbf{V} = \mathbf{0}$$
(1.2.12)

Асимптотические оценки здесь будут:

 $U \sim \varepsilon^{1.5} V, \ \partial_X \sim \varepsilon^{-0.5} \partial_Y$  (1.2.13)

Они соответствуют преобладанию V над U и более быстрому изменению по X, чем по Y.

Приближенные уравнения (1.2.9) и (1.2.12) использовались для решения контактных задач теории упругости в работах Л.И. Маневича, А.В. Павленко и ряда других авторов. Ввиду того, что основные результаты в этой области получены без участия автора и выходят за рамки данного труда, они здесь не приводятся. Исследование уравнений (1.1.1) рассмотрено здесь, в первую очередь, с целью изложения методики асимптотико-группового анализа на относительно простом примере.

# 1.3. ПОИСК ПАРАМЕТРОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ФОРМАЛЬНОГО МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В предыдущем параграфе были получены определенные результаты с использованием некоторых предположений о свойствах коэффициентов уравнений (1.1.23). Значительно более широкий круг результатов можно получить с использованием формального малого параметра, в терминах которого записаны преобразования (1.1.24). Эти преобразования позволяют давать оценку не только переменным величинам, входящим в уравнения (1.1.23), как это было в предыдущем параграфе, но и константам а и b, не делая предварительно никаких предположений об их возможных величинах.

В результате преобразований (1.1.24) члены уравнений (1.1.23) приобретут множители в виде некоторых степеней δ, которые, в соответствии с соотношениями (1.1.25), будут задавать веса этих членов. Выпишем соответствующие показатели степеней δ, располагая их в том же порядке, что и члены уравнений:

 $\alpha_1 + 2\alpha_2, \ \alpha_1 + \alpha_3, \ \alpha_2 + \alpha_4; \ 0, \ 2\alpha_2 + \alpha_3, \ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$  (1.3.1)

Таблица (1.3.1) дает полную информацию о весах членов уравнений (1.1.23) в зависимости от значений параметров  $\alpha_1,...,\alpha_4$ .

Параметр  $\alpha_1$  оценивает относительные веса функций U и V. При  $\alpha_1 > 0$  будет U < V, а при  $\alpha_1 < 0 - U > V$ . Параметр  $\alpha_2$  оценивает сравнительные величины дифференциальных операторов  $\partial_X$  и  $\partial_Y$ . При  $\alpha_2 > 0$  имеем  $\partial_X < \partial_Y$ , а при  $\alpha_2 < 0 - \partial_X > \partial_Y$ . Параметры  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  оценивают абсолютные величины коэффициентов а и b. При  $\alpha_3 > 0$  будет a <1, а при  $\alpha_3 < 0 - a > 1$ ;  $\alpha_4 > 0$  соответствует b <1,  $\alpha_4 < 0 - b > 1$ .

Уравнения (1.1.23) не инвариантны относительно преобразований (1.1.24) при ненулевых значениях  $\alpha_1,...,\alpha_4$ , поскольку эти преобразования

были получены из преобразований наиболее общего вида (1.1.5) путем всех допускаемых преобразований. Задавая конкретные исключения значения α<sub>1</sub>,...,α<sub>4</sub> и оставляя в (1.1.23) слагаемые наибольшего веса, соответствующие одинаковым наименьшим показателям степени в каждой из строк таблицы (1.3.1), получаем упрощенные уравнения, уже инвариантные относительно преобразований растяжения вида (1.1.24). Это вытекает из того, что в каждом из упрощенных уравнений остаются слагаемые, приобретающие после преобразований (1.1.24) одинаковые коэффициенты. Сокращение этих коэффициентов возвращает уравнения к прежней форме, что и означает инвариантность. Эта же инвариантность позволяет вернуться преобразованных величин к исходным, вновь сохраняя форму ОТ упрощенных уравнений. Таким образом, введенный формально малый параметр б полностью отсутствует в конечных результатах.

Будем, как и выше, находить возможные значения  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ формальным способом, не опираясь на предварительную информацию о свойствах величин, входящих в уравнения (1.1.23). В отличие от предыдущего параграфа, где формальная методика допускала наглядную геометрическую интерпретацию, здесь действия В четырехмерном пространстве параметров  $\alpha_1, ..., \alpha_4$  будем выполнять чисто аналитически, но опираясь на те же идеи, которые использовались при построении рис. 1.1.

Исходя из критерия минимального упрощения, будем требовать, чтобы в упрощенных уравнениях оставалось в совокупности как можно больше членов. Поскольку равным весам членов уравнений (1.1.23) соответствуют равные показатели степени из таблицы (1.3.1), приравняем попарно всеми возможными способами показатели степени, соответствующие каждой из сопровождать строк таблицы (1.3.1).Каждое ИЗ равенств будем неравенством, означающим, что два выбранных равными показателя не превышают третьего показателя степени, соответствующего тому же уравнению. В итоге получаем:

 $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \le \alpha_2 + \alpha_4; \ \alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_4 \le \alpha_1 + \alpha_3; \ \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4 \le \alpha_1 + 2\alpha_2 \ (1.3.2)$   $0 = 2\alpha_2 + \alpha_3 \le \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4; \ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \le 2\alpha_2 + \alpha_3; \ 2\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \le 0$ 

Минимальное упрощение соответствует тем случаям, когда одновременно удовлетворяется как можно большее число уравнений (1.3.2). Поскольку все эти уравнения являются однородными, то для нахождения ненулевых значений четырех неизвестных величин  $\alpha_1,...,\alpha_4$  необходимы три линейно независимых уравнения. Выбирая из шести уравнений (1.3.2) различными способами по три линейно независимых уравнения и решая такие системы уравнений, получим все возможные значения параметров  $\alpha_1,...,\alpha_4$ , соответствующие минимальным упрощениям уравнений (1.1.23).

Приведем шесть получаемых таким способом вариантов.

1) 
$$\alpha_1 = \alpha_4 = \zeta_1 > 0$$
,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Таблица (1.3.1) имеет вид:  
 $\zeta_1, \zeta_1, \zeta_1; 0, 0, 2\zeta_1,$  (1.3.3)

что соответствует упрощенным уравнениям:

$$\partial_{\mathbf{X}}^{2}\mathbf{U} + \mathbf{a}\partial_{\mathbf{Y}}^{2}\mathbf{U} + \mathbf{b}\partial_{\mathbf{X}}\partial_{\mathbf{Y}}\mathbf{V} = 0; \quad \partial_{\mathbf{Y}}^{2}\mathbf{V} + \mathbf{a}\partial_{\mathbf{X}}^{2}\mathbf{V} = 0$$
(1.3.4)

Эти уравнения инвариантны как относительно тех преобразований растяжения (1.1.27), (1.1.28), относительно которых инвариантны уравнения (1.1.23), так и относительно добавочной подгруппы растяжений (1.1.24), которая принимает здесь вид:

$$\mathbf{U} = \delta^{\zeta_1} \mathbf{U}^*, \ \mathbf{V} = \mathbf{V}^*, \ \partial_{\mathbf{X}} = \partial_{\mathbf{X}}^*, \ \partial_{\mathbf{Y}} = \partial_{\mathbf{Y}}^*, \ \mathbf{a} = \mathbf{a}^*, \ \mathbf{b} = \delta^{\zeta_1} \mathbf{b}^*$$
(1.3.5)

Выясним, какая величина играет в данном случае роль естественного малого параметра  $\varepsilon$ , считая, что отброшенный третий член во втором из уравнений (1.3.4) имеет порядок  $\varepsilon$ . Поскольку в таблице (1.3.3) во второй строке в первых двух позициях стоят показатели степени 0, а в третьей –  $2\zeta_1$ , то имеем  $\varepsilon = \delta^{2\zeta_1} < 1$ . Тогда из (1.3.5), с учетом (1.1.25), получаем асимптотические оценки:

$$U \sim \varepsilon^{0.5} V, \ \partial_{X} \sim \partial_{Y}, \ a \sim 1, \ b \sim \varepsilon^{0.5}$$
 (1.3.6)

Следовательно, роль естественного малого параметра здесь играет коэффициент  $\varepsilon = b^2$ .

2)  $\alpha_1 = -\zeta_2$ ,  $\alpha_2 = \zeta_2$ ,  $\alpha_3 = 2\zeta_2$ ,  $\alpha_4 = 0$ ,  $\zeta_2 > 0$ . В соответствии с видом таблицы (1.3.1):

$$\zeta_2, \zeta_2, \zeta_2; \quad 0, 4\zeta_2, 0 \tag{1.3.7}$$

получаем упрощенные уравнения:

$$\partial_X^2 U + a \partial_Y^2 U + b \partial_X \partial_Y V = 0; \ \partial_Y^2 V + b \partial_X \partial_Y U = 0$$
(1.3.8)

Они инвариантны относительно добавочной подгруппы растяжений:

$$U = \delta^{-\zeta_2} U^*, \quad V = V^*, \quad \partial_X = \delta^{\zeta_2} \partial_X^*, \quad \partial_Y = \partial_Y^*, \quad a = \delta^{2\zeta_2} a^*, \quad b = b^*$$
(1.3.9)

Здесь отброшенное во втором уравнении (1.3.8) слагаемое имеет вес  $\delta^{4\zeta_2}$ . Полагая  $\varepsilon = \delta^{4\zeta_2} < 1$  получаем асимптотические оценки:

$$\varepsilon^{0.25}$$
U ~ V,  $\partial_X \sim \varepsilon^{0.25} \partial_Y$ , a ~  $\varepsilon^{0.5}$ , b ~ 1 (1.3.10)

Таким образом, здесь роль естественного малого параметра играет величина  $\varepsilon = a^2$ .

Аналогично и в других случаях:

3) 
$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\zeta_3$$
,  $\alpha_3 = \alpha_4 = -2\zeta_3$ ,  $\zeta_3 > 0$ . Таблица показателей степени:  
 $-3\zeta_3, -3\zeta_3, -3\zeta_3; 0, -4\zeta_3, -4\zeta_3$  (1.3.11)

Упрощенные уравнения:

$$\partial_X^2 U + a \partial_Y^2 U + b \partial_X \partial_Y V = 0, \quad a \partial_X^2 V + b \partial_X \partial_Y U = 0$$
 (1.3.12)  
Добавочная подгруппа:

$$U = \delta^{-\zeta_3} U^*, V = V^*, \partial_X = \delta^{-\zeta_3} \partial_X^*, \partial_Y = \partial_Y^*, a = \delta^{-2\zeta_3} a^*, b = \delta^{-2\zeta_3} b^* \quad (1.3.13)$$
  
Асимптотические оценки:

$$\varepsilon = \delta^{4\zeta_3} < 1; \ \varepsilon^{0.25} U \sim V, \ \varepsilon^{0.25} \partial_X \sim \partial_Y, \ a \sim \varepsilon^{-0.5}, \ b \sim \varepsilon^{-0.5}$$
(1.3.14)

Роль малого параметра играет величина  $\varepsilon = 1/a^2 \sim 1/b^2$ .

4) 
$$\alpha_1 = -\alpha_4 = -\zeta_4$$
,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ,  $\zeta_4 > 0$ . Таблица показателей степени:  
 $-\zeta_4, -\zeta_4, \zeta_4; 0, 0, 0$  (1.3.15)

Упрощенные уравнения:

$$\partial_X^2 U + a \partial_Y^2 U = 0; \quad \partial_Y^2 V + a \partial_X^2 V + b \partial_X \partial_Y U = 0$$
 (1.3.16)  
Лобавочная полгруппа:

$$U = \delta^{-\zeta_4} U^*, \quad V = V^*, \quad \partial_X = \partial_X^*, \quad \partial_Y = \partial_Y^*, \quad a = a^*, \quad b = \delta^{\zeta_4} b^*$$
(1.3.17)

$$\varepsilon = \delta^{2\zeta_4} < 1; \ \varepsilon^{0.5} U \sim V, \ \partial_X \sim \partial_Y, \ a \sim 1, \ b \sim \varepsilon^{0.5}$$
(1.3.18)

Роль малого параметра играет величина  $\varepsilon = b^2$ .

5)  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \zeta_5$ ,  $\alpha_3 = 2\zeta_5$ ,  $\alpha_4 = 0$ ,  $\zeta_5 > 0$ . Таблица показателей степени:  $-\zeta_5, 3\zeta_5, -\zeta_5; 0, 0, 0$  (1.3.19)

Упрощенные уравнения:

$$\partial_X^2 U + b \partial_X \partial_Y V = 0, \quad \partial_Y^2 V + a \partial_X^2 V + b \partial_X \partial_Y U = 0$$
 (1.3.20)  
Добавочная подгруппа:

$$\mathbf{U} = \delta^{\zeta_5} \mathbf{U}^*, \ \mathbf{V} = \mathbf{V}^*, \ \partial_{\mathbf{X}} = \delta^{-\zeta_5} \partial_{\mathbf{X}}^*, \ \partial_{\mathbf{Y}} = \partial_{\mathbf{Y}}^*, \ \mathbf{a} = \delta^{2\zeta_5} \mathbf{a}^*, \ \mathbf{b} = \mathbf{b}^*$$
(1.3.21)

Асимптотические оценки:

$$\varepsilon = \delta^{4\zeta_5} < 1; \ U \sim \varepsilon^{0.25} V, \ \varepsilon^{0.25} \partial_X \sim \partial_Y, \ a \sim \varepsilon^{0.5}, \ b \sim 1$$
 (1.3.22)

Роль малого параметра играет величина 
$$\varepsilon = a^2$$
.

6) 
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \zeta_6$$
,  $\alpha_3 = \alpha_4 = -2\zeta_6$ ,  $\zeta_6 > 0$ . Таблица показателей степени:  
 $3\zeta_6, -\zeta_6, -\zeta_6; 0, 0, 0$  (1.3.23)

Упрощенные уравнения:

$$a\partial_{Y}^{2}U + b\partial_{X}\partial_{Y}V = 0, \quad \partial_{Y}^{2}V + a\partial_{X}^{2}V + b\partial_{X}\partial_{Y}U = 0$$
 (1.3.24)  
Добавочная подгруппа:

$$U = \delta^{\zeta_6} U^*, V = V^*, \partial_X = \delta^{\zeta_6} \partial_X^2, \partial_Y = \partial_Y^*, a = \delta^{-2\zeta_6} a^*, b = \delta^{-2\zeta_6} b^* (1.3.25)$$
  
Асимптотические оценки:

$$\varepsilon = \delta^{4\zeta_6} < 1; \ U \sim \varepsilon^{0.25} V, \ \partial_X \sim \varepsilon^{0.25} \partial_Y, \ a \sim \varepsilon^{-0.5}, \ b \sim \varepsilon^{-0.5}$$
(1.3.26)

Роль малого параметра играет величина  $\varepsilon = 1/a^2 \sim 1/b^2$ .

Проанализируем полученные результаты. Найденные шесть вариантов асимптотического интегрирования значений параметров  $\alpha_1,\ldots,\alpha_4$ , случае определенных В каждом с точностью до произвольного неотрицательного общего множителя, образуют веер в четырехмерном пространстве параметров с вершиной в начале координат. Каждому лучу веера соответствует какой-то вариант минимального упрощения уравнений и добавления ровно одной однопараметрической подгруппы растяжений. При этом указываются не только относительные веса входящих в уравнения переменных величин, но и абсолютные веса параметров-коэффициентов. Благодаря этому в каждом случае выявляется та величина, которая играет роль естественного малого параметра.

Если заранее известны свойства коэффициентов а и b и эти свойства не соответствуют ни одному из найденных лучей, то можно воспользоваться тем, что лучи образуют базис, позволяющий получать любые другие варианты. Обратим внимание на то, что в обычном четырехмерном

пространстве базис должен иметь четыре компоненты. Но в данном случае параметры, задающие любой из шести лучей, определены с точностью до положительного общего множителя; следовательно, линейные комбинации лучей должны браться с неотрицательными коэффициентами. При таком условии базис в четырехмерном пространстве должен иметь минимум пять лучей; в данном случае удобно пользоваться базисом из шести лучей.

Вернемся, например, к случаю, рассмотренному в предыдущем параграфе. Складывая лучи 2) и 4) при  $\zeta_4 = 2\zeta_2 > 0$  получаем значения параметров  $\alpha_1 = -3\zeta_2$ ,  $\alpha_2 = \zeta_2$ ,  $\alpha_3 = 2\zeta_2$ ,  $\alpha_3 = 2\zeta_2$ . Таблица (1.3.1) принимает при этом вид:

 $-\zeta_2, -\zeta_2, 3\zeta_2; \quad 0, 4\zeta_2, 0 \tag{1.3.27}$ 

Это соответствует упрощенным уравнениям (1.2.9) и случаю I из предыдущего параграфа.

Аналогично, складывая лучи 1) и 5) при  $\zeta_1 = 2\zeta_5 > 0$  можно получить случай II.

Таким образом, использование формального малого параметра дает полную картину возможных вариантов упрощения исходных уравнений, включая как частный случай и результаты, полученные при применении естественного малого параметра.

### 1.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ АСИМПТОТИЧЕСКИМ АНАЛИЗОМ И ТЕОРИЕЙ ГРУПП

Применение формального малого параметра дает не просто расширение возможностей при поиске различных вариантов упрощенных уравнений по сравнению со случаем естественного малого параметра. На самом деле речь идет о некоторых принципиальных вопросах, связанных со смыслом производимых действий.

Сравним еще раз результаты, полученные в параграфах 1.2 и 1.3. Преобразования (1.2.2), производимые с использованием естественного малого параметра  $\varepsilon$ , по форме ничем не отличаются от преобразований (1.1.24), в которых использован формальный малый параметр  $\delta$ . Однако между ними есть существенная разница. При фиксированных  $\varepsilon$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , (что обычно имеет место) выражения (1.2.2) задают одно преобразование растяжения, позволяющее, при помощи соотношений (1.2.3), оценивать веса членов уравнений (1.1.23). Использование здесь формы преобразований растяжения удобно, но необязательно. В принципе можно было бы просто оценивать веса входящих в уравнения величин непосредственно, как в (1.1.2).

При использовании естественного малого параметра отсутствует прямая связь между упрощением уравнений и расширением допускаемой группы преобразований. Во-первых, преобразования (1.2.2) не образуют группу, а во-вторых, если бы они ее и образовывали (например, за счет изменения величин  $\varepsilon$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  в каких-то диапазонах), не было бы связи между

такой группой и инвариантностью упрощенных уравнений относительно ее преобразований. Последнее связано с тем, что в (1.2.2) преобразуется только часть величин, входящих в уравнения (1.1.23), а учитываются как множители, возникающие за счет преобразований, так и исходные множители – малые параметры, что противоречит идее инвариантности относительно преобразований.

В отличие от этого применение формального малого параметра естественным образом приводит к теоретико-групповым процедурам. Вопервых, сама запись преобразований с использованием формального малого параметра  $\delta = e^{\tau}(\tau < 0)$  автоматически приводит к однопараметрической параметром τ. группе растяжений с Во-вторых, И параметры асимптотического интегрирования  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  определяются при использовании формального малого параметра с точностью до общего множителя, что также приводит К TOMV. что преобразования (1.1.24)задают не олно преобразование, а группу преобразований с присущими ей атрибутами – единицей (тождественное преобразование) и обратными преобразованиями (соответствующими противоположным по знаку значениям параметров  $\alpha_1,...,\alpha_4$ ). В третьих, применение таких преобразований, в которых подвергаются преобразованиям все входящие в уравнения величины, естественным образом приводит к рассмотрению инвариантности уравнений относительно подобных преобразований, как это уже было показано в параграфе 1.1.

Наличие четырехпараметрической группы растяжений  $(1.1.9),\ldots,$ (1.1.12) позволило перейти в уравнениях (1.1.1) от исходного восьмимерного пространства исходных величин четырехмерному пространству к инвариантов (хотя в форме записи уравнений это отразилось только образом, наличие преобразований частично). Таким растяжения, относительно которых инвариантны исходные уравнения, является фактором, характеризующим относительную простоту этих уравнений. Чем шире допускаемая группа растяжений, тем меньше размерность пространства инвариантов, то есть величин, фактически характеризующих сложность уравнений. Добавление в каждом из вариантов минимально упрощенных уравнений, рассмотренных в предыдущем параграфе, добавочной подгруппы растяжений позволяет понизить размерность пространства инвариантов, в которых записаны упрощенные уравнения, еще на единицу, то есть сделать его трехмерным. Это обстоятельство можно использовать, в частности, для того, чтобы уменьшить количество параметров-коэффициентов, входящих в уравнения.

Рассмотрим в качестве характерного примера случай 2. Инварианты добавочной подгруппы растяжений (1.3.11) имеют вид:

$$I_1 = \sqrt{a}U, \ I_2 = V, \ I_3 = \partial_X / \sqrt{a}, \ I_4 = \partial_Y, \ I_5 = b$$
 (1.4.1)

Это показывает, что выполнение замен:

$$U_1 = \sqrt{a}U, V_1 = V, X_1 = \sqrt{a}X, Y_1 = Y$$
 (1.4.2)

приведет к уравнениям:

 $\partial_{X_1}^2 U_1 + \partial_{Y_1}^2 U_1 + b \partial_{X_1} \partial_{Y_1} V_1 = 0; \quad \partial_{Y_1}^2 V_1 + b \partial_{X_1} \partial_{Y_1} U_1 = 0,$  (1.4.3) имеющим на один параметр меньше, чем уравнения (1.1.23).

Аналогично можно уменьшить на один количество параметровкоэффициентов в каждом из случаев упрощения, рассмотренных в предыдущем параграфе.

В случае уравнений (1.2.9) и (1.2.12), допускающих уже по две добавочных подгруппы растяжений, можно уменьшить размерность пространства инвариантов, по сравнению с уравнениями (1.1.23), на два.

Перейдем к асимптотическим оценкам. Неупрощенным уравнениям соответствуют нулевые значения одновременно всех параметров асимптотического интегрирования  $\alpha_1,...,\alpha_4$ . В соответствии с (1.1.15) получаем, что при этом все инварианты четырехпараметрической группы растяжений (1.1.9),...,(1.1.12), относительно которой инвариантны уравнения (1.1.1), являются величинами порядка единицы. Иначе говоря, если мы найдем некоторое решение неупрощенных уравнений, в силу которого веса членов каждого из этих уравнений одинаковы, то построенные при помощи такого решения величины  $I_1,...,I_4$  (1.1.16) будут все порядка единицы.

Для любой из упрощенных систем уравнений, построенных с использованием формального малого параметра, то есть при помощи аппарата теории групп, исходные инварианты уже будут иметь различные порядки, отличные от единицы. Но каждая из упрощенных систем, в свою очередь, инварианта относительно расширенной группы растяжений, включающей как исходные преобразования (1.1.9),...,(1.1.12), так и добавочные подгруппы (одну в случае минимального упрощения и больше в других случаях). Построив инварианты такой расширенной группы, мы вновь получим запись уравнений в инвариантах, порядки которых равны единице.

Например, уравнения (1.4.3) записаны в инвариантах пятипараметрической группы растяжений (1.1.9),...,(1.1.12), (1.3.9):

$$Z_1 = U_1 / V_1, \ Z_2 = \partial_{X_1} / \partial_{Y_1}, \ Z_3 = b$$
 (1.4.4)

В соответствии с (1.4.2) и (1.3.10) получаем:

$$Z_1 = \frac{\sqrt{aU}}{V} \sim \frac{\varepsilon^{0.25}U}{V} \sim 1; \ Z_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial_X}{\partial_Y} \sim \frac{\partial_X}{\varepsilon^{0.25}\partial_Y} \sim 1; \ Z_3 = b \sim 1$$
(1.4.5)

Рассмотрим еще один важный вопрос. При использовании упрощенных уравнений естественной является проверка требования, чтобы их решение соответствовало тем асимптотическим оценкам, в силу которых они строились. Эта проверка облегчается тем, что вместо величин, входящих в исходные уравнения, достаточно проверять инварианты, количество которых значительно меньше. При ЭТОМ, поскольку уравнения записаны В ИЗ асимптотических оценок инвариантах, часть удовлетворяется автоматически, в силу уравнений, что еще больше снижает количество необходимых проверок.

Например, асимптотические оценки (1.3.10), в силу которых получены упрощенные уравнения (1.3.8) (или, что то же, (1.4.3)), можно представить, с использованием обозначений (1.4.10), в виде:

$$Z_{1} = \frac{\varepsilon^{0.25} U}{V} \sim 1; \ Z_{2} = \frac{\partial_{X}}{\varepsilon^{0.25} \partial_{Y}} \sim 1; \ a \sim \varepsilon^{0.5}; \ b \sim 1$$
(1.4.5)

При этом достаточно проверять только последние два соотношения. Соотношения  $Z_1 \sim 1$ ,  $Z_2 \sim 1$  удовлетворяются в силу уравнений (1.3.8) при условии равенства весов членов в каждом из этих уравнений. Но даже и отсутствие такого равенства не означает непригодности найденного решения, а означает, что на самом деле его можно было бы искать из еще более упрощенных уравнений.

Рассмотрим в заключение этого параграфа еще один принципиальный вопрос. Все преобразования растяжения, использованные в данной главе, начиная с (1.1.5), записаны таким образом, как будто уравнения (1.1.1) являются алгебраическими, а дифференциальные операторы  $\partial_x$  и  $\partial_y$ множителями. В соответствии с ЭТИМ числовыми выполняются и преобразования непосредственно операторов. Такой подход вполне соответствует логике излагаемого метода, поскольку на самом деле происходит просто оценка весов всех величин, входящих в уравнения, и предполагается (как это обычно принято), что действие операторов  $\partial_x$  и  $\partial_y$ одинаково изменяет относительные веса всех искомых функций.

Более распространенным в асимптотическом анализе является растяжение не дифференциальных операторов, а координат х и у. Растяжение координат автоматически влечет за собой изменение весов дифференциальных операторов, что и позволяет оценивать эти веса. Например, в (1.1.5) и (1.1.6) можно было записать:

 $x^* = \delta^{\beta_3} x, \ y^* = \delta^{\beta_4} y; \quad \partial_{x^*} \sim 1, \ \partial_{y^*} \sim 1$  (1.4.6)

Эти два подхода не эквивалентны и приводят, вообще говоря, к разным результатам. Изложенный здесь подход является локальным. Он дает некоторые оценки в окрестности какой-то точки пространства исходных величин, но не дает практически никакой информации о структуре искомого решения.

Использование преобразований типа (1.4.15), в принципе, также приводит к локальным оценкам, но как бы с меньшей степенью локальности. Здесь для локальной оценки весов дифференциальных операторов  $\partial_x$  и  $\partial_y$ производится операция глобального масштаба – полные растяжения координатных осей х и у. В некоторых случаях это может привести к нежелательным последствиям. Например, в уравнениях с переменными коэффициентами подобные растяжения изменят веса не только величин  $\partial_x$  и  $\partial_y$ , но и коэффициентов. Это предполагает наличие какой-то связи между весами коэффициентов и дифференциальных операторов; в случае отсутствия такой связи результаты будут неверными. В то же время, в некоторых из тех случаев, когда применение преобразований вида (1.4.15) является обоснованным, могут быть получены добавочные результаты, связанные с указанием структуры искомого решения. Инвариантность относительно преобразований вида (1.4.15) дает возможность строить так называемые инвариантно-групповые решения. В таких решениях снижается размерность пространства переменных, что упрощает их поиск; в то же время в некоторых случаях они соответствуют важным видам задач, связанных с исследуемыми уравнениями. Соответствующие примеры будут подробно рассмотрены ниже.

#### 2. УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

Клейна-Гордона, Рассматривается уравнение позволяющее на относительно простом примере показать, как асимптотико-групповой анализ возможность получить решение задачи распространении дает 0 нестационарного волнового процесса. Выделяются три характерные зоны прифронтовая, приграничная и переходная, что позволяет в совокупности описать всю возмущенную область – от границы, излучающей волну, до фронта волны.

# 2.1. НАХОЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных, известное в математической физике как уравнение Клейна-Гордона:

$$\partial_x^2 \mathbf{u} - \partial_t^2 \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0},$$
 (2.1.1)  
где  $\partial_x = \partial/\partial \mathbf{x}, \ \partial_t = \partial/\partial \mathbf{t}.$ 

Это уравнение может описывать различные физические процессы. Будем здесь рассматривать его как уравнение колебаний струны, лежащей на упругом основании. Тогда переменная х задает пространственную координату, t – время и и – прогиб струны. Все коэффициенты в (2.1.1) приняты равными единице, чего легко добиться заменами переменных.

Для оценки весов членов уравнения (2.1.1) применим описанный в предыдущей главе метод асимптотико-группового анализа с использованием формального малого параметра δ<1.

Выполним преобразования:

$$\partial_{x} = \delta^{\beta_{1}} \partial_{x}^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{\beta_{2}} \partial_{t}^{*}, \ u = \delta^{\beta_{3}} u^{*},$$
(2.1.2)

требуя выполнения соотношений:

$$\partial_x^* \sim 1, \ \partial_t^* \sim 1, \ u^* \sim 1$$
 (2.1.3)

После выполнения преобразований (2.1.2) члены уравнения (2.1.1) приобретут коэффициенты в виде некоторых степеней б, которые, в соответствии с (2.1.3), полностью оценивают веса этих членов. Не выписывая

преобразованных уравнений, запишем показатели степени δ, располагая их в том же порядке, что и члены уравнений:

 $2\beta_1 + \beta_3, \ 2\beta_2 + \beta_3, \ \beta_3$ 

Рассмотрим, в первую очередь, случаи, когда уравнение (2.1.1) инвариантно относительно преобразований (2.1.2), приравнивая для этого между собой все показатели степени (2.1.4):

$$2\beta_1 + \beta_3 = 2\beta_2 + \beta_3 = \beta_3$$
(2.1.5)

(2.1.4)

Эти равенства достигаются только в одном случае:  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = \gamma$ , где  $\gamma$  – любое число. Отсюда следует, что уравнение (2.1.1) допускает однопараметрическую группу растяжений с преобразованиями:

 $\partial_{x} = \partial_{x}^{*}, \ \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, \ u = \delta^{\gamma} u^{*}$  (2.1.6)

Инвариантами этой группы являются величины  $\partial_x$  и  $\partial_t$ . Следовательно, для выяснения весов членов уравнения (2.1.1) необходимо оценивать именно эти величины. Искомая функция и преобразованиям не подвергается и ее вес не оценивается.

Выполним преобразования:

$$\partial_{\mathbf{x}} = \delta^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{x}}^*, \ \partial_{\mathbf{t}} = \delta^{\alpha_2} \partial_{\mathbf{t}}^*, \tag{2.1.7}$$

требуя выполнения соотношений:

 $\partial_x^* \sim 1, \ \partial_t^* \sim 1 \tag{2.1.8}$ 

После выполнения преобразований (2.1.7) члены уравнения (2.1.1) приобретут множители в виде степеней б со следующими показателями степени:

 $2\alpha_1, 2\alpha_2, 0$  (2.1.9)

В соответствии с (2.1.8) указанные множители полностью определяют веса членов уравнения. Рассмотрим плоскость  $\alpha_1, \alpha_2$  (рис. 2.1.) и построим на ней веер из трех лучей.

Первый луч:

$$2\alpha_1 = 2\alpha_2 < 0$$
  
(2.1.1)

соответствует упрощенному уравнению с отброшенным третьим членом:

соответствует упрощенному уравнению:

$$\partial_x^2 \mathbf{u} - \partial_t^2 \mathbf{u} = 0$$
(2.1.1)

Второй луч:

 $2\alpha_1 = 0 < 2\alpha_2$ (2.1.1)

 $\partial_x^2 \mathbf{u} - \mathbf{u} = 0$ 

(2.1.1)

2)

3)

Рис 2.1. Графическая иллюстрация к поиску параметров асимптотического интегрирования в случае формального малого параметра.

 $2\alpha_{2} = 0$ 

Третий луч:

$$< 2\alpha_1$$
 (2.1.14)

соответствует упрощенному уравнению:

 $\partial_t^2 \mathbf{u} + \mathbf{u} = 0 \tag{2.1.15}$ 

Каждый из лучей соответствует добавочной однопараметрической группе растяжений вида (2.1.7), допускаемой соответствующим упрощенным уравнением.

Задавая для первого луча  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma_1 < 0$  получаем, что упрощенное уравнение (2.1.11) инвариантно относительно добавочной подгруппы растяжений:

$$\partial_{\mathbf{x}} = \delta^{-\gamma_1} \partial_{\mathbf{x}}^*, \ \partial_{\mathbf{t}} = \delta^{-\gamma_1} \partial_{\mathbf{t}}^* \tag{2.1.16}$$

При этом соотношения (2.1.8) дают:

$$\partial_{\mathbf{x}} \sim \delta^{-\gamma_1}, \ \partial_{\mathbf{t}} \sim \delta^{-\gamma_1}$$
 (2.1.17)

Отброшенный член в этом случае имеет вес  $\delta^{2\gamma_1}$ ; полагая  $\varepsilon = \delta^{2\gamma_1}$  из (2.1.17) получаем:

$$\partial_{\mathbf{x}} \sim \partial_{\mathbf{t}}, \ \varepsilon \sim \partial_{\mathbf{x}}^{-2}$$
 (2.1.18)

Таким образом, роль естественного малого параметра в данном случае играет величина  $\partial_x^{-2}$ . Отрицательная степень дифференциального оператора означает, естественно, интегрирование по соответствующей переменной. Отсюда видно, что упрощенное уравнение (2.1.11) является асимптотически обоснованным при условии  $\varepsilon \sim \partial_x^{-2} < 1$ . Условие  $\partial_x \sim \partial_t$  в отдельной проверке не нуждается, поскольку удовлетворяется автоматически в силу уравнения (2.1.11).

$$2\alpha_{1} = 0 < 2\alpha_{2} \qquad 0)$$

$$cod$$

$$2\alpha_{2} = 0 < 2\alpha_{1} \qquad 0$$

$$0 \qquad \alpha_{1}$$

$$1)$$

$$2\alpha_{1} = 2\alpha_{2} < 0$$

 $\alpha_2$ 

Уравнение (2.1.13), соответствующее второму лучу, допускает добавочную подгруппу растяжений:

$$\partial_{x} = \partial_{x}^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{\alpha_{2}} \partial_{t}^{*}$$
(2.1.19)

При этом соотношения (2.1.8) будут иметь вид:

$$\partial_{\mathbf{x}} \sim \mathbf{1}, \ \partial_{\mathbf{t}} \sim \delta^{\alpha_2}$$
 (2.1.20)

Соотношение  $\partial_x \sim 1$  автоматически удовлетворяется в силу уравнения (2.1.13) и в отдельной проверке не нуждается. Роль естественного малого параметра здесь играет величина  $\partial_t^2$  и упрощенное уравнение (2.1.13) асимптотически обосновано при  $\varepsilon \sim \partial_t^2 < 1$ .

Аналогично уравнение (2.1.15), соответствующее третьему лучу, допускает добавочную подгруппу растяжений:

$$\partial_{\mathbf{x}} = \delta^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{x}}^*, \ \partial_{\mathbf{t}} = \partial_{\mathbf{t}}^*$$
 (2.1.21)

Отсюда следуют асимптотические соотношения:

 $\partial_x \sim \delta^{\alpha_1}, \ \partial_t \sim 1$  (2.1.22)

Второе из них удовлетворяется автоматически, в силу уравнения (2.1.15), а первое показывает, что роль естественного малого параметра здесь играет величина  $\varepsilon = \partial_x^2 < 1$ .

2.2. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЦЕДУР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Рассмотрим построение процедур последовательных приближений на основе приближенных уравнений. Представим искомую функцию и в виде ряда:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{u}_i \tag{2.2.1}$$

Преобразования (2.1.7) и соотношения (2.1.8) заменим преобразованиями:

$$\partial_{\mathbf{x}} = \delta^{\alpha_1} \partial_{\mathbf{x}}^*, \ \partial_{\mathbf{t}} = \delta^{\alpha_2} \partial_{\mathbf{t}}^*, \ \mathbf{u}_i = \delta^{i-1} \mathbf{u}_i^* \quad (i = 1, 2, ...),$$
(2.2.2)

приводящими к соотношениям:

$$\partial_x^* \sim 1, \ \partial_t^* \sim 1, \ u_i^* \sim u_1^* \quad (i = 1, 2, ...)$$
 (2.2.3)

В преобразованных переменных ряд (2.2.1) принимает вид:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^* \delta^{i-1} , \qquad (2.2.4)$$

причем, в соответствии с (2.2.3), коэффициенты при различных степенях б этого ряда есть величины одного порядка.

Подставим (2.2.1) в (2.1.1), выполним преобразования (2.2.2) и произведем расщепление по одинаковым степеням  $\delta$ , соответствующее некоторым заданным  $\alpha_1, \alpha_2$ , получая вместо (2.1.1) бесконечную рекуррентную систему уравнений. Эта система будет инвариантна

относительно преобразований (2.2.2), поскольку процедура расщепления объединяет в каждое из уравнений системы члены, получающие после преобразований (2.2.2) одинаковые степени δ. Таким образом, дополнительные однопараметрические подгруппы растяжений приобретают не только упрощенные уравнения, но и бесконечные рекуррентные системы, строящиеся на основе таких уравнений.

Отметим, что инвариантность рекуррентной системы уравнений относительно преобразований (2.2.2) позволяет, не меняя вида этой системы, вернуться от преобразованных к исходным уравнениям. Таким образом, окончательное решение получается в виде ряда (2.2.1), члены которого удовлетворяют соответствующей рекуррентной системе уравнений, и при этом ни ряд, ни уравнения не содержат формально введенного малого параметра δ.

Рекуррентные системы уравнений сохраняют инвариантность и относительно преобразований типа (2.1.6), которые теперь принимают вид:

$$\partial_{\mathbf{x}} = \partial_{\mathbf{x}}^*, \ \partial_{\mathbf{t}} = \partial_{\mathbf{t}}^*, \ \mathbf{u}_{\mathbf{i}} = \delta^{\gamma} \mathbf{u}_{\mathbf{i}}^* \quad (\mathbf{i} = 1, 2, ...)$$
 (2.2.5)

Рассмотрим варианты упрощения, приведенные в предыдущем параграфе. Значениям  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma_1 < 0$  соответствует следующий вид уравнения (2.1.1) после преобразований (2.1.16):

$$\varepsilon^{-1}\partial_{x}^{*2}u - \varepsilon^{-1}\partial_{t}^{*2}u - u = 0$$
(2.2.6)

Здесь учтено соотношение  $\varepsilon = \delta^{2\gamma_1}$ . Учитывая относительную произвольность величин  $\delta$  и  $\gamma_1$ , примем, для удобства дальнейших построений,  $\gamma_1 = 0.5$ , получая  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.5$ ;  $\varepsilon = \delta$ .

Подставляя в (2.2.6) ряд (2.2.4) и выполняя расщепление по одинаковым степеням б, получаем бесконечную рекуррентную систему уравнений:

$$\partial_x^{*2} \mathbf{u}_i^* - \partial_t^{*2} \mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_{i-1}^* \quad (i = 1, 2, ...)$$
(2.2.7)

(при i = 1  $u_{i-1}^* = 0$ ).

Это уравнения инвариантны относительно преобразований (2.2.2), принимающих здесь вид:

$$\partial_{x} = \delta^{-0.5} \partial_{x}^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{-0.5} \partial_{t}^{*}, \ u_{i} = \delta^{i-1} u_{i}^{*} \quad (i = 1, 2, ...)$$
 (2.2.8)

Возвращаясь, при помощи этих преобразований, к исходным переменным в (2.2.7) получаем:

 $\delta^{2-i}\partial_x^2 u_i - \delta^{2-i}\partial_t^2 u_i = \delta^{2-i}u_{i-1} \quad (i = 1, 2, ...)$ (2.2.9)

или, после сокращения на общий множитель,

 $\partial_x^2 \mathbf{u}_i - \partial_t^2 \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1}$  (i = 1,2,...) (2.2.10)

Уравнения (2.2.10) инвариантны относительно добавочной подгруппы растяжений (2.2.8). В силу преобразований (2.2.8) соотношения (2.2.3) принимают вид:

$$\partial_x \sim \partial_t \sim \delta^{-0.5}$$
 (2.2.11)

 $u_i \sim \delta^{i-1} u_1 \quad (i = 2, 3, ...)$  (2.2.12)

Соотношения (2.2.11) уже рассмотрены выше. Соотношения (2.2.12) эквивалентны соотношениям:

$$u_i \sim \delta u_{i-1} \quad (i = 2, 3, ...)$$
 (2.2.13)

Если при решении уравнений (2.2.10) в каждом приближении разыскивать только частное решение, порожденное правой частью, то соотношения (2.2.13) удовлетворяются автоматически в силу (2.2.11). Таким образом, как и в первом приближении, проверке подлежит только одно соотношение  $\partial_x^{-2} < 1$ .

Аналогично, принимая для второго луча  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.5$ , получаем рекуррентную систему:

$$\partial_x^2 \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i = \partial_t^2 \mathbf{u}_{i-1} \quad (i = 1, 2, ...),$$
 (2.2.14)

инвариантную относительно добавочной подгруппы растяжений:

$$\partial_x = \partial_x^*, \ \partial_t = \delta^{0.5} \partial_t^*, \ u_i = \delta^{i-1} u_i^* \quad (i = 1, 2, ...)$$
  
B CHIV STUX IDEO (2.2.15)
  
B CHIV STUX IDEO (2.2.3) IDMUMANT BUT:

В силу этих преооразовании соотношения (2.2.3) принимают вид:  
$$\partial_t \sim \delta^{0.5}, \ \partial_x \sim 1$$
 (2.2.16)

$$u_i \sim \delta^{i-1} u_1 \quad (i=2,3,...)$$
 (2.2.17)

Соотношения (2.2.16) остались теми же, что и при обсуждении уравнения (2.1.13), являющегося уравнением первого приближения для системы (2.2.14); при справедливости (2.2.16) соотношения (2.2.17) удовлетворяются, в силу уравнений (2.2.14), автоматически.

Для третьего луча, принимая  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 0$ , получаем рекуррентную систему:

$$\partial_t^2 \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i = \partial_x^2 \mathbf{u}_{i-1} \quad (i = 1, 2, ...)$$
 (2.2.18)

Эта система инвариантна относительно добавочной подгруппы растяжений:

$$\partial_{x} = \delta^{0.5} \partial_{x}^{*}, \ \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, \ u_{i} = \delta^{i-1} u_{i}^{*} \quad (i = 1, 2, ...)$$
 (2.2.19)

При этом соотношения (2.2.3) принимают вид:

$$\partial_{\mathbf{x}} \sim \delta^{0.5}, \ \partial_{\mathbf{t}} \sim 1$$
 (2.2.20)

$$u_i \sim \delta^{i-1} u_1 \quad (i = 2, 3, ...)$$
 (2.2.21)

Соотношения (2.2.20) обсуждены при рассмотрении уравнения первого приближения (2.1.15); при их справедливости соотношения (2.2.21) удовлетворяются, в силу уравнений (2.2.18), автоматически.

Обратим внимание на то, что соотношения (2.2.12), (2.2.17) и (2.2.21) совпадают между собой и удовлетворяются, во всех случаях, автоматически. Это естественное следствие рассматриваемой процедуры, обобщающей на бесконечные рекуррентные системы уравнений результаты, полученные для уравнений первого приближения.

2.3. ПРИФРОНТОВАЯ АСИМПТОТИКА

Как уже указывалось в первой главе, выполнение растяжений непосредственно дифференциальных операторов, входящих в уравнения, вполне оправдано с позиций асимптотического анализа, но не дает практически никакой информации о структуре искомого решения. В то же время растяжения дифференциальных операторов можно рассматривать как следствие растяжений независимых переменных. В тех случаях, когда такой подход асимптотически оправдан, он может дать значительную предварительную информацию об искомом решении, облегчая его поиск.

Продемонстрируем сказанное на примере уравнения Клейна-Гордона. Заменим преобразования (2.2.2) на преобразования:

 $x^* = \delta^{\alpha_1} x, \ t^* = \delta^{\alpha_2} t, \ u_i^* = \delta^{1-i} u_i \quad (i = 1, 2, ...),$  (2.3.1)

по-прежнему приводящие к соотношениям (2.2.3). При  $\alpha_1 = \alpha_2 = -0.5$  получаем преобразования:

$$\mathbf{x}^* = \delta^{-0.5} \mathbf{x}, \ \mathbf{t}^* = \delta^{-0.5} \mathbf{t}, \ \mathbf{u}_i^* = \delta^{1-i} \mathbf{u}_i \quad (i = 1, 2, ...),$$
 (2.3.2)

относительно которых инвариантны уравнения (2.2.10). Эти уравнения инвариантны также и относительно преобразований (2.2.5), которые являются следствиями преобразований:

$$x^* = x, t^* = t, u_i^* = \delta^{-\gamma} u_i \quad (i = 1, 2, ...)$$
 (2.3.3)

Суперпозиция преобразований (2.3.2) и (2.3.3) имеет вид:

 $x^* = \delta^{-0.5}x, t^* = \delta^{-0.5}t, u_i^* = \delta^{1-\gamma-i}u_i$  (i = 1,2,...) (2.3.4)

В теории инвариантно-групповых решений дифференциальных уравнений [30] очень важной является достаточная широта группы преобразований, допускаемой уравнениями. Это связано с тем, что поиск инвариантных относительно преобразований, решений, допускаемых уравнениями, выполняется гораздо проще, чем поиск решений произвольного вида.

В данном случае выяснилось, что как уравнение первого приближения, так и вся рекуррентная система уравнений инвариантны относительно добавочной подгруппы растяжений (2.3.4), отсутствовавшей у исходного уравнения. Такое расширение допускаемой группы растяжений тем более соответствующие преобразования напрямую важно, ЧТО связаны С асимптотическими оценками, при помощи которых строилось и уравнение первого приближения и вытекающая из него рекуррентная система уравнений. Решение, инвариантное относительно преобразований (2.3.4), является как бы эталонным решением, для которого и делались все асимптотические оценки (хотя в силу приближенности таких оценок существует и много других асимптотически обоснованных решений, в той или иной степени близких к эталонному, но не совпадающих с ним).

В связи с этим поиск решения системы уравнений (2.2.10), инвариантного относительно преобразований (2.3.4), представляет первоочередный интерес. Для поиска такого решения найдем инварианты преобразований (2.3.4):

$$J = \frac{t}{x}, I_i = x^{2-2\gamma-2i} u_i \quad (i = 1, 2, ...)$$
(2.3.5)

Следовательно, решение, инвариантное относительно преобразований (2.3.4), можно искать в виде:

$$I_i = I_i(J)$$
 (i = 1,2,...) (2.3.6)

или:

$$u_i = x^{2i+2\gamma-2} I_i(J)$$
 (i=1,2,...) (2.3.7)

Подставляя (2.3.7) в (2.2.10) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций (2.3.6):

$$(J^{2} - 1)I''_{i} - 2(2i - 3 + 2\gamma)JI'_{i} + (2i - 2 + 2\gamma)(2i - 3 + 2\gamma)I_{i} = I_{i-1}$$
(2.3.8)  
(i = 1,2,...),

где штрих обозначает дифференцирование по J.

Рассмотрим вначале случай i = 1, получая из (2.3.8):

$$(J2 - 1)I''_{1} + 2(1 - 2\gamma)JI'_{1} - 2\gamma(1 - 2\gamma)I_{1} = 0$$
(2.3.9)

(правая часть  $I_{i-1}$  при i = 1 отсутствует).

Решение этого уравнения имеет вид:

$$I_{1} = A_{1} |J - 1|^{2\gamma} + A_{2} |J + 1|^{2\gamma}$$
(2.3.10)

Отсюда, в силу (2.3.7),

$$u_{1} = A_{1}x^{2\gamma} \left| \frac{t}{x} - 1 \right|^{2\gamma} + A_{2}x^{2\gamma} \left| \frac{t}{x} + 1 \right|^{2\gamma}$$
(2.3.11)

Это частный случай решения даламберовского типа, справедливого для уравнения первого приближения (2.1.11), являющегося стандартным волновым уравнением. Ограничимся рассмотрением только первого слагаемого в (2.3.11), описывающего распространение волны в положительном направлении оси х:

$$\mathbf{u}_{1} = \mathbf{A}_{1} \mathbf{x}^{2\gamma} \left| \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} - 1 \right|^{2\gamma}$$
(2.3.12)

Предположим, что решается задача о предварительно покоящейся полубесконечной струне  $x \ge 0$ , из конца которой x = 0 происходит излучение волны за счет приложения какой-то нагрузки. Тогда, отбрасывая в (2.3.12) знак модуля, получаем:

$$u_{1} = \begin{cases} A_{1}(t-x)^{2\gamma} & x \le t \\ 0 & x > t \end{cases}$$
(2.3.13)

Возмущение из точки x = 0 распространяется со скоростью, равной единице; за время t оно захватывает область  $x \le t$ . В точке x = t находится передний фронт, впереди которого струна еще покоится.

Введем обозначения:  $2\gamma = a + 1$ ,  $A_1 = u_{1,1}$ . Будем в дальнейшем записывать, вместо (2.3.13):

$$u_1 = u_{1,1}(t-x)^{a+1},$$
 (2.3.14)

подразумевая, что это выражение справедливо в области  $x \le t$ , а при x > t  $u_1 = 0$ . Также будем поступать и со всеми другими выражениями, содержащими t - x.

Решение (2.3.14) должно удовлетворять асимптотическим оценкам, при которых строилось уравнение первого приближения (2.1.11), то есть  $\partial_x \sim \partial_t > 1$ . Условие  $\partial_x \sim \partial_t$  удовлетворяется автоматически. Вычислим:

$$\partial_{x} = \frac{\partial u_{1}}{\partial x} / u_{1} = -(a+1)(t-x)^{-1}$$
(2.3.15)

Условие  $\partial_x > 1$  будет справедливо, в силу (2.3.15), при

$$t - x < |a + 1|,$$
 (2.3.16)

то есть при небольших расстояниях от фронта x = t в так называемой прифронтовой зоне.

Возвращаясь к инвариантам, получаем из (2.3.14):

$$I_1 = u_{1,1}(J-1)^{a+1},$$
 (2.3.17)

заканчивая на этом решение уравнения (2.3.9).

Проведенный здесь подробный анализ типичен при использовании теории инвариантно-групповых решений дифференциальных уравнений. В то время как обычно в математической физике принято вначале формулировать краевую задачу, а затем искать решение дифференциальных уравнений, соответствующее заданным граничным и начальным условиям, инвариантно-групповых решений использование теории приводит К последовательности действий, более типичной для обыкновенных дифференциальных уравнений, когда вначале находится общее решение уравнений, а затем решается какая-то конкретная задача за счет подходящего задания констант интегрирования. Здесь также вначале было найдено решение (2.3.11), а затем уже выяснялось, каким задачам оно может соответствовать. В математической физике такой подход принято называть обратным.

Рассмотрим теперь уравнение второго приближения, подставляя в (2.3.8)  $i = 2, 2\gamma = a + 1$  и значение  $I_1$  (2.3.17) и получая:

$$(J2 - 1)I''_{2} - 2(a + 2)JI'_{2} + (a + 3)(a + 2)I_{2} = u_{1,1}(J - 1)^{a+1}$$
(2.3.18)

Решение этого уравнения имеет вид:

$$I_{2} = u_{2,1} (J-1)^{a+2} + u_{2,2} (J-1)^{a+3}, \qquad (2.3.19)$$

причем первое слагаемое – это частное решение неоднородного уравнения, соответствующее виду правой части, а второе – общее решение однородного уравнения. Величина u<sub>2,2</sub> является константой интегрирования, а u<sub>2,1</sub> находится после подстановки (2.3.19) в (2.3.18) и равна:

$$\mathbf{u}_{2,1} = -\frac{\mathbf{u}_{1,1}}{2(\mathbf{a}+2)} \tag{2.3.20}$$

Обобщая результаты первых двух приближений на уравнение (2.3.8) при произвольном значении i, получаем:

$$I_{i} = \sum_{j=1}^{i} u_{i,j} (J-1)^{a+i+j-1}$$
(2.3.21)

В соответствии с (2.3.7) имеем:

$$u_{i} = \sum_{j=1}^{i} u_{i,j} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1}$$
(2.3.22)

Для нахождения коэффициентов u<sub>i,j</sub> следует подставить (2.3.21) в (2.3.8) или (2.3.22) в (2.2.10). В обоих случаях получаются одинаковые рекуррентные соотношения:

$$u_{i,j} = \frac{(i-j+1)(i-j)u_{i,j-1} - u_{i-1,j}}{2(i-j)(a+i+j-1)} \quad \begin{pmatrix} i=2,3,\dots\\ j=1,\dots,i-1 \end{pmatrix}$$
(2.3.23)

(при j=1  $u_{i,j-1}=0$ ).

Соотношения (2.3.23) позволяют находить коэффициенты u<sub>i,j</sub> для очередного приближения по известным коэффициентам предыдущего приближения. Исключениями являются коэффициенты вида u<sub>i,i</sub>, которые являются константами интегрирования и не определяются из (2.3.23). Для их нахождения воспользуемся граничными условиями. Рассмотрим, кроме перемещения u, также усилие:

$$T(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}$$
(2.3.24)

Равенство единице коэффициента в (2.3.24) достигается, как и в уравнении (2.1.1), заменой переменной.

Пусть на конце x = 0 покоящейся струны в момент времени t = 0 возникает усилие, изменяющееся в дальнейшем каким-то образом во времени:

$$T(0,t) = f(t)$$
 (2.3.25)

Подставим (2.3.22) в (2.2.1) и результат в (2.3.24), получая:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \left[ (i-j+1)u_{i,j-1} - (a+i+j-1)u_{i,j} \right] x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-2}$$
(2.3.26)

Иначе говоря, для усилия Т имеем:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i; \ T_i = \sum_{j=1}^{1} T_{i,j} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-2}$$
(2.3.27)  

$$T_{i,j} = (i-j+1) u_{i,j-1} - (a+i+j-1) u_{i,j} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,...\\ j=1,...,i \end{pmatrix}$$
  
При x = 0 из (2.3.27) будет:  

$$T(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,i} t^{a+2i-2}$$
(2.3.28)

Отсюда видно, что и функция f(t) (2.3.25), задающая изменение во времени усилия на конце струны, должна быть представлена в виде ряда:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^{a+2i-2}$$
(2.3.29)

Приравнивая коэффициенты рядов (2.3.28) и (2.3.29) получаем:  $T_{i,i} = f_i$  (i = 1,2,...) (2.3.30)

и при помощи (2.3.27) находим искомое выражение для u<sub>i i</sub>:

$$u_{i,i} = \frac{u_{i,i-1} - f_i}{a + 2i - 1} \quad (i = 1, 2, ...)$$
(2.3.31)

Изучим полученные результаты. Поскольку решение уравнения первого приближения асимптотически обосновано в прифронтовой зоне, то естественно рассмотреть и результаты последующих приближений также для этой зоны. В начале движения, то есть при малых значениях времени t, вся возмущенная зона  $0 \le x \le t$  является прифронтовой. При больших значениях t прифронтовой является зона, в которой будет малой величина t - x, a при этом большой будет величина  $x \sim t$ . При таких значениях x и t - x в рядах для u и T главную роль в каждом приближении играют слагаемые с наименьшими степенями t - x и наибольшими степенями x, то есть слагаемые с j = 1. В соответствии с этим имеем при  $t \to \infty$  и  $x \to t$ :

$$u \to \sum_{i=1}^{\infty} u_{i,1} x^{i-1} (t-x)^{a+i}; \quad T \to \sum_{i=1}^{\infty} T_{i,1} x^{i-1} (t-x)^{a+i-1}$$
(2.3.32)  

$$U_{2} (2,3,30) = (2,3,31) \text{ weak:}$$

ИЗ (2.5.50) И (2.5.51) ИМеем.  

$$T$$
 f

$$T_{1,1} = f_1; \ u_{1,1} = -\frac{I_{1,1}}{a+1} = -\frac{I_1}{a+1}$$
(2.3.33)

Соотношения (2.3.23) и (2.3.27) дают:

$$u_{i,1} = -\frac{u_{i-1,1}}{2(i-1)(a+i)}; \ T_{i,1} = -(a+i)u_{i,1}$$
 (2.3.34)

Отсюда получаем:

$$u_{i,1} = u_{1,1} \frac{(-1)^{i-1} \Gamma(a+2)}{2^{i-1} (i-1)! \Gamma(a+i+1)}$$
(2.3.35)  
$$T_{i,1} = T_{1,1} \frac{(-1)^{i-1} \Gamma(a+1)}{2^{i-1} (i-1)! \Gamma(a+i)} \quad (i = 1, 2, ...),$$

где Г – гамма-функция.

Подставляя (2.3.35) в (2.3.32) имеем:

$$u \approx u_{1,1}(t-x)^{a+1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \Gamma(a+2)}{(i-1)! \Gamma(a+i+1)} \left[ \frac{\sqrt{2x(t-x)}}{2} \right]^{2(i-1)}$$
(2.3.36)  
$$T \approx T_{1,1}(t-x)^{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \Gamma(a+1)}{(i-1)! \Gamma(a+i)} \left[ \frac{\sqrt{2x(t-x)}}{2} \right]^{2(i-1)}$$

Окончательно, используя определение лямбда-функции [55]:
$$\Lambda_{\nu}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{(z/2)^{\nu}} J_{\nu}(z), \qquad (2.3.37)$$

где J<sub>v</sub>(z)- функция Бесселя, получаем:

$$u \approx u_{1,1}(t-x)^{a+1} \Lambda_{a+1}(z), T \approx T_{1,1}(t-x)^a \Lambda_a(z), \ z = \sqrt{2x(t-x)}$$
 (2.3.38)

Таким образом, для прифронтовой зоны получены замкнутые результаты.

Рассмотрим разрыв на фронте усилия Т. Функция f(t), задающая изменение во времени нагрузки на границе x = 0, имеет особую точку t = 0, поскольку при t < 0 f(t) = 0. Характер этой особой точки полностью определяется первым членом разложения (2.3.28), то есть выражением  $f_1t^a$ . Например, при a = 0 имеем скачкообразное изменение функции f(t) от значения, равного нулю, к значению  $f_1$ . При a = 1 сама функция сохраняет при t = 0 непрерывность, но терпит разрыв первая производная df/dt и так далее.

В соответствии с (2.3.38) и (2.3.33) и учитывая, что при x = t будет z = 0 и  $\Lambda_a(0) = 1$  получаем, что усилие T имеео̀ на фронте x = t такую же особую точку, как функция f(t) при t = 0. В частности, при a = 0 усилие T изменяется на фронте скачкообразно на ту же величину f<sub>1</sub>, что и усилие f(t) при t = 0.

Более того, значения a и  $f_1$  определяют поведение функции T (а также и u) не только на фронте, но и во всей прифронтовой зоне. Следовательно, вся эта зона полностью определяется поведением нагрузки f(t) в начальный момент времени, то есть первым членом разложения (2.3.29).

Рассмотрим частный случай внезапно приложенной на границе x = 0 и остающейся затем неизменной нагрузки f(t) = 1. При этом будет  $a = 0, f_1 = 1, f_i = 0$  (i > 1). Соответствующие результаты, полученные при помощи суммирования на ЭВМ рядов (2.2.1), (2.3.22) и (2.3.26) приведены на рисунках 2.2. и 2.3. Усилие Т терпит на фронте разрыв, изменяясь скачкообразно на единицу. Перемещение и имеет на фронте излом, то есть разрыв в первой производной.

На тех же рисунках 2.2 и 2.3 приведены и результаты, соответствующие асимптотическим формулам (2.3.38) для прифронтовых зон, которые в данном случае принимают вид:

$$u \approx -(t - x)\Lambda_1(z), \ T \approx \Lambda_0(z)$$
(2.3.39)



Видно, что с ростом времени возрастает зона хорошего совпадения результатов, полученных при помощи суммирования полных рядов и на основе упрощенных выражений (2.3.39), что соответствует вышеприведенному анализу.

### 2.4. МЕДЛЕННОИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ АСИМПТОТИКИ

В предыдущем параграфе было получено решение уравнения Клейна-Гордона в виде степенных рядов (2.2.1), (2.3.22), (2.3.27), способных описать всю возмущенную зону  $0 \le x \le t$ . Однако в основе построения этих рядов лежит процедура прифронтовой асимптотики; поэтому естественно, что полученные результаты лучше всего применимы в при-фронтовой зоне, давая в ней замкнутое решение (2.3.38). С удалением от фронта требуется суммирование все большего числа членов степенных рядов; при этом возрастает ошибка округления, связанная с ограниченной разрядностью, при выполнении операций над числами в ЭВМ. В итоге практическое применение рядов (2.2.1), (2.3.22), (2.3.27) связано либо со сравнительно небольшими значениями времени t, когда эти ряды способны описать решение во всей возмущенной зоне  $0 \le x \le t$ , либо, при больших значениях t, с описанием только при- фронтовой зоны  $x \sim t$ .

Для описания зон, далеких от фронта, целесообразно применять, вместо прифронтовой асимптотики, две другие процедуры последовательных приближений, построенные в параграфе 2.2 и соответствующие медленным изменениям искомых функций по х и t.

Рассмотрим рекуррентную систему (2.2.14) с уравнением первого приближения (2.1.13). В этих уравнениях искомые функции зависят от двух переменных х и t, но решаются уравнения, как обыкновенные дифференциальные уравнения по переменной х; переменная t входит как параметр. В первом приближении имеем:

$$u_1 = B_1(t)e^{-x} + B_2(t)e^{x}$$
 (2.4.1)

Для рассмотренной в предыдущем параграфе задачи о нагружении на конце x=0 полубесконечной x≥0 струны имеет смысл только первое слагаемое, локализованное вблизи точки x=0. Отбрасывая второе слагаемое, получаем:

$$u_1 = B_1(t)e^{-x}$$
 (2.4.2)

Это решение должно удовлетворять асимптотической оценке  $\partial_t < 1$ , в силу которой построено уравнение (2.1.13). Вычислим:

$$\partial_{t} = \frac{\partial u_{1}}{\partial t} / u_{1} = \frac{dB_{1}}{dt} / B_{1} < 1, \qquad (2.4.3)$$

получая, что решение (2.4.2) удовлетворяет асимптотической оценке для любой, относительно медленно изменяющейся, функции B<sub>1</sub>(t).

Вычислим в первом приближении усилие:

$$T_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} = -B_1(t)e^{-x}$$
 (2.4.4)

$$\Gamma_1(0,t) = f(t) = -B_1(t)$$
(2.4.5)

Таким образом, получаем:

$$B_1(t) = -f(t), \ u_1 = -f(t)e^{-x}, \ T_1 = f(t)e^{-x}$$
 (2.4.6)

В частном случае внезапно приложенной и остающейся неизменной нагрузки f(t) = 1 имеем:

$$u_1 = -e^{-x}, \ T_1 = e^{-x}$$
 (2.4.7)

При этом решение ограничивается только первым приближением, поскольку (2.4.7) является решением не только упрощенного уравнения (2.1.3), но и исходного уравнения Клейна-Гордона (2.1.1) (что проверяется непосредственно). Это решение удовлетворяет граничным условиям, но не удовлетворяет начальным условиям. Искомые функции здесь локализованы вблизи границы x=0, следовательно, получилось решение типа приграничной асимптотики. Оно описывает поведение искомых функций вблизи нагруженной границы после удаления быстроосциллирующей прифронтовой зоны. Искомое решение асимптотически стремится к (2.4.7) при  $t \rightarrow \infty$  и x ~ 0.

На рисунках 2.2 и 2.3 приведены и графики, соответствующие приграничной асимптотике (2.4.7). Хорошо видно сближение точного решения с приближенным с ростом времени. Особенно быстро такое сближение происходит для усилия Т. Сближение точного и приближенного решений для перемещения и происходит позже из-за колебаний струны на упругом основании, постепенно затухающих во времени.

Перейдем к рекуррентной системе (2.2.18). Уравнение первого приближения (2.1.15) дает решение:

 $u_1 = C(x)\cos t + S(x)\sin t$ , (2.4.8)

способное удовлетворить начальным, но не граничным условиям. В соответствии с асимптотическими оценками это решение отвечает медленному изменению по  $x - \partial_x < 1$ , то есть зоне, промежуточной между быстроизменяющейся прифронтовой зоной с  $\partial_x > 1$  и приграничной зоной с  $\partial_x \sim 1$ .

При нулевых граничных условиях результаты как в первом, так и во всех последующих приближениях будут нулевыми. Отсюда следует, что на таких расстояниях от границы, где затухает решение (2.4.7), после прохождения быстроизменяющейся прифронтовой зоны, струна стремится с течением времени к исходному невозмущенному состоянию. Это хорошо видно на рисунках 2.2 и 2.3.

В случаях более сложных нагрузок, естественно, усложняется и решение уравнений (2.2.14) и (2.2.18). Достаточно полный анализ результатов для нагрузки вида  $f(t) = \cos \omega t$  приведен в работах [34, 40]. Однако в любом случае главным остается то, что три построенных рекуррентных процесса позволяют описать, в совокупности, нестационарный волновой процесс с выделением в нем главных зон с существенно различным поведением решения.

## 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В

## ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Метод асимптотико-группового анализа, описанный в двух предыдущих главах, применяется к динамическим уравнениям теории упругости в декартовых координатах. Показано, как в случае большого числа параметров асимптотического интегрирования можно производить их поиск при помощи ЭВМ. С использованием найденных семейств параметров выводятся различные варианты двумерных уравнений теории пластин – как уже известные, так и новые.

# 3.1. ВВЕДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрим динамические уравнения теории упругости в форме:

$$\partial_{1}\sigma_{11} + \partial_{2}\sigma_{12} + \partial_{3}\sigma_{13} - \rho\partial_{t}^{2}u_{1} = 0; \quad E\partial_{1}u_{1} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\partial_{1}\sigma_{12} + \partial_{2}\sigma_{22} + \partial_{3}\sigma_{23} - \rho\partial_{t}^{2}u_{2} = 0; \quad E\partial_{2}u_{2} = \sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})$$

$$\partial_{1}\sigma_{13} + \partial_{2}\sigma_{23} + \partial_{3}\sigma_{33} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3} = 0; \quad E\partial_{3}u_{3} = \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$G(\partial_{1}u_{2} + \partial_{2}u_{1}) = \sigma_{12}; \quad G(\partial_{1}u_{3} + \partial_{3}u_{1}) = \sigma_{13}; \quad G(\partial_{2}u_{3} + \partial_{3}u_{2}) = \sigma_{23}$$

$$\partial_{1} = \partial/\partial x_{1}, \quad \partial_{2} = \partial/\partial x_{2}, \quad \partial_{3} = \partial/\partial x_{3}; \quad x_{1}, x_{2}, x_{3} -$$

$$deкартовы$$

координаты, t – время; остальные обозначения общеприняты в теории упругости.

Используя формальный малый параметр б<1 выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \partial_{1} &= \delta^{\beta_{1}} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} &= \delta^{\beta_{2}} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} &= \delta^{\beta_{3}} \partial_{3}^{*}, \ u_{1} &= \delta^{\beta_{4}} u_{1}^{*}, \ u_{2} &= \delta^{\beta_{5}} u_{2}^{*}, \ u_{3} &= \delta^{\beta_{6}} u_{3}^{*} \qquad (3.1.2) \\ \sigma_{11} &= \delta^{\beta_{7}} \sigma_{11}^{*}, \ \sigma_{22} &= \delta^{\beta_{8}} \sigma_{22}^{*}, \ \sigma_{33} &= \delta^{\beta_{9}} \sigma_{33}^{*}, \ \sigma_{12} &= \delta^{\beta_{10}} \sigma_{12}^{*}, \ \sigma_{13} &= \delta^{\beta_{11}} \sigma_{13}^{*}, \ \sigma_{23} &= \delta^{\beta_{12}} \sigma_{23}^{*} \\ & E &= \delta^{\beta_{13}} E^{*}, \ G &= \delta^{\beta_{13}} G^{*}, \ \rho &= \delta^{\beta_{14}} \rho^{*}, \ \partial_{t} &= \delta^{\beta_{15}} \partial_{t}^{*} \end{aligned}$$

и потребуем, чтобы в результате этих преобразований стали справедливыми соотношения:

$$\partial_i^* \sim 1, \ u_i^* \sim 1, \ \sigma_{ij}^* \sim 1, \ E^* \sim 1, \ G^* \sim 1, \ \rho^* \sim 1, \ \partial_t^* \sim 1 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$
 (3.1.3)

В (3.1.2) и (3.1.3) принималось, что модули упругости Е и G есть величины одного порядка Е ~ G. Считая также, что коэффициент Пуассона v есть величина порядка единицы, получаем, что после преобразований (3.1.2), в силу соотношений (3.1.3), вес каждого члена любого из уравнений (3.1.1) полностью определяется приобретенным коэффициентом в виде некоторой степени δ.

Поступая так же, как в предыдущих случаях, находим, что уравнения (3.1.1) допускают четырехпараметрическую группу растяжений с преобразованиями:

$$\partial_{i} = \partial_{i}^{*}, \ \mathbf{u}_{i} = \delta^{\gamma_{1}} \mathbf{u}_{i}^{*}, \ \sigma_{ij} = \delta^{\gamma_{1}} \sigma_{ij}^{*}, \ \mathbf{E} = \mathbf{E}^{*}, \ \mathbf{G} = \mathbf{G}^{*}, \ \rho = \rho^{*}, \ \partial_{t} = \partial_{t}^{*}$$
(3.1.4)

$$\partial_{i} = \delta^{\gamma_{2}} \partial_{i}^{*}, \ u_{i} = \delta^{-\gamma_{2}} u_{i}^{*}, \ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*}, \ E = E^{*}, \ G = G^{*}, \ \rho = \rho^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{\gamma_{2}} \partial_{t}^{*} \quad (3.1.5)$$

$$\partial_i = \partial_i^*, \ u_i = u_i^*, \ \sigma_{ij} = \delta^{\gamma_3} \sigma_{ij}^*, \ E = \delta^{\gamma_3} E^*, \ G = \delta^{\gamma_3} G^*, \ \rho = \delta^{\gamma_3} \rho^*, \ \partial_t = \partial_t^* \quad (3.1.6)$$

$$\partial_{i} = \partial_{i}^{*}, \ u_{i} = u_{i}^{*}, \ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*}, \ E = E^{*}, \ G = G^{*}, \ \rho = \delta^{\gamma_{4}} \rho^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{-0.5\gamma_{4}} \partial_{t}^{*} \quad (3.1.7)$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

Для целей асимптотического анализа пригодны только преобразования, отличающиеся от преобразований (3.1.4),...,(3.1.7) или любой их суперпозиции, поскольку применение этих преобразований не изменяет относительных весов членов уравнений.

Рассмотрим теперь преобразования (3.1.2) при произвольных β<sub>1</sub>,..., β<sub>15</sub> и запишем суперпозицию этих преобразований и (3.1.4),...,(3.1.7):

$$\begin{aligned} \partial_{1} &= \delta^{\beta_{1}+\gamma_{2}} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} &= \delta^{\beta_{2}+\gamma_{2}} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} &= \delta^{\beta_{3}+\gamma_{2}} \partial_{3}^{*}, \ \mathbf{u}_{1} &= \delta^{\beta_{4}+\gamma_{1}-\gamma_{2}} \mathbf{u}_{1}^{*} \end{aligned} (3.1.8) \\ \mathbf{u}_{2} &= \delta^{\beta_{5}+\gamma_{1}-\gamma_{2}} \mathbf{u}_{2}^{*}, \ \mathbf{u}_{3} &= \delta^{\beta_{6}+\gamma_{1}-\gamma_{2}} \mathbf{u}_{3}^{*}, \ \sigma_{11} &= \delta^{\beta_{7}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{11}^{*}, \ \sigma_{22} &= \delta^{\beta_{8}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{22}^{*} \\ \sigma_{33} &= \delta^{\beta_{9}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{33}^{*}, \ \sigma_{12} &= \delta^{\beta_{10}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{12}^{*}, \ \sigma_{13} &= \delta^{\beta_{11}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{13}^{*}, \ \sigma_{23} &= \delta^{\beta_{12}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{23}^{*} \\ \mathbf{E} &= \delta^{\beta_{13}+\gamma_{3}} \mathbf{E}^{*}, \ \mathbf{G} &= \delta^{\beta_{13}+\gamma_{3}} \mathbf{G}^{*}, \ \rho &= \delta^{\beta_{14}+\gamma_{3}+\gamma_{4}} \rho^{*}, \ \partial_{t} &= \delta^{\beta_{15}+\gamma_{2}-0.5\gamma_{4}} \partial_{t}^{*} \end{aligned}$$

Преобразования (3.1.8) эквивалентны преобразованиям (3.1.2) в том смысле, что они приводят к таким же оценкам относительных весов членов уравнений (3.1.1). Но в то же время применение, вслед за (3.1.2), преобразований (3.1.4),...,(3.1.7) заменяет соотношения (3.1.3) на соотношения:

$$\partial_{i}^{*} \sim \delta^{-\gamma_{2}}, u_{i}^{*} \sim \delta^{-\gamma_{1}+\gamma_{2}}, \sigma_{ij}^{*} \sim \delta^{-\gamma_{1}-\gamma_{3}}, E^{*} \sim \delta^{-\gamma_{3}}, G^{*} \sim \delta^{-\gamma_{3}}$$

$$\rho^{*} \sim \delta^{-\gamma_{3}-\gamma_{4}}, \partial_{t}^{*} \sim \delta^{-\gamma_{2}+0.5\gamma_{4}} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$(3.1.9)$$

Таким образом, преобразования (3.1.2) и соотношения (3.1.3) заменены эквивалентными для целей асимптотического анализа преобразованиями (3.1.8), приводящими к соотношениям (3.1.9) с произвольными  $\gamma_1,...,\gamma_4$ .

Исключая из (3.1.8) и (3.1.9)  $\gamma_1,...,\gamma_4$  переходим к инвариантам четырехпараметрической группы растяжений (3.1.4),...,(3.1.7):

$$I_i = \delta^{\alpha_i} I_i^*; \ I_i^* \sim 1 \quad (i = 1, ..., 11),$$
 (3.1.10)

где:

$$I_{1} = \frac{\partial_{1}}{\partial_{3}}, I_{2} = \frac{\partial_{2}}{\partial_{3}}, I_{3} = E\frac{\partial_{3}u_{1}}{\sigma_{23}}, I_{4} = E\frac{\partial_{3}u_{2}}{\sigma_{23}}, I_{5} = E\frac{\partial_{3}u_{3}}{\sigma_{23}}$$
(3.1.11)  

$$I_{6} = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{23}}, I_{7} = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{23}}, I_{8} = \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{23}}, I_{9} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}}, I_{10} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}}, I_{11} = \sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{\partial_{t}}{\partial_{3}}$$
(3.1.12)  

$$\alpha_{1} = \beta_{1} - \beta_{3}, \alpha_{2} = \beta_{2} - \beta_{3}, \alpha_{3} = \beta_{3} + \beta_{4} - \beta_{12} + \beta_{13}, \alpha_{4} = \beta_{3} + \beta_{5} - \beta_{12} + \beta_{13}$$
(3.1.12)  

$$\alpha_{1} = \beta_{1} - \beta_{3}, \alpha_{2} = \beta_{2} - \beta_{3}, \alpha_{3} = \beta_{3} + \beta_{4} - \beta_{12} + \beta_{13}, \alpha_{4} = \beta_{3} + \beta_{5} - \beta_{12} + \beta_{13}$$
(3.1.12)

 $\alpha_5 = \beta_3 + \beta_6 - \beta_{12} + \beta_{13}, \ \alpha_6 = \beta_7 - \beta_{12}, \ \alpha_7 = \beta_8 - \beta_{12}, \ \alpha_8 = \beta_9 - \beta_{12}, \ \alpha_9 = \beta_{10} - \beta_{12} \\ \alpha_{10} = \beta_{11} - \beta_{12}, \ \alpha_{11} = \beta_{15} - \beta_3 - 0.5\beta_{13} + 0.5\beta_{14}$ 

В соответствии с применяемым методом количество подлежащих оценке величин снизилось на число, равное размерности допускаемой исходными уравнениями (3.1.1) группы растяжений. Оцениваются не исходные величины, входящие в (3.1.1), а инварианты четырехпараметрической группы растяжений (3.1.4),...,(3.1.7).

Для того, чтобы не переходить в уравнениях (3.1.1) к инвариантам, используем произвольность параметров  $\gamma_1,...,\gamma_4$  и подберем их значения так, чтобы в результате преобразований (3.1.8) оставались неизменными величины  $\partial_3$ ,  $\sigma_{23}$ , E, G и р. При этом в каждом из инвариантов (3.1.11) остается только по одной величине, подвергаемой растяжению. В соответствии с поставленной целью имеем:

$$\begin{split} &\gamma_{1} = -\beta_{12} + \beta_{13}, \ \gamma_{2} = -\beta_{3}, \ \gamma_{3} = -\beta_{13}, \ \gamma_{4} = \beta_{13} - \beta_{14} \\ & \text{(3.1.13)} \\ & \text{B результате преобразования (3.1.8) примут вид:} \\ &\partial_{1} = \delta^{\alpha_{1}}\partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} = \delta^{\alpha_{2}}\partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} = \partial_{3}^{*}, \ u_{1} = \delta^{\alpha_{3}}u_{1}^{*}, \ u_{2} = \delta^{\alpha_{4}}u_{2}^{*}, \ u_{3} = \delta^{\alpha_{5}}u_{3}^{*} \\ &\sigma_{11} = \delta^{\alpha_{6}}\sigma_{11}^{*}, \ \sigma_{22} = \delta^{\alpha_{7}}\sigma_{22}^{*}, \ \sigma_{33} = \delta^{\alpha_{8}}\sigma_{33}^{*}, \ \sigma_{12} = \delta^{\alpha_{9}}\sigma_{12}^{*}, \ \sigma_{13} = \delta^{\alpha_{10}}\sigma_{13}^{*}, \ \sigma_{23} = \sigma_{23}^{*} \\ & \text{E} = \text{E}^{*}, \ \text{G} = \text{G}^{*}, \ \rho = \rho^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{\alpha_{11}}\partial_{t}^{*} \end{split}$$

с прежними значениями  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$  (3.1.12).

Преобразования (3.1.14) эквивалентны преобразованиям (3.1.8) и (3.1.10); соотношения  $I_i^* \sim 1$  удобнее записать в форме:

$$\partial_i^* \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t^*; \ E \partial_i^* u_j^* \sim \sigma_{lm}^* \quad (i, j, l, m = 1, 2, 3)$$
(3.1.15)

## 3.2. ПОИСК ПАРАМЕТРОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Перейдем к поиску введенных в предыдущем параграфе параметров  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$ . Выпишем показатели тех степеней  $\delta$ , которые приобретают, после преобразований (3.1.17), уравнения (3.1.1):

$$\begin{array}{l} \alpha_{1} + \alpha_{6}, \ \alpha_{2} + \alpha_{9}, \ \alpha_{10}, \ \alpha_{3} + 2\alpha_{11}; \quad \alpha_{1} + \alpha_{3}, \ \alpha_{6}, \ \alpha_{7}, \ \alpha_{8} \\ \alpha_{1} + \alpha_{9}, \ \alpha_{2} + \alpha_{7}, \ 0, \ \alpha_{4} + 2\alpha_{11}; \quad \alpha_{2} + \alpha_{4}, \ \alpha_{7}, \ \alpha_{6}, \ \alpha_{8} \\ \alpha_{1} + \alpha_{10}, \ \alpha_{2}, \ \alpha_{8}, \ \alpha_{5} + 2\alpha_{11}; \quad \alpha_{5}, \ \alpha_{8}, \ \alpha_{6}, \ \alpha_{7} \\ \alpha_{1} + \alpha_{4}, \ \alpha_{2} + \alpha_{3}, \ \alpha_{9}; \quad \alpha_{1} + \alpha_{5}, \ \alpha_{3}, \ \alpha_{10}; \quad \alpha_{2} + \alpha_{5}, \ \alpha_{4}, \ 0 \end{array}$$

$$(3.2.1)$$

Будем подбирать значения  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$  вновь исходя из критерия минимального упрощения, то есть требуя, чтобы упрощенная система уравнений содержала возможно больше членов. Используем при этом опыт, полученный в предыдущих главах. Вначале приравняем попарно всеми возможными способами показатели степени  $\delta$ , соответствующие членам каждого из исходных уравнений; получающиеся уравнения дополним неравенствами, означающими, что два равных показателя степени не превосходят остальных показателей, соответствующих тому же уравнению. Выполняя эту процедуру при помощи (3.2.1) получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_{1} - \alpha_{2} + \alpha_{6} - \alpha_{9} &= 0, \ \alpha_{2} + \alpha_{9} - \alpha_{10} \leq 0, \ \alpha_{2} - \alpha_{3} + \alpha_{9} - 2\alpha_{11} \leq 0 \\ \alpha_{1} + \alpha_{6} - \alpha_{10} &= 0, \ -\alpha_{2} - \alpha_{9} + \alpha_{10} \leq 0, \ -\alpha_{3} + \alpha_{10} - 2\alpha_{11} \leq 0 \\ \alpha_{1} - \alpha_{3} + \alpha_{6} - 2\alpha_{11} &= 0, \ -\alpha_{2} + \alpha_{3} - \alpha_{9} + 2\alpha_{11} \leq 0, \ \alpha_{3} - \alpha_{10} + 2\alpha_{11} \leq 0 \\ \alpha_{2} + \alpha_{9} - \alpha_{10} &= 0, \ -\alpha_{1} - \alpha_{6} + \alpha_{10} \leq 0, \ -\alpha_{3} + \alpha_{10} - 2\alpha_{11} \leq 0 \\ \alpha_{2} - \alpha_{3} + \alpha_{9} - 2\alpha_{11} &= 0, \ -\alpha_{1} + \alpha_{3} - \alpha_{6} + 2\alpha_{11} \leq 0, \ \alpha_{3} - \alpha_{10} + 2\alpha_{11} \leq 0 \\ \alpha_{3} - \alpha_{10} + 2\alpha_{11} &= 0, \ -\alpha_{1} - \alpha_{6} + \alpha_{10} \leq 0, \ -\alpha_{2} - \alpha_{9} + \alpha_{10} \leq 0 \end{aligned}$$
(3.2.2)

Здесь выписаны только соотношения, отвечающие первому из уравнений (3.1.1); всего получается сорок пять уравнений, сопровождаемых неравенствами.

Если выбрать из сорока пяти уравнений (3.2.2) любые одиннадцать линейно независимых уравнений, то в силу их однородности, они дадут нулевые значения параметров α<sub>1</sub>,...,α<sub>11</sub>. При этом удовлетворяются все сорок пять уравнений (3.2.2) вместе с сопровождающими их неравенствами, а веса всех членов каждого из уравнений (3.1.1) будут одинаковыми. Если выбрать любые десять линейно независимых уравнений, то, решая их, можно найти значения  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$ , определенные с точностью до общего множителя. Эти уравнения могут быть несовместимы в силу сопровождающих их неравенств, то есть может оказаться, что часть из неравенств не выполняется при любом знаке общего множителя. Поэтому будем рассматривать только совместимые в указанном смысле десятки уравнений. Выбирая знак общего множителя так, чтобы удовлетворялись одновременно все сопровождающие уравнения неравенства, получаем в итоге, что каждой такой десятке соответствует однопараметрическое семейство величин α<sub>1</sub>,...,α<sub>11</sub>, задающее какой-то луч, выходящий из начала координат в пространстве α<sub>1</sub>,...,α<sub>11</sub>. Это семейство и будем рассматривать, как удовлетворяющее критерию минимального упрощения исходных уравнений.

Одновременно найденное семейство величин  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$  задает однопараметрическую подгруппу растяжений вида (3.1.17), относительно которой будет инвариантна упрощенная система уравнений, если в каждом из уравнений (3.1.1) оставить члены, получающие после преобразований (3.1.17) одинаковые (наименьшие) степени  $\delta$  и отбросить остальные члены.

Формально количество способов, которыми можно выбрать десять уравнений из сорока пяти, очень велико ( $C_{45}^{10} = 3190187286$ ). Однако на самом деле это количество резко уменьшается по следующим причинам. Вопервых, многие десятки будут содержать линейно зависимые уравнения; вовторых, они могут быть несовместимыми в силу сопровождающих уравнения неравенств; в-третьих, одно и то же семейство величин  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$  может находиться как решение различных десяток уравнений, удовлетворяющих всем описанным выше требованиям.

В итоге оказывается, что количество различных однопараметрических семейств величин  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$ , находимых изложенным способом, относительно невелико. Отыскание таких семейств производилось при помощи ЭВМ и было получено триста девятнадцать вариантов.

Однако и это число может быть значительно уменьшено перед началом Система уравнений содержательного анализа. (3.1.1)инвариантна относительно произвольной перестановки индексов 1, 2, 3. В то же время для упрощенных уравнений перестановки индексов 1, 2, 3 приводят к каким-то новым системам, формально отличающимся от исходной. Однако очевидно, отличие действительно только формальное, что ЭТО на **v**ровне переобозначения переменных. Объединяя подобные, отличающиеся только перестановкой индексов 1, 2, 3, упрощенные уравнения, объединим в наборы и соответствующие семейства величин  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$ .

В итоге получается уже только семьдесят семь наборов, подлежащих содержательному анализу. Подробное изучение всех полученных вариантов может составить предмет отдельного объемного исследования. Ниже будут проанализированы только некоторые, наиболее интересные, результаты. Здесь отметим в заключение, что поскольку описанная процедура дает значения параметров  $\alpha_1, ..., \alpha_{11}$  с точностью до произвольного неотрицательного общего множителя, ЭВМ дает наименьшие по модулю целочисленные значения этих параметров.

### 3.3. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Повторяя порядок действий, описанный для уравнения Клейна-Гордона, представим все искомые функции в виде рядов:

$$u_{i} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{i}^{k}, \ \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ij}^{k} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$
(3.3.1)

Выполним, вместо преобразований (3.1.14), преобразования:

$$\partial_{1} = \delta^{\alpha_{1}} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} = \delta^{\alpha_{2}} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} = \partial_{3}^{*}, \ u_{1}^{k} = \delta^{\alpha_{3}+k-1} u_{1}^{k*}, \ u_{2}^{k} = \delta^{\alpha_{4}+k-1} u_{2}^{k*}$$
(3.3.2)  
$$u_{3}^{k} = \delta^{\alpha_{5}+k-1} u_{3}^{k*}, \ \sigma_{11}^{k} = \delta^{\alpha_{6}+k-1} \sigma_{11}^{k*}, \ \sigma_{22}^{k} = \delta^{\alpha_{7}+k-1} \sigma_{22}^{k*}, \ \sigma_{33}^{k} = \delta^{\alpha_{8}+k-1} \sigma_{33}^{k*}$$

 $\sigma_{12}^{k} = \delta^{\alpha_{9}+k-1}\sigma_{12}^{k*}, \ \sigma_{13}^{k} = \delta^{\alpha_{10}+k-1}, \ \sigma_{23}^{k} = \delta^{k-1}\sigma_{23}^{k*}, \ E = E^{*}, \ G = G^{*}, \ \rho = \rho^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{\alpha_{11}}\partial_{t}^{*}$ и потребуем, вместо (3.1.15), справедливости соотношений:

$$\partial_{i}^{*} \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_{t}^{*}, \ E \partial_{i}^{*} u_{j}^{k*} \sim \sigma_{lm}^{k*} \sim \sigma_{23}^{l*} \quad (i, j, l, m = 1, 2, 3; \ k = 1, 2, ...)$$
 (3.3.3)

Тогда ряды (3.3.1) примут вид:

$$u_{1} = \delta^{\alpha_{3}} \sum_{i=1}^{\infty} u_{1}^{k*} \delta^{k-1}, \dots, \sigma_{13} = \delta^{\alpha_{10}} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{13}^{k*} \delta^{k-1}, \ \sigma_{23} = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{23}^{k*} \delta^{k-1}$$
(3.3.4)

Здесь, в силу (3.3.3), коэффициенты при различных степенях формально введенного малого параметра δ<1 есть величины одного порядка.

Подставим (3.3.1) в (3.1.1), выполним преобразования (3.3.2) и произведем расщепление по одинаковым степеням б, соответствующее заданным  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$ , получая вместо (3.1.1) бесконечную некоторым рекуррентную систему уравнений. Эта система инвариантна относительно преобразований (3.3.2), поскольку процедура расщепления объединяет в каждое из уравнений системы члены, приобретающие после преобразований (3.3.2)одинаковые степени δ. Значит, снова дополнительную однопараметрическую подгруппу растяжений приобретают не только уравнения, становящиеся теперь уравнениями упрощенные первого приближения, но и бесконечные рекуррентные системы, строящиеся на основе таких уравнений.

Возвращаясь от преобразованных переменных к исходным получаем, что решение ищется в виде рядов (3.3.1), члены которых удовлетворяют

соответствующей рекуррентной системе уравнений, и при этом ни ряды ни уравнения не содержат формально введенного малого параметра δ.

Рекуррентные системы уравнений сохраняют инвариантность и относительно преобразований типа (3.1.4),...,(3.1.7), которые теперь принимают вид:

$$\partial_i = \partial_i^*, \ u_i^k = \delta^{\gamma_1} u_i^{k^*}, \ \sigma_{ij}^k = \delta^{\gamma_1} \sigma_{ij}^{k^*}, \ E = E^*, \ G = G^*, \ \rho = \rho^*, \ \partial_t = \partial_t^*$$
(3.3.5)

$$\partial_{i} = \delta^{\gamma_{2}} \partial_{i}^{*}, \ u_{i}^{k} = \delta^{-\gamma_{2}} u_{i}^{k*}, \ \sigma_{ij}^{k} = \sigma_{ij}^{k*}, \ E = E^{*}, \ G = G^{*}, \ \rho = \rho^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{\gamma_{2}} \partial_{t}^{*} \quad (3.3.6)$$

$$\partial_{i} = \partial_{i}^{*}, \ u_{i}^{k} = u_{i}^{k^{*}}, \ \sigma_{ij}^{k} = \delta^{\gamma_{3}}\sigma_{ij}^{k^{*}}, \ E = \delta^{\gamma_{3}}E^{*}, \ G = \delta^{\gamma_{3}}G^{*}, \ \rho = \delta^{\gamma_{3}}\rho^{*}, \ \partial_{t} = \partial_{t}^{*} \ (3.3.7)$$

$$\partial_{i} = \partial_{i}^{*}, \ u_{i}^{k} = u_{i}^{k^{*}}, \ \sigma_{ij}^{k} = \sigma_{ij}^{k^{*}}, \ E = E^{*}, \ G = G^{*}, \ \rho = \delta^{\gamma_{4}}\rho^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{-0.5\gamma_{4}}\partial_{t}^{*} \ (3.3.8)$$

$$(i, j = 1, 2, 3; \ k = 1, 2, ...)$$

#### 3.4. ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассмотрим следующий набор параметров:  $\alpha_1=1$ ,  $\alpha_2=1$ ,  $\alpha_3=-2$ ,  $\alpha_4=-2$ ,  $\alpha_5=-1$ ,  $\alpha_6=-1$ ,  $\alpha_7=-1$ ,  $\alpha_8=1$ ,  $\alpha_9=-1$ ,  $\alpha_{10}=0$ ,  $\alpha_{11}=1$ . Ему отвечает следующий вид таблицы (3.2.1):

Таблица (3.4.1) показывает, что различные показатели степени, соответствующие любому из уравнений (3.1.1), отличаются на два. Следовательно, для того, чтобы добиться разницы показателей на единицу, нужно уменьшить значения, соответствующие семейству 4, вдвое, получая:  $\alpha_1=0.5$ ,  $\alpha_2=0.5$ ,  $\alpha_3=-1$ ,  $\alpha_4=-1$ ,  $\alpha_5=-0.5$ ,  $\alpha_6=-0.5$ ,  $\alpha_7=-0.5$ ,  $\alpha_8=0.5$ ,  $\alpha_9=-0.5$ ,  $\alpha_{10}=0$ ,  $\alpha_{11}=0.5$ .  $\alpha_5=-0.5$ ,  $\alpha_6=-0.5$ , При таких значениях параметров отбрасываемые в первом приближении члены уравнений (3.1.1) будут иметь, по сравнению с оставленными членами, порядок  $\delta = \varepsilon$ .

Выпишем соответствующие упрощенные уравнения. В соответствии с таблицей (3.4.1) имеем:

$$\partial_{1}\sigma_{11}^{1} + \partial_{2}\sigma_{12}^{1} + \partial_{3}\sigma_{13}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{1}^{1} = 0; \quad E\partial_{1}u_{1}^{1} = \sigma_{11}^{1} - \nu\sigma_{22}^{1}$$

$$\partial_{1}\sigma_{12}^{1} + \partial_{2}\sigma_{22}^{1} + \partial_{3}\sigma_{23}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{2}^{1} = 0; \quad E\partial_{2}u_{2}^{1} = \sigma_{22}^{1} - \nu\sigma_{11}^{1}$$

$$\partial_{1}\sigma_{13}^{1} + \partial_{2}\sigma_{23}^{1} + \partial_{3}\sigma_{33}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3}^{1} = 0; \quad E\partial_{3}u_{3}^{1} = -(\sigma_{11}^{1} + \sigma_{22}^{1})$$

$$G(\partial_{1}u_{2}^{1} + \partial_{2}u_{1}^{1}) = \sigma_{12}^{1}; \quad \partial_{3}u_{1}^{1} = 0; \quad \partial_{3}u_{2}^{1} = 0$$

$$(3.4.2)$$

Здесь верхний индекс 1 у искомых функций означает, что рассматриваются первые слагаемые рядов (3.3.1), а упрощенные уравнения (3.4.2) могут, при необходимости, служить уравнениями первого приближения при построении рекуррентной системы уравнений для отыскания последующих членов ряда (3.3.1).

Добавочная подгруппа растяжений (3.3.2) имеет, в данном случае, вид (k = 1):

$$\begin{split} \partial_{1} &= \delta^{0.5} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} &= \delta^{0.5} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} &= \partial_{3}^{*}, \ u_{1}^{1} &= \delta^{-1} u_{1}^{1*}, \ u_{2}^{1} &= \delta^{-1} u_{2}^{1*}, \ u_{3}^{1} &= \delta^{-0.5} u_{3}^{1*} \quad (3.4.3) \\ \sigma_{11}^{1} &= \delta^{-0.5} \sigma_{11}^{1*}, \ \sigma_{22}^{1} &= \delta^{-0.5} \sigma_{22}^{1*}, \ \sigma_{33}^{1} &= \delta^{0.5} \sigma_{33}^{1*}, \ \sigma_{12}^{1} &= \delta^{-0.5} \sigma_{12}^{1*}, \ \sigma_{13}^{1} &= \sigma_{13}^{1*}, \ \sigma_{23}^{1} &= \sigma_{23}^{1*} \\ E &= E^{*}, \ G &= G^{*}, \ \rho &= \rho^{*}, \ \partial_{t} &= \delta^{0.5} \partial_{t}^{*} \end{split}$$

Асимптотические соотношения (3.3.3) принимают, в силу (3.4.3), форму:

$$\delta^{-0.5}\partial_1 \sim \delta^{-0.5}\partial_2 \sim \partial_3 \sim \delta^{-0.5} \sqrt{\frac{\rho}{E}}\partial_t$$
(3.4.4)

 $\delta E \partial_3 u_1^1 \sim \delta E \partial_3 u_2^1 \sim \delta^{0.5} E \partial_3 u_3^1 \sim \delta^{0.5} \sigma_{11}^1 \sim \delta^{0.5} \sigma_{22}^1 \sim \delta^{-0.5} \sigma_{33}^1 \sim \delta^{0.5} \sigma_{12}^1 \sim \sigma_{13}^1 \sim \sigma_{23}^1$ Исключая в (3.4.4) б, получаем:

$$\delta \sim \left(\partial_1 \partial_3^{-1}\right)^2 < 1 \tag{3.4.5}$$

$$\partial_1 \sim \partial_2 \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t$$
 (3.4.6)

 $E\partial_{1}u_{1}^{1} \sim E\partial_{2}u_{2}^{1} \sim \sigma_{11}^{1} \sim \sigma_{22}^{1} \sim \sigma_{12}^{1} \sim \partial_{1}^{-1}\partial_{3}\sigma_{13}^{1} \sim \partial_{2}^{-1}\partial_{3}\sigma_{23}^{1} \sim E\partial_{3}u_{3}^{1} \sim \partial_{1}^{-2}\partial_{3}^{2}\sigma_{33}^{1} \qquad (3.4.7)$ 

Легко видеть, что если в каждом из уравнений (3.4.2) все члены есть величины одного порядка, то соотношения (3.4.7) удовлетворяются автоматически, в силу уравнений (3.4.2). Соотношение (3.4.5) показывает, что отброшенные в (3.4.2) члены есть величины порядка  $(\partial_1 \partial_3^{-1})^2$ . Следовательно, для выяснения асимптотической обоснованности решения уравнений (3.4.2) достаточно проверять справедливость условия (3.4.5) с учетом (3.4.6).

Представим решение уравнений (3.4.2) в форме:

$$u_{1}^{1} = u_{1,1}^{1}; \ u_{2}^{1} = u_{2,1}^{1}; \ \sigma_{11}^{1} = \sigma_{11,1}^{1}; \ \sigma_{22}^{1} = \sigma_{22,1}^{1}; \ \sigma_{12}^{1} = \sigma_{12,1}^{1};$$
(3.4.8)  
$$\sigma_{13}^{1} = x_{3}\sigma_{13,1}^{1}; \ \sigma_{23}^{1} = x_{3}\sigma_{23,1}^{1}; \ u_{3}^{1} = x_{3}u_{3,1}^{1}, \ \sigma_{33}^{1} = \frac{(x_{3})^{2}}{2}\sigma_{33,1}^{1} + \sigma_{33,2}^{1}$$

Здесь удержаны только те константы интегрирования по  $x_3$ , которые порождают напряженно-деформированное состояние, симметричное относительно плоскости  $x_3 = 0$ . Все функции в правых частях выражений (3.4.8) зависят только от  $x_1, x_2, t$ ; зависимость от  $x_3$  выписана явно.

Подставляя (3.4.8) в (3.4.2) имеем:

$$\begin{aligned} \partial_{1}\sigma_{11,1}^{1} + \partial_{2}\sigma_{12,1}^{1} + \sigma_{13,1}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{1,1}^{1} &= 0; \quad E\partial_{1}u_{1,1}^{1} = \sigma_{11,1}^{1} - \nu\sigma_{22,1}^{1} \\ \partial_{1}\sigma_{12,1}^{1} + \partial_{2}\sigma_{22,1}^{1} + \sigma_{23,1}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{2,1}^{1} &= 0; \quad E\partial_{1}u_{2,1}^{1} = \sigma_{22,1}^{1} - \nu\sigma_{11,1}^{1} \\ \partial_{1}\sigma_{13,1}^{1} + \partial_{2}\sigma_{23,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3,1}^{1} &= 0; \quad Eu_{3,1}^{1} = -\nu\left(\sigma_{11,1}^{1} + \sigma_{22,1}^{1}\right) \\ G\left(\partial_{1}u_{2,1}^{1} + \partial_{2}u_{1,1}^{1}\right) &= \sigma_{12,1}^{1} \end{aligned}$$
(3.4.9)

Дополним уравнения (3.4.9) граничными условиями. Пусть при x<sub>3</sub> = h заданы касательные и нормальные напряжения:

$$\sigma_{13}^{1} = h\sigma_{13,1}^{1} = \tau_{1}^{+}; \ \sigma_{23}^{1} = h\sigma_{23,1}^{1} = \tau_{2}^{+}; \ \sigma_{33}^{1} = \frac{h^{2}}{2}\sigma_{33,1}^{1} + \sigma_{33,2}^{1} = q^{+}$$
(3.4.10)

Тогда при  $x_3 = -h$  будет  $\tau_1^- = -\tau_1^+, \tau_2^- = -\tau_2^+, q^- = q^+$ . Введем обозначения:

Здесь  $v_1, v_2$ - постоянные по толщине слоя  $-h \le x_3 \le h$  перемещения в направлениях осей  $x_1$  и  $x_2$ ;  $T_1, T_2, S$ - нормальные и касательное усилия;  $\tau_1, \tau_2$  - суммарные по двум лицевым поверхностям слоя касательные напряжения в направлениях осей  $x_1$  и  $x_2$ ; p - нормальное напряжение, растягивающее или сжимающее слой по толщине; перемещение V характеризует изменение толщины слоя, одинаковое по обе стороны от срединной поверхности  $x_3 = 0$ .

С учетом (3.4.11) уравнения (3.4.9) и граничные условия (3.4.10) дают:

$$\partial_{1}T_{1} + \partial_{2}S - \rho_{1}\partial_{t}^{2}v_{1} = -\tau_{1}; \ \partial_{1}S + \partial_{2}T_{2} - \rho_{1}\partial_{t}^{2}v_{2} = -\tau_{2}$$
(3.4.12)  
$$T_{1} = B(\partial_{1}v_{1} + v\partial_{2}v_{2}); \ T_{2} = B(\partial_{2}v_{2} + v\partial_{1}v_{1}); \ S = \frac{1 - v}{2}B(\partial_{1}v_{2} + \partial_{2}v_{1})$$
$$V = -\frac{v}{2hE}(T_{1} + T_{2}); \ \sigma_{33,1}^{1} = \rho\partial_{t}^{2}V - \frac{1}{2h}(\partial_{1}\tau_{1} + \partial_{2}\tau_{2}); \ \sigma_{33,2}^{1} = p - \frac{h^{2}}{2}\sigma_{33,1}^{1}$$
(3.4.13)

Уравнения (3.4.12) являются стандартными динамическими уравнениями обобщенного плоского напряженного состояния. Соотношения (3.4.13) задают функции, которые обычно не учитываются при изучении обобщенного плоского напряженного состояния, но которые играют, тем не менее, в некоторых случаях достаточно важную роль. Особенно это проявится ниже при сравнении данных результатов с уточненными уравнениями динамики плоского слоя.

Вернемся к асимптотическим оценкам. При решении уравнений (3.4.2) почти во всех случаях интегрирование по  $x_3$ , то есть применение оператора  $\partial_3^{-1}$ , сводилось к умножению на  $x_3$ . Поэтому вместо (3.4.5) можно записать  $\delta \sim (x_3 \partial_1)^2 < 1$ . Для слоя  $-h \le x_3 \le h$  величина  $x_3$  не превосходит по модулю h; заменяя  $x_3$  на его максимальное значение, имеем:

$$\delta \sim (h\partial_1)^2 < 1 \tag{3.4.14}$$

Рассмотрим отдельно выражение для  $\sigma_{33}^1$  в (3.4.8). Здесь появляется добавочная константа интегрирования  $\sigma_{33,2}^1$  и применение оператора  $\partial_3^{-1}$ , вообще говоря, не эквивалентно умножению на x<sub>3</sub>. Асимптотические оценки

вида (3.4.7) соответствуют естественному процессу интегрирования по  $x_3$  уравнений (3.4.2) и не накладывают никаких ограничений на возникающие в этом процессе константы интегрирования; поэтому величина  $\sigma_{33,2}^1$  может быть, казалось бы, функцией от  $x_1, x_1, t$  любого порядка. Однако уравнения (3.4.2) строились при условии, что напряжение  $\sigma_{33}^1$  на порядок меньше напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ . В выражении для  $\sigma_{33}^1$  из (3.4.8) этому условию удовлетворяет первое слагаемое, в соответствии со значением функции  $\sigma_{33,1}^1$ , находимой из уравнений (3.4.9). Следовательно, чтобы не нарушать условий, при которых строились уравнения (3.4.2), нужно требовать выполнения соотношения:

$$\sigma_{33,2}^{l} \sim \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{33,1}^{l} \sim \frac{h^2}{2} \sigma_{33,1}^{l}$$
(3.4.15)

В силу третьего из граничных условий (3.4.10) можно выразить  $\sigma_{33,2}^1$  через  $\sigma_{33,1}^1$  и записать выражение для  $\sigma_{33}^1$  из (3.4.8) в виде:

$$\sigma_{33}^{1} = q^{+} - \frac{1}{2} \left[ h^{2} - (x_{3})^{2} \right] \sigma_{33,1}^{1}$$
(3.4.16)

Тогда второе слагаемое в этом выражении для  $\sigma_{33}^1$  автоматически удовлетворяет асимптотическим оценкам; остается потребовать, чтобы этим оценкам удовлетворяло и первое слагаемое, то есть нормальное напряжение на лицевой поверхности слоя. Для этого удобнее всего сравнить его с касательными напряжениями на той же поверхности. В силу (3.4.10) и (3.4.9) получаем, что должны быть справедливы соотношения  $q^+ \leq \delta^{0.5} \tau_1 \sim h \partial_1 \tau_1^+$ или, с учетом обозначений (3.4.11),

 $\mathbf{p} \le \mathbf{h}\partial_1 \mathbf{\tau}_1 \sim \mathbf{h}\partial_2 \mathbf{\tau}_2 \tag{3.4.17}$ 

Асимптотические оценки (3.4.17) накладывают ограничения на граничные условия и дополняют оценку (3.4.14), носящую локальный характер.

Перепишем в заключение эти соотношения в более удобной форме. Вернемся еще раз к соотношениям (3.4.6). Здесь указана эквивалентность трех операторов, но это еще не означает равенства. В (3.4.5) и (3.4.14) использован только один из них, что нарушает симметрию и может привести к неверным асимптотическим оценкам (например, при  $\partial_2 > \partial_1$ ). Чтобы устранить этот недостаток, перепишем (3.4.14) в виде:

$$\delta \sim (hD)^2 < 1,$$
 (3.4.18)

где:

$$\mathbf{D} = \max\left(\partial_1, \partial_2, \sqrt{\frac{\rho}{E}}\partial_t\right) \tag{3.4.19}$$

Аналогично, и соотношения (3.4.17) лучше записать в виде:

#### 3.5. УТОЧНЕННОЕ ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассмотрим набор параметров, отличающийся от рассмотренного в предыдущем параграфе только значением параметра  $\alpha_8 = -1$ . Этому набору отвечает следующий вид таблицы (3.2.1):

Уменьшая значения параметров вдвое получаем:  $\alpha_1=0.5$ ,  $\alpha_2=0.5$ ,  $\alpha_3=-1$ ,  $\alpha_4=-1$ ,  $\alpha_5=-0.5$ ,  $\alpha_6=-0.5$ ,  $\alpha_7=-0.5$ ,  $\alpha_8=-0.5$ ,  $\alpha_9=-0.5$ ,  $\alpha_{10}=0$ ,  $\alpha_{11}=0.5$  Смысл этого уменьшения тот же, что и в предыдущем параграфе. Значение параметра  $\alpha_8$ , равное значениям параметров  $\alpha_6$  и  $\alpha_7$ , показывает, что в данном случае величина напряжения  $\sigma_{33}$  в первом приближении имеет тот же порядок, что и величины напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ .

Выполняя, в соответствии с процедурой, описанной в параграфе 3.3, расщепление по одинаковым степеням  $\delta$ , соответствующее приведенным значениям параметров  $\alpha_1, ..., \alpha_{11}$ , запишем все уравнения первого приближения и одно из уравнений второго приближения, получая:

$$\begin{aligned} \partial_{1}\sigma_{11}^{1} + \partial_{2}\sigma_{12}^{1} + \partial_{3}\sigma_{13}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{1}^{1} &= 0; \quad E\partial_{1}u_{1}^{1} = \sigma_{11}^{1} - \nu\left(\sigma_{22}^{1} + \sigma_{33}^{1}\right) \quad (3.5.2) \\ \partial_{1}\sigma_{12}^{1} + \partial_{2}\sigma_{22}^{1} + \partial_{3}\sigma_{23}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{2}^{1} &= 0; \quad E\partial_{2}u_{2}^{1} &= \sigma_{22}^{1} - \nu\left(\sigma_{11}^{1} + \sigma_{33}^{1}\right) \\ G\left(\partial_{1}u_{2}^{1} + \partial_{2}u_{1}^{1}\right) &= \sigma_{12}^{1}; \quad E\partial_{3}u_{3}^{1} &= \sigma_{33}^{1} - \nu\left(\sigma_{11}^{1} + \sigma_{22}^{1}\right) \\ \partial_{3}\sigma_{33}^{1} &= 0; \quad \partial_{3}u_{1}^{1} &= 0; \quad \partial_{3}u_{2}^{1} &= 0; \quad \partial_{1}\sigma_{13}^{1} + \partial_{2}\sigma_{23}^{1} + \partial_{3}\sigma_{33}^{2} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3}^{1} &= 0 \\ \text{Добавочная подгруппа растяжений (3.3.2) здесь будет:} \\ \partial_{1} &= \delta^{0.5}\partial_{1}^{*}, \quad \partial_{2} &= \delta^{0.5}\partial_{2}^{*}, \quad \partial_{3} &= \partial_{3}^{*}, \quad u_{1}^{1} &= \delta^{-1}u_{1}^{1*}, \quad u_{2}^{1} &= \delta^{-1}u_{2}^{1*}, \quad u_{3}^{1} &= \delta^{-0.5}u_{3}^{1*} (3.5.3) \\ \sigma_{11}^{1} &= \delta^{-0.5}\sigma_{11}^{1*}, \quad \sigma_{22}^{1} &= \delta^{-0.5}\sigma_{22}^{1*}, \quad \sigma_{33}^{1} &= \delta^{-0.5}\sigma_{33}^{1*}, \quad \sigma_{33}^{2} &= \delta^{0.5}\sigma_{33}^{2*}, \quad \sigma_{12}^{1} &= \delta^{-0.5}\sigma_{12}^{1*} \\ \sigma_{13}^{1} &= \sigma_{13}^{1*}, \quad \sigma_{23}^{1} &= \sigma_{23}^{1*}, \quad E &= E^{*}, \quad G &= G^{*}, \quad \rho &= \rho^{*}, \quad \partial_{t} &= \delta^{0.5}\partial_{t}^{*} \end{aligned}$$

В соответствии с преобразованиями (3.5.3) асимптотические соотношения (3.3.3) принимают вид:

$$\begin{split} \delta^{-0.5}\partial_{1} &\sim \delta^{-0.5}\partial_{2} \sim \partial_{3} \sim \delta^{-0.5}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\partial_{t} \end{split} \tag{3.5.4} \\ \delta E \partial_{3}u_{1}^{1} &\sim \delta E \partial_{3}u_{2}^{1} \sim \delta^{0.5}E \partial_{3}u_{3}^{1} \sim \delta^{0.5}\sigma_{11}^{1} \sim \delta^{0.5}\sigma_{22}^{1} \sim \delta^{0.5}\sigma_{33}^{1} \sim \delta^{-0.5}\sigma_{33}^{2} \sim \\ &\sim \delta^{0.5}\sigma_{12}^{1} \sim \sigma_{13}^{1} \sim \sigma_{23}^{1} \\ \text{Исключая в (3.5.4) \delta получаем:} \\ \delta &\sim \left(\partial_{1}\partial_{3}^{-1}\right)^{2} < 1 \end{split} \tag{3.5.5}$$

$$\partial_1 \sim \partial_2 \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t$$
 (3.5.6)

$$E\partial_{1}u_{1}^{1} \sim E\partial_{2}u_{2}^{1} \sim \sigma_{33}^{1} \sim \sigma_{11}^{1} \sim \sigma_{22}^{1} \sim \sigma_{12}^{1} \sim \partial_{1}^{-1}\partial_{3}\sigma_{13}^{1} \sim \partial_{2}^{-1}\partial_{3}\sigma_{23}^{1} \sim (3.5.7)$$
  
  $\sim E\partial_{3}u_{3}^{1} \sim \partial_{1}^{-2}\partial_{3}^{2}\sigma_{33}^{2}$ 

При условии, что в каждом из уравнений (3.5.2) все члены имеют одинаковый порядок, соотношения (3.5.7) удовлетворяются автоматически. Поэтому асимптотическая обоснованность решений уравнений (3.5.2) проверяется, с учетом (3.5.6), по условию (3.5.5), которое показывает порядок отбрасываемых, в первом приближении, членов.

Будем разыскивать решение уравнений (3.5.2) в форме:

$$u_{1}^{1} = u_{1,1}^{1}, \ u_{2}^{1} = u_{2,1}^{1}, \ \sigma_{33}^{1} = \sigma_{33,1}^{1}, \ \sigma_{11}^{1} = \sigma_{11,1}^{1}, \ \sigma_{22}^{1} = \sigma_{22,1}^{1}, \ \sigma_{12}^{1} = \sigma_{12,1}^{1}$$
(3.5.8)  
$$\sigma_{13}^{1} = x_{3}\sigma_{13,1}^{1}, \ \sigma_{23}^{1} = x_{3}\sigma_{23,1}^{1}, \ u_{3}^{1} = x_{3}u_{3,1}^{1}, \ \sigma_{33}^{2} = \frac{(x_{3})^{2}}{2}\sigma_{33,1}^{2}$$

Здесь, при решении уравнений первого приближения в (3.5.2), удерживались только константы интегрирования, соответствующие симметричному  $x_{3} = 0$ относительно плоскости напряженнодеформированному состоянию. При решении единственного уравнения второго приближения новая константа интегрирования не вводилась. Если сложить результаты, полученные для напряжения  $\sigma_{33}$  в первом и втором приближениях, то зависимости искомых функций от х<sub>3</sub> получаются здесь точно такими же, как в (3.4.8). Разница между (3.4.8) и (3.5.8) только в последовательности нахождения слагаемых для  $\sigma_{33}$ . Однако, как будет видно ниже, эта разница приводит к существенному различию в окончательных результатах.

Подставляя (3.5.8) в (3.5.2) имеем:

$$G(\partial_{1}u_{2,1}^{1} + \partial_{2}u_{1,1}^{1}) = \sigma_{12,1}^{1}, \quad Eu_{3,1}^{1} = \sigma_{33,1}^{1} - \nu(\sigma_{11,1}^{1} + \sigma_{22,1}^{1})$$

$$(3.5.9)$$

$$\partial_{1}\sigma_{11,1}^{1} + \partial_{2}\sigma_{12,1}^{1} + \sigma_{13,1}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{1,1}^{1} = 0; \quad E\partial_{1}u_{1,1}^{1} = \sigma_{11,1}^{1} - \nu(\sigma_{22,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{1})$$

$$\partial_{1}\sigma_{12,1}^{1} + \partial_{2}\sigma_{22,1}^{1} + \sigma_{23,1}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{2,1}^{1} = 0; \quad E\partial_{2}u_{2,1}^{1} = \sigma_{22,1}^{1} - \nu(\sigma_{11,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{1})$$

$$\partial_{1}\sigma_{13,1}^{1} + \partial_{2}\sigma_{23,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{2} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3,1}^{1} = 0$$

Дополним эти уравнения граничными условиями при  $x_3 = h$ :

$$\sigma_{13} = h\sigma_{13,1}^{1} = \tau_{1}^{+}; \ \sigma_{23} = h\sigma_{23,1}^{1} = \tau_{2}^{+}, \ \sigma_{33} = \sigma_{33,1}^{1} + \frac{h^{2}}{2}\sigma_{33,1}^{2} = q^{+},$$
(3.5.10)

учитывая, что при  $x_3 = -h$  граничные условия симметричны:  $\tau_1^- = -\tau_1^+$ ;  $\tau_2^- = -\tau_2^+$ ;  $q^- = q^+$ .

Введем обозначения:

$$\begin{split} v_1 &= u_{1,1}^1; \ v_2 = u_{2,1}^1; \ T_1 = 2h\sigma_{11,1}^1; \ T_2 = 2h\sigma_{22,1}^1; \ S = 2h\sigma_{12,1}^1; \ K = 2h\sigma_{33,1}^1 \ (3.5.11) \\ V &= u_{3,1}^1; \ \tau_1 = 2\tau_1^+; \ \tau_2 = 2\tau_2^+; \ p = q^+; \ \rho_1 = 2h\rho \end{split}$$

Новым, по сравнению с (3.4.11), является здесь только обозначение для самоуравновешенного усилия К, действующего вдоль оси x<sub>3</sub>.

С учетом введенных обозначений уравнения (3.5.9) и граничные условия (3.5.10) дают:

$$\partial_{1}T_{1} + \partial_{2}S - \rho_{1}\partial_{t}^{2}v_{1} = -\tau_{1}; \quad 2hE\partial_{1}v_{1} = T_{1} - \nu(T_{2} + K)$$

$$\partial_{1}S + \partial_{2}T_{2} - \rho_{1}\partial_{t}^{2}v_{2} = -\tau_{2}; \quad 2hE\partial_{2}v_{2} = T_{2} - \nu(T_{1} + K); \quad 2hG(\partial_{1}v_{2} + \partial_{2}v_{1}) = S$$

$$(3.5.12)$$

$$2hEV = K - v(T_1 + T_2); \quad \frac{2}{h^2}K + \rho_1\partial_t^2V = \partial_1\tau_1 + \partial_2\tau_2 + \frac{4}{h}p$$

Уравнения (3.5.12) достаточно сильно отличаются от уравнений обобщенного плоского напряженного состояния (3.4.12), хотя, как уже отмечалось выше, законы изменений искомых функций по толщине слоя  $-h \le x_3 \le h$  остались здесь прежними. Основная разница заключается в том, что раньше напряженияе и перемещение  $\sigma_{33}$  и  $u_3$ , перпендикулярные срединной плоскости слоя  $x_3 = 0$ , не влияли на остальные искомые функции, определяясь задним числом из формул (3.4.13); теперь же эти величины образуют взаимосвязанную систему уравнений (3.5.12).

Более подробно следствия этой взаимосвязи будут изучены ниже, при решении конкретных задач, пока же отметим только то принципиальное обстоятельство, что уравнения (3.5.12), в отличие от уравнений (3.4.12), задают скорости распространения фронтов продольных и поперечных волн такими, же, как в соответствии с трехмерными уравнениями теории упругости.

Вернемся к асимптотическим оценкам. Так же, как в предыдущем параграфе, соотношение (3.5.5) удобнее записать, с учетом (3.5.6), в виде:

$$\delta \sim (hD)^2 < 1, \quad D = \max\left(\partial_1, \partial_2, \sqrt{\frac{\rho}{E}}\partial_t\right)$$
 (3.5.13)

Перейдем в (3.5.12) к безразмерным величинам:

$$\overline{T}_{1} = \frac{T_{1}}{B_{1}}; \ \overline{T}_{2} = \frac{T_{2}}{B_{1}}; \ \overline{S} = \frac{S}{B_{1}}; \ \overline{K} = \frac{K}{B_{1}}; \ \overline{x}_{1} = \frac{x_{1}}{2h}; \ \overline{x}_{2} = \frac{x_{2}}{2h}; \ \overline{v}_{1} = \frac{v_{1}}{2h}; \ \overline{v}_{2} = \frac{v_{2}}{2h} (3.5.14)$$

$$\overline{\tau}_{1} = \frac{2h}{B_{1}} \tau_{1}; \ \overline{\tau}_{2} = \frac{2h}{B_{2}} \tau_{2}; \ \overline{t} = \frac{\mathbf{a}_{p}}{2h} t; \ \overline{p} = \frac{16h}{B_{1}} p; \ B_{1} = \frac{2hE}{b}; \ b = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}$$

$$a_{p}^{2} = \frac{B_{1}}{\rho_{1}} = \frac{E}{\rho b}; \ a_{s}^{2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}; \ \overline{\partial}_{1} = \partial/\partial\overline{x}_{1}; \ \overline{\partial}_{2} = \partial/\partial\overline{x}_{2}; \ \overline{\partial}_{t} = \partial/\partial\overline{t}$$

Здесь  $a_{\rm p}$  – скорость распространения продольных упругих волн;  $a_{\rm s}$  – скорость распространения поперечных волн, отнесенная к **Q**<sub>p</sub>.

Поскольку в дальнейшем будем использовать только уравнения в безразмерных величинах, то можно, без риска путаницы, опустить над этими величинами черточки, получая:

$$\partial_1 T_1 + \partial_2 S - \partial_t^2 v_1 = -\tau_1; \quad b \partial_1 v_1 = T_1 - v (T_2 + K)$$
 (3.5.15)

$$\partial_1 \mathbf{S} + \partial_2 \mathbf{T}_2 - \partial_t^2 \mathbf{v}_2 = -\tau_2; \quad \mathbf{b} \partial_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{T}_2 - \mathbf{v} (\mathbf{T}_1 + \mathbf{K}); \quad a_s^2 (\partial_1 \mathbf{v}_2 + \partial_2 \mathbf{v}_1) = \mathbf{S}$$
  
$$\mathbf{b} \mathbf{V} = \mathbf{K} - \mathbf{v} (\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2); \quad \mathbf{8} \mathbf{K} + \partial_t^2 \mathbf{V} = \partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2 + \mathbf{p}$$

Асимптотические оценки (3.5.13) и (3.5.14) в безразмерных переменных примут вид:

$$\delta \sim D^{2} < 1; \quad D = \max(\partial_{1}, \partial_{2}, \partial_{1})$$

$$\tau \sim Dp \sim \delta^{0.5}p; \quad \tau = \max(\tau_{1}, \tau_{2})$$
(3.5.16)

Рассмотрим еще один вариант граничных условий на лицевых поверхностях, полагая в (3.5.10) вместо условия для  $\sigma_{33}$  кинематическое условие:

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{h}\mathbf{u}_{31}^1 = 0 \tag{3.5.17}$$

Тогда, в принятых обозначениях, будет V = 0 и уравнения (3.5.15) заменяются на:

$$\partial_{1}T_{1} + \partial_{2}S - \partial_{t}^{2}v_{1} = -\tau_{1}; \quad b\partial_{1}v_{1} = T_{1} - \nu(T_{2} + K)$$

$$\partial_{1}S + \partial_{2}T_{2} - \partial_{t}^{2}v_{2} = -\tau_{2}; \quad b\partial_{2}v_{2} = T_{2} - \nu(T_{1} + K)$$

$$a_{s}^{2}(\partial_{1}v_{2} + \partial_{2}v_{1}) = S; \quad K = \nu(T_{1} + T_{2})$$
(3.5.18)

Эти уравнения описывают движение плоского слоя, помещенного между двумя жесткими поверхностями. Как будет показано ниже, характер распространения упругих волн в соответствии с уравнениями (3.5.15), весьма существенно отличается от характера распространения волн в соответствии с уравнениями (3.5.18).

Остановимся еще, в заключение данного параграфа, на вопросе о граничных условиях, которые можно задавать на боковых поверхностях пластины при решении, с помощью полученных уравнений, краевых задач. Поскольку законы распределения по толщине пластины всех компонент напряженно-деформированного состояния в данном случае такие же, как в случае обобщенного плоского напряженного состояния и таковы же порядки по производным  $\partial_1$  и  $\partial_2$  дифференциальных уравнений, то естественно, что и все варианты граничных условий на боковых поверхностях остаются прежними. Таким образом, краевые задачи, с использованием вновь полученных уравнений, ставятся точно так же, как и при использовании уравнений обобщенного плоского напряженного состояния.

В начальных условиях имеется небольшое отличие. В новые уравнения входит вторая производная по времени  $\partial_t^2 V$ , отсутствовавшая в прежних уравнениях. Поэтому, добавочно к прежним начальным условиям (для перемещений  $v_1$  и  $v_2$ ), нужно задавать начальное значение  $V_0$  и начальную скорость  $V_0^{\bullet}$  и для функции V.

### 3.6. КЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим следующее семейство параметров:  $\alpha_1=1$ ,  $\alpha_2=1$ ,  $\alpha_3=-2$ ,  $\alpha_4=$ =-2,  $\alpha_5=-3$ ,  $\alpha_6=-1$ ,  $\alpha_7=-1$ ,  $\alpha_8=1$ ,  $\alpha_9=-1$ ,  $\alpha_{10}=0$ ,  $\alpha_{11}=2$ . Ему соответствует такой вид таблицы (3.2.1):

0,	0,	0,	2;	-1,	-1,	-1,	l			(3.6.1)
0,	0,	0,	2;	-1,	-1,	-1,	L			
1	1	1	1;	-3,	1,	-1, -	1			
-1,	-1,	-1;		-2, -2,	0;	-2	2,	-2,	0	

Эта таблица показывает необходимость уменьшения вдвое параметров  $\alpha_1,...,\alpha_{11}$ , что дает:  $\alpha_1=0.5$ ,  $\alpha_2=0.5$ ,  $\alpha_3=-1$ ,  $\alpha_4=-1$ ,  $\alpha_5=-1.5$ ,  $\alpha_6=-0.5$ ,  $\alpha_7=-0.5$ ,  $\alpha_8=0.5$ ,  $\alpha_9=-0.5$ ,  $\alpha_{10}=0$ ,  $\alpha_{11}=1$ .

Выполним расщепление по одинаковым степеням δ, соответствующее данным значениям параметров. Удерживая все уравнения первого приближения и одно из уравнений второго приближения, получаем:

$$\partial_{1}\sigma_{11}^{1} + \partial_{2}\sigma_{12}^{1} + \partial_{3}\sigma_{13}^{1} = 0; \quad E\partial_{1}u_{1}^{1} = \sigma_{11}^{1} - \nu\sigma_{22}^{1}$$

$$\partial_{1}\sigma_{12}^{1} + \partial_{2}\sigma_{22}^{1} + \partial_{3}\sigma_{23}^{1} = 0; \quad E\partial_{2}u_{2}^{1} = \sigma_{22}^{1} - \nu\sigma_{11}^{1}$$

$$\partial_{1}\sigma_{13}^{1} + \partial_{2}\sigma_{23}^{1} + \partial_{3}\sigma_{33}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3}^{1} = 0; \quad \partial_{3}u_{3}^{1} = 0$$

$$G(\partial_{1}u_{2}^{1} + \partial_{2}u_{1}^{1}) = \sigma_{12}^{1}; \quad \partial_{1}u_{3}^{1} + \partial_{3}u_{1}^{1} = 0; \quad \partial_{2}u_{3}^{1} + \partial_{3}u_{2}^{1} = 0$$

$$E\partial_{3}u_{3}^{2} = -\nu(\sigma_{11}^{1} + \sigma_{22}^{1})$$

$$(3.6.2)$$

Эти уравнения инвариантны относительно добавочной подгруппы растяжений (3.3.2), имеющей здесь вид:

$$\partial_{1} = \delta^{0.5} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} = \delta^{0.5} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} = \partial_{3}^{*}, \ u_{1}^{1} = \delta^{-1} u_{1}^{1*}, \ u_{2}^{1} = \delta^{-1} u_{2}^{1*}$$
(3.6.3)  

$$u_{3}^{1} = \delta^{-1.5} u_{3}^{1*}, \ u_{3}^{2} = \delta^{-0.5} u_{3}^{2*}, \ \sigma_{11}^{1} = \delta^{-0.5} \sigma_{11}^{1*}, \ \sigma_{22}^{1} = \delta^{-0.5} \sigma_{22}^{1*}, \ \sigma_{33}^{1} = \delta^{0.5} \sigma_{33}^{1*}$$
  

$$\sigma_{12}^{1} = \delta^{-0.5} \sigma_{12}^{1*}, \ \sigma_{13}^{1} = \sigma_{13}^{1*}, \ \sigma_{23}^{1} = \sigma_{23}^{1*}, \ E = E^{*}, \ G = G^{*}, \ \rho = \rho^{*}, \ \partial_{t} = \delta \partial_{t}^{*}$$
  
B силу таких преобразований асимптотические оценки (3.3.3) будут:  

$$\delta^{-0.5} \partial_{1} \sim \delta^{-0.5} \partial_{2} \sim \partial_{3} \sim \delta^{-1} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_{t}$$
(3.6.4)  

$$\delta E \partial_{3} u_{1}^{1} \sim \delta E \partial_{3} u_{2}^{1} \sim \delta^{1.5} E \partial_{3} u_{3}^{1} \sim \delta^{0.5} E \partial_{3} u_{3}^{2} \sim \delta^{0.5} \sigma_{11}^{1} \sim \delta^{0.5} \sigma_{22}^{1} \sim \delta^{-0.5} \sigma_{33}^{1} \sim \delta^{0.5} \sigma_{33}^{1} = \delta^{0.5}$$

Исключая из (3.6.4) малый параметр б получаем:

$$\delta \sim \left(\partial_1 \partial_3^{-1}\right)^2 < 1 \tag{3.6.5}$$

$$\partial_1 \sim \partial_2; \quad \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t \partial_3 \sim \partial_1^2$$
 (3.6.6)

$$\operatorname{Eu}_{3}^{1} \sim \operatorname{E\partial}_{3} \partial_{1}^{-1} u_{1}^{1} \sim \operatorname{E\partial}_{3} \partial_{2}^{-1} u_{2}^{1} \sim \partial_{3} \partial_{1}^{-2} \sigma_{11}^{1} \sim \partial_{3} \partial_{2}^{-2} \sigma_{22}^{1} \sim \partial_{3} \partial_{1}^{-2} \sigma_{12}^{1} \sim (3.6.7)$$
  
 
$$\sim \partial_{3}^{2} \partial_{1}^{-3} \sigma_{13}^{1} \sim \partial_{3}^{2} \partial_{1}^{-3} \sigma_{23}^{1} \sim \partial_{3}^{3} \partial_{1}^{-4} \sigma_{33}^{1} \sim \operatorname{E\partial}_{3}^{2} \partial_{1}^{-2} u_{3}^{2}$$

В данном случае относительная скорость изменения по времени t меньше, чем в задачах, рассмотренных в предыдущих параграфах. Как и

раньше, проверке подлежат только соотношения (3.6.5) и (3.6.6); соотношения (3.6.7) удовлетворяются автоматически, в силу уравнений (3.6.2). Роль естественного малого параметра вновь играет величина  $\varepsilon = \delta \sim (\partial_1 \partial_3^{-1})^2 < 1.$ 

Представим решение уравнений (3.6.2) в виде:  

$$u_3^1 = u_{3,1}^1, u_1^1 = x_3 u_{1,1}^1, u_2^1 = x_3 u_{2,1}^1, \sigma_{11}^1 = x_3 \sigma_{11,1}^1, \sigma_{22}^1 = x_3 \sigma_{22,1}^1$$
 (3.6.8)  
 $\sigma_{12}^1 = x_3 \sigma_{12,1}^1, \sigma_{13}^1 = \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{13,1}^1 + \sigma_{13,2}^1, \sigma_{23}^1 = \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{23,1}^1 + \sigma_{23,2}^1$   
 $\sigma_{33}^1 = \frac{(x_3)^3}{6} \sigma_{33,1}^1 + x_3 \sigma_{33,2}^1, u_3^2 = \frac{(x_3)^2}{2} u_{3,1}^2$ 

Здесь в первом приближении удержаны только те константы интегрирования по  $x_3$ , которые порождают напряженно-деформированное состояние, антисимметричное относительно плоскости  $x_3 = 0$ . В выражении для единственной функции  $u_3^2$  из второго приближения константа интегрирования отброшена. Подставляя (3.6.8) в (3.6.2) получаем:

$$\partial_{1}\sigma_{11,1}^{1} + \partial_{2}\sigma_{12,1}^{1} + \sigma_{13,1}^{1} = 0; \quad E\partial_{1}u_{1,1}^{1} = \sigma_{11,1}^{1} - \nu\sigma_{22,1}^{1}$$

$$(3.6.9)$$

$$\partial_{1}\sigma_{12,1}^{1} + \partial_{2}\sigma_{22,1}^{1} + \sigma_{23,1}^{1} = 0; \quad E\partial_{2}u_{2,1}^{1} = \sigma_{22,1}^{1} - \nu\sigma_{11,1}^{1}$$

$$\partial_{1}\sigma_{13,1}^{1} + \partial_{2}\sigma_{23,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{1} = 0; \quad \partial_{1}\sigma_{13,2}^{1} + \partial_{2}\sigma_{23,2}^{1} + \sigma_{33,2}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3,1}^{1} = 0$$

$$G(\partial_{1}u_{2,1}^{1} + \partial_{2}u_{1,1}^{1}) = \sigma_{12,1}^{1}; \quad \partial_{1}u_{3,1}^{1} + u_{1,1}^{1} = 0; \quad \partial_{2}u_{3,1}^{1} + u_{2,1}^{1} = 0$$

$$Eu_{3,1}^{2} = -\nu(\sigma_{11,1}^{1} + \sigma_{22,1}^{1})$$

Дополним уравнения (3.6.9) граничными условиями, задавая при  $x_3 = h$  напряжения:

$$\sigma_{13}^{1} = \frac{h^{2}}{2} \sigma_{13,1}^{1} + \sigma_{13,2}^{1} = \tau_{1}^{+}; \quad \sigma_{23}^{1} = \frac{h^{2}}{2} \sigma_{23,1}^{1} + \sigma_{23,2}^{1} = \tau_{2}^{+}$$

$$\sigma_{33}^{1} = \frac{h^{3}}{6} \sigma_{33,1}^{1} + h \sigma_{33,2}^{1} = q^{+}$$
(3.6.10)

Тогда при  $x_3 = -h$  будет  $\tau_1^- = \tau_1^+, \ \tau_2^- = \tau_2^+, \ q^- = -q^+.$ 

Перейдем от распределенных по толщине слоя  $-h \le x_3 \le h$  напряжений к интегральным величинам – изгибающим  $M_1, M_2$  и крутящему Н моментам и перерезывающим силам  $Q_1, Q_2$ :

$$M_{1} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11}^{1} x_{3} dx_{3} = \frac{2h^{3}}{3} \sigma_{11,1}^{1}; \quad M_{2} = \int_{-h}^{h} \sigma_{22}^{1} x_{3} dx_{3} = \frac{2h^{3}}{3} \sigma_{22,1}^{1}$$
(3.6.11)  
$$H = \int_{-h}^{h} \sigma_{12}^{1} x_{3} dx_{3} = \frac{2h^{3}}{3} \sigma_{12,1}^{1}; \quad Q_{1} = \int_{-h}^{h} \sigma_{13}^{1} dx_{3} = \frac{h^{3}}{3} \sigma_{13,1}^{1} + 2h\sigma_{13,2}^{1}$$

$$Q_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{23}^1 dx_3 = \frac{h^3}{3} \sigma_{23,1}^1 + 2h\sigma_{23,2}^1$$

Учтем также, что заданные на лицевых поверхностях слоя  $-h \le x_3 \le h$  касательные нагрузки образуют распределенные пары сил с моментами:

$$m_1 = 2h\tau_1^+; \quad m_2 = 2h\tau_2^+$$
 (3.6.12)  
Введем еще обозначения:

$$w = u_{3,1}^{1}; \phi_1 = u_{1,1}^{1}; \phi_2 = u_{2,1}^{1}; W = u_{3,1}^{2}; q = 2q^+$$
 (3.6.13)

Здесь w – прогиб срединной поверхности,  $x_3 = 0$  слоя –  $h \le x_3 \le h$ ;  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – углы поворотов нормали к срединной поверхности в направлениях осей  $x_1$  и  $x_2$ ; W – функция, задающая изменение толщины слоя, антисимметричное относительно срединной поверхности; q – суммарная по двум лицевым поверхностям нормальная нагрузка.

Из выражений для  $Q_1$  и  $Q_2$  (3.6.11) и первых двух граничных условий (3.6.10) получаем, с учетом (3.6.12),

$$\sigma_{13,1}^{1} = \frac{3(m_1 - Q_1)}{2h^3}; \ \sigma_{13,2}^{1} = \frac{3Q_1 - m_1}{4h}; \ \sigma_{23,1}^{1} = \frac{3(m_2 - Q_2)}{2h^3}; \ \sigma_{23,2}^{1} = \frac{3Q_2 - m_2}{4h} (3.6.14)$$

С учетом принятых обозначений и граничных условий уравнения (3.6.9) дают:

$$\partial_{1}M_{1} + \partial_{2}H - Q_{1} = -m_{1}; \quad \frac{2h^{3}E}{3}\partial_{1}\phi_{1} = M_{1} - \nu M_{2}$$

$$\partial_{1}H + \partial_{2}M_{2} - Q_{2} = -m_{2}; \quad \frac{2h^{3}E}{3}\partial_{2}\phi_{2} = M_{2} - \nu M_{1}$$

$$\frac{2h^{3}G}{3}(\partial_{1}\phi_{2} + \partial_{2}\phi_{1}) = H; \quad \phi_{1} = -\partial_{1}w; \quad \phi_{2} = -\partial_{2}w; \quad \partial_{1}Q_{1} + \partial_{2}Q_{2} - \rho\partial_{t}^{2}w = -q$$

$$W = -\frac{3\nu}{2h^{3}E}(M_{1} + M_{2})$$
(3.6.16)

Уравнения (3.6.15) являются стандартными динамическими уравнениями изгиба пластины. Функция W, задающая изменение толщины пластины, в классической теории обычно не учитывается, однако она может быть полезна, в частности, при сравнении классических уравнений с приводимыми далее уточненными уравнениями.

Вернемся к асимптотическим оценкам. Таким же образом, как в предыдущих параграфах, преобразуем соотношение (3.6.5) к форма:

$$\delta \sim (hD)^2 < 1; \ D = \max\left[\partial_{1,2}, \sqrt{\frac{\rho}{E}}\partial_t (h\partial_{1,2})^{-1}\right]; \ \partial_{1,2} = \max(\partial_1, \partial_2) \qquad (3.6.17)$$

# 3.7. УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим следующий набор параметров:  $\alpha_1=1$ ,  $\alpha_2=1$ ,  $\alpha_3=-2$ ,  $\alpha_4==-2$ ,  $\alpha_5=-3$ ,  $\alpha_6=-1$ ,  $\alpha_7=-1$ ,  $\alpha_8=1$ ,  $\alpha_9=-1$ ,  $\alpha_{10}=0$ ,  $\alpha_{11}=2$ . Ему отвечает такой вид таблицы (3.2.1):

2,	2,	0,	2;		1,	1,	1,	1			(3.7.1)
2,	2,	0,	2;		1,	1,	1,	1			
1,	1,	1,	1;		-1,	1,	1,	1			
1,	1,	1;		0,	0,	0;		0,	0,	0	

Отсюда вновь видно, что значения параметров, приведенные в Таблице 3.1, нужно уменьшить вдвое, получая:  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = -0.5, \alpha_6 = 0.5, \alpha_7 = 0.5, \alpha_8 = 0.5, \alpha_9 = 0.5, \alpha_{10} = 0, \alpha_{11} = 0.5.$ 

Выпишем, после расщепления по одинаковым степеням δ, соответствующие уравнения первого приближения и четыре уравнения второго приближения:

$$\begin{array}{l} \partial_{3}\sigma_{13}^{1} = 0; \ \partial_{3}\sigma_{23}^{1} = 0; \ \partial_{3}u_{3}^{1} = 0; \ G\left(\partial_{1}u_{3}^{1} + \partial_{3}u_{1}^{1}\right) = \sigma_{13}^{1} \\ G\left(\partial_{2}u_{3}^{1} + \partial_{3}u_{2}^{1}\right) = \sigma_{23}^{1}; \ \partial_{1}\sigma_{13}^{1} + \partial_{2}\sigma_{23}^{1} + \partial_{3}\sigma_{33}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3}^{1} = 0 \\ E\partial_{1}u_{1}^{1} = \sigma_{11}^{1} - \nu\left(\sigma_{22}^{1} + \sigma_{33}^{1}\right); \ E\partial_{2}u_{2}^{1} = \sigma_{22}^{1} - \nu\left(\sigma_{11}^{1} + \sigma_{13}^{1}\right); \ G\left(\partial_{1}u_{2}^{1} + \partial_{2}u_{1}^{1}\right) = \sigma_{12}^{1} \\ \partial_{1}\sigma_{11}^{1} + \partial_{2}\sigma_{12}^{1} + \partial_{3}\sigma_{13}^{2} - \rho\partial_{t}^{2}u_{1}^{1} = 0; \ \partial_{1}\sigma_{12}^{1} + \partial_{2}\sigma_{22}^{1} + \partial_{3}\sigma_{23}^{2} - \rho\partial_{t}^{2}u_{2}^{1} = 0 \\ E\partial_{3}u_{3}^{2} = \sigma_{33}^{1} - \nu\left(\sigma_{11}^{1} + \sigma_{22}^{1}\right); \ \partial_{1}\sigma_{13}^{2} + \partial_{2}\sigma_{23}^{2} + \partial_{3}\sigma_{33}^{2} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3}^{2} = 0 \end{array}$$

Добавочная подгруппа растяжений, допускаемая уравнениями (3.7.2), имеет вид:

$$\partial_{1} = \delta^{0.5} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} = \delta^{0.5} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} = \partial_{3}^{*}, \ u_{1}^{1} = u_{1}^{1*}, \ u_{2}^{1} = u_{2}^{1*}, \ u_{3}^{1} = \delta^{-0.5} u_{3}^{1*}$$
(3.7.3)  
$$u_{3}^{2} = \delta^{0.5} u_{3}^{2*}, \ \sigma_{11}^{1} = \delta^{0.5} \sigma_{11}^{1*}, \ \sigma_{22}^{1} = \delta^{0.5} \sigma_{22}^{1*}, \ \sigma_{33}^{1} = \delta^{0.5} \sigma_{33}^{1*}, \ \sigma_{33}^{2} = \delta^{1.5} \sigma_{33}^{2*}, \ \sigma_{12}^{1} = \delta^{0.5} \sigma_{12}^{1*}$$
  
$$\sigma_{13}^{1} = \sigma_{13}^{1*}, \ \sigma_{13}^{2} = \delta \sigma_{13}^{2*}, \ \sigma_{23}^{1} = \sigma_{23}^{1*}, \ \sigma_{23}^{2} = \delta \sigma_{23}^{2*}, \ E = E^{*}, \ G = G^{*}, \ \rho = \rho^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{0.5} \partial_{t}^{*}$$

В силу этих преобразований асимптотические соотношения (3.3.3) будут:

$$\delta^{-0.5}\partial_{1} \sim \delta^{-0.5}\partial_{2} \sim \partial_{3} \sim \delta^{-0.5}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\partial_{t}$$

$$E\partial_{3}u_{1}^{1} \sim E\partial_{3}u_{2}^{1} \sim \delta^{0.5}E\partial_{3}u_{3}^{1} \sim \delta^{-0.5}E\partial_{3}u_{3}^{2} \sim \delta^{-0.5}\sigma_{11}^{1} \sim \delta^{-0.5}\sigma_{22}^{1} \sim \delta^{-0.5}\sigma_{33}^{1} \sim \delta^{-1.5}\sigma_{33}^{2} \sim \delta^{-0.5}\sigma_{12}^{1} \sim \sigma_{13}^{1} \sim \delta^{-1}\sigma_{23}^{2} \sim \delta^{-1}\sigma_{23}^{2}$$
(3.7.4)

Исключая из (3.7.4) б получаем:

$$\delta \sim \left(\partial_1 \partial_3^{-1}\right)^2 < 1 \tag{3.7.5}$$

$$\partial_1 \sim \partial_2 \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t$$
 (3.7.6)

$$E\partial_{1}u_{3} \sim \sigma_{13}^{1} \sim \sigma_{23}^{1} \sim E\partial_{3}u_{1}^{1} \sim E\partial_{3}u_{2}^{1} \sim \partial_{1}^{-1}\partial_{3}\sigma_{11}^{1} \sim \partial_{2}^{-1}\partial_{3}\sigma_{22}^{1} \sim (3.7.7)$$
  
$$\sim \partial_{1}^{-1}\partial_{3}\sigma_{33}^{1} \sim \partial_{1}^{-1}\partial_{3}\sigma_{12}^{1} \sim \partial_{1}^{-2}\partial_{3}^{2}\sigma_{13}^{2} \sim \partial_{1}^{-2}\partial_{3}^{2}\sigma_{23}^{2} \sim E\partial_{1}^{-1}\partial_{3}^{2}u_{3}^{2} \sim \partial_{1}^{-3}\partial_{3}^{2}\sigma_{33}^{2}$$

Соотношения (3.7.7) удовлетворяются, как и в предыдущих случаях, автоматически, в силу уравнений (3.7.2). Проверке подлежит только соотношение (3.7.5), определяющее, с учетом (3.7.6), величину, играющую в данном случае роль естественного малого параметра.

Будем разыскивать решение уравнений (3.7.2) в виде:

$$\sigma_{13}^{1} = \sigma_{13,1}^{1}, \ \sigma_{23}^{1} = \sigma_{23,1}^{1}, \ u_{3}^{1} = u_{3,1}^{1}, \ u_{1}^{1} = x_{3}u_{1,1}^{1} + u_{1,2}^{1}, \ u_{2}^{1} = x_{3}u_{2,1}^{1} + u_{2,2}^{1} \quad (3.7.8)$$

$$\sigma_{33}^{1} = x_{3}\sigma_{33,1}^{1} + \sigma_{33,2}^{1}, \ \sigma_{11}^{1} = x_{3}\sigma_{11,1}^{1} + \sigma_{11,2}^{1}, \ \sigma_{22}^{1} = x_{3}\sigma_{22,1}^{1} + \sigma_{22,2}^{1}, \ \sigma_{12}^{1} = x_{3}\sigma_{12,1}^{1} + \sigma_{12,2}^{1}$$

$$\sigma_{13}^{2} = \frac{(x_{3})^{2}}{2}\sigma_{13,1}^{2} + x_{3}\sigma_{13,2}^{2}, \ \sigma_{23}^{2} = \frac{(x_{3})^{2}}{2}\sigma_{23,1}^{2} + x_{3}\sigma_{23,2}^{2}, \ u_{3}^{2} = \frac{(x_{3})^{2}}{2}u_{3,1}^{2} + x_{3}u_{3,2}^{2}$$

$$\sigma_{33}^{2} = \frac{(x_{3})^{3}}{6}\sigma_{33,1}^{2} + \frac{(x_{3})^{2}}{2}\sigma_{33,2}^{2}$$

Здесь в первом приближении удержаны все шесть констант интегрирования по  $x_3$ , отвечающие как антисимметричному  $(\sigma_{13,1}^1, \sigma_{23,1}^1, u_{3,1}^1)$ , так и симметричному  $(u_{1,2}^1, u_{2,2}^1, \sigma_{33,2}^1)$  относительно плоскости  $x_3 = 0$  напряженнодеформированному состоянию, а также порожденные ими слагаемые для остальных искомых функций. Во втором приближении константы интегрирования не учитывались.

Подставляя (3.7.8) в (3.7.2) выпишем отдельно уравнения для антисимметричных составляющих напряженно-деформированного состояния:

$$\begin{aligned} G\left(\partial_{1}u_{3,1}^{1}+u_{1,1}^{1}\right) &= \sigma_{13,1}^{1}; \quad G\left(\partial_{2}u_{3,1}^{1}+u_{2,1}^{1}\right) = \sigma_{23,1}^{1} \end{aligned} \tag{3.7.9} \\ \partial_{1}\sigma_{13,1}^{1}+\partial_{2}\sigma_{23,1}^{1}+\sigma_{33,1}^{1}-\rho\partial_{t}^{2}u_{3,1}^{1} = 0; \quad G\left(\partial_{1}u_{2,1}^{1}+\partial_{2}u_{1,1}^{1}\right) = \sigma_{12,1}^{1} \\ E\partial_{1}u_{1,1}^{1} &= \sigma_{11,1}^{1}-\nu\left(\sigma_{22,1}^{1}+\sigma_{33,1}^{1}\right), \quad E\partial_{2}u_{2,1}^{1} = \sigma_{22,1}^{1}-\nu\left(\sigma_{11,1}^{1}+\sigma_{33,1}^{1}\right) \\ \partial_{1}\sigma_{11,1}^{1}+\partial_{2}\sigma_{12,1}^{1}+\sigma_{13,1}^{2}-\rho\partial_{t}^{2}u_{1,1}^{1} = 0; \quad \partial_{1}\sigma_{12,1}^{1}+\partial_{2}\sigma_{22,2}^{1}+\sigma_{23,1}^{2}-\rho\partial_{t}^{2}u_{2,1}^{1} = 0 \\ Eu_{3,1}^{2} &= \sigma_{33,1}^{1}-\nu\left(\sigma_{11,1}^{1}+\sigma_{22,1}^{1}\right), \quad \partial_{1}\sigma_{13,1}^{2}+\partial_{2}\sigma_{23,1}^{2}+\sigma_{33,1}^{2}-\rho\partial_{t}^{2}u_{3,1}^{2} = 0 \end{aligned}$$

и отдельно для симметричных составляющих:

$$\begin{split} & E\partial_{1}u_{1,2}^{1} = \sigma_{11,2}^{1} - \nu\left(\sigma_{22,2}^{1} + \sigma_{33,2}^{1}\right), \quad E\partial_{2}u_{2,2}^{1} = \sigma_{22,2}^{1} - \nu\left(\sigma_{11,2}^{1} + \sigma_{33,2}^{1}\right) \quad (3.7.10) \\ & G\left(\partial_{1}u_{2,2}^{1} + \partial_{2}u_{1,2}^{1}\right) = \sigma_{12,2}^{1}; \quad Eu_{3,2}^{2} = \sigma_{33,2}^{1} - \nu\left(\sigma_{11,2}^{1} + \sigma_{22,1}^{1}\right) \\ & \partial_{1}\sigma_{11,2}^{1} + \partial_{2}\sigma_{12,2}^{1} + \sigma_{13,2}^{2} - \rho\partial_{t}^{2}u_{1,2}^{1} = 0; \quad \partial_{1}\sigma_{12,2}^{1} + \partial_{2}\sigma_{22,2}^{1} + \sigma_{23,2}^{2} - \rho\partial_{t}^{2}u_{2,2}^{1} = 0 \\ & \partial_{1}\sigma_{13,2}^{2} + \partial_{2}\sigma_{23,2}^{2} + \sigma_{33,2}^{2} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3,2}^{2} = 0 \end{split}$$

Дополним уравнения (3.7.9), (3.7.10) граничными условиями на лицевых поверхностях слоя  $x_3 = \pm h$ :

При  $x_3 = h$ :

$$\sigma_{13} = \sigma_{13,1}^{1} + \frac{h^{2}}{2}\sigma_{13,1}^{2} + h\sigma_{13,2}^{2} = \tau_{1}^{+}; \quad \sigma_{23} = \sigma_{23,1}^{1} + \frac{h^{2}}{2}\sigma_{23,1}^{2} + h\sigma_{23,2}^{2} = \tau_{2}^{+}$$
(3.7.11)

$$\begin{split} \sigma_{33} &= h\sigma_{33,1}^{1} + \sigma_{33,2}^{1} + \frac{h^{3}}{6}\sigma_{33,1}^{2} + \frac{h^{2}}{2}\sigma_{33,2}^{2} = q^{+} \\ \Pi p \mu \ x_{3} &= -h: \\ \sigma_{13} &= \sigma_{13,1}^{1} + \frac{h^{2}}{2}\sigma_{13,1}^{2} - h\sigma_{13,2}^{2} = \tau_{1}^{-}; \quad \sigma_{23} &= \sigma_{23,1}^{1} + \frac{h^{2}}{2}\sigma_{23,1}^{2} - h\sigma_{23,2}^{2} = \tau_{2}^{-} \\ \sigma_{33} &= -h\sigma_{33,1}^{1} + \sigma_{33,2}^{1} - \frac{h^{3}}{6}\sigma_{33,1}^{2} + \frac{h^{2}}{2}\sigma_{33,2}^{2} = q^{-} \end{split}$$

Отсюда получаем для антисимметричных:

$$\sigma_{13,1}^{1} + \frac{h^{2}}{2}\sigma_{13,1}^{2} = \frac{\tau_{1}^{+} + \tau_{1}^{-}}{2}; \quad \sigma_{23,1}^{1} + \frac{h^{2}}{2}\sigma_{23,1}^{2} = \frac{\tau_{2}^{+} + \tau_{2}^{-}}{2}$$

$$h\sigma_{33,1}^{1} + \frac{h^{3}}{6}\sigma_{33,1}^{2} = \frac{q^{+} - q^{-}}{2}$$
(3.7.12)

и симметричных составляющих:

$$\sigma_{13,2}^2 = \frac{\tau_1^+ - \tau_1^-}{2h}; \ \sigma_{23,2}^2 = \frac{\tau_2^+ - \tau_2^-}{2h}; \ \sigma_{33,2}^1 + \frac{h^2}{2}\sigma_{33,2}^2 = \frac{q^+ + q^-}{2}$$
(3.7.13)

Рассмотрим отдельно каждое из напряженно-деформированных состояний. Введем обозначения по образцу предыдущего параграфа:

$$M_{1} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} x_{3} dx_{3} = \frac{2h^{3}}{3} \sigma_{11,1}^{1}; \quad M_{2} = \int_{-h}^{h} \sigma_{22} x_{3} dx_{3} = \frac{2h^{3}}{3} \sigma_{22,1}^{1}$$
(3.7.14)  

$$N = \int_{-h}^{h} \sigma_{33}^{1} x_{3} dx_{3} = \frac{2h^{3}}{3} \sigma_{33,1}^{1}; \quad H = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} x_{3} dx_{3} = \frac{2h^{3}}{3} \sigma_{12,1}^{1}$$
  

$$Q_{1} = \int_{-h}^{h} \sigma_{13} dx_{3} = \frac{h^{3}}{3} \sigma_{13,1}^{2} + 2h \sigma_{13,1}^{1}; \quad Q_{2} = \int_{-h}^{h} \sigma_{23} dx_{3} = \frac{h^{3}}{3} \sigma_{23,1}^{2} + 2h \sigma_{23,1}^{1}$$

Здесь, наряду с изгибающими  $M_1, M_2$  и крутящим H моментами, а также перерезывающими силами  $Q_1, Q_2$  введена еще, по аналогии с моментами, величина N, не имеющая общепринятого наглядного смысла.

Введем также обозначения:

$$m_1 = 2h \frac{\tau_1^+ + \tau_1^-}{2}; \ m_2 = 2h \frac{\tau_2^+ + \tau_2^-}{2}$$
 (3.7.15)

для распределенных по лицевым поверхностям слоя изгибающих моментов и обозначения:

$$w = u_{3,1}^{1}, \phi_{1} = u_{1,1}^{1}, \phi_{2} = u_{2,1}^{1}, \beta_{1} = \frac{\sigma_{13,1}^{1}}{G}, \beta_{2} = \frac{\sigma_{23,1}^{1}}{G}, W = u_{3,1}^{2}, q = q^{+} - q^{-}, \quad (3.7.16)$$

где w – прогиб срединной поверхности  $x_3 = 0$  слоя;  $\phi_1, \phi_2 - y$ глы поворотов нормали к срединной поверхности в направлениях осей  $x_1$  и  $x_2$ ;  $\beta_1, \beta_2 - c$ двиги, вызванные перерезывающими силами; W – перемещение, характеризующее антисимметричное относительно срединной поверхности изменение толщины слоя; q – суммарная поперечная нагрузка на слой.

Первые два соотношения (3.7.12) и выражения для  $Q_1$  и  $Q_2$  (3.7.14) дают, с учетом (3.7.15),

$$\sigma_{13,1}^{1} = \frac{3Q_{1} - m_{1}}{4h}; \ \sigma_{13,1}^{2} = \frac{3(m_{1} - Q_{1})}{2h^{3}}; \ \sigma_{23,1}^{1} = \frac{3Q_{2} - m_{2}}{4h}; \ \sigma_{23,1}^{2} = \frac{3(m_{2} - Q_{2})}{2h^{3}} (3.7.17)$$

Окончательно из (3.7.9), (3.7.12), (3.7.14), (3.7.16) и (3.7.17) получаем уравнения:

$$\begin{split} \partial_{1}M_{1} + \partial_{2}H - Q_{1} &- \frac{2h^{3}\rho}{3}\partial_{t}^{2}\phi_{1} = -m_{1}; \ \partial_{1}H + \partial_{2}M_{2} - Q_{2} - \frac{2h^{3}\rho}{3}\partial_{t}^{2}\phi_{2} = -m_{2} \ (3.7.18) \\ \partial_{1}Q_{1} + \partial_{2}Q_{2} + \frac{2}{h^{2}}N - \frac{4h\rho}{3}\partial_{t}^{2}w = \frac{1}{3}(\partial_{1}m_{1} + \partial_{2}m_{2}) \\ &\frac{2}{h^{2}}N + \frac{2h\rho}{3}\partial_{t}^{2}w + \frac{h^{3}\rho}{3}\partial_{t}^{2}W = q + \frac{1}{3}(\partial_{1}m_{1} + \partial_{2}m_{2}) \\ &\frac{2h^{3}E}{3}\partial_{1}\phi_{1} = M_{1} - \nu(M_{2} + N); \ \frac{2h^{3}E}{3}\partial_{2}\phi_{2} = M_{2} - \nu(M_{1} + N) \\ &\frac{2h^{3}E}{3}W = N - \nu(M_{1} + M_{2}); \ \frac{2h^{3}G}{3}(\partial_{1}\phi_{2} + \partial_{2}\phi_{1}) = H \\ Q_{1} = \frac{4hG}{3}(\partial_{1}w + \phi_{1}) + \frac{m_{1}}{3} = \frac{4hG}{3}\beta_{1} + \frac{m_{1}}{3}; \ Q_{2} = \frac{4hG}{3}(\partial_{2}w + \phi_{2}) + \frac{m_{2}}{3} = \frac{4hG}{3}\beta_{2} + \frac{m_{2}}{3} \end{split}$$

Уравнения (3.7.18) являются динамическими уравнениями изгиба пластины. При их выводе для каждой из искомых функций получился (по сумме двух приближений) точно такой же закон зависимости от x<sub>3</sub>, как в предыдущем параграфе при выводе классических динамических уравнений изгиба пластины. Отличается только порядок нахождения слагаемых, составляющих искомые функции; однако это привело к принципиально новым результатам.

В то время как уравнения классического изгиба пластины (3.6.15) справедливы только для сравнительно медленно изменяющегося во времени решения и задают бесконечно большую скорость распространения возмущений, уравнения (3.7.18) соответствуют более быстрому изменению во времени, являются уравнениями гиперболического типа и задают конечные скорости распространения фронтов волн.

В отличие от всех известных динамических моделей пластин уравнения (3.7.18) задают те же скорости распространения волновых фронтов, как и уравнения теории упругости. Изгибные волны распространяются со скоростью продольных волн, крутильные и сдвиговые – со скоростью поперечных волн. Это обеспечивается учетом поперечных, по отношению к пластине, напряжений и перемещений, заданных функциями N и W.

Так же, как в теории типа Тимошенко, учитывается инерция вращения нормали (слагаемые с  $\partial_t^2 \varphi_1$  и  $\partial_t^2 \varphi_2$  в первых двух уравнениях (3.7.18)) и сдвиг от перерезывающей силы. Последнее приводит к тому, что краевые

задачи для уравнений (3.7.18) ставятся так же, как для уравнений типа Тимошенко [66]; в частности, отдельно учитываются изгибающий и крутящий моменты и перерезывающие силы.

Начальные условия имеют то отличие от задаваемых в случае теории типа Тимошенко, что здесь необходимо дополнительно указывать начальное значение  $W_0$  и начальную скорость  $W_0^{\bullet}$  для функции W.

Более подробно вопросы отличия результатов, соответствующих уравнениям (3.7.18), от результатов для классических уравнений и уравнений типа Тимошенко будут рассмотрены ниже, при решении конкретных задач.

Рассмотрим симметричную часть напряженно-деформированного состояния. Уравнения (3.7.10) и граничные условия (3.7.13) приводят к уравнениям (3.5.12) с очевидными изменениями в обозначениях; вместо (3.5.11) здесь имеем:

$$v_{1} = u_{1,2}^{1}, v_{2} = u_{2,2}^{1}, T_{1} = 2h\sigma_{11,2}^{1}, T_{2} = 2h\sigma_{22,2}^{1}, S = 2h\sigma_{12,2}^{1}, K = 2h\sigma_{33,2}^{1}$$
(3.7.19)  
$$V = u_{3,2}^{2}, \tau_{1} = \tau_{1}^{+} - \tau_{1}^{-}, \tau_{2} = \tau_{2}^{+} - \tau_{2}^{-}, p = \frac{q^{+} + q^{-}}{2}, \rho_{1} = 2h\rho$$

Таким образом, данный случай объединяет и уравнения (3.7.18) для изгиба пластины и уравнения (3.5.12) для плоского напряженного состояния.

Вернемся вновь к асимптотическим оценкам. Так же, как в предыдущих случаях, заменим соотношения (3.7.5) и (3.7.6) на:

$$\delta \sim (hD)^2 < 1; \quad D = \max\left(\partial_1, \partial_2, \sqrt{\frac{\rho}{E}}\partial_t\right)$$
 (3.7.20)

Несколько сложнее здесь решается вопрос с только что описанным объединением антисимметричного И симметричного напряженнодеформированных состояний. Вообще говоря, уравнения (3.7.2)И асимптотические оценки (3.7.7) соответствуют только антисимметричной порождаемой константами интегрирования  $\sigma_{13,1}^1, \sigma_{23,1}^1, u_{3,1}^1$ картине, И следующими из них функциями с добавочным нижним индексом 1 после интегрирования  $u_{12}^1, u_{22}^1, \sigma_{332}^1$ запятой. Дополнительные константы порождают новую цепочку функций с нижним индексом 2 после запятой; эти функции описывают симметричную картину.

Если исходить из буквального выполнения тех требований, в соответствии с которыми строились упрощенные уравнения (3.7.2), то в каждой из функций (3.7.8) второе слагаемое (если оно имеется) не должно превосходить первого. Однако на самом деле невыполнение этого требования не приводит ни к каким принципиальным нарушениям асимптотических оценок.

Для того чтобы увидеть это, нужно вновь вернуться к смыслу используемого метода, основанного на синтезе асимптотического анализа и теории групп. Применение теории групп позволило, в каждом из описанных выше случаев, построить такие рекуррентные системы уравнений, решение которых автоматически удовлетворяет, в силу самих уравнений, большинству асимптотических оценок. Таким образом, на первое место выступает не столько оценка относительных весов членов исходных уравнений, сколько построение процедуры последовательных приближений, обеспечивающей, при проверке минимально необходимого набора условий типа (3.7.20), автоматическое выполнение того, чтобы каждый последующий член любого ряда вида (3.3.1) имел величину, на порядок меньшую, чем предыдущий член.

Сказанное особенно хорошо проявляет себя в тех случаях, когда в каком-то из уравнений первого приближения остается только один член (как это имеет место во всех примерах, рассмотренных в данном ðàçäåëå). Оставшийся член, который по асимптотическим оценкам должен быть наибольшим, оказывается равным нулю, а отброшенные члены нулю не равны, то есть на самом деле они больше оставленного!

Это видимое противоречие исчезает, если считать действительной целью асимптотического анализа построение асимптотически обоснованной процедуры последовательных приближений.

рассмотренном случае (3.7.2)B уравнения порождают две асимптотически обоснованные цепочки функций. Первая – порожденная функциями  $\sigma_{13,1}^1, \sigma_{23,1}^1, u_{3,1}^1$ И вторая – порожденная функциями  $u_{1,2}^{1}, u_{2,2}^{1}, \sigma_{33,2}^{1}$ . Эти две цепочки практически не взаимодействуют друг с другом, что особенно хорошо видно после преобразования записи граничных условий от формы (3.7.11) к формам (3.7.12) и (3.7.13). Поэтому наложение искусственных требований, ограничивающих величины функций из второй цепочки, не отвечает существу примененного метода. Даже если первая цепочка исчезнет (за счет равенства нулю функций  $\sigma_{131}^1, \sigma_{231}^1, u_{31}^1$ ), это не отразится на асимптотических характеристиках второй цепочки.

Таким образом, уравнения (3.7.2) позволили получить как двумерные уравнения изгиба пластины (3.7.18), так и независимые от них уравнения плоского напряженного состояния (3.5.12). В данном случае уравнения (3.5.12) были получены и раньше, независимо от рассмотренной здесь процедуры; однако ниже, при изучении теории оболочек, описанное сочетание двух процедур последовательных приближений сыграет важную роль.

Ранее уравнения (3.5.12) были преобразованы к более удобной для использования безразмерной форме. Выполним здесь то же и для уравнений (3.7.18). Введем безразмерные величины по формулам:

$$\overline{M}_{1} = \frac{3b}{h^{2}E}M_{1}, \ \overline{M}_{2} = \frac{3b}{h^{2}E}M_{2}, \ \overline{N} = \frac{3b}{h^{2}E}N, \ \overline{H} = \frac{3b}{h^{2}E}H, \ \overline{Q}_{1} = \frac{3}{4hG}Q_{1} \quad (3.7.21)$$

$$\overline{Q}_{2} = \frac{3}{4hG}Q_{2}, \ \overline{w} = \frac{w}{2h}, \ \overline{W} = 2hW, \ \overline{x}_{1} = \frac{x_{1}}{2h}, \ \overline{x}_{2} = \frac{x_{2}}{2h}, \ \overline{t} = \frac{a_{p}}{2h}t, \ \overline{q} = \frac{3b}{2E}q,$$

$$\overline{m}_{1} = \frac{3}{4hG}m_{1}, \ \overline{m}_{2} = \frac{3}{4hG}m_{2}, \ a_{p}^{2} = \frac{E}{\rho b}, \ b = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}, \ a_{s}^{2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

 $\overline{\partial}_1 = \partial / \partial \overline{x}_1, \ \overline{\partial}_2 = \partial / \partial \overline{x}_2, \ \overline{\partial}_t = \partial / \partial \overline{t}$ 

Переходя в уравнениях (3.7.18) к безразмерным величинам, учтем, что в дальнейшем будут использоваться только уравнений в безразмерной форме. Поэтому, без риска путаницы, отбросим черточки над безразмерными величинами, получая:

$$\begin{aligned} \partial_{1}M_{1} + \partial_{2}H - 8a_{s}^{2}Q_{1} - \partial_{t}^{2}\phi_{1} &= -8a_{s}^{2}m_{1}; \ \partial_{1}H + \partial_{2}M_{2} - 8a_{s}^{2}Q_{2} - \partial_{t}^{2}\phi_{2} &= -8a_{s}^{2}m_{2} \quad (3.7.22) \\ a_{s}^{2}(\partial_{1}Q_{1} + \partial_{2}Q_{2}) + N - \partial_{t}^{2}w &= \frac{a_{s}^{2}}{3}(\partial_{1}m_{1} + \partial_{2}m_{2}); \ N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W &= q + \frac{a_{s}^{2}}{3}(\partial_{1}m_{1} + \partial_{2}m_{2}) \\ b\partial_{1}\phi_{1} &= M_{1} - \nu(M_{2} + N); \ b\partial_{2}\phi_{2} &= M_{2} - \nu(M_{1} + N); \ bW &= N - \nu(M_{1} + M_{2}) \\ H &= a_{s}^{2}(\partial_{1}\phi_{2} + \partial_{2}\phi_{1}); \ Q_{1} &= \partial_{1}w + \phi_{1} + \frac{m_{1}}{3} = \beta_{1} + \frac{m_{1}}{3}; \ Q_{2} &= \partial_{2}w + \phi_{2} + \frac{m_{2}}{3} = \beta_{2} + \frac{m_{2}}{3} \end{aligned}$$

Получим также, при помощи (3.7.22), уравнения в перемещениях:

$$\begin{split} \partial_{1}^{2}\phi_{1} + a_{s}^{2}\partial_{2}^{2}\phi_{1} + e\partial_{1}\partial_{2}\phi_{2} + c\partial_{1}W - 8a_{s}^{2}(\partial_{1}w + \phi_{1}) - \partial_{t}^{2}\phi_{1} &= -8a_{s}^{2}m_{1} (3.7.23) \\ \partial_{2}^{2}\phi_{2} + a_{s}^{2}\partial_{1}^{2}\phi_{2} + e\partial_{1}\partial_{2}\phi_{1} + c\partial_{2}W - 8a_{s}^{2}(\partial_{2}w + \phi_{2}) - \partial_{t}^{2}\phi_{2} &= -8a_{s}^{2}m_{2} \\ a_{s}^{2}(\partial_{1}^{2}w + \partial_{2}^{2}w) + e(\partial_{1}\phi_{1} + \partial_{2}\phi_{2}) + W - \partial_{t}^{2}w &= 0 \\ W + c(\partial_{1}\phi_{1} + \partial_{2}\phi_{2}) + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W &= q + \frac{a_{s}^{2}}{3}(\partial_{1}m_{1} + \partial_{2}m_{2}) \\ M_{1} &= \partial_{1}\phi_{1} + c\partial_{2}\phi_{2} + cW; \ M_{2} &= \partial_{2}\phi_{2} + c\partial_{1}\phi_{1} + cW; \ N &= W + c\partial_{1}\phi_{1} + c\partial_{2}\phi_{2} \\ H &= a_{s}^{2}(\partial_{1}\phi_{2} + \partial_{2}\phi_{1}); \ Q_{1} &= \partial_{1}w + \phi_{1} + \frac{m_{1}}{3} = \beta_{1} + \frac{m_{1}}{3}; \ Q_{2} &= \partial_{2}w + \phi_{2} + \frac{m_{2}}{3} = \beta_{2} + \frac{m_{2}}{3} \\ e &= \frac{1}{2(1-\nu)}; \ c &= \frac{\nu}{1-\nu} \end{split}$$

Асимптотические оценки в безразмерных величинах имеют вид:

$$\delta \sim D^2 < 1; \quad D = \max(\partial_1, \partial_2, \partial_1), \quad (3.7.24)$$

одинаковый как для вновь полученных уравнений изгиба пластины (3.7.22), (3.7.23), так и для ранее построенных уравнений плоского напряженного состояния (3.5.15).

Из граничных условий (3.7.12) и асимптотических соотношений (3.7.7) следуют, с учетом (3.7.15), соотношения:

$$\mathbf{q} \sim \partial_1 \mathbf{m}_1 \sim \partial_2 \mathbf{m}_2 \tag{3.7.25}$$

для напряжений, заданных на лицевых поверхностях. Они не нуждаются в отдельной проверке.

#### 3.8. УРАВНЕНИЯ ТИПА ТИМОШЕНКО

Выше уже отмечалось сходство выведенных динамических уравнений изгиба пластины с известными уравнениями типа Тимошенко [47, 66]. Видна

и существенная разница, в частности, в том, что предлагаемые здесь уравнения задают такие же скорости распространения фронтов волн всех типов, как в трехмерном случае, а уравнения типа Тимошенко задают скорости распространения неких квазифронтов, не совпадающие со скоростями трехмерных волн.

Покажем, что уравнения типа Тимошенко можно получить, как частный случай предложенных здесь уравнений, но при помощи асимптотически противоречивой процедуры. Рассмотрим уравнения в безразмерной форме (3.7.23) при отсутствии нагрузок на лицевых поверхностях слоя:

$$\begin{aligned} \partial_{1}^{2} \phi_{1} + a_{s}^{2} \partial_{2}^{2} \phi_{1} + e \partial_{1} \partial_{2} \phi_{2} + c \partial_{1} W - 8 a_{s}^{2} (\partial_{1} w + \phi_{1}) - \partial_{t}^{2} \phi_{1} &= 0 \end{aligned} (3.8.1) \\ \partial_{2}^{2} \phi_{2} + a_{s}^{2} \partial_{1}^{2} \phi_{2} + e \partial_{1} \partial_{2} \phi_{1} + c \partial_{2} W - 8 a_{s}^{2} (\partial_{2} w + \phi_{2}) - \partial_{t}^{2} \phi_{2} &= 0 \\ a_{s}^{2} (\partial_{1}^{2} w + \partial_{2}^{2} w) + e (\partial_{1} \phi_{1} + \partial_{2} \phi_{2}) + W - \partial_{t}^{2} w &= 0 \\ W + c (\partial_{1} \phi_{1} + \partial_{2} \phi_{2}) + \frac{1}{2} \partial_{t}^{2} w + \frac{1}{16} \partial_{t}^{2} W &= 0 \\ M_{1} &= \partial_{1} \phi_{1} + c \partial_{2} \phi_{2} + c W; \ M_{2} &= \partial_{2} \phi_{2} + c \partial_{1} \phi_{1} + c W; \ N &= W + c \partial_{1} \phi_{1} + \partial_{2} \phi_{2} \\ H &= a_{s}^{2} (\partial_{1} \phi_{2} + \partial_{2} \phi_{1}); \ Q_{1} &= \partial_{1} w + \phi_{1} = \beta_{1}; \ Q_{2} &= \partial_{2} w + \phi_{2} = \beta_{2} \end{aligned}$$

Отбросим в четвертом из этих уравнений последнее слагаемое и получаемое в итоге выражение для W:

$$\mathbf{W} = -\mathbf{c} \left( \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 \right) - \frac{1}{2} \partial_t^2 \mathbf{w}$$
(3.8.2)

подставим в третье из уравнений (3.8.1).

Одновременно отбросим в выражении для N:

$$\mathbf{N} = \mathbf{W} + \mathbf{c} (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2) \tag{3.8.3}$$

само N и получаемое выражение для W:

$$\mathbf{W} = -\mathbf{c} \left( \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 \right) \tag{3.8.4}$$

подставим во все остальные уравнения (3.8.1), в которых встречается W, кроме первого. В итоге, после приведения подобных, получаем:

$$\begin{aligned} \partial_{1}^{2} \varphi_{1} + \frac{1-\nu}{2} \partial_{2}^{2} \varphi_{1} + \frac{1+\nu}{2} \partial_{1} \partial_{2} \varphi_{2} - 4(1-\nu) (\partial_{1} w + \varphi_{1}) - \frac{1}{a_{1}^{2}} \partial_{t}^{2} \varphi_{1} &= 0 \end{aligned} (3.8.5) \\ \partial_{2}^{2} \varphi_{2} + \frac{1-\nu}{2} \partial_{1}^{2} \varphi_{2} + \frac{1+\nu}{2} \partial_{1} \partial_{2} \varphi_{1} - 4(1-\nu) (\partial_{2} w + \varphi_{2}) - \frac{1}{a_{1}^{2}} \partial_{t}^{2} \varphi_{2} &= 0 \\ \partial_{1}^{2} w + \partial_{2}^{2} w + \partial_{1} \varphi_{1} + \partial_{2} \varphi_{2} - \frac{3}{2a_{s}^{2}} \partial_{t}^{2} w &= 0 \\ M_{1} &= a_{1}^{2} (\partial_{1} \varphi_{1} + \nu \partial_{2} \varphi_{2}); \ M_{2} &= a_{1}^{2} (\partial_{2} \varphi_{2} + \nu \partial_{1} \varphi_{1}); \ H &= a_{s}^{2} (\partial_{1} \varphi_{2} + \partial_{2} \varphi_{1}) \\ Q_{1} &= \partial_{1} w + \varphi_{1} &= \beta_{1}; \ Q_{2} &= \partial_{2} w + \varphi_{2} &= \beta_{2}; \ a_{1}^{2} &= \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^{2}} \end{aligned}$$

Это и есть уравнения типа Тимошенко со значением корректирующего сдвигового коэффициента  $k^2 = 2/3$  (записанные в тех же безразмерных величинах, что и уравнения (3.8.1)). Величина  $a_1$  равна отношению скорости распространения квазифронта продольных волн в тонком слое к трехмерной скорости распространения продольных волн  $a_p$ :

$$a_1 = \frac{1}{a_p} \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}}$$
(3.8.6)

В то время, как уравнения (3.8.1) были получены из трехмерных уравнений теории упругости при помощи асимптотически обоснованной процедуры, способ получения, из этих уравнений, уравнений типа Тимошенко является заведомо асимптотически необоснованным, поскольку, в разных случаях, одна и та же величина W находится из разных выражений асимптотической (3.8.2)И (3.8.4).Под необоснованностью здесь подразумевается, в первую очередь, невозможность построения, на основе упрощенных уравнений, процедуры последовательных приближений. Теория типа Тимошенко, построенная изначально на базе некоторых гипотез, безусловно, пригодна для решения задачи о поиске частот собственных колебаний, более высоких чем в рамках классической теории. Однако результаты, полученные с ее помощью, трудно оценивать и невозможно уточнить.

Ниже будет проведено и прямое сравнение решений вновь предлагаемых уравнений и уравнений типа Тимошенко. Из этого сравнения видно, что интегрально оба вида уравнений дают близкие картины напряженно-деформированных состояний пластины, но в районах фронтов наблюдаются существенные различия.

### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ТОНКОМ СЛОЕ

На основе полученных в предыдущей главе уточненных уравнений плоского напряженного состояния и изгиба пластины решается ряд задач о распространении переходных волновых процессов. Во всех рассмотренных случаях выделяются прифронтовые и приграничные зоны, как основные составляющие общего процесса. Результаты во всех случаях получаются на основе теории инвариантно-групповых решений дифференциальных уравнений.

### 4.1. АСИМПТОТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УТОЧНЕННЫХ

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО

### СОСТОЯНИЯ

Запишем уравнения (3.5.15) для случая отсутствия нагрузок на лицевых поверхностях слоя:

$$\partial_{1}^{2} \mathbf{v}_{1} + a_{s}^{2} \partial_{2}^{2} \mathbf{v}_{1} + e \partial_{1} \partial_{2} \mathbf{v}_{2} + c \partial_{1} \mathbf{V} - \partial_{t}^{2} \mathbf{v}_{1} = 0$$

$$\partial_{2}^{2} \mathbf{v}_{2} + a_{s}^{2} \partial_{1}^{2} \mathbf{v}_{2} + e \partial_{1} \partial_{2} \mathbf{v}_{1} + c \partial_{2} \mathbf{V} - \partial_{t}^{2} \mathbf{v}_{2} = 0; \quad 8 \big( \mathbf{V} + c \partial_{1} \mathbf{v}_{1} + c \partial_{2} \mathbf{v}_{2} \big) + \partial_{t}^{2} \mathbf{V} = 0$$

$$\mathbf{T}_{1} = \partial_{1} \mathbf{v}_{1} + c \partial_{2} \mathbf{v}_{2} + c \mathbf{V}; \quad \mathbf{T}_{2} = \partial_{2} \mathbf{v}_{2} + c \partial_{1} \mathbf{v}_{1} + c \mathbf{V}; \quad \mathbf{K} = \mathbf{V} + c \partial_{1} \mathbf{v}_{1} + c \partial_{2} \mathbf{v}_{2}; \quad \mathbf{S} = a_{s}^{2} \big( \partial_{1} \mathbf{v}_{2} + \partial_{2} \mathbf{v}_{1} \big)$$

При выводе этих уравнений из уравнений теории упругости учитывались слагаемые и из первого и из второго приближений, то есть величины разного веса. Поэтому данные уравнения также нуждаются в дополнительном исследовании методом асимптотико-группового анализа. Поскольку основные детали этого метода уже изложены достаточно подробно выше, то здесь будем производить все необходимые действия несколько быстрее, без лишних подробностей.

Уравнения (4.1.1) инвариантны относительно группы растяжений:

 $v_{1} = \delta^{\gamma} v_{1}^{*}, v_{2} = \delta^{\gamma} v_{2}^{*}, V = \delta^{\gamma} V^{*}, T_{1} = \delta^{\gamma} T_{1}^{*}, T_{2} = \delta^{\gamma} T_{2}^{*}, K = \delta^{\gamma} K^{*}, S = \delta^{\gamma} S^{*}$ (4.1.2)

Это позволяет оставить при асимптотическом анализе без растяжений одну из искомых функций, сравнивая с ней другие. Учитывая также, что все коэффициенты в (4.1.1) есть величины порядка единицы, выполним преобразования:

$$\partial_{1} = \delta^{\alpha_{1}} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} = \delta^{\alpha_{1}} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{\alpha_{2}} \partial_{t}^{*}, \ v_{1} = \delta^{\alpha_{3}} v_{1}^{*}, \ v_{2} = \delta^{\alpha_{3}} v_{2}^{*}, \ V = V^{*} \quad (4.1.3)$$

$$T_{1} = \delta^{\alpha_{4}} T_{1}^{*}, \ T_{2} = \delta^{\alpha_{4}} T_{2}^{*}, \ S = \delta^{\alpha_{4}} S^{*}, \ K = \delta^{\alpha_{5}} K^{*},$$

потребовав справедливости соотношений:

$$\hat{\sigma}_{1}^{*} \sim \hat{\sigma}_{2}^{*} \sim \hat{\sigma}_{t}^{*} \sim 1; \ \mathbf{v}_{1}^{*} \sim \mathbf{v}_{2}^{*} \sim \mathbf{V} \sim \mathbf{T}_{1}^{*} \sim \mathbf{T}_{2}^{*} \sim \mathbf{S}^{*} \sim \mathbf{K}^{*}$$
 (4.1.4)

Здесь, для упрощения анализа, приняты также предположения:

$$\partial_1 \sim \partial_2; \ \mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2; \ \mathbf{T}_1 \sim \mathbf{T}_2 \sim \mathbf{S},$$

$$(4.1.5)$$

что позволило уменьшить количество параметров асимптотического интегрирования.

В результате преобразований (4.1.3) все члены уравнений (4.1.1) приобретают коэффициенты в виде некоторых степеней б, которые, в силу (4.1.4), полностью определяют веса этих членов. Выпишем соответствующую таблицу показателей степени, располагая их в том же порядке, что и члены уравнений (4.1.1):

$$2\alpha_1 + \alpha_3, \ 2\alpha_1 + \alpha_3, \ 2\alpha_1 + \alpha_3, \ \alpha_1, \ 2\alpha_2 + \alpha_3$$
 (4.1.6)

 $\begin{array}{l} 2\alpha_{1}+\alpha_{3}, \ 2\alpha_{1}+\alpha_{3}, \ 2\alpha_{1}+\alpha_{3}, \ \alpha_{1}, \ 2\alpha_{2}+\alpha_{3}; \\ 0, \ \alpha_{1}+\alpha_{3}, \ \alpha_{1}+\alpha_{3}, \ 2\alpha_{2} \\ \alpha_{4}, \ \alpha_{1}+\alpha_{3}, \ \alpha_{1}+\alpha_{3}, \ 0; \ \alpha_{4}, \ \alpha_{1}+\alpha_{3}, \ \alpha_{1}+\alpha_{3}, \ 0 \\ \alpha_{5}, \ 0, \ \alpha_{1}+\alpha_{3}, \ \alpha_{1}+\alpha_{3}; \ \alpha_{4}, \ \alpha_{1}+\alpha_{3}, \ \alpha_{1}+\alpha_{3} \end{array}$ 

Используя эту таблицу, будем разыскивать значения параметров  $\alpha_1,...,\alpha_5$ , соответствующие минимальному упрощению уравнений (4.1.1). Применение ЭВМ дало ряд результатов, из которых приведем здесь наиболее интересные.

Случай 1.  $\alpha_1 = -0.5$ ,  $\alpha_2 = -0.5$ ,  $\alpha_3 = -0.5$ ,  $\alpha_4 = -1$ ,  $\alpha_5 = -1$ . Это случай быстрых изменений по  $x_1$ ,  $x_2$  и t. Таблица (4.1.6) приобретает вид:

Соответствующие упрощенные уравнения будут:

$$\partial_{1}^{2} \mathbf{v}_{1} + a_{s}^{2} \partial_{2}^{2} \mathbf{v}_{1} + e \partial_{1} \partial_{2} \mathbf{v}_{2} - \partial_{t}^{2} \mathbf{v}_{1} = 0$$

$$\partial_{2}^{2} \mathbf{v}_{2} + a_{s}^{2} \partial_{1}^{2} \mathbf{v}_{2} + e \partial_{1} \partial_{2} \mathbf{v}_{1} - \partial_{t}^{2} \mathbf{v}_{2} = 0; \quad 8c(\partial_{1} \mathbf{v}_{1} + \partial_{2} \mathbf{v}_{2}) + \partial_{t}^{2} \mathbf{V} = 0$$
(4.1.8)

 $\begin{array}{ll} T_1 = \partial_1 v_1 + c \partial_2 v_2; \ T_2 = \partial_2 v_2 + c \partial_1 v_1; \ K = c \big( \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 \big); \ S = a_s^2 \big( \partial_1 v_2 + \partial_2 v_1 \big) \\ \text{Случай} & 2. \quad \alpha_1 = 0.5, \ \alpha_2 = 0.5, \ \alpha_3 = -0.5, \ \alpha_4 = 0, \ \alpha_5 = 0 \,. \end{array}$  Это случай

медленных изменений по  $x_1$ ,  $x_2$  и t. В соответствии с видом таблицы (4.1.6):

получаем упрощенные уравнения:

$$\partial_{1}^{2} \mathbf{v}_{1} + a_{s}^{2} \partial_{2}^{2} \mathbf{v}_{1} + e \partial_{1} \partial_{2} \mathbf{v}_{2} + c \partial_{1} \mathbf{V} - \partial_{t}^{2} \mathbf{v}_{1} = 0$$

$$\partial_{2}^{2} \mathbf{v}_{2} + a_{s}^{2} \partial_{1}^{2} \mathbf{v}_{2} + e \partial_{1} \partial_{2} \mathbf{v}_{1} + c \partial_{2} \mathbf{V} - \partial_{t}^{2} \mathbf{v}_{2} = 0; \quad \mathbf{V} + c (\partial_{1} \mathbf{v}_{1} + \partial_{2} \mathbf{v}_{2}) = 0$$

$$\mathbf{T}_{1} = \partial_{1} \mathbf{v}_{1} + c \partial_{2} \mathbf{v}_{2} + c \mathbf{V}; \quad \mathbf{T}_{2} = \partial_{2} \mathbf{v}_{2} + c \partial_{1} \mathbf{v}_{1} + c \mathbf{V}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{V} + c \partial_{1} \mathbf{v}_{1} + c \partial_{2} \mathbf{v}_{2}; \quad \mathbf{S} = a_{s}^{2} (\partial_{1} \mathbf{v}_{2} + \partial_{2} \mathbf{v}_{1})$$

$$\mathbf{W}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V} + c \partial_{1} \mathbf{v}_{1} + c \partial_{2} \mathbf{v}_{2}; \quad \mathbf{S} = a_{s}^{2} (\partial_{1} \mathbf{v}_{2} + \partial_{2} \mathbf{v}_{1})$$

Исключая, при помощи третьего уравнения, функцию V из остальных уравнений окончательно получаем:

$$\partial_{1}^{2} \mathbf{v}_{1} + \frac{1 - \mathbf{v}}{2} \partial_{2}^{2} \mathbf{v}_{1} + \frac{1 + \mathbf{v}}{2} \partial_{1} \partial_{2} \mathbf{v}_{2} - \frac{1}{a_{1}^{2}} \partial_{t}^{2} \mathbf{v}_{1} = 0$$

$$\partial_{2}^{2} \mathbf{v}_{2} + \frac{1 - \mathbf{v}}{2} \partial_{1}^{2} \mathbf{v}_{2} + \frac{1 + \mathbf{v}}{2} \partial_{1} \partial_{2} \mathbf{v}_{1} - \frac{1}{a_{1}^{2}} \partial_{t}^{2} \mathbf{v}_{2} = 0$$

$$\mathbf{T}_{1} = a_{1}^{2} (\partial_{1} \mathbf{v}_{1} + \mathbf{v} \partial_{2} \mathbf{v}_{2}); \ \mathbf{T}_{2} = a_{1}^{2} (\partial_{2} \mathbf{v}_{2} + \mathbf{v} \partial_{1} \mathbf{v}_{1}); \ \mathbf{S} = a_{s}^{2} (\partial_{1} \mathbf{v}_{2} + \partial_{2} \mathbf{v}_{1})$$

$$(4.1.11)$$

V = 
$$-c(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2)$$
; K = 0;  $a_1^2 = \frac{1 - 2v}{(1 - v)^2}$ 

Это уравнения обобщенного плоского напряженного состояния, записанные в тех же безразмерных величинах, что и исходные уравнения (4.1.1). Величина  $a_1$  – безразмерная скорость распространения квазифронта продольных волн (3.8.6).

Случай 3.  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 0.5$ ,  $\alpha_4 = 0$ ,  $\alpha_5 = 0$ . Здесь медленное изменение по  $x_1$ ,  $x_2$  сочетается с более медленным изменением по t. Таблица (4.1.6):

приводит к упрощенным уравнениям:

$$8V + \partial_t^2 V = 0; \ c\partial_1 V - \partial_t^2 v_1 = 0; \ c\partial_2 V - \partial_t^2 v_2 = 0$$

$$T_1 = cV; \ T_2 = cV; \ K = V; \ S = 0$$
(4.1.13)

Эти уравнения описывают поперечные симметричные колебания слоя. Эти самоуравновешенные колебания и представляют, собственно говоря, тот главный эффект, который учитывают уточненные уравнения (4.1.1) по сравнению с известными уравнениями (4.1.11).

Перейдем к построению процедуры последовательных приближений. Представим все искомые функции в виде рядов:

$$\mathbf{v}_{1} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{v}_{1i}, \dots, \mathbf{S} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_{i}$$
(4.1.14)

Заменим преобразования (4.1.3) и соотношения (4.1.4) на преобразования:

$$\begin{split} \partial_{1} &= \delta^{\alpha_{1}} \partial_{1}^{*}; \ \partial_{2} = \delta^{\alpha_{1}} \partial_{2}^{*}; \ \partial_{t} = \delta^{\alpha_{2}} \partial_{t}^{*}; \ v_{1i} = \delta^{\alpha_{3}+i-1} v_{1i}^{*}; \ v_{2i} = \delta^{\alpha_{3}+i-1} v_{2i}^{*} \ (4.1.15) \\ V_{i} &= \delta^{i-1} V_{i}^{*}; \ T_{1i} = \delta^{\alpha_{4}+i-1} T_{1i}^{*}; \ T_{2i} = \delta^{\alpha_{4}+i-1} T_{2i}^{*}; \ S_{i} = \delta^{\alpha_{4}+i-1} S_{i}^{*}; \ K_{i} = \delta^{\alpha_{5}+i-1} K_{i}^{*} \\ & (i = 1, 2, ...), \end{split}$$

приводящие к соотношениям:

 $\partial_1^* \sim \partial_2^* \sim \partial_t^* \sim 1; v_{1i}^* \sim v_{2i}^* \sim V_i^* \sim T_{1i}^* \sim T_{2i}^* \sim S_i^* \sim K_i^* \sim V_1^*$  (i = 1,2,...) (4.1.16) Подставляем (4.1.14) в (4.1.1), выполняем преобразования (4.1.15) и

Подставляем (4.1.14) в (4.1.1), выполняем преобразования (4.1.15) и производим расщепление по одинаковым степеням  $\delta$ , соответствующее каким-то заданным  $\alpha_1,...,\alpha_5$ . Процедура расщепления приводит к бесконечной рекуррентной системе уравнений, инвариантной относительно преобразования (4.1.15). Эта инвариантность позволяет, не меняя вида уравнений, вернуться от преобразованных к исходным уравнениям, так что ни уравнения, ни ряды для искомых функций не содержат формально введенного малого параметра  $\delta$ .

Конкретные примеры реализации этой процедуры приведены ниже.

В заключение этого параграфа отметим, что рекуррентные системы уравнений, получаемые описанным способом, сохраняют инвариантность и относительно преобразований типа (4.1.2), которые принимают здесь вид:

Эти преобразования, наряду с (4.1.15), используются ниже при построении инвариантно-групповых решений бесконечных рекуррентных систем уравнений.

## 4.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРОДОЛЬНОЙ

### ОДНОМЕРНОЙ ВОЛНЫ В СЛОЕ

Рассмотрим частный случай одномерной задачи, положив в уравнениях (4.1.1)  $\partial_2 = 0$ . Тогда эти уравнения распадаются на две подсистемы. Первая подсистема уравнений:

$$\partial_1^2 \mathbf{v}_1 + c\partial_1 \mathbf{V} - \partial_t^2 \mathbf{v}_1 = 0; \ 8 (\mathbf{V} + \mathbf{c}\partial_1 \mathbf{v}_1) + \partial_t^2 \mathbf{V} = 0$$

$$\mathbf{T}_1 = \partial_1 \mathbf{v}_1 + c\mathbf{V}; \ \mathbf{T}_2 = c(\partial_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{V}); \ \mathbf{K} = \mathbf{V} + c\partial_1 \mathbf{v}_1$$
(4.2.1)

описывает распространение продольных волн, вторая –

$$a_{s}^{2}\partial_{1}^{2}\mathbf{v}_{2} - \partial_{t}^{2}\mathbf{v}_{2} = 0; \ \mathbf{S} = a_{s}^{2}\partial_{1}\mathbf{v}_{2}$$
 (4.2.2)

распространение поперечных волн.

Рассмотрим подробнее уравнения (4.2.1). Построим для них процедуры последовательных приближений, взяв за основу три случая упрощения, приведенные в предыдущем параграфе.

Случай 1. В соответствии с (4.1.8) из (4.2.1) имеем в первом приближении:

$$\partial_1^2 \mathbf{v}_1 - \partial_t^2 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{8} c \partial_1 \mathbf{v}_1 + \partial_t^2 \mathbf{V} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{T}_1 = \partial_1 \mathbf{v}_1; \quad \mathbf{T}_2 = c \partial_1 \mathbf{v}_1; \quad \mathbf{K} = c \partial_1 \mathbf{v}_1 \qquad (4.2.3)$$

Соответствующая рекуррентная система уравнений имеет вид:

$$\partial_{1}^{2} v_{1i} + c \partial_{1} V_{i-1} - \partial_{t}^{2} v_{1i} = 0; \ 8 (V_{i-1} + c \partial_{1} v_{1i}) + \partial_{t}^{2} V_{i} = 0$$

$$T_{1i} = \partial_{1} v_{1i} + c V_{i-1}; \ T_{2i} = c (\partial_{1} v_{1i} + V_{i-1}); \ K_{i} = V_{i-1} + c \partial_{1} v_{1i} \quad (i = 1, 2....)$$

$$(4.2.4)$$

Уравнения (4.2.1) во многом напоминают уравнение Клейна-Гордона, а процедура последовательных приближений, описанная уравнениями (4.2.4), соответствует аналогичной процедуре для уравнения Клейна-Гордона в случае прифронтовой асимптотики. Поэтому будем искать решение уравнений (4.2.4) тем же способом, как в случае уравнения Клейна-Гордона.

Перейдем в преобразованиях (4.1.15) от растяжений дифференциальных операторов к растяжениям независимых переменных. Учитывая соответствующие значения параметров  $\alpha_1,...,\alpha_5$ , получаем преобразования, соответствующие уравнениям (4.2.4):

$$\mathbf{x}_{1}^{*} = \delta^{-0.5} \mathbf{x}_{1}, \ \mathbf{t}^{*} = \delta^{-0.5} \mathbf{t}, \ \mathbf{v}_{1i} = \delta^{i-1.5} \mathbf{v}_{1i}^{*}, \ \mathbf{V}_{i} = \delta^{i-1} \mathbf{V}_{i}^{*}, \ \mathbf{T}_{1i} = \delta^{i-2} \mathbf{T}_{1i}^{*}$$
(4.2.5)

 $T_{2i} = \delta^{i-2} T_{2i}^*, K_i = \delta^{i-2} K_i^* \quad (i = 1, 2, ...)$ 

Повторяя рассуждения, приведенные вî âòîðié главе, получаем, что решение уравнений (4.2.4), инвариантное относительно суперпозиции преобразований (4.2.5) и (4.1.17), имеет вид:

$$v_{i} = \sum_{j=1}^{i} v_{i,j} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1}; \quad V_{i} = \sum_{j=1}^{i} V_{i,j} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j}$$
(4.2.6)  
$$T_{1i} = \sum_{j=1}^{i} T_{1i,j} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-2}; \quad K_{i} = \sum_{j=1}^{i} K_{i,j} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-2}$$
(i = 1,2,...)

Здесь, для простоты, у единственной координаты  $x_1$  и единственного перемещения  $v_1$  опущены индексы 1. Подставляя (4.2.6) в (4.2.4) и приводя подобные по одинаковым степеням х и t-х, получаем рекуррентные зависимости для коэффициентов сумм (4.2.6):

$$\begin{split} v_{i,j} &= \frac{1}{2(i-j)(a+i+j-1)} \left\{ (i-j+1)(i-j)v_{i,j-1} + c \Big[ (i-j)V_{i-1,j-1} - (4.2.7) \\ &- (a+i+j-1)V_{i-1,j} \Big] \right\} \quad (j=1,\dots,i-1) \\ V_{i,j} &= \frac{8}{(a+i+j)(a+i+j-1)} \left\{ 8 \Big[ (a+i+j-1)v_{i,j} - (i-j+1)v_{i,j-1} \Big] - V_{i-1,j-1} \right\} \\ T_{li,j} &= (i-j+1)v_{i,j-1} - (a+i+j-1)v_{i,j} + cV_{i-1,j-1} \\ K_{i,j} &= V_{i-1,j-1} + c \Big[ (i-j+1)v_{i,j-1} - (a+i+j-1)v_{i,j} \Big] \quad (j=1,\dots,i) \end{split}$$

Зависимости (4.2.7) позволяют находить все коэффициенты сумм (4.2.6), кроме коэффициентов  $v_{i,i}$ , являющихся константами интегрирования. Для нахождения этих коэффициентов учтем, что решение (4.2.6) определено при х≤t и, в силу этого, описывает, при нулевых начальных условиях, излучение волны из точки х=0. При х=0 для усилия  $T_1$  имеем:

$$T_{1} = \sum_{i=1}^{\infty} T_{1i} = \sum_{i=1}^{\infty} T_{1i,i} t^{a+2i-2}$$
(4.2.8)

Следовательно, решение (4.2.6) может соответствовать задаче о распространении волны в полубесконечном  $x \ge 0$  слое под действием внезапно приложенного на торце x=0 в момент времени t=0 продольного усилия, в дальнейшем изменяющегося во времени по закону:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^{a+2i-2}$$
(4.2.9)

$$T_{i,i} = v_{i,i-1} - (a + 2i - 1)v_{i,i} + cV_{i-1,i-1} = f_i \quad (i = 1, 2, ...)$$
(4.2.10)

Отсюда:

$$\mathbf{v}_{i,i} = \frac{1}{\mathbf{a} + 2i - 1} \left( \mathbf{v}_{i,i-1} + \mathbf{c} \mathbf{V}_{i-1,i-1} - \mathbf{f}_i \right) \quad (i = 1, 2, ...)$$
(4.2.11)

Совокупность формул (4.2.7) и (4.2.11) полностью описывает решение (4.2.6) при заданном граничном условии вида (4.2.9). В важном частном случае внезапно приложенной постоянной силы f(t) = 1 имеем a = 0,  $f_1 = 1$ ,  $f_i = 0$  (i > 1)

Задача суммирования рядов (4.1.14), (4.2.6) при помощи рекуррентных формул (4.2.7), (4.2.11) для отыскания коэффициентов сравнительно несложно реализуется на ЭВМ. На рисунках 4.1 и 4.2 приведены соответствующие графики для усилия  $T_1$  и перемещения v в случае внезапно приложенной продольной силы. (Все расчеты здесь и ниже выполнены для значения коэффициента Пуассона v=0.3).

Перед анализом этих графиков напомним, что использованный рекуррентный процесс носит характер прифронтовой асимптотики, поскольку соответствует, в первом приближении, быстроизменяющемуся по х и t напряженно-деформированному состоянию. Использование такого процесса позвîляет описать всю возмущенную зону 0≤х≤t только для сравнительно небольших значений времени t. С ростом t важную роль начинает играть описание зон, удаленных от фронта х=t, то есть построение приграничной асимптотики.

Для этого подходит второй рекуррентный процесс, начинающийся с уравнений первого приближения (4.1.11). В одномерном случае эти уравнения принимают вид:

$$a_1^2 \partial_1^2 \mathbf{v} - \partial_t^2 \mathbf{v} = 0; \ \mathbf{T}_1 = a_1^2 \partial_1 \mathbf{v}, \ \mathbf{T}_2 = a_1^2 \mathbf{v} \partial_1 \mathbf{v}, \ \mathbf{V} = -\mathbf{c} \partial_1 \mathbf{v}, \ \mathbf{K} = 0$$
(4.1.12)

В случае внезапно приложенной постоянной силы f(t) = 1 решение уравнений (4.2.12) будет:

$$T_1 = 1, v = -\frac{1}{a_1^2} (a_1 t - x), T_2 = v, V = -\frac{c}{a_1^2}$$
 (4.2.13)

Соответствующие графики для T<sub>1</sub> и v приведены, для сравнения, на тех же рисунках 4.1. и 4.2., на которых изображены уточненные результаты. Будем в дальнейшем, для краткости, называть это решение классическим.

В силу решения (4.2.13) процедура последовательных приближений ограничивается для второго рекуррентного процесса первым приближением. Это связано с тем, что во второе приближение передается величина  $\partial_t^2 V$ , равная, в соответствии с (4.2.13), нулю.



В итоге оказывается, что известные уравнения обобщенного плоского напряженного состояния описывают приграничную зону для решения, строящегося на основе уточненных уравнений. При этом, в то время как в соответствии с классическими уравнениями, при  $x=a_1t$  должен быть фронт, то есть скачкообразное изменение усилия  $T_1$ , на самом деле происходит быстрое, но не скачкообразное изменение этого усилия. Такое явление, известное как образование квазифронта, изучалось и ранее, например, в работе [44]. Здесь важно то, что квазифронт проявляется при анализе решения уточненных двумерных уравнений.

При удалении от квазифронта x=a<sub>1</sub>t к границе x=0 происходит все большее сближение уточненного и классического решений. Особенно быстро это сближение происходит для перемещения v.

Рассмотрим также третий рекуррентный процесс, порождаемый уравнениями (4.1.13). При нулевых начальных условиях все искомые функции здесь оказываются равными нулю. На самом деле этот процесс дополняет второй рекуррентный процесс, поскольку во втором процессе не учитываются начальные условия для V. Нулевые результаты третьего рекуррентного процесса следует рассматривать, так же как и результаты для второго процесса, асимптотически. Они показывают, что с ростом времени и удалением от фронта выражения для всех искомых функций стремятся к заданным вторым рекуррентным процессом, а отличия, вызванные поперечными колебаниями слоя, затухают.
Вернемся вновь к суммам (4.2.6). При больших значениях времени t и  $x \rightarrow t$  преобладающими в каждой из таких сумм будут слагаемые с наибольшими степенями x и наименьшими степенями t-x, то есть слагаемые с j=1. Удерживая в каждой из сумм (4.2.6) только такие слагаемые, получаем таким же образом, как для уравнения Клейна-Гордона, асимптотические выражения:

$$v \approx v_{1,1}(t-x)^{a+1}\Lambda_{a+1}(z); T_1 \approx T_{11,1}(t-x)^a \Lambda_a(z); z = \sqrt{16c^2 x(t-x)}$$
 (4.2.14)

Выражения (4.2.14) описывают прифронтовые зоны для больших значений времени. В частном случае внезапно приложенной и остающейся постоянной нагрузки будет:

$$v \approx -(t - x)\Lambda_1(z); T_1 = \Lambda_0(z)$$
 (4.2.15)



Соответствующий график для  $T_1$  приведен, в сравнении с точным решением на рис. 4.2. Как и следовало ожидать, точный и приближенный графики сливаются вблизи фронта, постепенно расходясь при удалении от него.

Таким образом видим, что для случая внезапно приложенной постоянной нагрузки при больших значениях времени прифронтовая зона описывается формулами (4.2.14), а приграничная – формулами (4.2.13). Последовательное использование асимптотико-группового анализа позволило довести результаты, фактически, до замкнутых формул.

Рассмотрим подробнее физический смысл полученных результатов. Начнем с вопроса о том, чем вызываются те или иные скорости распространения фронтов волн. В трехмерных уравненияч теории упругости (3.1.1) в соотношениях закона Гука для нормальных напряжений равный вес имеют все три напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ . В этих условиях скорость распространения продольных волн равна  $a_p$  (3.5.14). В уравнениях обобщенного плоского напряженного состояния напряжение  $\sigma_{33}$  принимается на порядок меньшим, чем  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ ; при этом скорость распространения продольных волн уменьшается и, в безразмерном виде, равна  $a_1$  (3.8.6). В случае плоской деформации тонкого слоя предположение о малости  $\sigma_{33}$  в большинстве случаев оправдывается. Однако зона вблизи фронта продольной волны является исключением.

Эта зона справедливо рассматривается, как область принципиально трехмерного напряженно-деформированного состояния, независимо от малости толщины слоя. Это связано с тем, что кроме основного фронта продольной волны, перпендикулярного слою, здесь существенную роль играют дополнительные фронты, вызванные отражением основного фронта, а затем и дополнительных, от лицевых поверхностей слоя. Поэтому, строго говоря, уточненные уравнения так же непригодны в прифронтовой зоне, как и классические. Это подтверждается и асимптотическими оценками (3.5.16), которые нарушаются в прифронтовой зоне.

Однако рассмотрим тот же вопрос не с точки зрения локальных явлений, возникающих по толщине слоя, а с точки зрения интегральных следствий этих явлений.

В точках основного фронта нормальное напряжений  $\sigma_{11}$  изменяется скачкообразно на величину напряжения, приложенного внезапно на границе в начальный момент времени. Но при этом деформации во всех направлениях, в силу их непрерывности, остаются такими же, как перед фронтом, то есть нулевыми. Возникает известная ситуация стесненного напряженно-деформированного состояния. Благодаря эффекту Пуассона напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  имеют при этом тот же порядок, что и  $\sigma_{11}$ . Таким образом, трехмерность напряженного состояния здесь не зависит от добавочных отраженных фронтов (ниже будет рассмотрен случай их отсутствия), а является объективной чертой картины даже в случае распространения одномерной волны.

При удалении от фронта появляются ненулевые деформации, причем важную роль приобретают колебания по толщине слоя, описываемые функцией V (рис.4.3). Вблизи от фронта эти колебания являются высокочастотными и поэтому небольшими по амплитуде. При этом сохраняет относительно большое значение напряжение  $\sigma_{33}$ , заданное здесь усилием К (рис 4.4). При дальнейшем удалении от фронта частота колебаний падает, уменьшается и усилие К. Тем самым создается уже близкое к двумерному напряженное состояние и образуется, в соответствии с этим, квазифронт.

Обратим особое внимание на рис. 4.3, на котором изображены графики поперечного перемещения V. В соответствии с классическим решением (4.2.13) величина V изменяется на квазифронте скачкообразно.

Следовательно, скачкообразно изменяется и толщина слоя, что совершенно невозможно с физической точки зрения. Это лишний раз показывает, что уравнения обобщенного плоского напряженного состояния, хотя и имеют гиперболический тип, на самом деле описывают только сравнительно медленно изменяющееся напряженно-деформированное состояние вдали от фронта.



Рис. 4.4. Эволюция поперечного усилия К

Уравнения уточненного плоского напряженного состояния, несмотря на свой двумерный характер, позволяют отразить, в усредненном виде, важнейшие черты трехмерного напряженно-деформированного состояния вблизи фронта

распространяющегося возмущения. В определенном смысле, усредненные характеристики типа функций К и V даже удобнее для исследования трехмерного напряженно-деформированного состояния, чем точные, но локальные результаты, получаемые на основе трехмерных уравнений теории упругости.

Вскрытая здесь важная роль поперечных колебаний слоя особенно хорошо видна, если сделать такие колебания невозможными. В параграфе 3.5 был получен еще один вариант уточненных уравнений плоского напряженного состояния (3.5.18) при условии отсутствия поперечных перемещений на лицевых поверхностях слоя (V=0). В этом случае поперечные колебания невозможны и прифронтовая зона приобретает совершенно другой вид.

Уравнения (3.5.18) в одномерном случае ( $\partial_2 = 0$ ) будут:

$$\partial_1^2 \mathbf{v}_1 - \partial_1^2 \mathbf{v}_1 = 0; \ \mathbf{T}_1 = \partial_1 \mathbf{v}_1; \ \mathbf{T}_2 = \mathbf{c} \partial_1 \mathbf{v}_1; \ \mathbf{K} = \mathbf{c} \partial_1 \mathbf{v}_1$$
(4.2.16)

В соответствии с этими уравнениями для случая внезапно приложенной постоянной нагрузки получаем:

 $T_1 = 1, T_2 = c, K = c, v_1 = -(t - x)$  (4.2.17)

Как видим, такое решение, соответствующее случаю отсутствия поперечных колебаний слоя, принципиально отличается от решения при наличии таких колебаний. Отсутствует высокочастотная прифронтовая зона, отсутствует и квазифронт. Это лишний раз подчеркивает важность учета таких колебаний и справедливость проведенного выше анализа.

Отметим также, что уравнения (4.2.16) выводились для случая отсутствия вторичных фронтов, отраженных от лицевых поверхностей слоя (при соответствующих кинематических граничных условиях они не образуются), однако напряженно-деформированное состояние, описываемое этими уравнениями, все же является трехмерным ввиду равных весов всех трех усилий  $T_1$ ,  $T_2$ , K. Трехмерной является и скорость распространения фронта продольных волн.

Таким образом, видим, что достаточно сложные трехмерные эффекты напряженно-деформированного состояния удается, интегрально, выявить на основе двумерных или даже одномерных уточненных уравнений плоского напряженного состояния слоя.

### 4.3. АСИМПТОТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Запишем уравнения (3.7.22) в случае отсутствия нагрузок на лицевых поверхностях слоя:

$$\partial_{1}M_{1} + \partial_{2}H - 8a_{s}^{2}Q_{1} - \partial_{t}^{2}\phi_{1} = 0; \quad \partial_{1}H + \partial_{2}M_{2} - 8a_{s}^{2}Q_{2} - \partial_{t}^{2}\phi_{2} = 0 \quad (4.3.1)$$

$$a_{s}^{2}(\partial_{1}Q_{1} + \partial_{2}Q_{2}) + N - \partial_{t}^{2}w = 0; \quad N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W = 0$$

$$b\partial_{1}\phi_{1} = M_{1} - \nu(M_{2} + N); \quad b\partial_{2}\phi_{2} = M_{2} - \nu(M_{1} + N); \quad bW = N - \nu(M_{1} + M_{2})$$

$$\mathbf{H} = a_{s}^{2} (\partial_{1} \phi_{2} + \partial_{2} \phi_{1}); \quad \mathbf{Q}_{1} = \partial_{1} \mathbf{w} + \phi_{1} = \beta_{1}; \quad \mathbf{Q}_{2} = \partial_{2} \mathbf{w} + \phi_{2} = \beta_{2}$$

Учитывая, что при выводе этих уравнений из уравнений теории упругости удерживались слагаемые разного веса из двух приближений, проведем их дополнительное исследование методом асимптотико-группового анализа.

Уравнения (4.3.1) инвариантны относительно растяжений:

$$\phi_1 = \delta^{\gamma} \phi_1^*, \ \phi_2 = \delta^{\gamma} \phi_2^*, \ w = \delta^{\gamma} w^*, \ W = \delta^{\gamma} W^*, \ M_1 = \delta^{\gamma} M_1^*, \ M_2 = \delta^{\gamma} M_2^*$$
(4.3.2)  
 
$$N = \delta^{\gamma} N^*, \ H = \delta^{\gamma} H^*, \ Q_1 = \delta^{\gamma} Q_1^*, \ Q_2 = \delta^{\gamma} Q_2^*$$

Это позволяет оставить при асимптотическом анализе без растяжений одну из искомых функций, сравнивая с ней другие. Учитывая, что все коэффициенты в (4.3.1) есть величины порядка единицы и принимая упрощающие предположения:

 $\partial_1 \sim \partial_2, \phi_1 \sim \phi_2, \quad M_1 \sim M_2 \sim H, Q_1 \sim Q_2$  (4.3.3) выполним растяжения:

 $\partial_1 = \delta^{\alpha_1} \partial_1^*, \ \partial_2 = \delta^{\alpha_1} \partial_2^*, \ \partial_t = \delta^{\alpha_2} \partial_t^*, \ \phi_1 = \delta^{\alpha_3} \phi_1^*, \ \phi_2 = \delta^{\alpha_3} \phi_2^*, \ w = \delta^{\alpha_4} w * (4.3.4)$ W = W\*,  $M_1 = \delta^{\alpha_5} M_1^*, \ M_2 = \delta^{\alpha_5} M_2^*, \ H = \delta^{\alpha_5} H^*, \ N = \delta^{\alpha_6} N^*, \ Q_1 = \delta^{\alpha_7} Q_1^*, \ Q_2 = \delta^{\alpha_7} Q_2^*,$ потребовав справедливости соотношений:

$$\partial_1^* \sim \partial_2^* \sim \partial_t^* \sim 1; \ \phi_1^* \sim \phi_2^* \sim w^* \sim W^* \sim M_1^* \sim M_2^* \sim H^* \sim N^* \sim Q_1^* \sim Q_2^*$$
 (4.3.5)

В результате преобразований (4.3.4) все члены уравнений (4.3.1) приобретают коэффициенты в виде некоторых степеней б, которые, в силу (4.3.5), полностью определяют веса этих членов. Выпишем соответствующую таблицу показателей степени, располагая их в том же порядке, что и члены уравнений (4.3.1):

$$\begin{aligned} &\alpha_{1} + \alpha_{5}, \alpha_{1} + \alpha_{5}, \alpha_{7}, 2\alpha_{2} + \alpha_{3}; \ \alpha_{1} + \alpha_{5}, \alpha_{1} + \alpha_{5}, \alpha_{7}, 2\alpha_{2} + \alpha_{3} \\ &\alpha_{1} + \alpha_{7}, \alpha_{1} + \alpha_{7}, \alpha_{6}, 2\alpha_{2} + \alpha_{4}; \ \alpha_{6}, 2\alpha_{2} + \alpha_{4}, 2\alpha_{2} \\ &\alpha_{1} + \alpha_{3}, \alpha_{5}, \alpha_{5}, \alpha_{6}; \ \alpha_{1} + \alpha_{3}, \alpha_{5}, \alpha_{5}, \alpha_{6}; \ 0, \alpha_{6}, \alpha_{5}, \alpha_{5} \\ &\alpha_{5}, \alpha_{1} + \alpha_{3}, \alpha_{1} + \alpha_{3}; \ \alpha_{7}, \alpha_{1} + \alpha_{4}, \alpha_{3}; \ \alpha_{7}, \alpha_{1} + \alpha_{4}, \alpha_{3} \end{aligned}$$
(4.3.6)

Использование этой таблицы дало, с применением ЭВМ, следующие случаи минимального упрощения уравнений (4.3.1):

Случай 1.  $\alpha_1 = -0.5, \alpha_2 = -0.5, \alpha_3 = -0.5, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = -1, \alpha_6 = -1, \alpha_7 = -0.5.$ Это случай быстрых изменений по  $x_1, x_2, t$  и преобладания  $\phi_1, \phi_2$  над w. Таблица (4.3.6) приобретает вид:

$$-1.5, -1.5, -0.5, -1.5; -1.5, -1.5, -0.5, -1.5$$
 (4.3.7)  
 $-1, -1, -1, -1; -1, -1, -1$   
 $-1, -1, -1, -1; -1, -1, -1; 0, -1, -1, -1$   
 $-1, -1, -1; -0.5, -0.5, -0.5; -0.5, -0.5, -0.5$   
Соответствующие упрощенные уравнения будут:

$$\partial_1 \mathbf{M}_1 + \partial_2 \mathbf{H} - \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{0}; \ \partial_1 \mathbf{H} + \partial_2 \mathbf{M}_2 - \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}_2 = \mathbf{0}$$
(4.3.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{s}^{2}(\partial_{1}Q_{1} + \partial_{2}Q_{2}) + N - \partial_{t}^{2}w &= 0; \quad N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W = 0 \\ b\partial_{1}\phi_{1} &= M_{1} - \nu(M_{2} + N); \quad b\partial_{2}\phi_{2} = M_{2} - \nu(M_{1} + N); \quad 0 = N - \nu(M_{1} + M_{2}) \\ H &= \mathbf{A}_{s}^{2}(\partial_{1}\phi_{2} + \partial_{2}\phi_{1}); \quad Q_{1} = \partial_{1}w + \phi_{1} = \beta_{1}; \quad Q_{2} = \partial_{2}w + \phi_{2} = \beta_{2} \\ C_{IIV}WAH = \frac{1}{2} \left( \partial_{1}\phi_{2} + \partial_{2}\phi_{1} \right); \quad Q_{1} = -0.5, \quad \alpha_{2} = 0.5, \quad \alpha_{3} = 0.5, \quad \alpha_{4} = 0.5, \quad \alpha_{5} =$$

Случай 2.  $\alpha_1 = -0.5$ ,  $\alpha_2 = -0.5$ ,  $\alpha_3 = 0.5$ ,  $\alpha_4 = 0$ ,  $\alpha_5 = 0$ ,  $\alpha_6 = 0$ ,  $\alpha_7 = -0.5$ . Это вновь случай быстрого изменения по  $x_1, x_2, t$ , но уже с преобладанием w над  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Таблица (4.3.6) имеет вид:

-0.5, -0.5, -0.5, -0.5; -0.5, -0.5, -0.5, -0.5 (4.3.9) -1, -1, 0, -1; 0, -1, -1 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0 0, 0, 0; -0.5, -0.5, 0.5; -0.5, -0.5, 0.5 Упрощенные уравнения будут:

 $\begin{array}{l} \partial_1 M_1 + \partial_2 H - 8a_s^2 Q_1 - \partial_t^2 \phi_1 = 0; \ \partial_1 H + \partial_2 M_2 - 8a_s^2 Q_2 - \partial_t^2 \phi_2 = 0 \qquad (4.3.10) \\ a_s^2 (\partial_1 Q_1 + \partial_2 Q_2) - \partial_t^2 w = 0; \ \frac{1}{2} \partial_t^2 w + \frac{1}{16} \partial_t^2 W = 0 \\ b\partial_1 \phi_1 = M_1 - \nu (M_2 + N); \ b\partial_2 \phi_2 = M_2 - \nu (M_1 + N); \ bW = N - \nu (M_1 + M_2) \\ H = a_s^2 (\partial_1 \phi_2 + \partial_2 \phi_1); \ Q_1 = \partial_1 w = \beta_1; \ Q_2 = \partial_2 w = \beta_2 \\ \text{Случай 3.} \quad \alpha_1 = 0.5, \ \alpha_2 = 1, \ \alpha_3 = -0.5, \ \alpha_4 = -1, \ \alpha_5 = 0, \ \alpha_6 = 1, \ \alpha_7 = 0.5. \end{array}$ 

случай 5.  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = -0.5$ ,  $\alpha_4 = -1$ ,  $\alpha_5 = 0$ ,  $\alpha_6 = 1$ ,  $\alpha_7 = 0.5$ . Это случай медленного изменения по  $x_1$  и  $x_2$  и еще более медленного изменения по t. В соответствии с видом таблицы (4.3.6):

0.5, 0.5, 0.5, 1.5; 0.5, 0.5, 0.5, 1.5 (4.3.11) 1, 1, 1, 1; 1, 1, 2 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 1; 0, 1, 0, 0 0, 0, 0; 0.5, -0.5, -0.5; 0.5, -0.5, -0.5 получаем упрощенные уравнения:

$$\begin{split} \partial_{1}M_{1} + \partial_{2}H - 8a_{s}^{2}Q_{1} &= 0; \ \partial_{1}H + \partial_{2}M_{2} - 8a_{s}^{2}Q_{2} &= 0 \\ a_{s}^{2}(\partial_{1}Q_{1} + \partial_{2}Q_{2}) + N - \partial_{t}^{2}w &= 0; \ N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w &= 0 \\ b\partial_{1}\phi_{1} &= M_{1} - \nu M_{2}; \ b\partial_{2}\phi_{2} &= M_{2} - \nu M_{1}; \ bW &= -\nu (M_{1} + M_{2}) \\ H &= a_{s}^{2}(\partial_{1}\phi_{2} + \partial_{2}\phi_{1}); \ 0 &= \partial_{1}w + \phi_{1}; \ 0 &= \partial_{2}w + \phi_{2} \end{split}$$
(4.3.12)

Это классические уравнения изгиба пластины, записанные в тех же безразмерных величинах, что и уравнения (4.3.1).

Случай 4.  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = 0.5$ . Здесь медленное изменение по  $x_1, x_2$  сочетается с более быстрым изменением по t. Функция W преобладает над  $\varphi_1, \varphi_2$ . В соответствии с видом таблицы (4.3.6):

0.5, 0.5, 0.5, 0.5; 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5 1, 1, 0, 0; 0, 0, 0 1, 0, 0, 0; 1, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0 0, 1, 1; 0.5, 0.5, 0.5; 0.5, 0.5, 0.5 получаем упрощенные уравнения: (4.3.13)

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 H - 8a_s^2 Q_1 - \partial_t^2 \phi_1 = 0; \ \partial_1 H + \partial_2 M_2 - 8a_s^2 Q_2 - \partial_t^2 \phi_2 = 0$$
 (4.3.14)

$$\begin{split} N &-\partial_{t}^{2}w = 0; \ N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W = 0 \\ 0 &= M_{1} - \nu(M_{2} + N); \ 0 &= M_{2} - \nu(M_{1} + N); \ bW = N - \nu(M_{1} + M_{2}) \\ H &= 0; \ Q_{1} &= \partial_{1}w + \phi_{1} = \beta_{1}; \ Q_{2} &= \partial_{2}w + \phi_{2} = \beta_{2} \\ Oteo Hamma Hamma Hamma Hamma W ypabelene: \\ \partial_{t}^{2}W + 24W = 0 \end{split}$$

$$(4.3.15)$$

Таким образом, этот случай описывает колебания слоя, связанные с изменением его толщины.

Случай 5.  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -0.5, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = -0.5$ . Этот случай отличается от предыдущего преобладанием  $\phi_1, \phi_2$  над W. Таблица (4.3.6):

приводит к упрощенным уравнениям:

$$\begin{split} &8a_{s}^{2}Q_{1} + \partial_{t}^{2}\phi_{1} = 0; \ 8a_{s}^{2}Q_{2} + \partial_{t}^{2}\phi_{2} = 0 \tag{4.3.17} \\ &a_{s}^{2}(\partial_{1}Q_{1} + \partial_{2}Q_{2}) + N - \partial_{t}^{2}w = 0; \ N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W = 0 \\ &b\partial_{1}\phi_{1} = M_{1} - \nu(M_{2} + N); \ b\partial_{2}\phi_{2} = M_{2} - \nu(M_{1} + N); \ bW = N - \nu(M_{1} + M_{2}) \\ &H = a_{s}^{2}(\partial_{1}\phi_{2} + \partial_{2}\phi_{1}); \ Q_{1} = \phi_{1} = \beta_{1}; \ Q_{2} = \phi_{2} = \beta_{2} \\ &Otechaga \ имеем: \\ &\partial_{t}^{2}\beta_{1} + 8a_{s}^{2}\beta_{1} = 0; \ \partial_{t}^{2}\beta_{2} + 8a_{s}^{2}\beta_{2} = 0 \end{aligned}$$

Эти уравнения описывают сдвиговые колебания слоя.

В совокупности случаи 4 и 5 дополняют случай 3, поскольку учитывают как раз те детали напряженно-деформированного состояния слоя, которые не фиксируются классическими уравнениями изгиба. Учет колебаний, соответствующих случаям 4 и 5, и составляет главное отличие предлагаемых уточненных уравнений (4.3.1) по сравнению с классическими уравнениями.

Перейдем к построению процедуры последовательных приближений. Представим все искомые функции в виде рядов:

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i}, \dots, Q_2 = \sum_{i=1}^{\infty} Q_{2i}$$
(4.3.19)

Заменим преобразования (4.3.4) и соотношения (4.3.5) на преобразования:

$$\begin{aligned} \partial_{1} &= \delta^{\alpha_{1}} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} &= \delta^{\alpha_{1}} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{\alpha_{2}} \partial_{t}^{*}, \ \phi_{1i} = \delta^{\alpha_{3}+i-1} \phi_{1i}^{*}, \ \phi_{2i} = \delta^{\alpha_{3}+i-1} \phi_{2i}^{*} \quad (4.3.20) \\ w_{i} &= \delta^{\alpha_{4}+i-1} w_{i}^{*}, \ W_{i} = \delta^{i-1} W_{i}^{*}, \ M_{1i} = \delta^{\alpha_{5}+i-1} M_{1i}^{*}, \ M_{2i} = \delta^{\alpha_{5}+i-1} M_{2i}^{*}, \ H_{i} = \delta^{\alpha_{5}+i-1} H_{i}^{*} \\ N_{i} &= \delta^{\alpha_{6}+i-1} N_{i}^{*}, \ Q_{1i} = \delta^{\alpha_{7}+i-1} Q_{1i}^{*}, \ Q_{2i} = \delta^{\alpha_{7}+i-1} Q_{2i}^{*} \quad (i = 1, 2, ...), \end{aligned}$$

приводящие к соотношениям:

$$\partial_1^* \sim \partial_2^* \sim \partial_t^* \sim 1; \ \phi_{1i}^* \sim \phi_{2i}^* \sim W_i^* \sim W_i^* \sim M_{1i}^* \sim M_{2i}^* \sim H_i^* \sim N_i^* \sim (4.3.21)$$

$$\sim Q_{1i}^* \sim Q_{2i}^* \sim W_1^*$$
 (i = 1,2,...)

Подставляем (4.3.19) в (4.3.1), выполняем преобразования (4.3.20) и производим расщепление по одинаковым степеням  $\delta$ , соответствующее заданным  $\alpha_1,...,\alpha_7$ . Процедура расщепления приводит к бесконечной реккуррентной системе уравнений, инвариантной относительно преобразований (4.3.20). Эта инвариантность позволяет, не меняя вида уравнений, вернуться от преобразованных к исходным уравнениям, так что ни уравнения, ни ряды для искомых функций не содержат формально введенного малого параметра  $\delta$ .

Конкретные примеры реализации этой процедуры приведены ниже.

В заключение отметим, что рекуррентные системы уравнений, получаемые описанным способом, сохраняют инвариантность и относительно преобразований типа (4.3.2), которые принимают здесь вид:

Эти преобразования, наряду с (4.3.20), используются ниже при построении инвариантно-групповых решений систем уравнений.

## 4.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННОГО ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА НА ТОРЕЦ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ

Запишем уравнения (3.7.23) в одномерном случае, положив в них  $\partial_2 = 0$ . При этом получаем две подсистемы уравнений: первая:

$$\partial_1^2 \phi_1 + -\partial_1 W - 8a_s^2 (\partial_1 w + \phi_1) - \partial_t^2 \phi_1 = 0$$

$$a_s^2 \partial_1^2 w + e \partial_1 \phi_1 + W - \partial_t^2 w = 0; \quad W + c \partial_1 \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_t^2 w + \frac{1}{16} \partial_t^2 W = 0$$

$$M_1 = \partial_1 \phi_1 + cW; \quad M_2 = c (\partial_1 \phi_1 + W); \quad N = W + c \partial_1 \phi_1; \quad Q_1 = \partial_1 w + \phi_1$$
(4.4.1)

и вторая:

$$a_{s}^{2}\partial_{1}^{2}\phi_{2} - 8a_{s}^{2}\phi_{2} - \partial_{t}^{2}\phi_{2} = 0; \ H = a_{s}^{2}\partial_{1}\phi_{2}; \ Q_{2} = \phi_{2}$$
 (4.4.2)

Уравнения (4.4.2) – уже изученные выше уравнения Клейна-Гордона, описывающие здесь распространение крутильных волн.

Рассмотрим подробнее уравнения (4.4.1). Построим для них процедуру последовательных приближений, взяв за основу случай 1, рассмотренный в предыдущем параграфе. Соответствующая упрощенная система уравнений, принимаемая за уравнения первого приближения, имеет вид:

$$\partial_{1}^{2} \phi_{11} - \partial_{t}^{2} \phi_{11} = 0; \ a_{s}^{2} \partial_{1}^{2} w_{1} + e \partial_{1} \phi_{11} - \partial_{t}^{2} w_{1} = 0$$

$$c \partial_{1} \phi_{11} + \frac{1}{2} \partial_{t}^{2} w_{1} + \frac{1}{16} \partial_{t}^{2} W_{1} = 0; \ M_{11} = \partial_{1} \phi_{11}; \ M_{21} = c \partial_{1} \phi_{1}$$

$$(4.4.3)$$

$$\begin{split} N_{1} &= c\partial_{1}\phi_{11}; \ Q_{11} = \partial_{1}w_{1} + \phi_{11} \\ \text{Построенная на ее основе рекуррентная система уравнений будет:} \\ \partial_{1}^{2}\phi_{1i} + c\partial_{1}W_{i-1} - 8a_{s}^{2}(\partial_{1}w_{i-1} + \phi_{1i-1}) - \partial_{t}^{2}\phi_{1i} = 0 \\ a_{s}^{2}\partial_{1}^{2}w_{i} + e\partial_{1}\phi_{1i} + W_{i-1} - \partial_{t}^{2}w_{i} = 0; \ W_{i-1} + c\partial_{1}\phi_{1i} + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w_{i} + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W_{i} = 0 \\ M_{1i} = \partial_{1}\phi_{1i} + cW_{i-1}; \ M_{2i} = c(\partial_{1}\phi_{1i} + W_{i-1}); \ N_{i} = W_{i-1} + c\partial_{1}\phi_{1i} \\ Q_{1i} = \partial_{1}w_{i} + \phi_{1i} \quad (i = 1, 2, ...) \end{split}$$

Перейдем в преобразованиях (4.3.20) от растяжений дифференциальных операторов к растяжениям независимых переменных. Учитывая соответствующие значения параметров  $\alpha_1,...,\alpha_7$  получаем преобразования, соответствующие уравнениям (4.4.4):

$$\begin{aligned} x_1^* &= \delta^{-0.5} x_1, \ t^* = \delta^{-0.5} t, \ \phi_{1i} = \delta^{i-1} \phi_{1i}^*, \ w_i = \delta^{i-1} w_i^*, \ W_i = \delta^{i-1} W_i^* \end{aligned} \tag{4.4.5} \\ M_{1i} &= \delta^{i-2} M_{1i}^*, \ M_{2i} = \delta^{i-2} M_{2i}^*, \ H_i = \delta^{i-2} H_i^*, \ N_i = \delta^{i-2} N_i^*, \ Q_{1i} = \delta^{i-1.5} Q_{1i}^* \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Решение уравнений (4.4.4), инвариантное относительно суперпозиции преобразований (4.4.5), (4.3.22), разыскивается так же, как в случае уравнений Клейна-Гордона во второй главе и уравнений, рассмотренных в параграфе 4.2. Однако в данном случае есть и важные отличия, на которые следует обратить внимание. Рассмотрим первые два из уравнений (4.4.3). Для  $\phi_{11}$  имеем:

$$\varphi_{11} = \varphi_{111} (t - x)^{a + 1} \tag{4.4.6}$$

Тогда второе уравнение принимает вид:

$$a_{s}^{2}\partial_{1}^{2}w_{1} - \partial_{t}^{2}w_{1} = (\mathbf{a} + 1)\mathbf{e}\phi_{11,1}(\mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a}}$$
(4.4.7)

Сумма частного решения неоднородного уравнения (4.4.7) и общего решения однородного уравнения будет:

$$w_1 = w_{1,1}^1 (t-x)^{a+2} + w_{1,1}^2 (a_s t - x)^{a+2}$$
(4.4.8)

Первое слагаемое здесь, как и решение (4.4.6), описывает распространение возмущения с безразмерной скоростью, равной единице. Точка x=t является фронтом, перед которым возмущение отсутствует. В то же время однородное уравнение (4.4.7) соответствует распространению возмущения со скоростью  $a_s$ . Поэтому второе слагаемое в (4.4.8) дает решение с фронтом x= $a_s$  t; оно равно нулю при x>  $a_s$ t.

Таким образом, здесь образуются две цепочки решений: одна, соответствующая фронту x=t, другая – фронту x=  $a_s t$ . При этом в первом приближении функция  $\phi_{11}$ , а также  $M_{11}, M_{21}$  и  $N_1$  содержат слагаемые только первого типа. В соответствии с этим решение для произвольного приближения имеет вид:

$$\phi_{i} = \sum_{j=1}^{i} \phi_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=2}^{i} \phi_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-1}$$
(4.4.9)  
$$M_{1i} = \sum_{j=1}^{i} M_{1i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-2} + \sum_{j=2}^{i} M_{1i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-2}$$

$$\begin{split} \mathbf{N}_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \mathbf{N}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (t-\mathbf{x})^{\mathbf{a}+i+j-2} + \sum_{j=2}^{i} \mathbf{N}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s}t-\mathbf{x})^{\mathbf{a}+i+j-2} \\ \mathbf{w}_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \mathbf{w}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (t-\mathbf{x})^{\mathbf{a}+i+j} + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{w}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s}t-\mathbf{x})^{\mathbf{a}+i+j} \\ \mathbf{W}_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \mathbf{W}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (t-\mathbf{x})^{\mathbf{a}+i+j} + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{W}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s}t-\mathbf{x})^{\mathbf{a}+i+j} \\ \mathbf{Q}_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \mathbf{Q}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (t-\mathbf{x})^{\mathbf{a}+i+j-1} + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{Q}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s}t-\mathbf{x})^{\mathbf{a}+i+j-1} \end{split}$$

Здесь, для простоты, у единственной координаты  $x_1$ , а также перемещения  $\phi_1$  и усилия  $Q_1$  опущены индексы 1. Верхний индекс 1 всюду означает коэффициенты у слагаемых первой цепочки решений, 2 – у слагаемых второй цепочки. Две цепочки решений взаимодействуют только при удовлетворении граничным условиям. В уравнения (4.4.4) их можно подставлять независимо друг от друга.

Подставляя (4.4.9) в (4.4.4) получаем, расщепляя по одинаковым степеням x, t-x, и  $a_s$ t-x, рекуррентные соотношения для коэффициентов сумм (4.4.9):

$$\begin{split} \phi_{i,j}^{l} &= \frac{1}{2(i-j)(a+i+j-1)} \Big\{ (i-j+1)(i-j)\phi_{i,j-1}^{l} + c\Big[ (i-j)W_{i-1,j-1}^{l} - (4.4.10) \\ &- (a+i+j-1)W_{i-1,j}^{l}\Big] - 8a_{s}^{2} \Big[ (i-j)w_{i-1,j-1}^{l} - (a+i+j-1)w_{i-1,j}^{l} + \phi_{i-1,j}^{l} \Big] \Big\} \quad (i=1,2,...) \\ M_{1i,j}^{1} &= (i-j+1)\phi_{i,j-1}^{l} - (a+i+j-1)\phi_{i,j}^{l} + CW_{i-1,j-1}^{l} \\ M_{2i,j}^{1} &= c\Big[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^{l} - (a+i+j-1)\phi_{i,j}^{l} + W_{i-1,j-1}^{l} \Big] \\ N_{1,j}^{l} &= W_{i-1,j-1}^{l} + c\Big[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^{l} - (a+i+j-1)\phi_{i,j}^{l} \Big] \\ w_{i,j}^{1} &= \frac{1}{(1-a_{s}^{2})(a+i+j)(a+i+j-1)} \Big\{ a_{s}^{2} \Big[ (i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^{l} - \\ -2(i-j+1)(a+i+j-1)w_{i,j-1}^{l} \Big] + e\Big[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^{l} - (a+i+j-1)\phi_{i,j}^{l} \Big] + W_{i-1,j-1}^{l} \Big\} \\ W_{i,j}^{1} &= \frac{16}{(a+i+j)(a+i+j-1)} \Big\{ c\Big[ (a+i+j-1)\phi_{i,j}^{l} - (i-j+1)\phi_{i,j-1}^{l} \Big] - W_{i-1,j-1}^{l} \Big\} - 8w_{i,j}^{1} \\ Q_{i,j}^{1} &= (i-j+1)w_{i,j-1}^{l} - (a+i+j)w_{i,j}^{1} + \phi_{i,j}^{l} \quad (j=1,...,i) \\ \phi_{i,j+1}^{2} &= \frac{1}{(1-a_{s}^{2})(a+i+j)(a+i+j-1)} \Big\{ 2(i-j)(a+i+j-1)\phi_{i,j-1}^{2} - (a+i+j-1)(i-j)\phi_{i,j-1}^{2} - \\ -c\Big[ (i-j)W_{i-1,j-1}^{2} - (a+i+j-1)W_{i-1,j}^{2} \Big] + 8a_{s}^{2} \Big[ (i-j)w_{i-1,j-1}^{2} - (a+i+j-1)w_{i-1,j-1}^{2} + \phi_{i-1,j}^{2} \Big] \Big\} \\ M_{2i,j+1}^{2} &= (i-j)\phi_{i,j}^{2} - (a+i+j)\phi_{i,j+1}^{2} + cW_{i-1,j}^{2} \\ M_{2i,j+1}^{2} &= c\Big[ (i-j)\phi_{i,j}^{2} - (a+i+j)\phi_{i,j+1}^{2} + cW_{i-1,j}^{2} \Big] \\ N_{2i,j+1}^{2} &= w_{i-1,j}^{2} + c\Big[ (i-j)\phi_{i,j}^{2} - (a+i+j)\phi_{i,j+1}^{2} + cW_{i-1,j}^{2} \Big] \\ \end{pmatrix}$$

$$w_{i,j}^{2} = \frac{1}{2a_{s}^{2}(i-j)(a+i+j)} \{ (i-j+1)(i-j)a_{s}^{2}w_{i,j-1}^{2} + e[(i-j)\phi_{i,j}^{2} - (a+i+j)\phi_{i,j+1}^{2}] + W_{i-1,j} \} \quad (j=1,...,i-1)$$

$$W_{i,j}^{2} = \frac{16}{a_{s}^{2}(a+i+j)(a+i+j-1)} \{ -[(a+i+j-1)\phi_{i,j}^{2} - (i-j+1)\phi_{i,j-1}^{2}] - W_{i-1,j-1}^{2} \} - 8w_{i,j}^{2}$$

$$Q_{i,j}^{2} = (i-j+1)w_{i,j-1}^{2} - (a+i+j)w_{i,j}^{2} + \phi_{i,j}^{2} \quad (j=1,...,i)$$

Из (4.4.10) не определяются коэффициенты  $\phi_{i,i}^1$  и  $w_{i,i}^2$  (i=1,2,...), являющиеся константами интегрирования. Для их отыскания используем граничные условия. Решение (4.4.9) соответствует излучению нестационарной волны от торца х=0 пластины. В соответствии с выражением для  $M_{1i}$  из (4.4.9) имеем:

$$\mathbf{M}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \mathbf{M}_{1i,i}^{1} + \mathbf{M}_{1i,i}^{2} a_{s}^{\mathbf{a}+2i-2} \right) t^{\mathbf{a}+2i-2}$$
(4.4.11)

Следовательно, найденное решение соответствует действию на торец пластины изгибающего момента, изменяющегося во времени по закону:

$$\mathbf{M}(0,t) = \mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^{\mathbf{a}+2i-2}$$
(4.4.12)

Сравнивая (4.4.11) и (4.4.12) получаем:

$$\mathbf{M}_{1i,i}^{1} = \mathbf{f}_{i} - \mathbf{M}_{1i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-2} \quad (i = 1, 2, ...),$$
(4.4.13)

а из (4.4.10) имеем:

$$\varphi_{i,i}^{1} = \frac{1}{a+2i-1} \left( \varphi_{i,i-1}^{1} + -W_{i-1,i-1}^{1} - M_{i,i}^{1} \right) \quad (i = 1, 2, ...)$$
(4.4.14)

Для определения  $w_{i,i}^2$  нужно задать при x=0 или перерезывающую силу Q или скорость прогиба  $\partial_t w$ . В первом случае имеем:

$$Q(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( Q_{i,i}^{1} + Q_{i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-1} \right) t^{a+2i-1}$$
(4.4.15)

Отсюда видно, что функция, задающая закон изменения приложенной на торце пластины перерезывающей силы, должна задаваться в виде ряда:

$$Q(0,t) = g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i t^{a+2i-1}$$
(4.4.16)

Сравнивая (4.4.15) и (4.4.16) имеем:

$$Q_{i,i}^{2} = (g_{i} - Q_{i,i}^{1})a_{s}^{1-2i-a} \quad (i = 1, 2, ...)$$
(4.4.17)

После этого, в соответствии с (4.4.10), получаем:

$$w_{i,i}^{2} = \frac{1}{a+2i} \left( w_{i,i-1}^{2} + \varphi_{i,i}^{2} - Q_{i,i}^{2} \right) \quad (i = 1, 2, ...)$$
(4.4.18)

Задавая при x=0 скорость  $\partial_t$  w имеем, в соответствии с (4.4.9):

$$\partial_{t} w = \sum_{i=1}^{\infty} \partial_{t} w_{i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \sum_{j=1}^{i} (\mathbf{a} + i + j) w_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{\mathbf{a} + i + j-1} + a_{s} \sum_{j=1}^{i} (\mathbf{a} + i + j) w_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{\mathbf{a} + i + j-1} \right]$$
(4.4.19)

И

$$\partial_{t} \mathbf{w}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ (\mathbf{a} + 2i) \mathbf{w}_{i,i}^{1} + (\mathbf{a} + 2i) \mathbf{w}_{i,i}^{2} a_{s}^{\mathbf{a} + 2i} \right] t^{\mathbf{a} + 2i-1}$$
(4.4.20)

Следовательно, скорость прогиба при x=0 должна быть задана в виде функции:

$$\partial_t \mathbf{w}(0,t) = \mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i t^{\mathbf{a}+2i-1}$$
 (4.4.21)

Отсюда и из (4.4.20) получаем:

$$w_{i,i}^{2} = \left(\frac{g_{i}}{a+2i} - w_{i,i}^{1}\right) a_{s}^{-a-2i}$$
(4.4.22)

При помощи функций вида (4.4.12) и (4.4.16) или (4.4.21) можно задавать разнообразные типы граничных условий. При этом в начале движения, то есть при малых t, преобладающим является изгибающий момент  $M_1$ , как величина порядка  $t^a$ , а перерезывающая сила Q или скорость прогиба  $\partial_t$  w есть величина порядка  $t^{a+1}$ , то есть меньше, чем M. Такие же соотношения между искомыми функциями сохраняются и в любой момент времени в зоне вблизи первого фронта x=t.

Задавая a = 0,  $f_1 = 1$ ,  $f_i = 0$  (i > 1),  $g_i = 0$  ( $i \ge 1$ ) получаем важный частный случай внезапно приложенного на торце пластины постоянного изгибающего момента при равной нулю перерезывающей силе (свободный конец) или отсутствии прогиба (шарнирное опирание).

Перейдем к построению асимптотических формул для прифронтовых зон. Удерживая в (4.4.9) слагаемые, преобладающие при  $t \to \infty$  и  $x \to t$ , то есть слагаемые с j=1, получаем для зоны вблизи первого фронта:

$$\begin{split} \phi^{1} &\approx \phi_{1,1}^{1} (t-x)^{a+1} \Lambda_{a+1}(z_{1}); \ z_{1} &= \sqrt{16rx(t-x)}; \ r = 1 + 2c^{2} \\ w^{1} &\approx w_{1,1}^{1} (t-x)^{a+2} \Lambda_{a+2}(z_{1}); \ W^{1} &\approx W_{1,1}^{1} (t-x)^{a+2} \Lambda_{a+2}(z_{1}) \\ M_{1}^{1} &\approx M_{11,1}^{1} (t-x)^{a} \Lambda_{a}(z_{1}); \ N^{1} &\approx N_{1,1}^{1} (t-x)^{a} \Lambda_{a}(z_{1}); \ Q^{1} &\approx Q_{1,1}^{1} (t-x)^{a+1} \Lambda_{a+1}(z_{1}) \end{split}$$

В случае внезапно приложенного постоянного момента будет:

$$M_{1}^{1} \approx \Lambda_{0}(z_{1}); \quad N^{1} \approx c\Lambda_{0}(z_{1}); \quad Q^{1} \approx -2(t-x)\Lambda_{1}(z_{1})$$
(4.4.24)  
$$\varphi^{1} \approx -(t-x)\Lambda_{1}(z_{1}); \quad w^{1} \approx \frac{1}{2}(t-x)^{2}\Lambda_{2}(z_{1}); \quad W^{1} \approx -4(2c+1)(t-x)^{2}\Lambda_{2}(z_{1})$$

Аналогично можно исследовать и второстепенную, в данном случае, зону

вблизи второго фронта.

В соответствии с полученными результатами на рисунках 4.5,...,4.7 приведены графики искомых функций для случая внезапно приложенного изгибающего момента. Кроме полной картины, полученной при помощи суммирования рядов (4.3.19), (4.4.9), приведены также результаты в соответствии с асимптотическими формулами для прифронтовой и приграничной зон. Для зоны вблизи первого фронта использовались формулы (4.4.29). Приграничная асимптотика задается на основе решения классических уравнений изгиба, выполненного ниже.

На рис. 4.5 приведены и результаты в соответствии с теорией типа Тимошенко, также полученные ниже.

Остановимся подробнее на анализе этих графиков. Начнем с графиков для изгибающего момента. На фронте x=t на графике имеется разрыв, равный по величине моменту, приложенному на границе x=0, затем наблюдаются осцилляции, частота которых нарастает во времени. После второго фронта  $(x = a_s t)$  решение начинает сближаться с классическим, носящим плавный, медленноизменяющийся характер.



Остановимся еще на графиках для функций N и W. Как и в случае продольной волны, рассмотренном в параграфе 4.2, здесь на первом фронте x=1 возникает трехмерное напряженное состояние, вызывающее движение этого фронта со скоростью, соответствующей уравнениям теории упругости. Однако с удалением от первого фронта картина видоизменяется значительно более сложным образом, чем в случае продольной волны.

Здесь также трехмерное напряженное состояние постепенно переходит в двумерное, однако это происходит значительно позже, уже после

прохождения второго фронта  $x=a_st$ , и без образования квазифронтов. Вначале, с удалением от первого фронта, поперечное усилие N постепенно уменьшается, а деформация W имеет осциллирующий с небольшой амплитудой характер. Но в зоне вблизи второго фронта резко возрастают и N и W. После прохождения этой зоны поперечное усилие N довольно быстро убывает, что и означает переход к двумерному напряженному состоянию, а деформация W приближается к значению, заданному классическим решением.

Смысл этой деформации, в случае действующего постоянного момента, достаточно прост. Сжатая половина слоя утолщается, а растянутая – утоньшается. Но это происходит только в сравнительно спокойной приграничной зоне. Перед ней, особенно в зоне вблизи второго фронта, происходят интенсивные колебания слоя с переменами знаков напряжений и деформаций по обе стороны от срединной поверхности.



Вообще следует подчеркнуть в этом случае роль второго фронта. В соответствии с приложенной нагрузкой главным здесь является первый фронт – фронт продольных волн. Однако даже на графиках для изгибающего момента быстроосциллирующая зона вблизи этого фронта постепенно сужается со временем; в соответствии с асимптотическими формулами (4.4.29) ее размер стремится к нулю. Остальные искомые функции имеют незначительные значения вблизи первого фронта с самого начала. Главные

события на всех графиках развиваются в зоне вблизи второго фронта, где резко возрастают значения всех искомых функций, после чего достаточно быстро происходит переход к классическим результатам.

#### 4.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННОЙ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩЕЙ СИЛЫ НА ТОРЕЦ ПРОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ

Построим для уравнений (4.4.1) процедуру последовательных приближений, взяв за основу случай 2, рассмотренный в параграфе 4.3. Соответствующая упрощенная система уравнений, принимаемая за уравнения первого приближения, имеет вид:

$$a_{s}^{2}\partial_{1}^{2}w_{1} - \partial_{t}^{2}w_{1} = 0; \quad \partial_{t}^{2}w_{1} + \frac{1}{8}\partial_{t}^{2}W_{1} = 0; \quad Q_{11} = \partial_{1}w_{1}$$

$$\partial_{1}^{2}\phi_{1} + c\partial_{1}W_{1} - 8a_{s}^{2}\partial_{1}w_{1} - \partial_{t}^{2}\phi_{1} = 0; \quad M_{11} = \partial_{1}\phi_{1} + cW_{1}; \quad N_{1} = W_{1} + c\partial_{1}\phi_{1}$$

$$(4.5.1)$$

Построенная на ее основе рекуррентная система уравнений будет:

$$a_{s}^{2}\partial_{1}^{2}w_{i} + e\partial_{1}\phi_{1i-1} + W_{i-1} - \partial_{t}^{2}w_{i} = 0; \quad W_{i-1} + c\partial_{1}\phi_{1i-1} + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w_{i} + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W_{i} = 0 \quad (4.5.2)$$

$$Q_{1i} = \partial_{1}w_{i} + \phi_{1i-1}; \quad \partial_{1}^{2}\phi_{1i} + cW_{i} - 8a_{s}^{2}(\partial_{1}w_{i} + \phi_{1i-1}) - \partial_{t}^{2}\phi_{1i} = 0$$

$$M_{1i} = \partial_{1}\phi_{1i} + cW_{i}; \quad N_{i} = W_{i} + c\partial_{1}\phi_{i} \quad (i = 1, 2, ...)$$

Уравнения (4.5.1), (4.5.2) вновь порождают две цепочки решений – соответствующих возмущениям, распространяющимся с безразмерными скоростями 1 и  $a_s$ . При этом в первом приближении функции  $w_1$ ,  $W_1$  и  $Q_1$  будут содержать только слагаемые из второй цепочки. В соответствии с этим ищем решение уравнений (4.5.2) в виде:

$$\begin{split} w_{1} &= \sum_{j=2}^{i} w_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=1}^{i} w_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-1} \qquad (4.5.3) \\ W_{i} &= \sum_{j=2}^{i} W_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=1}^{i} W_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-1} \\ Q_{i} &= \sum_{j=2}^{i} Q_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-2} + \sum_{j=1}^{i} Q_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-2} \\ \phi_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \phi_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j} + \sum_{j=1}^{i} \phi_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j} \\ M_{1i} &= \sum_{j=1}^{i} M_{1i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=1}^{i} M_{1i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-1} \\ N_{i} &= \sum_{j=1}^{i} N_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=1}^{i} N_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-1} \end{split}$$

Подставляя (4.5.3) в (4.5.2) можно получить рекуррентные соотношения для коэффициентов сумм (4.5.3).

Для отыскания констант интегрирования  $w_{i,i}^2$  и  $\phi_{i,i}^1$  (i=1,2,...) вновь воспользуемся граничными условиями. Задавая при x=0:

$$Q(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( Q_{i,i}^{1} + Q_{i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-2} \right) t^{a+2i-2}$$
(4.5.4)

можем определить  $w_{i,i}^2$ .

В качестве второго условия при x=0 может быть задан изгибающий момент, имеющий, в соответствии с (4.5.3), вид:

$$\mathbf{M}_{1}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \mathbf{M}_{1i,i}^{1} + \mathbf{M}_{1i,i}^{2} a_{s}^{\mathbf{a}+2i-1} \right) t^{\mathbf{a}+2i-1}$$
(4.5.5)

или угловую скорость:

$$\partial_{t} \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \partial_{t} \varphi_{i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \sum_{j=1}^{i} (a + i + j) \varphi_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + a_{s} \sum_{j=1}^{i} (a + i + j) \varphi_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-1} \right]$$
(4.5.6)

На рисунках 4.8, 4.9 приведены графики функций, полученные при помощи построенных формул, в сравнении с результатами по классической теории, играющими роль приграничной асимптотики, а также результатами по теории типа Тимошенко. Остановимся, в первую очередь, на отличиях этих графиков от приведенных в предыдущем параграфе.

Наиболее интересны здесь графики перерезывающей силы. Осциллирующий с малой амплитудой после первого фронта график прерывается скачком на втором фронте, равным по величине силе, приложенной на границе, после чего осцилляции возобновляются, но затухают к границе.

В целом обо всех приведенных здесь графиках можно повторить то же, что было сказано в предыдущем параграфе. В данном случае еще сильнее проявляется тот факт, что наибольшие значения всех искомых функций приходятся на зону между границей и вторым фронтом, в которой наблюдается хорошее согласование между уточненными и классическими результатами.



# 4.6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В РАМКАХ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ

Задачи о распространении нестационарных волновых процессов с использованием классических уравнений теории пластин решались и ранее, работах [92,114] например, В С использованием интегральных преобразований. Здесь эти уравнения решаются в рамках единого подхода, основанного на совместном применении теории групп и асимптотического анализа. Такой подход позволяет получить все необходимые результаты, практически, в замкнутом виде, что еще раз подтверждает эффективность используемого возможности метода и создает все ДЛЯ сравнения классических результатов с уточненными.

Запишем уравнения (4.3.12) в одномерном случае ( $\partial_2 = 0$ ):

$$\partial_{1}M_{1} - 8a_{s}^{2}Q_{1} = 0; \ a_{s}^{2}\partial_{1}Q_{1} + N - \partial_{t}^{2}w = 0; \ N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w = 0$$
(4.6.1)  
$$b\partial_{1}\phi_{1} = M_{1} - \nu M_{2}; \ 0 = M_{2} - \nu M_{1}; \ bW = -\nu (M_{1} + M_{2}); \ \partial_{1}w + \phi_{1} = 0$$

Считая уравнения (4.6.1) уравнениями первого приближения, строим процедуру последовательных приближений:

$$\partial_{1}M_{1i} - 8a_{s}^{2}Q_{1i} - \partial_{t}^{2}\phi_{1i-1} = 0; \ a_{s}^{2}\partial_{1}Q_{1i} + N_{i} - \partial_{t}^{2}w_{i} = 0$$
(4.6.2)  
$$N_{i} + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w_{i} + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W_{i-1} = 0; \ b\partial_{1}\phi_{1i} = M_{1i} - \nu(M_{2i} + N_{i-1})$$

$$0 = M_{2i} - v(M_{1i} + N_{i-1}); \ bW_i = N_{i-1} - v(M_{1i} + M_{2i}); \ Q_{1i-1} = \partial_1 W_i + \phi_{1i} \quad (i = 1, 2, ...)$$

Уравнения (4.6.2) инвариантны относительно преобразований (4.3.22) и добавочной подгруппы растяжений (4.3.20). Используя соответствующие значения параметров  $\alpha_1, ..., \alpha_7$ , преобразуем (4.3.20) к форме:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \delta^{0.5} x_1, \ t^* = \delta t, \ \phi_{1i} = \delta^{i-1.5} \phi_{1i}^*, \ w_i = \delta^{i-2} w_i^*, \ W_i = \delta^{i-1} W_i^* \end{aligned} (4.6.3) \\ M_{1i} &= \delta^{i-1} M_{1i}^*, \ M_{2i} = \delta^{i-1} M_{2i}^*, \ N_i = \delta^i N_i^*, \ Q_{1i} = \delta^{i-0.5} Q_{1i}^* \quad (i = 1, 2, ...) \end{aligned}$$

Здесь преобразуются непосредственно аргументы x<sub>1</sub> и t; преобразования (4.3.20) являются следствиями преобразований вида (4.6.3).

Инварианты преобразований (4.6.3) будут:

$$I_{\phi_{1i}} = t^{i-1.5} \phi_{1i}; \ I_{w_i} = t^{i-2} w_i; \ I_{W_i} = t^{i-1} W_i; \ I_{M_{1i}} = t^{i-1} M_{1i}$$
(4.6.4)  
$$I_{M_{2i}} = t^{i-1} M_{2i}; \ I_{N_i} = t^i N_i; \ I_{Q_{1i}} = t^{i-0.5} Q_{1i}; \ I = \frac{x_1}{\sqrt{t}} \quad (i = 1, 2, ...)$$

Следовательно, решение уравнений (4.6.2), инвариантное относительно преобразований (4.6.3), ищется в виде:

$$\phi_{1i} = t^{1.5-i} I_{\phi_{1i}}(I); \ w_i = t^{2-i} I_{w_i}(I); \ W_i = t^{1-i} I_{W_i}(I); \ M_{1i} = t^{1-i} I_{M_{1i}}(I)$$
(4.6.5)  
$$M_{2i} = t^{1-i} I_{M_{2i}}(I); \ N_i = t^{-i} I_{N_i}(I); \ Q_{1i} = t^{0.5-i} I_{Q_{1i}}(I)$$
(i = 1,2,...)

Отсюда видно, что решение исходных уравнений (4.3.1) (при  $\partial_2 = 0$ ) ищется в виде разложений в ряды по убывающим степеням времени t, что соответствует асимптотическим разложениям в окрестности t =  $\infty$ . При этом точность вычислений возрастает с ростом t.

Ограничиваясь, при больших значениях t, первыми членами разложений для всех искомых функций возвращаемся к уравнениям (4.6.1). Перепишем их в виде:

$$\partial_1 \mathbf{Q} = \frac{3}{2a_s^2} \partial_t^2 \mathbf{w}; \ \partial_1 \mathbf{M} = 8a_s^2 \mathbf{Q}; \ \partial_1 \phi = \frac{1}{a_1^2} \mathbf{M}; \ \partial_1 \mathbf{w} = -\phi$$
(4.6.6)  
$$\mathbf{N} = -\frac{a_s^2}{3} \partial_1 \mathbf{Q}; \ \mathbf{W} = -\frac{\mathbf{v}}{2a_s^2} \mathbf{M}$$

Здесь сохранен только момент  $M_1$ ; у этой величины, так же как и величин  $x_1, \phi_1, Q_1$  отброшен, для простоты, индекс 1. Величины Q, M,  $\phi$  и w образуют связанную систему уравнений; величины N и W находятся из последних двух соотношений (4.6.6) отдельно.

В соответствии с (4.6.5) решение уравнений (4.6.6) ищем в виде:

$$\varphi = \sqrt{t} I_{\varphi}(I); \ w = t I_{w}(I); \ M = I_{M}(I); \ Q = \frac{1}{\sqrt{t}} I_{Q}(I); \ I = \frac{x}{\sqrt{t}}$$
 (4.6.7)

Подставляя (4.6.7) в (4.6.6) получаем уравнения относительно инвариантов:

$$\frac{dI_{Q}}{dI} = \frac{3}{8a_{s}^{2}} \left( I^{2} \frac{d^{2}I_{w}}{dI^{2}} - I \frac{dI_{w}}{dI} \right); \frac{dI_{M}}{dI} = 8a_{s}^{2}I_{Q}; \frac{dI\phi}{dI} = \frac{1}{a_{1}^{2}}I_{M}; \frac{dI_{w}}{dI} = -I_{\phi}$$
(4.6.8)

Уравнения (4.6.2.8), в отличие от (4.6.2.6), являются обыкновенными

дифференциальными уравнениями, линейными, но с переменными коэффициентами. Не останавливаясь подробно на процедуре поиска решения, запишем основные результаты. Выражения для искомых функций можно представить в виде:

$$I_{Q} = I_{Q1,1}J_{Q1} + \frac{3}{16a_{s}^{2}}I_{\phi1,1}I^{2}J_{Q3}; I_{M} = 8\mathbf{a}_{s}^{2}I_{Q1,1}IJ_{M1} + I_{M1,1} + \frac{1}{2}I_{\phi1,1}I^{3}J_{M3} \quad (4.6.9)$$

$$I_{\phi} = \frac{4a_{s}^{2}}{a_{1}^{2}}I_{Q1,1}I^{2}J_{\phi1} + \frac{1}{a_{1}^{2}}I_{M1,1}I + I_{\phi1,1}J_{\phi3}; I_{w} = -\frac{4a_{s}^{2}}{3a_{1}^{2}}I_{Q1,1}I^{3}J_{w1} - \frac{1}{2a_{1}^{2}}I_{M1,1}I^{2} - I_{\phi1,1}IJ_{w3} + I_{w1,1}I^{2}$$

Величины  $I_{Q1,1}$ ,  $I_{M1,1}$ ,  $I_{\phi1,1}$ ,  $I_{w1,1}$  являются константами интегрирования. Для остальных величин имеем:

$$K = \frac{\sqrt{3}}{2a_{1}}I^{2}; \ J_{Q1} = \cos K; \ J_{M1} = \frac{I_{C}}{2\sqrt{K}}$$
(4.6.10)  
$$J_{\varphi 1} = \frac{I_{C}}{\sqrt{K}} - \frac{\sin K}{K}; \ J_{w1} = \frac{3}{2\sqrt{K^{3}}} \left( KI_{C} - \frac{1}{2}I_{S} - \sqrt{K}\sin K \right)$$
$$J_{Q3} = \frac{\sin K}{K}, \ J_{M3} = \frac{3I_{S}}{2\sqrt{K^{3}}}, \ J_{\varphi 3} = \cos K + \sqrt{K}I_{S}, \ J_{w3} = \frac{1}{2\sqrt{K}} \left( KI_{S} + \frac{1}{2}I_{C} + \sqrt{K}\cos K \right)$$

$$I_{C} = \int \frac{\cos K}{\sqrt{K}} dK = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} K^{2i-1.5}}{(2i-2)!(2i-1.5)}; \ I_{S} = \int \frac{\sin K}{\sqrt{K}} dK = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} K^{2i-0.5}}{(2i-1)!(2i-0.5)}$$

Найденное решение может соответствовать внезапно приложенному постоянному изгибающему моменту М<sub>0</sub> на границе х=0 полубесконечной пластины х≥0. При этом:

 $I_{M1,1}=M_0$  (4.6.11) Вторым граничным условием при х=0 может быть или  $Q_0=0$  или  $w_0=0$ . При  $Q_0=0$  будет:

 $I_w \rightarrow 0$ . Используя асимптотические формулы (К $\rightarrow \infty$ ):

$$I_{C} \approx \frac{\sin K}{\sqrt{K}} - \frac{\cos K}{2\sqrt{K^{3}}} + C_{1}; I_{S} \approx -\frac{\cos K}{\sqrt{K}} - \frac{\sin K}{2\sqrt{K^{3}}} + C_{2},$$
 (4.6.13)

где C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> находятся из условий стыковки с формулами (4.6.10), и вводя обозначения:

$$\mathbf{K}_{w31} = \frac{\mathbf{C}_2 \sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2a_1}}; \ \mathbf{K}_{w32} = \frac{\mathbf{C}_1 \sqrt{2a_1}}{4\sqrt[4]{3}}, \tag{4.6.14}$$

имеем:

$$\mathbf{I}_{\varphi 1,1} = -\frac{\mathbf{M}_0}{2a_1^2 \mathbf{K}_{w31}}; \ \mathbf{I}_{w1,1} = \mathbf{I}_{\varphi 1,1} \mathbf{K}_{w32}$$
(4.6.15)

При 
$$w_0 = 0$$
 будет:  
 $I_{w1,1} = 0$  (4.6.16)

Для поиска I<sub>ф1,1</sub> и I<sub>Q1,1</sub> вновь воспользуемся условиями на бесконечности. Обозначая:

$$\mathbf{K}_{w11} = \frac{3\mathbf{C}_1 \sqrt{2a_1}}{2\sqrt[4]{3}}; \ \mathbf{K}_{w12} = -\mathbf{C}_2 \frac{\sqrt[4]{3}}{4} \sqrt{(2a_1)^3}, \qquad (4.6.17)$$

имеем:

$$I_{Q1,1} = \frac{3K_{w32}M_0}{8a_s^2(K_{w31}K_{w12} - K_{w11}K_{w32})}; \ I_{\varphi1,1} = -\frac{4a_s^2K_{w12}}{3a_1^2K_{w32}}I_{Q1,1}$$
(4.6.18)

Таким образом, полностью найдены искомые функции φ, w, M, Q. Из (4.6.6) находим выражение для N:

$$N = \frac{1}{t} \left( \frac{a_s^2}{\sqrt{3}} I_{Q1,1} I \sin K - \frac{1}{8} I_{\phi1,1} I \cos K \right)$$
(4.6.19)

Выражение для W находится непосредственно через М.

Для решения о действии приложенной задачи внезапно учтем, что уравнения (4.6.6) перерезывающий силы инвариантны относительно преобразований (4.6.3) при i = 1:

$$x^* = \delta^{0.5}x, \ t^* = \delta t, \ \phi = \delta^{-0.5}\phi^*, \ w = \delta^{-1}w^*, \ W = W^*, \ M = M^*,$$
(4.620)  
$$N = \delta N^*, \ Q = \delta^{0.5}Q^*$$

и преобразований (4.3.2), которые здесь удобно записать в форме:

$$\phi = \delta^{\gamma} \phi^*, w = \delta^{\gamma} w^*, W = \delta^{\gamma} W^*, M = \delta^{\gamma} M^*, N = \delta^{\gamma} N^*, Q = \delta^{\gamma} Q^*$$
 (4.6.21)  
Суперпозиция этих преобразований при  $\gamma = -0.5$  будет:

$$x^{*} = \delta^{0.5}x, t = \delta t^{*}, \phi = \delta^{-1}\phi^{*}, w = \delta^{-1.5}w^{*}, W = \delta^{-0.5}W^{*}$$

$$M = \delta^{-0.5}M^{*}, N = \delta^{0.5}N^{*}, Q = Q^{*}$$
(4.6.22)

Инварианты преобразований (4.6.22) имеют вид:

$$I = \frac{x}{\sqrt{t}}; I_{Q} = Q; I_{M} = \frac{1}{\sqrt{t}}M; I_{\varphi} = \frac{1}{t}\varphi; I_{w} = \frac{1}{\sqrt{t^{3}}}w; I_{W} = \frac{1}{\sqrt{t}}W; I_{N} = \sqrt{t}N$$
(4.6.23)

Следовательно, решение уравнений (4.6.6), инвариантное относительно преобразований (4.6.22), ищется в форме:

$$Q = I_Q, M = \sqrt{t}I_M, \phi = tI_{\phi}, w = \sqrt{t^3}I_w, W = \sqrt{t}I_W, N = \frac{1}{\sqrt{t}}I_N$$
 (4.6.24)

Подставляя (4.6.24) в (4.6.6) получаем уравнения относительно инвариантов:

$$\frac{dI_{Q}}{dI} = \frac{3}{8a_{s}^{2}} \left( 3I_{w} - 3I\frac{dI_{w}}{dI} + I^{2}\frac{d^{2}I_{w}}{dI^{2}} \right);$$
(4.6.25)  
$$\frac{dI_{M}}{dI} = 8a_{s}^{2}I_{Q}; \frac{dI_{\phi}}{dI} = \frac{1}{a_{1}^{2}}I_{M}; \frac{dI_{w}}{dI} = -I_{\phi}$$

Применим к решению этих уравнений тот же подход, что и в случае уравнений (4.6.8), получая:

$$I_{Q} = I_{Q1,1} + \frac{1}{16a_{1}^{2}a_{s}^{2}}I_{M1,1}I^{3}J_{Q2} + \frac{9}{8a_{s}^{2}}I_{w1,1}IJ_{Q4}$$
(4.6.26)  

$$I_{M} = 8a_{s}^{2}I_{Q1,1}I + I_{M1,1}J_{M2} + \frac{9}{2}I_{w1,1}I^{2}J_{M4}$$
(4.6.26)  

$$I_{\phi} = \frac{4a_{s}^{2}}{a_{1}^{2}}I_{Q1,1}I^{2} + \frac{1}{a_{1}^{2}}I_{M1,1}IJ_{\phi2} + I_{\phi1,1} + \frac{3}{2a_{1}^{2}}I_{w1,1}I^{3}J_{\phi4}$$
(4.6.26)  

$$I_{w} = -\frac{4a_{s}^{2}}{3a_{1}^{2}}I_{Q1,1}I^{3} - \frac{1}{2a_{1}^{2}}I_{M1,1}I^{2}J_{w2} - I_{\phi1,1}I + I_{w1,1}J_{w4}$$
Здесь:

$$J_{Q2} = \frac{3}{2\sqrt{K^3}} I_S; \ J_{M2} = \sqrt{K} I_S + \cos K; \ J_{\phi 2} = \frac{1}{2\sqrt{K}} \left( K I_S + \frac{1}{2} I_C + \sqrt{K} \cos K \right) \quad (4.6.27)$$
$$J_{w2} = \frac{1}{3} \sqrt{K} I_S + \frac{1}{2\sqrt{K}} I_C + \frac{1}{3} \left( \cos K - \frac{\sin K}{K} \right)$$

$$J_{Q4} = \frac{1}{2\sqrt{K}} I_{C}; \ J_{M4} = \frac{1}{\sqrt{K}} I_{C} - \frac{\sin K}{K}; \ J_{\phi 4} = \frac{3}{2\sqrt{K^{3}}} \left( KI_{C} - \frac{1}{2}I_{S} - \sqrt{K}\sin K \right)$$
$$J_{w4} = \cos K + \frac{3}{2}\sqrt{K}I_{S} - \sqrt{K^{3}}I_{C} + K\sin K$$

Осталось найти константы интегрирования  $I_{Q1,1}$ ,  $I_{M1,1}$ ,  $I_{\phi1,1}$ ,  $I_{w1,1}$ . Вид выражения для  $Q = I_Q$  показывает, что это решение может соответствовать внезапно приложенной на границе x=0 полубесконечной пластины x≥0 постоянной перерезывающей силе  $Q_0$ . При этом:

$$I_{Q1,1} = Q_0 \tag{4.6.28}$$

Вторым граничным условием при x=0 может быть или  $M_0 = 0$  или  $\phi_0 = 0$ . При  $M_0 = 0$  имеем

$$I_{M1,1} = 0 (4.6.29)$$

Для нахождения двух оставшихся констант используем условия при  $I \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty).$ 

Вводя обозначения:

$$\mathbf{K}_{w41} = -\mathbf{C}_1 \frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{(2a_1)^3}}; \ \mathbf{K}_{w42} = \mathbf{C}_2 \frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2a_1}}$$
(4.6.30)

имеем:

$$I_{w1,1} = \frac{4a_s^2}{3a_1^2} \frac{Q_0}{K_{w41}}, \ I_{\varphi 1,1} = I_{w1,1}K_{w42}$$
(4.6.31)

При  $\phi_0 = 0$  имеем:

$$\mathbf{I}_{\varphi 1,1} = 0; \ \mathbf{I}_{w 1,1} = \frac{4a_{s}^{2}\mathbf{K}_{w 22}\mathbf{Q}_{0}}{3a_{1}^{2}(\mathbf{K}_{w 41}\mathbf{K}_{w 22} - \mathbf{K}_{w 21}\mathbf{K}_{w 42})}; \ \mathbf{I}_{M 1,1} = \frac{2a_{1}^{2}\mathbf{K}_{w 42}}{\mathbf{K}_{w 22}}\mathbf{I}_{w 1,1} \quad (4.6.32)$$

Функция W выражается, при помощи (4.6.6), непосредственно через М. Для функции N, учитывая найденное выражение для Q, имеем:

$$N = -\frac{1}{\sqrt{t}} \left( \frac{1}{8\sqrt{3}a_1} I_{M1,1} \sin K + \frac{3}{8} I_{w1,1} \cos K \right)$$
(4.6.33)

#### 4.7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В РАМКАХ ТЕОРИИ ТИПА ТИМОШЕНКО

Задачи с использованием теории типа Тимошенко, так же, как и классической теории изгиба пластин, решались ранее с применением интегральных преобразований, например, в работах [26, 47, 56–58]. Однако именно на примерах уравнений пластин и оболочек типа Тимошенко впервые была показана эффективность применяемого здесь метода асимптотико-группового анализа дифференциальных уравнений [48–51]. Поэтому, естественно, что и для сравнения результатов в рамках теории типа Тимошенко с уточненными результатами применяется тот же единый подход, что и на протяжении всей работы.

Приведем коротко решение задач о действии на торец полубесконечной пластины внезапно приложенных нагрузок. В соответствии с (3.8.5) в одномерном случае ( $\partial_2 = 0$ ) имеем, опуская «лишние» индексы:

$$\partial_{1}^{2} \varphi - 4(1 - \nu) (\partial_{1} w + \varphi) - \frac{1}{a_{1}^{2}} \partial_{t}^{2} \varphi = 0; \quad \partial_{1}^{2} w + \partial_{1} \varphi - \frac{1}{a_{s1}^{2}} \partial_{t}^{2} w = 0 \quad (4.7.1)$$
$$\mathbf{M} = a_{1}^{2} \partial_{1} \varphi; \quad \mathbf{Q} = \partial_{1} w + \varphi; \quad a_{s1}^{2} = \frac{2}{3} a_{s}^{2}$$

Решение этих уравнений ищем в виде:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i; \ w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i; \ M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i; \ Q = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i$$
(4.7.2)

Члены рядов (4.7.2) ищутся при помощи одного из двух рекуррентных процессов.

Первый процесс, для случая преобладания изгибающего момента над перерезывающей силой, будет:

$$\partial_1^2 \varphi_i - 4(1-\nu) \left( \partial_1 w_{i-1} + \varphi_{i-1} \right) - \frac{1}{a_1^2} \partial_t^2 \varphi_i = 0$$
(4.7.3)

$$\partial_1^2 \mathbf{w}_i + \partial_1 \phi_i - \frac{1}{a_{s1}^2} \partial_t^2 \mathbf{w}_i = 0; \ \mathbf{M}_i = a_1^2 \partial_1 \phi_i; \ \mathbf{Q}_i = \partial_1 \mathbf{w}_i + \phi_i \quad (i = 1, 2, ...)$$

Решение этих уравнений ищется в виде:

$$\begin{split} \phi_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \phi_{i,j}^{1} x^{i-j} (a_{1}t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=2}^{i} \phi_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s1}t-x)^{a+i+j-1} \quad (4.7.4) \\ M_{i} &= \sum_{j=1}^{i} M_{i,j}^{1} x^{i-j} (a_{1}t-x)^{a+i+j-2} + \sum_{j=2}^{i} M_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s1}t-x)^{a+i+j-2} \\ w_{i} &= \sum_{j=1}^{i} w_{i,j}^{1} x^{i-j} (a_{1}t-x)^{a+i+j} + \sum_{j=1}^{i} w_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s1}t-x)^{a+i+j} \\ Q_{i} &= \sum_{j=1}^{i} Q_{i,j}^{1} x^{i-j} (a_{1}t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=1}^{i} Q_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s1}t-x)^{a+i+j-1} \end{split}$$

Коэффициенты сумм (4.7.4) отыскиваются при помощи формул, получаемых после подстановки (4.7.4) в (4.7.3) и приведения подобных, а также удовлетворения граничным условиям.

На рисунке 5 приведены, в сравнении, графики искомых функций по

уточненной теории, теории типа Тимошенко и классической теории для случая внезапно приложенного на границе изгибающего момента. Из них видно, что в прифронтовых зонах наблюдается значительное отличие в результатах по уточненной теории и теории типа Тимошенко, начиная с разницы в скоростях распространения фронтов и заканчивая указанной выше разницей в характере осцилляций. После прохождения второго фронта происходит сближение результатов по всем трем теориям, за исключением случаев с сильным влиянием сдвиговой деформации, когда результаты по классической теории заметно отличаются от результатов по уточненной теории и теории типа Тимошенко.

Отметим, что в то время, как в случае продольно нагруженного слоя квазифронту  $x=a_1t$ , соответствующему теории обобщенного плоского напряженного состояния, отвечала ярко выраженная зона быстрого изменения напряженно-деформированного состояния в рамках уточненной теории, здесь двум квазифронтам  $x=a_1t$  и  $x=a_{s1}t$  не отвечают никакие скольконибудь заметные эффекты в рамках уточненной теории.

В случае преобладания перерезывающей силы рассмотрим второй рекуррентный процесс:

$$\partial_{1}^{2} \mathbf{w}_{i} + \partial_{1} \phi_{i-1} - \frac{1}{a_{s1}^{2}} \partial_{t}^{2} \mathbf{w}_{i} = 0; \ \mathbf{Q}_{i} = \partial_{1} \mathbf{w}_{i} + \phi_{i-1}$$

$$(4.7.5)$$

$$\partial_{1}^{2} \phi_{i} - 4(1 - \nu) (\partial_{1} \mathbf{w}_{i} + \phi_{i-1}) - \frac{1}{a_{1}^{2}} \partial_{t}^{2} \phi_{i} = 0; \ \mathbf{M}_{i} = a_{1}^{2} \partial_{1} \phi_{i} \quad (i = 1, 2, ...)$$

Решение этих уравнений ищем в виде:

$$\begin{split} \mathbf{w}_{i} &= \sum_{j=2}^{i} \mathbf{w}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (a_{1} \mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a} + i + j - 1} + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{w}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s1} \mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a} + i + j - 1} \quad (4.7.6) \\ \mathbf{Q}_{i} &= \sum_{j=2}^{i} \mathbf{Q}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (a_{1} \mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a} + i + j - 2} + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{Q}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s1} \mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a} + i + j - 2} \\ \phi_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \phi_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (a_{1} \mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a} + i + j} + \sum_{j=1}^{i} \phi_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s1} \mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a} + i + j} \\ \mathbf{M}_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \mathbf{M}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (a_{1} \mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a} + i + j - 1} + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{M}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s1} \mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a} + i + j - 1} \end{split}$$

Коэффициенты сумм находятся прежним способом.

На рисунках 4.8, 4.9 приведены графики искомых функций для случая внезапно приложенной постоянной перерезывающей силы, полученные по трем теориям: уточненной, теории типа Тимошенко и классической. Остановимся подробнее на наиболее интересных здесь графиках для перерезывающей силы Q.

В соответствии с уточненной теорией и теорией типа Тимошенко на этих графиках наблюдается разрыв на втором фронте на величину приложенной на границе перерезывающей силы  $Q_0 = 1$ . Но имеется существенное отличие в местах расположения фронтов и в поведении

графиков непосредственно вблизи второго фронта. В соответствии с уточненной теорией возмущение от первого фронта невелико, и разрыв происходит в том направлении, которое соответствует знаку приложенной силы.

В соответствии с теорией типа Тимошенко перед вторым фронтом возмущение от первого фронта вызывает на графике для Q сильный провал в отрицательную область, а только затем скачок в положительном направлении. В итоге получается, что соответствующий пик на графике направлен в отрицательную сторону при положительной нагрузке, что плохо согласуется с физическим смыслом решаемой задачи.

После прохождения второго фронта и здесь наблюдается сближение результатов по всем трем теориям, более медленное только в тех случаях, когда велико влияние от сдвига, вызванного перерезывающей силой.

### 5. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Дифференциальные уравнения теории упругости, записанные в произвольной криволинейной ортогональной системе координат, подвергаются асимптотико-групповому анализу с целью построения уравнений теории оболочек. При этом поиск параметров асимптотического интегрирования производится с использованием ранее найденных значений параметров для случая декартовых координат

5.1. ВВЕДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Запишем динамические уравнения теории упругости в ортогональной криволинейной системе координат в виде [17]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{H_{1}}\partial_{1}\sigma_{11} + (H_{21} + H_{31})\sigma_{11} + \frac{1}{H_{2}}\partial_{2}\sigma_{12} + (2H_{12} + H_{32})\sigma_{12} + \\ &+ \frac{1}{H_{3}}\partial_{3}\sigma_{13} + (2H_{13} + H_{23})\sigma_{13} - H_{21}\sigma_{22} - H_{31}\sigma_{33} - \rho\partial_{t}^{2}u_{1} = 0 \\ &\frac{1}{H_{1}}\partial_{1}\sigma_{12} + (2H_{21} + H_{31})\sigma_{12} + \frac{1}{H_{2}}\partial_{2}\sigma_{22} + (H_{12} + H_{32})\sigma_{22} + \\ &+ \frac{1}{H_{3}}\partial_{3}\sigma_{23} + (H_{13} + 2H_{23})\sigma_{23} - H_{12}\sigma_{11} - H_{32}\sigma_{33} - \rho\partial_{t}^{2}u_{2} = 0 \\ &\frac{1}{H_{1}}\partial_{1}\sigma_{13} + (H_{21} + 2H_{31})\sigma_{13} + \frac{1}{H_{2}}\partial_{2}\sigma_{23} + (H_{12} + 2H_{32})\sigma_{23} + \\ &+ \frac{1}{H_{3}}\partial_{3}\sigma_{33} + (H_{13} + H_{23})\sigma_{33} - H_{13}\sigma_{11} - H_{23}\sigma_{22} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{split} & E\left(\frac{1}{H_{1}}\partial_{1}u_{1} + H_{12}u_{2} + H_{13}u_{3}\right) = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ & E\left(\frac{1}{H_{2}}\partial_{2}u_{2} + H_{21}u_{1} + H_{23}u_{3}\right) = \sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ & E\left(\frac{1}{H_{3}}\partial_{3}u_{3} + H_{31}u_{1} + H_{32}u_{2}\right) = \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ & G\left(\frac{1}{H_{2}}\partial_{2}u_{1} - H_{12}u_{1} + \frac{1}{H_{1}}\partial_{1}u_{2} - H_{21}u_{2}\right) = \sigma_{12} \\ & G\left(\frac{1}{H_{1}}\partial_{1}u_{3} - H_{31}u_{3} + \frac{1}{H_{3}}\partial_{3}u_{1} - H_{13}u_{1}\right) = \sigma_{13} \\ & G\left(\frac{1}{H_{2}}\partial_{2}u_{3} - H_{32}u_{3} + \frac{1}{H_{3}}\partial_{3}u_{2} - H_{23}u_{2}\right) = \sigma_{23} \end{split}$$

Здесь  $\partial_1 = \partial/\partial x_1$ ,  $\partial_2 = \partial/\partial x_2$ ,  $\partial_3 = \partial/\partial x_3$ ;  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  – ортогональные криволинейные координаты;  $\partial_t = \partial/\partial t$ ; t – время;  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  – коэффициенты Ёÿìý;  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  – физические компоненты вектора перемещений;  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  – физические компоненты тензора напряжений;  $\rho$  – плотность материала; Е – модуль упругости; G – модуль сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона; величины вида  $H_{ij}$  характеризуют кривизны координатных линий и вычисляются по формулам:

$$H_{ij} = \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$$
(5.1.2)

С использованием формально введенного малого параметра δ<1 выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \partial_{1} &= \delta^{\beta_{1}} \partial_{1}^{*}, \partial_{2} = \delta^{\beta_{2}} \partial_{2}^{*}, \partial_{3} = \delta^{\beta_{3}} \partial_{3}^{*}, H_{1} = \delta^{\beta_{4}} H_{1}^{*}, H_{2} = \delta^{\beta_{5}} H_{2}^{*}, H_{3} = \delta^{\beta_{6}} H_{3}^{*} \quad (5.1.3) \\ H_{12} &= \delta^{\beta_{7}} H_{12}^{*}, H_{13} = \delta^{\beta_{8}} H_{13}^{*}, H_{21} = \delta^{\beta_{9}} H_{21}^{*}, H_{23} = \delta^{\beta_{10}} H_{23}^{*}, H_{31} = \delta^{\beta_{11}} H_{31}^{*}, H_{32} = \delta^{\beta_{12}} H_{32}^{*} \\ \partial_{t} &= \delta^{\beta_{13}} \partial_{t}^{*}, u_{1} = \delta^{\beta_{14}} u_{1}^{*}, u_{2} = \delta^{\beta_{15}} u_{2}^{*}, u_{3} = \delta^{\beta_{16}} u_{3}^{*}, \sigma_{11} = \delta^{\beta_{17}} \sigma_{11}^{*}, \sigma_{22} = \delta^{\beta_{18}} \sigma_{22}^{*}, \sigma_{33} = \delta^{\beta_{19}} \sigma_{33}^{*} \\ \sigma_{12} &= \delta^{\beta_{20}} \sigma_{12}^{*}, \sigma_{13} = \delta^{\beta_{21}} \sigma_{13}^{*}, \sigma_{23} = \delta^{\beta_{22}} \sigma_{23}^{*}, \rho = \delta^{\beta_{23}} \rho^{*}, E = \delta^{\beta_{24}} E^{*}, G = \delta^{\beta_{24}} G^{*}, \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_{i}^{*} \sim 1; H_{i}^{*} \sim 1; H_{ij}^{*} \sim 1; \hat{\sigma}_{t}^{*} \sim 1; u_{i}^{*} \sim 1; \sigma_{ij}^{*} \sim 1; \rho^{*} \sim 1; E^{*} \sim 1; G^{*} \sim 1$$
 (i, j=1,2,3) (5.1.4)

При этом предполагаем, что  $E \sim G$  и  $v \sim 1$ .

Подставляя (5.1.3) в (5.1.1) получаем, в силу (5.1.4), что вес каждого члена преобразованных уравнений полностью определяется той степенью б, которую он приобретает в результате преобразований. Не выписывая самих преобразованных уравнений, выпишем только соответствующие показатели степени б, располагая их в том же порядке, что и члены уравнений (5.1.1):

$$\beta_1 - \beta_4 + \beta_{17}, \ \beta_9 + \beta_{17}, \ \beta_{11} + \beta_{17}, \ \beta_2 - \beta_5 + \beta_{20}, \ \beta_7 + \beta_{20}, \ \beta_{12} + \beta_{20},$$
(5.1.5)

$$\begin{split} \beta_{3} &-\beta_{6} + \beta_{21}, \beta_{8} + \beta_{21}, \beta_{10} + \beta_{21}, \beta_{9} + \beta_{18}, \beta_{11} + \beta_{19}, 2\beta_{13} + \beta_{14} + \beta_{23}. \\ \beta_{1} &-\beta_{4} + \beta_{20}, \beta_{9} + \beta_{20}, \beta_{11} + \beta_{20}, \beta_{2} - \beta_{5} + \beta_{18}, \beta_{7} + \beta_{18}, \beta_{12} + \beta_{18}, \\ \beta_{3} &-\beta_{6} + \beta_{22}, \beta_{8} + \beta_{22}, \beta_{10} + \beta_{22}, \beta_{7} + \beta_{17}, \beta_{12} + \beta_{19}, 2\beta_{13} + \beta_{15} + \beta_{23}. \\ \beta_{1} &-\beta_{4} + \beta_{21}, \beta_{9} + \beta_{21}, \beta_{11} + \beta_{21}, \beta_{2} - \beta_{5} + \beta_{22}, \beta_{7} + \beta_{22}, \beta_{12} + \beta_{22}, \\ \beta_{3} &-\beta_{6} + \beta_{19}, \beta_{8} + \beta_{19}, \beta_{10} + \beta_{19}, \beta_{8} + \beta_{17}, \beta_{10} + \beta_{18}, 2\beta_{13} + \beta_{16} + \beta_{23}. \\ \beta_{1} &-\beta_{4} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{7} + \beta_{15} + \beta_{24}, \beta_{8} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{17}, \beta_{18}, \beta_{19}. \\ \beta_{2} &-\beta_{5} + \beta_{15} + \beta_{24}, \beta_{9} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{10} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{18}, \beta_{17}, \beta_{19}. \\ \beta_{3} &-\beta_{6} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{11} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{12} + \beta_{15} + \beta_{24}, \beta_{19}, \beta_{17}, \beta_{18}. \\ \beta_{2} &-\beta_{5} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{7} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{1} - \beta_{4} + \beta_{15} + \beta_{24}, \beta_{9} + \beta_{15} + \beta_{24}, \beta_{20}. \\ \beta_{1} &-\beta_{4} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{11} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{3} - \beta_{6} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{8} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{21}. \\ \beta_{2} &-\beta_{5} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{11} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{3} - \beta_{6} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{8} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{21}. \\ \beta_{2} &-\beta_{5} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{11} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{3} - \beta_{6} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{10} + \beta_{15} + \beta_{24}, \beta_{20}. \\ \beta_{1} &-\beta_{4} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{11} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{3} - \beta_{6} + \beta_{14} + \beta_{24}, \beta_{10} + \beta_{15} + \beta_{24}, \beta_{21}. \\ \beta_{2} &-\beta_{5} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{12} + \beta_{16} + \beta_{24}, \beta_{3} - \beta_{6} + \beta_{15} + \beta_{24}, \beta_{10} + \beta_{15} + \beta_{24}, \beta_{22}. \end{split}$$

Приравнивая между собой все показатели, соответствующие каждому уравнению в отдельности, находим, что это достигается для следующих значений  $\beta_1,...,\beta_{24}$ : 1)  $\beta_{14}=...=\beta_{22}=\gamma_1$ ;  $\beta_1=...=\beta_{13}=\beta_{23}=\beta_{24}=0$ . 2)  $\beta_1=...=\beta_3=\beta_7=...==\beta_{13}=-\beta_{14}=...=-\beta_{16}=\gamma_2$ ;  $\beta_4=...=\beta_6=\beta_{17}=...=\beta_{24}=0$ . 3)  $\beta_{17}=...=\beta_{24}=\gamma_3$ ;  $\beta_1=...=\beta_{16}=0$ . 4)  $\beta_{13}=-0.5\beta_{23}=\gamma_4$ ;  $\beta_1=...=\beta_{12}=\beta_{14}=...=\beta_{22}=\beta_{24}=0$ . 5)  $\beta_1=\beta_4=\gamma_5$ ;  $\beta_2=\beta_3=\beta_5=...=\beta_{24}==0$ . 6)  $\beta_2=\beta_5=\gamma_6$ ;  $\beta_1=\beta_3=\beta_4=\beta_6=...=\beta_{24}=0$ . 7)  $\beta_3=\beta_6=\gamma_7$ ;  $\beta_1=\beta_2=\beta_4=\beta_5=\beta_7=...=\beta_{24}==0$ .

Следовательно, уравнения (5.1.1) допускают семипараметрическую группу растяжений с преобразованиями:

$$\begin{split} \partial_{i} &= \partial_{i}^{*}, H_{i} = H_{i}^{*}, H_{ij} = H_{ij}^{*}, \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, u_{i} = \delta^{\gamma_{1}} u_{i}^{*}, \sigma_{ij} = \delta^{\gamma_{1}} \sigma_{ij}^{*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*} \quad (5.1.6) \\ \partial_{i} &= \delta^{\gamma_{2}} \partial_{i}^{*}, H_{i} = H_{i}^{*}, H_{ij} = \delta^{\gamma_{2}} H_{ij}^{*}, \partial_{t} = \delta^{\gamma_{2}} \partial_{t}^{*}, u_{i} = \delta^{-\gamma_{2}} u_{i}^{*}, \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*} \\ \partial_{i} &= \partial_{i}^{*}, H_{i} = H_{i}^{*}, H_{ij} = H_{ij}^{*}, \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, u_{i} = u_{i}^{*}, \sigma_{ij} = \delta^{\gamma_{3}} \sigma_{ij}^{*}, \rho = \delta^{\gamma_{3}} \rho^{*}, E = \delta^{\gamma_{3}} E^{*}, G = \delta^{\gamma_{3}} G^{*} \\ \partial_{i} &= \partial_{i}^{*}, H_{i} = H_{i}^{*}, H_{ij} = H_{ij}^{*}, \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, u_{i} = u_{i}^{*}, \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*}, \rho = \delta^{\gamma_{3}} \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*} \\ \partial_{i} &= \partial_{i}^{*}, \partial_{2} = \partial_{2}^{*}, \partial_{3} = \partial_{3}^{*}, H_{1} = \delta^{\gamma_{5}} H_{1}^{*}, H_{2} = H_{2}^{*}, H_{3} = H_{3}^{*}, H_{ij} = H_{ij}^{*}, \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, u_{i} = u_{i}^{*}, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*} \\ \partial_{1} &= \partial_{1}^{*}, \partial_{2} &= \delta^{\gamma_{6}} \partial_{2}^{*}, \partial_{3} = \partial_{3}^{*}, H_{1} = H_{1}^{*}, H_{2} = \delta^{\gamma_{6}} H_{2}^{*}, H_{3} = H_{3}^{*}, H_{ij} = H_{ij}^{*}, \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, u_{i} = u_{i}^{*}, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*} \\ \partial_{1} &= \partial_{1}^{*}, \partial_{2} &= \partial_{2}^{*}, \partial_{3} = \delta^{\gamma_{7}} \partial_{3}^{*}, H_{1} = H_{1}^{*}, H_{2} = H_{2}^{*}, H_{3} = \delta^{\gamma_{7}} H_{3}^{*}, H_{ij} = H_{ij}^{*}, \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, u_{i} = u_{i}^{*}, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*} \\ \partial_{1} &= \partial_{1}^{*}, \partial_{2} &= \partial_{2}^{*}, \partial_{3} = \delta^{\gamma_{7}} \partial_{3}^{*}, H_{1} = H_{1}^{*}, H_{2} = H_{2}^{*}, H_{3} = \delta^{\gamma_{7}} H_{3}^{*}, H_{ij} = H_{ij}^{*}, \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, u_{i} = u_{i}^{*}, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*} \\ (i, j = 1, 2, 3) \end{split}$$

Для целей асимптотического анализа пригодны только преобразования, отличающиеся от любого из преобразований (5.1.6) или их суперпозиции, поскольку уравнения (5.1.1) инвариантны относительно этих преобразований и их применение не влияет на относительные веса членов уравнений.

Рассмотрим теперь суперпозицию преобразований (5.1.3) и (5.1.6):

$$\begin{split} \partial_{1} &= \delta^{\beta_{1}+\gamma_{2}+\gamma_{5}} \partial_{1}^{*}, \partial_{2} = \delta^{\beta_{2}+\gamma_{2}+\gamma_{6}} \partial_{2}^{*}, \partial_{3} = \delta^{\beta_{3}+\gamma_{2}+\gamma_{7}} \partial_{3}^{*}, H_{1} = \delta^{\beta_{4}+\gamma_{5}} H_{1}^{*} \quad (5.1.7) \\ H_{2} &= \delta^{\beta_{5}+\gamma_{6}} H_{2}^{*}, H_{3} = \delta^{\beta_{6}+\gamma_{7}} H_{3}^{*}, H_{12} = \delta^{\beta_{7}+\gamma_{2}} H_{12}^{*}, H_{13} = \delta^{\beta_{8}+\gamma_{2}} H_{13}^{*}, H_{21} = \delta^{\beta_{9}+\gamma_{2}} H_{21}^{*} \\ H_{23} &= \delta^{\beta_{10}+\gamma_{2}} H_{23}^{*}, H_{31} = \delta^{\beta_{11}+\gamma_{2}} H_{31}^{*}, H_{32} = \delta^{\beta_{12}+\gamma_{2}} H_{32}^{*}, \partial_{t} = \delta^{\beta_{13}+\gamma_{2}+\gamma_{4}} \partial_{t}^{*}, u_{1} = \delta^{\beta_{14}+\gamma_{1}-\gamma_{2}} u_{i}^{*} \\ u_{2} &= \delta^{\beta_{15}+\gamma_{1}-\gamma_{2}} u_{2}^{*}, u_{3} = \delta^{\beta_{16}+\gamma_{1}-\gamma_{2}} u_{3}^{*}, \sigma_{11} = \delta^{\beta_{17}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{11}^{*}, \sigma_{22} = \delta^{\beta_{18}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{22}^{*} \\ \sigma_{33} &= \delta^{\beta_{19}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{33}^{*}, \sigma_{12} = \delta^{\beta_{20}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{12}^{*}, \sigma_{13} = \delta^{\beta_{21}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{13}^{*}, \sigma_{23} = \delta^{\beta_{22}+\gamma_{1}+\gamma_{3}} \sigma_{23}^{*} \\ \rho &= \delta^{\beta_{23}+\gamma_{3}-2\gamma_{4}} \rho^{*}, E = \delta^{\beta_{24}+\gamma_{3}} E^{*}, G = \delta^{\beta_{24}+\gamma_{3}} G^{*} \end{split}$$

Преобразования (5.1.7) эквивалентны преобразованиям (5.1.3) в том смысле, что они приводят к тем же оценкам относительных весов членов уравнений (5.1.1). Но в то же время применение, вслед за (5.1.3), преобразований (5.1.6), заменяет соотношения (5.1.4) на соотношения:

$$\begin{aligned} \partial_1^* &\sim \delta^{-\gamma_2 - \gamma_5}, \partial_2^* \sim \delta^{-\gamma_2 - \gamma_6}, \partial_3^* \sim \delta^{-\gamma_2 - \gamma_7}, H_1^* \sim \delta^{-\gamma_5}, H_2^* \sim \delta^{-\gamma_6}, H_3^* \sim \delta^{-\gamma_7} \quad (5.1.8) \\ H_{ij}^* &\sim \delta^{-\gamma_2}, \partial_t^* \sim \delta^{-\gamma_2 - \gamma_4}, u_i^* \sim \delta^{-\gamma_1 + \gamma_2}, \sigma_{ij}^* \sim \delta^{-\gamma_1 - \gamma_3}, \rho^* \sim \delta^{-\gamma_3 + 2\gamma_4}, E^* \sim \delta^{-\gamma_3} \\ G^* &\sim \delta^{-\gamma_3} \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Таким образом, преобразования (5.1.3) и соотношения (5.1.4) заменены эквивалентными для целей асимптотического анализа преобразованиями (5.1.7), приводящими к соотношениям (5.1.8) с произвольными  $\gamma_1,...,\gamma_7$ .

Исключая из (5.1.7) и (5.1.8)  $\gamma_1,...,\gamma_7$  переходим к инвариантам семипараметрической группы растяжений (5.1.6):

$$I_{i} = \delta^{\alpha_{i}} I_{i}^{*}; \ I_{i}^{*} \sim 1 \quad (i = 1, ..., 17),$$
(5.1.9)

где:

$$\begin{split} \mathbf{I}_{1} &= \frac{\partial_{1}/\mathbf{H}_{1}}{\partial_{3}/\mathbf{H}_{3}}; \ \mathbf{I}_{2} &= \frac{\partial_{2}/\mathbf{H}_{2}}{\partial_{3}/\mathbf{H}_{3}}; \ \mathbf{I}_{3} &= \frac{\mathbf{E}\partial_{3}\mathbf{u}_{1}}{\mathbf{H}_{3}\sigma_{23}}; \ \mathbf{I}_{4} &= \frac{\mathbf{E}\partial_{3}\mathbf{u}_{2}}{\mathbf{H}_{3}\sigma_{23}}; \ \mathbf{I}_{5} &= \frac{\mathbf{E}\partial_{3}\mathbf{u}_{3}}{\mathbf{H}_{3}\sigma_{23}}; \ \mathbf{I}_{6} &= \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{23}} (5.1.10) \end{split}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{7} &= \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{23}}; \ \mathbf{I}_{8} &= \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{23}}; \ \mathbf{I}_{9} &= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}}; \ \mathbf{I}_{10} &= \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}}; \ \mathbf{I}_{11} &= \sqrt{\frac{\rho}{\mathbf{E}}} \frac{\partial_{1}}{\partial_{3}/\mathbf{H}_{3}}; \ \mathbf{I}_{12} &= \frac{\mathbf{H}_{12}}{\partial_{3}/\mathbf{H}_{3}}; \ \mathbf{I}_{13} &= \frac{\mathbf{H}_{13}}{\partial_{3}/\mathbf{H}_{3}} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{14} &= \frac{\mathbf{H}_{21}}{\partial_{3}/\mathbf{H}_{3}}; \ \mathbf{I}_{15} &= \frac{\mathbf{H}_{23}}{\partial_{3}/\mathbf{H}_{3}}; \ \mathbf{I}_{16} &= \frac{\mathbf{H}_{31}}{\partial_{3}/\mathbf{H}_{3}}; \ \mathbf{I}_{17} &= \frac{\mathbf{H}_{32}}{\partial_{3}/\mathbf{H}_{3}} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \alpha_{1} &= \beta_{1} - \beta_{3} - \beta_{4} + \beta_{6}, \ \alpha_{2} &= \beta_{2} - \beta_{3} - \beta_{5} + \beta_{6}, \ \alpha_{3} &= \beta_{3} - \beta_{6} + \beta_{14} - \beta_{22} + \beta_{24} \quad (5.1.11) \\ \alpha_{4} &= \beta_{3} - \beta_{6} + \beta_{15} - \beta_{22} + \beta_{24}, \ \alpha_{5} &= \beta_{3} - \beta_{6} + \beta_{16} - \beta_{22} + \beta_{24}, \ \alpha_{6} &= \beta_{17} - \beta_{22} \\ \alpha_{7} &= \beta_{18} - \beta_{22}, \ \alpha_{8} &= \beta_{19} - \beta_{22}, \ \alpha_{9} &= \beta_{20} - \beta_{22}, \ \alpha_{10} &= \beta_{21} - \beta_{22} \\ \alpha_{11} &= -\beta_{3} + \beta_{6} + \beta_{13} + 0.5\beta_{23} - 0.5\beta_{24}, \ \alpha_{12} &= -\beta_{3} + \beta_{6} + \beta_{7}, \ \alpha_{13} &= -\beta_{3} + \beta_{6} + \beta_{12} \\ \alpha_{14} &= -\beta_{3} + \beta_{6} + \beta_{9}, \ \alpha_{15} &= -\beta_{3} + \beta_{6} + \beta_{10}, \ \alpha_{16} &= -\beta_{3} + \beta_{6} + \beta_{11}, \ \alpha_{17} &= -\beta_{3} + \beta_{6} + \beta_{12} \end{aligned}$$

Вновь, как и в прежних случаях, произошел переход от величин, входящих в исходные уравнения (5.1.1), к инвариантам (5.1.10) допускаемой семипараметрической группы растяжений (5.1.6), а количество первоначально введенных параметров уменьшилось на порядок допускаемой группы.

Для того чтобы не переходить в уравнениях (5.1.1) к инвариантам, используем произвольность параметров  $\gamma_1,...,\gamma_7$  и подберем их значения так, чтобы в результате преобразований (5.1.7) оставались неизменными величины  $\partial_3, \sigma_{23}, E, G, \rho, H_1, H_2$  и  $H_3$ . При этом в каждом из инвариантов (5.1.10) остается только по одной величине, подвергаемой растяжению. В соответствии с поставленной целью имеем:

$$\begin{split} \beta_{3} + \gamma_{2} + \gamma_{7} &= 0, \beta_{4} + \gamma_{5} = 0, \beta_{5} + \gamma_{6} = 0, \beta_{6} + \gamma_{7} = 0, \beta_{22} + \gamma_{1} + \gamma_{3} = 0 \quad (5.1.12) \\ \beta_{23} + \gamma_{3} - 2\gamma_{4} &= 0, \beta_{24} + \gamma_{3} = 0 \\ Otcodda: \\ \gamma_{1} &= -\beta_{22} + \beta_{24}, \gamma_{2} = -\beta_{3} + \beta_{6}, \gamma_{3} = -\beta_{24}, \gamma_{4} = 0.5\beta_{23} - 0.5\beta_{24} \quad (5.1.13) \\ \gamma_{5} &= -\beta_{4}, \gamma_{6} = -\beta_{5}, \gamma_{7} = -\beta_{6} \\ B \text{ силу } (5.1.13) \text{ преобразования } (5.1.7) \text{ принимают вид:} \\ \partial_{1} &= \delta^{\alpha_{1}} \partial_{1}^{*}, \partial_{2} &= \delta^{\alpha_{2}} \partial_{2}^{*}, \partial_{3} = \partial_{3}^{*}, H_{1} = H_{1}^{*}, H_{2} = H_{2}^{*}, H_{3} = H_{3}^{*}, u_{1} = \delta^{\alpha_{3}} u_{1}^{*} \quad (5.1.14) \\ u_{2} &= \delta^{\alpha_{4}} u_{2}^{*}, u_{3} = \delta^{\alpha_{5}} u_{3}^{*}, \sigma_{11} = \delta^{\alpha_{6}} \sigma_{11}^{*}, \sigma_{22} = \delta^{\alpha_{7}} \sigma_{22}^{*}, \sigma_{33} = \delta^{\alpha_{8}} \sigma_{33}^{*}, \sigma_{12} = \delta^{\alpha_{9}} \sigma_{12}^{*} \\ \sigma_{13} &= \delta^{\alpha_{10}} \sigma_{13}^{*}, \sigma_{23} = \sigma_{23}^{*}, \partial_{t} = \delta^{\alpha_{11}} \partial_{t}^{*}, H_{12} = \delta^{\alpha_{12}} H_{12}^{*}, H_{13} = \delta^{\alpha_{13}} H_{13}^{*}, H_{21} = \delta^{\alpha_{14}} H_{21}^{*} \\ H_{23} &= \delta^{\alpha_{15}} H_{23}^{*}, H_{31} = \delta^{\alpha_{16}} H_{31}^{*}, H_{32} = \delta^{\alpha_{17}} H_{32}^{*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*} \end{split}$$

с прежними значениями  $\alpha_1,...,\alpha_{17}$  (5.1.11).

Преобразования (5.1.14) эквивалентны преобразованиям (5.1.3) и (5.1.7); соотношения  $I_i^* \sim 1$  из (5.1.9) удобнее записать в форме:

$$\frac{\partial_{i}^{*}}{H_{i}^{*}} \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_{t}^{*} \sim H_{jn}^{*}; \quad \frac{E \partial_{i}^{*} u_{j}^{*}}{H_{i}^{*}} \sim \sigma_{mn}^{*} \quad (i, j, m, n = 1, 2, 3)$$
(5.1.15)

Таким образом, и в этом случае выполнено обоснованное введение параметров асимптотического интегрирования с указанием их количества и смысла, задаваемого преобразованиями (5.1.14) и соотношениями (5.1.15).

# 5.2. ПОИСК ПАРАМЕТРОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Выполним преобразования (5.1.14) и потребуем справедливости соотношений (5.1.15). Тогда вес каждого члена уравнений (5.1.1) полностью описывается приобретаемой степенью δ. Выпишем соответствующую таблицу показателей степени, располагая их в том же порядке, что и члены уравнений (5.1.1):

$$\begin{aligned} &\alpha_{1} + \alpha_{6}, \alpha_{6} + \alpha_{14}, \alpha_{6} + \alpha_{16}, \alpha_{2} + \alpha_{9}, \alpha_{9} + \alpha_{12}, \alpha_{9} + \alpha_{17}, \\ &\alpha_{10}, \alpha_{10} + \alpha_{13}, \alpha_{10} + \alpha_{15}, \alpha_{7} + \alpha_{14}, \alpha_{8} + \alpha_{16}, \alpha_{3} + 2\alpha_{11}, \\ &\alpha_{1} + \alpha_{9}, \alpha_{9} + \alpha_{14}, \alpha_{9} + \alpha_{16}, \alpha_{2} + \alpha_{7}, \alpha_{7} + \alpha_{12}, \alpha_{7} + \alpha_{17}, \end{aligned}$$
(5.2.1)

$$\begin{array}{l} 0, \alpha_{13}, \alpha_{15}, \alpha_6 + \alpha_{12}, \alpha_8 + \alpha_{17}, \alpha_4 + 2\alpha_{11}.\\ \alpha_1 + \alpha_{10}, \alpha_{10} + \alpha_{14}, \alpha_{10} + \alpha_{16}, \alpha_2, \alpha_{12}, \alpha_{17},\\ \alpha_8, \alpha_8 + \alpha_{13}, \alpha_8 + \alpha_{15}, \alpha_6 + \alpha_{13}, \alpha_7 + \alpha_{15}, \alpha_5 + 2\alpha_{11}.\\ \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_{12}, \alpha_5 + \alpha_{13}, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8.\\ \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_{14}, \alpha_5 + \alpha_{15}, \alpha_7, \alpha_6, \alpha_8.\\ \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_{16}, \alpha_4 + \alpha_{17}, \alpha_8, \alpha_6, \alpha_7.\\ \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_{12}, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_{14}, \alpha_9.\\ \alpha_1 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_{16}, \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_{13}, \alpha_{10}.\\ \alpha_2 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_{17}, \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_{15}, 0. \end{array}$$

Не будем ставить здесь задачи полной классификации вариантов минимального упрощения, как в случае уравнений в декартовых координатах. Вместо этого применим другой способ поиска параметров  $\alpha_1, ..., \alpha_{17}$ .

Сравним уравнения (3.1.1) и (5.1.1). Уравнения (5.1.1) можно считать полученными из (3.1.1) путем приписывания коэффициентов Лямэ некоторым из прежних членов и добавлением каких-то новых членов. Коэффициенты Лямэ  $H_i$ , в соответствии с преобразованиями (5.1.14), не требуют отдельной асимптотической оценки, поскольку оцениваются в комбинации с дифференциальными операторами  $\partial_i$ ; в дополнительной оценке нуждаются новые слагаемые уравнений (5.1.1), содержащие коэффициенты вида  $H_{ij}$ . Асимптотические веса этих коэффициентов оцениваются параметрами  $\alpha_{12},...,\alpha_{17}$ ; остальные параметры  $\alpha_1,...\alpha_{11}$  имеют тот же смысл (с необходимыми уточнениями), что и в преобразованиях (3.1.17).

Выберем наиболее интересный из наборов параметров, изученных в разделе 3, приводящий к уравнениям изгиба пластины с учетом сдвига и инерции вращения и, одновременно, к уравнениям уточненного плоского напряженного состояния. Соответствующие значения параметров приведены в параграфе 3.7 и равны:  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = -0.5, \alpha_6 = 0.5, \alpha_7 = 0.5, \alpha_8 = 0.5, \alpha_9 = 0.5, \alpha_{10} = 0, \alpha_{11} = 0.5$ . При таких значениях этих параметров таблица (5.2.1) принимает вид:

1, 
$$0.5 + \alpha_{14}$$
,  $0.5 + \alpha_{16}$ , 1,  $0.5 + \alpha_{12}$ ,  $0.5 + \alpha_{17}$ , (5.2.2)  
0,  $\alpha_{13}$ ,  $\alpha_{15}$ ,  $0.5 + \alpha_{14}$ ,  $0.5 + \alpha_{16}$ , 1.  
1,  $0.5 + \alpha_{14}$ ,  $0.5 + \alpha_{16}$ , 1,  $0.5 + \alpha_{12}$ ,  $0.5 + \alpha_{17}$ ,  
0,  $\alpha_{13}$ ,  $\alpha_{15}$ ,  $0.5 + \alpha_{12}$ ,  $0.5 + \alpha_{17}$ , 1.  
0.5,  $\alpha_{14}$ ,  $\alpha_{16}$ ,  $0.5$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{17}$ ,  
0.5,  $0.5 + \alpha_{13}$ ,  $0.5 + \alpha_{15}$ ,  $0.5 + \alpha_{13}$ ,  $0.5 + \alpha_{15}$ , 0.5.  
0.5,  $\alpha_{12}$ ,  $-0.5 + \alpha_{13}$ , 0.5, 0.5, 0.5.  
0.5,  $\alpha_{14}$ ,  $-0.5 + \alpha_{15}$ , 0.5, 0.5, 0.5.

 $\begin{array}{l} -0.5, \, \alpha_{16}, \, \alpha_{17}, \, 0.5, \, 0.5, \, 0.5. \\ 0.5, \, \alpha_{12}, \, 0.5, \, \alpha_{14}, \, 0.5. \\ 0, \, -0.5 + \alpha_{16}, \, 0, \, \alpha_{13}, \, 0. \\ 0, \, -0.5 + \alpha_{17}, \, 0, \, \alpha_{15}, \, 0. \end{array}$ 

Будем разыскивать значения параметров  $\alpha_{12},...,\alpha_{17}$  по-прежнему исходя из критерия минимального упрощения. При этом будем требовать, чтобы в упрощенных уравнениях оставалось как можно больше членов, но ни один из вновь добавленных, по сравнению с (3.1.1), членов не превышал по своему весу прежних членов с наибольшим весом.

Рассмотрим, например, параметр  $\alpha_{12}$ . В соответствии с (5.2.2) в первом уравнении (5.1.1) слагаемому с наибольшим весом отвечает наименьший показатель степени 0. В соответствии с этим можно приравнять нулю слагаемые, содержащие  $\alpha_{12}$ , получая  $\alpha_{12} = -0.5$ . Такое же значение  $\alpha_{12}$  получается и из второго уравнения. Однако третье уравнение дает  $\alpha_{12} = 0.5$ . Значение  $\alpha_{12} = -0.5$  привело бы к тому, что в третьем уравнении соответствующее новое слагаемое имело бы вес, больший, чем наибольшие из прежних слагаемых. Значение  $\alpha_{12} = 0.5$  не противоречит и всем остальным уравнениям и поэтому выбирается как окончательное. Это наименьшее значение параметра  $\alpha_{12}$ , отвечающее поставленным условиям.

Аналогично находим и значения остальных параметров, получая в итоге:  $\alpha_{12} = 0.5$ ,  $\alpha_{13} = 1$ ,  $\alpha_{14} = 0.5$ ,  $\alpha_{15} = 1$ ,  $\alpha_{16} = 0.5$ ,  $\alpha_{17} = 0.5$ . Физический смысл этих значений будет ясен из дальнейшего, а пока запишем окончательный вид таблицы (5.2.3):

Таким образом, выбор значений параметров α<sub>1</sub>,...,α<sub>11</sub> позволил однозначно определить, исходя из критерия минимального упрощения, значения и остальных параметров  $\alpha_{12},...,\alpha_{17}$ . Поскольку эти последние коэффициентов характеризуют H<sub>ii</sub>, оценивающих веса кривизны координатных линий, то можно считать, что найдены наибольшие величины этих кривизн, при которых асимптотические оценки компонент напряженнодеформированного состояния, полученные для декартовой системы координат, естественным образом распространяются и на криволинейные координаты.

Продемонстрированный, на частном примере, способ поиска параметров  $\alpha_{12},...,\alpha_{17}$  может быть применен и к любому другому набору параметров.

#### 5.3. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Уравнения (5.1.1) существенно отличаются от всех рассмотренных ранее уравнений наличием переменных коэффициентов H<sub>i</sub> и H<sub>ij</sub>. В связи с этим необходимо раскладывать в ряды не только искомые функции:

$$u_{i} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{i}^{k}, \ \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ij}^{k} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$
(5.3.1)

но и эти коэффициенты:

$$\frac{1}{H_i} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H_i^k}, \quad H_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} H_{ij}^k \quad (i \neq j = 1, 2, 3)$$
(5.3.2)

(для удобства выполняются разложения не самих коэффициентов Лямэ H<sub>i</sub>, а обратных величин).

При этом возникают дополнительные проблемы, связанные с перемножением рядов, а также с определением того, как именно выполнять разложения в ряды (5.3.2) в каждом конкретном случае. Первая проблема имеет непринципиальный характер, хотя и вносит в анализ линейных уравнений (5.1.1) вопросы, обычно возникающие при рассмотрении нелинейных уравнений. Решению второй проблемы поможет последовательное выполнение уже зарекомендовавшей себя ранее методики, объединяющей асимптотический анализ с теорией групп.

Выполним, вместо преобразований (5.1.14), преобразования:

$$\begin{aligned} \partial_{1} &= \delta^{\alpha_{1}} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} &= \delta^{\alpha_{2}} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} &= \partial_{3}^{*}, \ u_{1}^{k} &= \delta^{\alpha_{3}+k-1} u_{1}^{k*}, \ u_{2}^{k} &= \delta^{\alpha_{4}+k-1} u_{2}^{k*} \end{aligned} (5.3.3) \\ u_{3}^{k} &= \delta^{\alpha_{5}+k-1} u_{3}^{k*}, \ \sigma_{11}^{k} &= \delta^{\alpha_{6}+k-1} \sigma_{11}^{k*}, \ \sigma_{22}^{k} &= \delta^{\alpha_{7}+k-1} \sigma_{22}^{k*}, \ \sigma_{33}^{k} &= \delta^{\alpha_{8}+k-1} \sigma_{33}^{k*} \end{aligned} \\ \sigma_{12}^{k} &= \delta^{\alpha_{9}+k-1} \sigma_{12}^{k*}, \ \sigma_{13}^{k} &= \delta^{\alpha_{10}+k-1} \sigma_{13}^{k*}, \ \sigma_{23}^{k} &= \delta^{k-1} \sigma_{23}^{k*}, \ \partial_{t} &= \delta^{\alpha_{11}} \partial_{t}^{*}, \ H_{12}^{k} &= \delta^{\alpha_{12}+k-1} H_{12}^{k*} \cr H_{13}^{k} &= \delta^{\alpha_{13}+k-1} H_{13}^{k*}, \ H_{21}^{k} &= \delta^{\alpha_{14}+k-1} H_{21}^{k*}, \ H_{23}^{k} &= \delta^{\alpha_{15}+k-1} H_{23}^{k*}, \ H_{31}^{k} &= \delta^{\alpha_{16}+k-1} H_{31}^{k*} \cr H_{32}^{k} &= \delta^{\alpha_{17}+k-1} H_{32}^{k*}, \ \frac{1}{H_{1}^{k}} &= \delta^{k-1} \frac{1}{H_{1}^{k*}}, \ \frac{1}{H_{2}^{k}} &= \delta^{k-1} \frac{1}{H_{2}^{k*}}, \ \frac{1}{H_{3}^{k}} &= \delta^{k-1} \frac{1}{H_{3}^{k*}}, \ \rho &= \rho * \cr E &= E^{*}, \ G &= G^{*} \quad (k = 1, 2, ...) \end{aligned}$$

и потребуем, вместо (5.1.15), справедливости соотношений:

$$\frac{\partial_{i}^{*}}{H_{i}^{*}} \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_{t}^{*} \sim H_{ij}^{k^{*}}; \quad \frac{E\partial_{i}^{*} u_{j}^{k^{*}}}{H_{i}^{r^{*}}} \sim \sigma_{mn}^{k^{*}} \sim \sigma_{23}^{l^{*}} \quad \begin{pmatrix} i, j, m, n = 1, 2, 3 \\ k, r = 1, 2... \end{pmatrix}$$
(5.3.4)

Тогда ряды (5.3.1) и (5.3.2) примут вид:

$$u_{1} = \delta^{\alpha_{3}} \sum_{k=1}^{\infty} u_{1}^{k*} \delta^{k-1}, \dots, \sigma_{13} = \delta^{\alpha_{10}} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{13}^{k*} \delta^{k-1}, \ \sigma_{23} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{23}^{k*} \delta^{k-1}$$
(5.3.5)

$$H_{12} = \delta^{\alpha_{12}} \sum_{k=1}^{\infty} H_{12}^{k*} \delta^{k-1}, \dots, \frac{1}{H_3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H_3^{k*}} \delta^{k-1}$$

Отсюда видно, что коэффициенты уравнений (5.1.1), так же как и искомые функции, раскладываются в ряды по степеням малого параметра  $\delta$ . И хотя, как было неоднократно показано ранее, непосредственно величина  $\delta$  не входит в окончательные результаты, процедура последовательных приближений, выполненная с соблюдением правил асимптотико-группового анализа, всегда позволяет найти ту комбинацию параметров, входящих в исходные уравнения, которая играет роль естественного малого параметра. В соответствии с этим проясняется и смысл разложений в ряды коэффициентов  $H_i$  и  $H_{ij}$ . Конкретно это будет показано ниже при выполнении процедуры последовательных приближений для тех значений параметров  $\alpha_1, ..., \alpha_{17}$ , которые приведены в предыдущем параграфе.

Подставляя (5.3.5) в (5.1.1), выполняя перемножение соответствующих рядов и расщепление по одинаковым степеням б, соответствующее параметров выбранным значениям  $\alpha_{1},...,\alpha_{17},$ получаем бесконечную рекуррентную систему уравнений, инвариантную относительно преобразований (5.3.3). Используя эту инвариантность, можно вернуться от преобразованных переменных к исходным, получая, что решение ищется в виде рядов (5.3.1), члены которых удовлетворяют соответствующей рекуррентной системе уравнений, и при этом ни ряды, ни уравнения не содержат формально введенный малый параметр б.

уравнений Рекуррентная система сохраняет инвариантность И относительно преобразований типа (5.1.6), которые теперь принимают вид:  $\partial_{i} = \partial_{i}^{*}, H_{i}^{k} = H_{i}^{k^{*}}, H_{ij}^{k} = H_{ij}^{k^{*}}, \partial_{t} = \partial_{t}^{*}, u_{i}^{k} = \delta^{\gamma_{1}} u_{i}^{k^{*}}, \sigma_{ij}^{k} = \delta^{\gamma_{1}} \sigma_{ij}^{k^{*}}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*}(5.3.6)$  $\partial_i = \delta^{\gamma_2} \partial_i^*, H_i^k = H_i^{k^*}, H_{ii}^k = \delta^{\gamma_2} H_{ii}^{k^*}, \partial_t = \delta^{\gamma_2} \partial_t^*, u_i^k = \delta^{-\gamma_2} u_i^{k^*}, \sigma_{ij}^k = \sigma_{ij}^{k^*}, \rho = \rho^*, E = E^*, G = G^*$  $\partial_i = \partial_i^*, H_i^k = H_i^{k*}, H_{ii}^k = H_{ii}^{k*}, \partial_t = \partial_t^*, u_i^k = u_i^{k*}, \sigma_{ii}^k = \delta^{\gamma_3} \sigma_{ii}^{k*}, \rho = \delta^{\gamma_3} \rho^*, E = \delta^{\gamma_3} E^*, G = \delta^{\gamma_3} G^*$  $\partial_i = \partial_i^*, H_i^k = H_i^{k*}, H_{ij}^k = H_{ij}^{k*}, \partial_t = \delta^{\gamma_4} \partial_t^*, u_i^k = u_i^{k*}, \sigma_{ij}^k = \sigma_{ij}^{k*}, \rho = \delta^{-2\gamma_4} \rho^*, E = E^*, G = G^*$  $\partial_1 = \delta^{\gamma_5} \partial_1^*, \partial_2 = \partial_2^*, \partial_3 = \partial_3^*, H_1^k = \delta^{\gamma_5} H_1^{k*}, H_2^k = H_2^{k*}, H_3^k = H_3^{k*}, H_{ii}^k = H_{ii}^{k*}, \partial_t = \partial_t^*$  $u_{i}^{k} = u_{i}^{k*}, \sigma_{ii}^{k} = \sigma_{ii}^{k*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*}$  $\partial_1 = \partial_1^*, \partial_2 = \delta^{\gamma_6} \partial_2^*, \partial_3 = \partial_3^*, H_1^k = H_1^{k*}, H_2^k = \delta^{\gamma_6} H_2^{k*}, H_3^k = H_3^{k*}, H_{ii}^k = H_{ii}^{k*}, \partial_t = \partial_t^*$  $u_{i}^{k} = u_{i}^{k*}, \sigma_{ii}^{k} = \sigma_{ii}^{k*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*}$  $\partial_1 = \partial_1^*, \partial_2 = \partial_2^*, \partial_3 = \delta^{\gamma_7} \partial_3^*, H_1^k = H_1^{k*}, H_2^k = H_2^{k*}, H_3^k = \delta^{\gamma_7} H_3^{k*}, H_{ii}^k = H_{ii}^{k*}, \partial_t = \partial_t^*$  $u_{i}^{k} = u_{i}^{k*}, \sigma_{ii}^{k} = \sigma_{ii}^{k*}, \rho = \rho^{*}, E = E^{*}, G = G^{*}$ (i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2, ...)

Как и ранее, рекуррентные системы уравнений, фактически, состоят из инвариантов этих преобразований и преобразований (5.3.3). Использование

данного факта облегчает исследование рекуррентных систем и обнаружение той комбинации величин, которая играет роль малого параметра.

### 5.4. КОЭФФИЦИЕНТЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим общепринятую в теории оболочек систему координат, в которой координатные линии на срединной поверхности оболочки являются линиями кривизны. Если x<sub>3</sub> – координата, изменяющаяся вдоль линий, перпендикулярных срединной поверхности, то для коэффициентов Лямэ имеем [17]:

$$H_1 = A_1 \left( 1 + \frac{x_3}{R_1} \right); \quad H_2 = A_2 \left( 1 + \frac{x_3}{R_2} \right); \quad H_3 = 1,$$
 (5.4.1)

где A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub> не зависят от x<sub>3</sub> и представляют собой, соответственно, коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны исходной поверхности.

Для коэффициентов вида H<sub>ii</sub>, в соответствии с (5.1.2), получаем:

$$H_{12} = A_{12} \frac{R_1}{R_1 + x_3}; H_{21} = A_{21} \frac{R_2}{R_2 + x_3}; H_{13} = \frac{1}{R_1 + x_3}; H_{23} = \frac{1}{R_2 + x_3}$$
(5.4.2)  
$$H_{31} = 0; H_{32} = 0; A_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2}; A_{21} = \frac{1}{A_2 A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1}$$

Ниже будет показано, что разложения в ряды типа (5.3.2) при выводе уравнений теории оболочек являются разложениями в степенные ряды по возрастающим степеням x<sub>3</sub>. Помня, что раскладываются не коэффициенты Лямэ, а обратные величины и учитывая, что ниже потребуется не более двух членов разложений, получаем:

$$\frac{1}{H_{1}} \approx \frac{1}{A_{1}} - \frac{x_{3}}{A_{1}R_{1}}; \frac{1}{H_{2}} \approx \frac{1}{A_{2}} - \frac{x_{3}}{A_{2}R_{2}}; \frac{1}{H_{3}} = 1; H_{31} = 0; H_{32} = 0$$
(5.4.3)  
$$H_{12} \approx A_{12} - A_{12}\frac{x_{3}}{R_{1}}; H_{21} \approx A_{21} - A_{21}\frac{x_{3}}{R_{2}}; H_{13} \approx \frac{1}{R_{1}}; H_{23} \approx \frac{1}{R_{2}}$$

Именно эти представления и будут использованы при выводе уравнений теории оболочек на основе асимптотико-группового анализа уравнений теории упругости.

### 5.5. ВЫВОД ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим таблицу (5.2.3). При выводе, в параграфе 3.7, уравнений изгиба пластины было показано, что для получения необходимых результатов нужно взять все уравнения в первом приближении и добавить из второго приближения первое, второе, третье и шестое уравнения. То же самое необходимо сделать и здесь. Из таблицы (5.2.3) видно, что при этом не возникает никаких дополнительных проблем с первым, вторым и шестым

уравнениями. Члены с k = 2 в этих уравнениях имеют коэффициенты  $1/H_3$ , а поскольку  $H_3 = 1$ , то вопросов перемножения рядов не возникает.

Несколько сложнее обстоит дело с третьим уравнением. Здесь имеют переменные коэффициенты первые шесть слагаемых (на самом деле четыре,  $H_{31} = 0$  $H_{32} = 0$ ), поэтому поскольку И необходимо выполнять перемножения рядов для искомых функций и коэффициентов. При этом нужна еще дополнительная информация о способе разложения в ряды (5.3.2) Получить коэффициентов уравнений. ЭТУ информацию помогают дополнительные преобразования растяжений (5.3.3), относительно которых должны быть инвариантны уравнения, строящиеся при помощи таблицы (5.2.3). В данном случае, с учетом значений параметров  $\alpha_1,...,\alpha_{17}$ , эти преобразования имеют вид:

$$\begin{split} \partial_{1} &= \delta^{0.5} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} &= \delta^{0.5} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} &= \partial_{3}^{*}, \ u_{1}^{k} &= \delta^{k-1} u_{1}^{k*}, \ u_{2}^{k} &= \delta^{k-1} u_{2}^{k*}, \ u_{3}^{k} &= \delta^{k-1.5} u_{3}^{k*} \quad (5.5.1) \\ \sigma_{11}^{k} &= \delta^{k-0.5} \sigma_{11}^{k*}, \ \sigma_{22}^{k} &= \delta^{k-0.5} \sigma_{22}^{k*}, \ \sigma_{33}^{k} &= \delta^{k-0.5} \sigma_{33}^{k*}, \ \sigma_{12}^{k} &= \delta^{k-0.5} \sigma_{12}^{k*}, \ \sigma_{13}^{k} &= \delta^{k-1} \sigma_{13}^{k*}, \ \sigma_{23}^{k} &= \delta^{k-1} \sigma_{23}^{k*} \\ \partial_{t} &= \delta^{0.5} \partial_{t}^{*}, \ H_{12}^{k} &= \delta^{k-0.5} H_{12}^{k*}, \ H_{13}^{k} &= \delta^{k} H_{13}^{k*}, \ H_{21}^{k} &= \delta^{k-0.5} H_{21}^{k*}, \ H_{23}^{k} &= \delta^{k} H_{23}^{k*}, \ H_{31}^{k} &= \delta^{k-0.5} H_{31}^{k*} \\ H_{32}^{k} &= \delta^{k-0.5} H_{32}^{k*}, \ \frac{1}{H_{1}^{k}} &= \delta^{k-1} \frac{1}{H_{1}^{k*}}, \ \frac{1}{H_{2}^{k}} &= \delta^{k-1} \frac{1}{H_{2}^{k*}}, \ \frac{1}{H_{3}^{k}} &= \delta^{k-1} \frac{1}{H_{3}^{k*}}, \ \rho &= \rho^{*}, \ E &= E^{*}, \ G &= G^{*} \\ &= (k = 1, 2, ...) \end{split}$$

Рассмотрим суперпозицию преобразований (5.5.1) и преобразований (5.3.6) при  $\gamma_2 = -0.5$ ,  $\gamma_1 = \gamma_3 = ... = \gamma_7 = 0$ :  $\partial_1 = \partial_1^*$ ,  $\partial_2 = \partial_2^*$ ,  $\partial_3 = \delta^{-0.5} \partial_3^*$ ,  $u_1^k = \delta^{k-0.5} u_1^{k*}$ ,  $u_2^k = \delta^{k-0.5} u_2^{k*}$ ,  $u_3^k = \delta^{k-1} u_3^{k*}$  (5.5.2)  $\sigma_{11}^k = \delta^{k-0.5} \sigma_{11}^{k*}$ ,  $\sigma_{22}^k = \delta^{k-0.5} \sigma_{22}^{k*}$ ,  $\sigma_{33}^k = \delta^{k-0.5} \sigma_{33}^{k*}$ ,  $\sigma_{12}^k = \delta^{k-0.5} \sigma_{12}^{k*}$ ,  $\sigma_{13}^k = \delta^{k-1} \sigma_{13}^{k*}$ ,  $\sigma_{23}^k = \delta^{k-1} \sigma_{23}^{k*}$   $\partial_t = \partial_t^*$ ,  $H_{12}^k = \delta^{k-1} H_{12}^{k*}$ ,  $H_{13}^k = \delta^{k-0.5} H_{13}^{k*}$ ,  $H_{21}^k = \delta^{k-1} H_{21}^{k*}$ ,  $H_{23}^k = \delta^{k-0.5} H_{23}^{k*}$ ,  $H_{31}^k = \delta^{k-1} H_{31}^{k*}$   $H_{32}^k = \delta^{k-1} H_{32}^{k*}$ ,  $\frac{1}{H_1^k} = \delta^{k-1} \frac{1}{H_1^{k*}}$ ,  $\frac{1}{H_2^k} = \delta^{k-1} \frac{1}{H_3^{k*}}$ ,  $\frac{1}{H_3^k} = \delta^{k-1} \frac{1}{H_3^{k*}}$ ,  $\rho = \rho^*$ ,  $E = E^*$ ,  $G = G^*$ (k = 1, 2, ...)

Решение, инвариантное относительно преобразований (5.5.2), имеет вид:  $u_{1}^{k} = \partial_{3}^{1-2k} v_{1}^{k}, u_{2}^{k} = \partial_{3}^{1-2k} v_{2}^{k}, u_{3}^{k} = \partial_{3}^{2-2k} v_{3}^{k}, \sigma_{11}^{k} = \partial_{3}^{1-2k} \tau_{11}^{k}, \sigma_{22}^{k} = \partial_{3}^{1-2k} \tau_{22}^{k}$ (5.5.3)  $\sigma_{33}^{k} = \partial_{3}^{1-2k} \tau_{33}^{k}, \sigma_{12}^{k} = \partial_{3}^{1-2k} \tau_{12}^{k}, \sigma_{13}^{k} = \partial_{3}^{2-2k} \tau_{13}^{k}, \sigma_{23}^{k} = \partial_{3}^{2-2k} \tau_{23}^{k}, H_{12}^{k} = \partial_{3}^{2-2k} A_{12}^{k}, H_{13}^{k} = \partial_{3}^{1-2k} A_{13}^{k}$  $H_{21}^{k} = \partial_{3}^{2-2k} A_{21}^{k}, H_{23}^{k} = \partial_{3}^{1-2k} A_{23}^{k}, H_{31}^{k} = \partial_{3}^{2-2k} A_{31}^{k}, H_{32}^{k} = \partial_{3}^{2-2k} A_{32}^{k}$  $\frac{1}{H_{1}^{k}} = \partial_{3}^{2-2k} \frac{1}{A_{1}^{k}}, \frac{1}{H_{2}^{k}} = \partial_{3}^{2-2k} \frac{1}{A_{23}^{k}}, \frac{1}{H_{2}^{k}} = \partial_{3}^{2-2k} \frac{1}{A_{23}^{k}} (k = 1, 2, ...)$ 

Такое представление показывает, что восхождение по степеням приближений сопровождается домножением на  $\partial_3^{-1}$ , то есть интегрированием по  $x_3$ . В разделе 3 было показано, что для искомых функций это означает
домножение на  $x_3$ , то есть разложение в степенные ряды по возрастающим степеням  $x_3$ . Следовательно, такое же разложение необходимо производить и для коэффициентов  $1/H_i$  и  $H_{ij}$ .

Поскольку эти коэффициенты являются заданными функциями координат, то из (5.5.3) вытекает, что (5.3.2) задает, в данном случае, разложение соответствующих величин в ряды Тейлора по  $x_3$ . Начальные члены подобных разложений, необходимые здесь, заданы соотношениями (5.4.3). Нужно еще показать, что вторые члены таких разложений в  $\delta$  раз меньше, чем первые. Это будет вытекать из асимптотических оценок, приведенных ниже. Учитывая все сказанное, можно производить перемножение соответствующих рядов и расщепление по одинаковым степеням  $\delta$ , получая, в соответствии с таблицей (5.2.3):

$$\begin{aligned} \partial_{3}\sigma_{13}^{l} &= 0, \ \partial_{3}\sigma_{23}^{l} = 0, \ \partial_{3}u_{3}^{l} = 0 \end{aligned} (5.5.4) \\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\sigma_{13}^{l} + A_{21}\sigma_{13}^{l} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\sigma_{23}^{l} + A_{12}\sigma_{23}^{l} + \partial_{3}\sigma_{33}^{l} - \rho\partial_{1}^{2}u_{3}^{l} = 0 \\ &G\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{3}^{l} + \partial_{3}u_{1}^{l}\right) = \sigma_{13}^{l}; \ G\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}u_{3}^{l} + \partial_{3}u_{2}^{l}\right) = \sigma_{23}^{l} \\ &E\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{1}^{l} + A_{12}u_{2}^{l} + \frac{1}{R_{1}}u_{3}^{l}\right) = \sigma_{11}^{l} - \nu\left(\sigma_{22}^{l} + \sigma_{33}^{l}\right) \\ &E\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}u_{2}^{l} + A_{21}u_{1}^{l} + \frac{1}{R_{2}}u_{3}^{l}\right) = \sigma_{22}^{l} - \nu\left(\sigma_{11}^{l} + \sigma_{33}^{l}\right) \\ &G\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}u_{1}^{l} - A_{12}u_{1}^{l} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{2}^{l} - A_{21}u_{2}^{l}\right) = \sigma_{12}^{l}, \ E\partial_{3}u_{3}^{2} = \sigma_{33}^{l} - \nu\left(\sigma_{11}^{l} + \sigma_{22}^{l}\right) \\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\sigma_{11}^{l} + A_{21}\left(\sigma_{11}^{l} - \sigma_{22}^{l}\right) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\sigma_{12}^{l} + 2A_{12}\sigma_{12}^{l} + \partial_{3}\sigma_{13}^{2} + \left(\frac{2}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)\sigma_{13}^{l} - \rho\partial_{1}^{2}u_{1}^{l} = 0 \\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\sigma_{12}^{l} + 2A_{21}\sigma_{12}^{l} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\sigma_{22}^{l} + A_{12}\left(\sigma_{22}^{l} - \sigma_{11}^{l}\right) + \partial_{3}\sigma_{23}^{2} + \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{2}{R_{2}}\right)\sigma_{23}^{l} - \rho\partial_{1}^{2}u_{2}^{l} = 0 \\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\sigma_{13}^{l} - \frac{x_{3}}{R_{1}A_{1}}\partial_{1}\sigma_{13}^{l} + A_{21}\sigma_{13}^{2} - A_{21}\frac{x_{3}}{R_{3}}\sigma_{13}^{l} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\sigma_{23}^{l} - \frac{x_{3}}{R_{2}A_{2}}\partial_{2}\sigma_{23}^{l} + A_{12}\sigma_{23}^{2} - \\ &-A_{12}\frac{x_{3}}{R_{1}}\sigma_{13}^{l} + A_{21}\sigma_{13}^{l} - A_{21}\frac{x_{3}}{R_{3}}}\sigma_{13}^{l} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\sigma_{23}^{l} - \frac{x_{3}}{R_{2}}\sigma_{2}^{l} - \rho\partial_{1}^{l}u_{3}^{l} = 0 \\ &= -A_{12}\frac{x_{3}}{R_{1}}\sigma_{23}^{l} + \partial_{3}\sigma_{33}^{2} + \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)\sigma_{33}^{l} - \frac{1}{R_{1}}\sigma_{11}^{l} - \frac{1}{R_{2}}\sigma_{22}^{l} - \rho\partial_{1}^{l}u_{3}^{l} = 0 \\ &= -A_{12}\frac{x_{3}}{R_{1}}\sigma_{1}^{l} + \partial_{3}\sigma_{33}^{2} + \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)\sigma_{33}^{l} - \frac{1}{R_{1}}\sigma_{11}^{l} - \frac{1}{R_{2}}\sigma_{22}^{l} - \rho\partial_{1}^{l}u_{3}^{l} = 0 \\ &= -A_{12}\frac{x_{3}}{R_{1}}\sigma_{1}^{l} + \partial_{3}\sigma_{33}^{l} + \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)\sigma_{33}^{l} - \frac{1}{R_{1}}\sigma_{1}^{l} - \frac{1}{R_{2}}\sigma_{2}^{l} - \rho\partial_{1}^{l}u_{3$$

Добавочная подгруппа преобразований (5.5.1) принимает для этих уравнений, с учетом (5.4.3), вид:

$$\partial_{1} = \delta^{0.5} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} = \delta^{0.5} \partial_{2}^{*}, \ \partial_{3} = \partial_{3}^{*}, \ u_{1}^{1} = u_{1}^{1*}, \ u_{2}^{1} = u_{2}^{1*}, \ u_{3}^{1} = \delta^{-0.5} u_{3}^{1*}, \ u_{3}^{2} = \delta^{0.5} u_{3}^{2*}$$
(5.5.5)  
$$\sigma_{11}^{1} = \delta^{0.5} \sigma_{11}^{1*}, \ \sigma_{22}^{1} = \delta^{0.5} \sigma_{22}^{1*}, \ \sigma_{33}^{1} = \delta^{0.5} \sigma_{33}^{1*}, \ \sigma_{33}^{2} = \delta^{1.5} \sigma_{33}^{2*}, \ \sigma_{12}^{1} = \delta^{0.5} \sigma_{12}^{1*}, \ \sigma_{13}^{1} = \sigma_{13}^{1*}, \ \sigma_{13}^{2} = \delta \sigma_{13}^{2*}$$

$$\sigma_{23}^{1} = \sigma_{23}^{1*}, \ \sigma_{23}^{2} = \delta \sigma_{23}^{2*}, \ \partial_{t} = \delta^{0.5} \partial_{t}^{*}, \ A_{12} = \delta^{0.5} A_{12}^{*}, \ \frac{x_{3}}{R_{1}} = \delta \frac{x_{3}^{*}}{R_{1}^{*}}, \ \frac{1}{R_{1}} = \delta \frac{1}{R_{1}^{*}}, \ A_{21} = \delta^{0.5} A_{21}^{*}$$
$$\frac{x_{3}}{R_{2}} = \delta \frac{x_{3}^{*}}{R_{2}^{*}}, \ \frac{1}{R_{2}} = \delta \frac{1}{R_{2}^{*}}, \ \frac{1}{A_{1}} = \frac{1}{A_{1}^{*}}, \ \frac{1}{A_{2}} = \frac{1}{A_{2}^{*}}, \ \rho = \rho^{*}, \ E = E^{*}, \ G = G^{*}$$

В силу этих преобразований асимптотические соотношения (5.3.4) будут:

$$\delta \sim \left(\partial_3^{-1} \frac{\partial_1}{A_1}\right)^2 \sim \frac{X_3}{R_1} \sim \frac{X_3}{R_2}$$
(5.5.6)

$$\frac{\partial_1}{A_1} \sim \frac{\partial_2}{A_2} \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t \sim A_{12} \sim A_{21} \sim \frac{1}{\sqrt{R_1 x_3}} \sim \frac{1}{\sqrt{R_2 x_3}}$$
(5.5.7)

Соотношения для искомых функций не выписываем, поскольку, как и во всех предыдущих случаях, они удовлетворяются автоматически, в силу уравнений (5.5.4).

Решение уравнений (5.5.4) ищем в виде:

$$\sigma_{13}^{1} = \sigma_{13,1}^{1}, \ \sigma_{23}^{1} = \sigma_{23,1}^{1}, \ u_{3}^{1} = u_{3,1}^{1}, \ \sigma_{33}^{1} = x_{3}\sigma_{33,1}^{1} + \sigma_{33,2}^{1}, \ u_{1}^{1} = x_{3}u_{1,1}^{1} + u_{1,2}^{1} \quad (5.5.8)$$

$$u_{2}^{1} = x_{3}u_{2,1}^{1} + u_{2,2}^{1}, \ \sigma_{11}^{1} = x_{3}\sigma_{11,1}^{1} + \sigma_{11,2}^{1}, \ \sigma_{22}^{1} = x_{3}\sigma_{22,1}^{1} + \sigma_{22,2}^{1}, \ \sigma_{12}^{1} = x_{3}\sigma_{12,1}^{1} + \sigma_{12,2}^{1}$$

$$\sigma_{13}^{2} = \frac{(x_{3})^{2}}{2}\sigma_{13,1}^{2} + x_{3}\sigma_{13,2}^{2}, \ \sigma_{23}^{2} = \frac{(x_{3})^{2}}{2}\sigma_{23,1}^{2} + x_{3}\sigma_{23,2}^{2}, \ u_{3}^{2} = \frac{(x_{3})^{2}}{2}u_{3,1}^{2} + x_{3}u_{3,2}^{2}$$

$$\sigma_{33}^{2} = \frac{(x_{3})^{3}}{6}\sigma_{33,1}^{2} + \frac{(x_{3})^{2}}{2}\sigma_{33,2}^{2} + x_{3}\sigma_{33,3}^{2}$$

Подставляя (5.5.8) в (5.5.4) и выполняя расщепление по одинаковым степеням x<sub>3</sub>, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\sigma_{13,1}^{1} + A_{21}\sigma_{13,1}^{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\sigma_{23,1}^{1} + A_{12}\sigma_{23,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3,1}^{1} = 0 \quad (5.5.9) \\ G\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{3,1}^{1} + u_{1,1}^{1}\right) &= \sigma_{13,1}^{1}, \quad G\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}u_{3,1}^{1} + u_{2,1}^{1}\right) = \sigma_{23,1}^{1} \\ E\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{1,1}^{1} + A_{12}u_{2,1}^{1}\right) &= \sigma_{11,1}^{1} - \nu\left(\sigma_{22,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{1}\right) \\ E\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{1,2}^{1} + A_{12}u_{2,2}^{1} + \frac{1}{R_{1}}u_{3,1}^{1}\right) &= \sigma_{11,2}^{1} - \nu\left(\sigma_{22,2}^{1} + \sigma_{33,2}^{1}\right) \\ E\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}u_{2,1}^{1} + A_{21}u_{1,1}^{1}\right) &= \sigma_{22,1}^{1} - \nu\left(\sigma_{11,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{1}\right) \\ E\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}u_{2,2}^{1} + A_{21}u_{1,2}^{1} + \frac{1}{R_{2}}u_{3,1}^{1}\right) &= \sigma_{22,2}^{1} - \nu\left(\sigma_{11,2}^{1} + \sigma_{33,2}^{1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{split} & G\bigg(\frac{1}{A_2}\partial_2 u_{1,1}^l - A_{12}u_{1,2}^l + \frac{1}{A_1}\partial_1 u_{2,1}^l - A_{21}u_{2,1}^l\bigg) = \sigma_{12,1}^l \\ & G\bigg(\frac{1}{A_2}\partial_2 u_{1,2}^l - A_{12}u_{1,2}^l + \frac{1}{A_1}\partial_1 u_{2,2}^l - A_{21}u_{2,2}^l\bigg) = \sigma_{12,2}^l \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1 \sigma_{11,1}^l + A_{21}\bigg(\sigma_{11,1}^l - \sigma_{22,1}^l\bigg) + \frac{1}{A_2}\partial_2 \sigma_{12,1}^l + 2A_{12}\sigma_{12,1}^l + \sigma_{13,1}^2 - \rho\partial_1^2 u_{1,1}^l = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1 \sigma_{11,2}^l + A_{12}\bigg(\sigma_{11,2}^l - \sigma_{22,2}^l\bigg) + \frac{1}{A_2}\partial_2 \sigma_{12,2}^l + 2A_{12}\sigma_{12,2}^l + \sigma_{13,2}^l - \rho\partial_1^2 u_{1,2}^l = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1 \sigma_{12,1}^l + A_{21}\sigma_{12,1}^l + \frac{1}{A_2}\partial_2 \sigma_{22,1}^l + A_{12}\bigg(\sigma_{22,1}^l - \sigma_{11,1}^l\bigg) + \sigma_{23,1}^2 - \rho\partial_1^2 u_{2,1}^l = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1 \sigma_{12,1}^l + 2A_{21}\sigma_{12,1}^l + \frac{1}{A_2}\partial_2 \sigma_{22,1}^l + A_{12}\bigg(\sigma_{22,1}^l - \sigma_{11,1}^l\bigg) + \sigma_{23,1}^2 - \rho\partial_1^2 u_{2,1}^l = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1 \sigma_{12,2}^l + 2A_{12}\sigma_{12,2}^l + \frac{1}{A_2}\partial_2 \sigma_{22,2}^l + A_{12}\bigg(\sigma_{22,2}^l - \sigma_{11,2}^l\bigg) + \sigma_{23,2}^l + \bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}\bigg)\sigma_{23,1}^l - \rho\partial_1^2 u_{2,2}^l = 0 \\ & Eu_{3,1}^2 = \sigma_{3,1,1}^l - v\bigg(\sigma_{11,1}^l + \sigma_{22,1}^l\bigg) \quad Eu_{3,2}^2 = \sigma_{3,2,2}^l - v\bigg(\sigma_{11,2}^l + \sigma_{22,2}^l\bigg) \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1 \sigma_{13,1}^2 + A_{21}\sigma_{13,1}^2 + \frac{1}{A_2}\partial_2 \sigma_{23,1}^l + A_{12}\sigma_{23,1}^2 - \sigma_{13,1}^l - \rho\partial_1^2 v_{3,1}^2 = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1 \sigma_{13,2}^l + A_{21}\sigma_{13,2}^l + \frac{1}{A_2}\partial_2 \sigma_{23,2}^l + A_{12}\sigma_{23,1}^l - \sigma_{3,1}^l - \rho\partial_1^2 v_{3,1}^2 = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1 \sigma_{13,2}^l + A_{21}\sigma_{13,2}^l + \frac{1}{A_2}\partial_2 \sigma_{23,2}^l + A_{12}\sigma_{23,2}^l - \frac{1}{R_1A_1}\partial_1 \sigma_{13,1}^l - \frac{A_{21}}{R_2}\sigma_{13,1}^l - \frac{1}{R_2A_2}\partial_2 \sigma_{23,1}^l - \sigma_{23,1}^l - \sigma_{33,1}^l - \rho\partial_1^2 v_{3,2}^l = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1 \sigma_{13,2}^l + \sigma_{33,2}^l + \bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\bigg)\sigma_{33,1}^l - \frac{1}{R_1}\sigma_{11,1}^l - \frac{1}{R_2}\sigma_{22,1}^l - \rho\partial_1^2 u_{3,2}^l = 0 \\ & \sigma_{33,3}^l + \bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\bigg)\sigma_{33,2}^l - \frac{1}{R_1}\sigma_{11,2}^l - \frac{1}{R_2}\sigma_{22,2}^l = 0 \\ & \frac{1}{R_1}\partial_1 \sigma_{13,1}^l + \frac{1}{R_2}\partial_2 \sigma_{23,1}^l - \frac{1}{R_1}\sigma_{11,2}^l - \frac{1}{R_2}\sigma_{22,1}^l - \rho\partial_1^2 u_{3,2}^l = 0 \\ & \frac{1}{R_1}\partial_1 \sigma_{33,3}^l + \bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\bigg)\sigma_{33,2}^l - \frac{1}{R_1}\sigma_1^l - \frac{1}{R_2}\sigma_{2$$

Дополним уравнения (5.5.9) граничными условиями:  
При 
$$x_3 = h - \frac{h^3}{6}\sigma_{33,1}^2 + \frac{h^2}{2}\sigma_{33,2}^2 + h(\sigma_{33,3}^2 + \sigma_{33,1}^1) + \sigma_{33,2}^1 = q^+$$
 (5.5.10)  
 $\frac{h^2}{2}\sigma_{13,1}^2 + h\sigma_{13,2}^2 + \sigma_{13,1}^1 = \tau_1^+, \frac{h^2}{2}\sigma_{23,1}^2 + h\sigma_{23,2}^2 + \sigma_{13,1}^1 = \tau_2^+$   
При  $x_3 = -h - \frac{h^3}{6}\sigma_{33,1}^2 + \frac{h^2}{2}\sigma_{33,2}^2 - h(\sigma_{33,3}^2 + \sigma_{33,1}^1) + \sigma_{33,2}^1 = q^-$   
 $\frac{h^2}{2}\sigma_{13,1}^2 - h\sigma_{13,2}^2 + \sigma_{13,1}^1 = \tau_1^-, \frac{h^2}{2}\sigma_{23,1}^2 - h\sigma_{23,2}^2 + \sigma_{13,1}^1 = \tau_2^-$   
Симметризация дает:  
 $\frac{h^3}{6}\sigma_{33,1}^2 + h(\sigma_{33,3}^2 + \sigma_{33,1}^1) = \frac{q^+ - q^-}{2}, \frac{h^2}{2}\sigma_{13,1}^2 + \sigma_{13,1}^1 = \frac{\tau_1^+ + \tau_1^-}{2}$  (5.5.11)  
 $\frac{h^2}{2}\sigma_{23,1}^2 + \sigma_{23,1}^1 = \frac{\tau_2^+ + \tau_2^-}{2}, \frac{h^2}{2}\sigma_{33,2}^2 + \sigma_{33,2}^1 = \frac{q^+ + q^-}{2}, \sigma_{13,2}^2 = \frac{\tau_1^+ - \tau_1^-}{2h}, \sigma_{23,2}^2 = \frac{\tau_2^+ - \tau_2^-}{2}$   
Введем, как в параграфах 3.5, 3.7, обозначения:

$$\begin{split} \mathbf{w} &= \mathbf{u}_{3,1}^{1}, \ \beta_{1} = \frac{1}{G} \sigma_{13,1}^{1}, \ \beta_{2} = \frac{1}{G} \sigma_{23,1}^{1}, \ \phi_{1} = \mathbf{u}_{1,1}^{1}, \ \phi_{2} = \mathbf{u}_{2,1}^{1}, \ \mathbf{v}_{1} = \mathbf{u}_{1,2}^{1}, \ \mathbf{v}_{2} = \mathbf{u}_{2,2}^{1} \ (5.5.12) \\ \mathbf{W} &= \mathbf{u}_{3,1}^{2}, \ \mathbf{V} = \mathbf{u}_{3,2}^{2}, \ \mathbf{M}_{1} = \frac{2\mathbf{h}^{3}}{3} \sigma_{11,1}^{1}, \ \mathbf{M}_{2} = \frac{2\mathbf{h}^{3}}{3} \sigma_{22,1}^{1}, \ \mathbf{H} = \frac{2\mathbf{h}^{3}}{3} \sigma_{12,1}^{1}, \ \mathbf{N} = \frac{2\mathbf{h}^{3}}{3} \sigma_{33,1}^{1} \\ \mathbf{Q}_{1} &= \frac{\mathbf{h}^{3}}{3} \sigma_{13,1}^{2} + 2\mathbf{h}\sigma_{13,1}^{1}, \ \mathbf{Q}_{2} = \frac{\mathbf{h}^{3}}{3} \sigma_{23,1}^{2} + 2\mathbf{h}\sigma_{23,1}^{1}, \ \mathbf{T}_{1} = 2\mathbf{h}\sigma_{11,2}^{1}, \ \mathbf{T}_{2} = 2\mathbf{h}\sigma_{22,2}^{1}, \ \mathbf{S} = 2\mathbf{h}\sigma_{12,2}^{1} \\ \mathbf{K} &= 2\mathbf{h}\sigma_{33,2}^{1}, \ \mathbf{q} = \mathbf{q}^{+} - \mathbf{q}^{-}, \ \mathbf{m}_{1} = \frac{\tau_{1}^{+} + \tau_{1}^{-}}{2}\mathbf{2h}, \ \mathbf{m}_{2} = \frac{\tau_{2}^{+} + \tau_{2}^{-}}{2}\mathbf{2h}, \ \tau_{1} = \tau_{1}^{+} - \tau_{1}^{-}, \ \tau_{2} = \tau_{2}^{+} - \tau_{2}^{-} \\ \mathbf{p} &= \frac{\mathbf{q}^{+} + \mathbf{q}^{-}}{2} \end{split}$$

с тем же смыслом, что и для пластин. Учтем также, что из выражений для  $Q_1, Q_2, m_1, m_2, a$  также второго и третьего соотношений (5.5.11), следует:  $\sigma_{13,1}^2 = \frac{3(m_1 - Q_1)}{2h^3}, \sigma_{23,1}^2 = \frac{3(m_2 - Q_2)}{2h^3}, \sigma_{13,1}^1 = \frac{3Q_1 - m_1}{4h}, \sigma_{23,1}^1 = \frac{3Q_2 - m_2}{4h}$  (5.5.13)

В итоге из (5.5.9) и (5.5.11) окончательно получаем:

$$\begin{split} \frac{1}{A_1}\partial_1M_1 + A_{21}(M_1 - M_2) + \frac{1}{A_2}\partial_2H + 2A_{12}H - Q_1 - \frac{2h^3\rho}{3}\partial_t^2\phi_1 &= -m_1 \quad (5.5.14) \\ \frac{1}{A_1}\partial_1H + 2A_{21}H + \frac{1}{A_2}\partial_2M_2 + A_{12}(M_2 - M_1) - Q_2 - \frac{2h^3\rho}{3}\partial_t^2\phi_2 &= -m_2 \\ \frac{1}{A_1}\partial_1Q_1 + A_{21}Q_1 + \frac{1}{A_2}\partial_2Q_2 + A_{12}Q_2 + \frac{2}{h^2}N - \frac{4h\rho}{3}\partial_t^2W &= \\ &= \frac{1}{3}\bigg(\frac{1}{A_1}\partial_1m_1 + A_{21}m_1 + \frac{1}{A_2}\partial_2m_2 + A_{12}m_2\bigg) \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\bigg)K + \frac{2}{h^2}N + \frac{2h\rho}{3}\partial_t^2W + \frac{\rho h^3}{3}\partial_t^2W = \\ &= q + \frac{1}{3}\bigg(\frac{1}{A_1}\partial_1m_1 + A_{21}m_1 + \frac{1}{A_2}\partial_2m_2 + A_{12}m_2\bigg) \\ \frac{1}{A_1}\partial_1T_1 + A_{21}(T_1 - T_2) + \frac{1}{A_2}\partial_2S + 2A_{12}S + \frac{3}{2}\bigg(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}\bigg)Q_1 - 2h\rho\partial_t^2v_1 = -\tau_1 + \frac{1}{2}\bigg(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}\bigg)m_1 \\ \frac{1}{A_2}\partial_1S + 2A_{21}S + \frac{1}{A_2}\partial_2T_2 + A_{12}(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}\bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}\bigg)Q_2 - 2h\rho\partial_t^2v_2 = -\tau_2 + \frac{1}{2}\bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}\bigg)m_2 \\ \frac{3}{4h}\bigg(\frac{1}{R_1A_1}\partial_1Q_1 + \frac{A_{21}}{R_2}Q_1 + \frac{1}{R_2A_2}\partial_2Q_2 + \frac{A_{12}}{R_1}Q_2\bigg) + \frac{3}{2h^3}\bigg[\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} - \bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\bigg)N\bigg] + \\ + \frac{K}{h^3} + \rho\partial_t^2V = \frac{2}{h^2}P + \frac{1}{2h}\bigg(\frac{1}{A_1}\partial_1\tau_1 + A_{21}\tau_1 + \frac{1}{A_2}\partial_2\tau_2 + A_{12}\tau_2\bigg) + \end{split}$$

$$\begin{split} &+ \frac{1}{4h} \Biggl( \frac{1}{R_1 A_1} \partial_1 m_1 + \frac{A_{21}}{R_2} m_1 + \frac{1}{R_2 A_2} \partial_2 m_2 + \frac{A_{12}}{R_1} m_2 \Biggr) \\ &\frac{2h^3 E}{3} \Biggl( \frac{1}{A_1} \partial_1 \phi_1 + A_{12} \phi_2 \Biggr) = M_1 - \nu (M_2 + N); \frac{2h^3 E}{3} \Biggl( \frac{1}{A_2} \partial_2 \phi_2 + A_{21} \phi_1 \Biggr) = M_2 - \nu (M_1 + N) \\ &\frac{2h^3 E}{3} W = N - \nu (M_1 + M_2), \ \frac{2h^3 G}{3} \Biggl( \frac{1}{A_2} \partial_2 \phi_1 - A_{12} \phi_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \phi_2 - A_{21} \phi_2 \Biggr) = H \\ Q_1 &= \frac{4hG}{3} \Biggl( \frac{1}{A_1} \partial_1 w + \phi_1 \Biggr) + \frac{m_1}{3} = \frac{4hG}{3} \beta_1 + \frac{m_1}{3}, \ Q_2 &= \frac{4hG}{3} \Biggl( \frac{1}{A_2} \partial_2 w + \phi_2 \Biggr) + \frac{m_2}{3} = \frac{4hG}{3} \beta_2 + \frac{m_2}{3} \Biggr) \\ &2hE \Biggl( \frac{1}{A_1} \partial_1 v_1 + A_{12} v_2 + \frac{w}{R_1} \Biggr) = T_1 - \nu (T_2 + K), \ 2hE \Biggl( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_2 + A_{21} v_1 + \frac{w}{R_2} \Biggr) = T_2 - \nu (T_1 + K) \\ &2hEV = K - \nu (T_1 + T_2), \ 2hG \Biggl( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_1 - A_{12} v_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 v_2 - A_{21} v_2 \Biggr) = S \end{split}$$

Эти уравнения объединяют бывшие в случае пластины независимыми уравнения (3.5.12) и (3.7.18). Все, сказанное выше об указанных уравнениях, справедливо и здесь.

Напомним главное. В уравнениях (5.5.14) учтены сдвиги от перерезывающей силы и инерция вращения нормали. Эти уравнения задают скорости распространения фронтов изгибных и продольных волн равнûіè скорости распространения трехмерных продольных волн, а скорости распространения крутильных, сдвиговых и поперечных волн, равными скорости трехмерных поперечных волн.

Несмотря на свой уточненный характер, уравнения (5.5.14) являются типичными двумерными уравнениями; главные характеристики напряженнодеформированного состояния в них – перемещения и силовые факторы – носят обычный характер. Граничные условия задаются здесь таким же образом, как в теории типа Тимошенко.

Уравнения (5.5.14) отличаются от соответствующих уравнений теории пластин минимальным образом, добавлением к уравнениям пластин наименьшего необходимого количества дополнительных слагаемых. Это роднит данные уравнения с уравнениями пологих оболочек. В то же время эти уравнения учитывают все моментные и безмоментные эффекты и пригодны для решения любых «оболочечных» задач с любыми допустимыми в теории оболочек видами нагрузок и граничных условий.

Вернемся к асимптотическим оценкам. Решение (5.5.8) содержит, на самом деле, две цепочки решений: одну, порожденную константами интегрирования  $\sigma_{13,1}^{1}$ ,  $\sigma_{23,1}^{1}$ ,  $u_{3,1}^{1}$ , и вторую, порожденную константами  $\sigma_{33,2}^{1}$ ,  $u_{1,2}^{1}$ ,  $u_{2,2}^{1}$ . В пределах каждой цепочки интегрирование по  $x_3$ , то есть

выполнение оператора  $\partial_3^{-1}$ , фактически, эквивалентно домножению на  $x_3$ . Поэтому соотношения (5.5.6) и (5.5.7) можно переписать в виде:

$$\delta \sim \left( x_3 \frac{\partial_1}{A_1} \right)^2 \sim \frac{x_3}{R_1} \sim \frac{x_3}{R_2}; \quad \frac{\partial_1}{A_1} \sim \frac{\partial_2}{A_2} \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t \sim A_{12} \sim A_{21}$$
(5.5.15)

Заменяя координату x<sub>3</sub> на ее наибольшее значение h, получаем окончательно:

$$\delta \sim \max[(hD)^2, hK] < 1,$$
 (5.5.16)

где:

$$\mathsf{D} = \max\left(\frac{\partial_1}{\mathsf{A}_1}, \frac{\partial_2}{\mathsf{A}_2}, \sqrt{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{E}}}\partial_t, \mathsf{A}_{12}, \mathsf{A}_{21}\right); \ \mathsf{K} = \max\left(\frac{1}{\mathsf{R}_1}, \frac{1}{\mathsf{R}_2}\right)$$
(5.5.17)

Рассмотрим более детально эти соотношения. Из (5.5.16) видно, что одновременно оцениваются и дифференциальные и геометрические параметры. Однако между ними есть определенная разница. Начнем с геометрических параметров, учтенных величинами  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $1/R_1$ ,  $1/R_2$ . В соответствии с (5.4.3) видно, что для всех коэффициентов исходных уравнений (5.1.1) выполнены разложения в ряды с удержанием величин порядка  $\delta$ . Следовательно, погрешность для этих разложений оценивается величиной порядка  $\delta^2$ . То есть, задавая:

$$\delta = \max[(hD)^2, hK], D = \max(A_{12}, A_{21}); K = \max(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}),$$
 (5.5.18)

нужно проверять не соотношение (5.5.16), а соотношение  $\delta^2 < 1$ , что значительно расширяет диапазон изменения геометрических параметров, в котором справедливы уравнения (5.5.14).

Несколько сложнее обстоит дело с оценками дифференциальных операторов и искомых функций. С одной стороны, для ряда наиболее важных из искомых функций, таких как  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ , представлены только первые члены разложений в ряды вида (5.3.1), следовательно, погрешность оценивается величиной  $\delta$ . В то же время для других искомых функций удержано по два члена разложения, то есть достигнута большая точность.

Но на самом деле речь идет не столько о формальных оценках погрешностей, сколько о трактовках полученных результатов, Рассмотрение задач в рамках теории пластин показало, что при тех же законах распределения искомых функций по толщине пластины, которые рассматриваются при выводе классических уравнений, удается добиться принципиально новых результатов за счет сравнительно небольшого изменения порядка вычислений. Главной при этом оказалась возможность резкого продвижения в направлении быстроизменяющихся прифронтовых зон. Следовательно, и здесь погрешность оценивается, как минимум, величиной  $\delta^2$ .

Исходя из изложенного, заменим (5.5.16) на:

 $\delta \sim \max[(hD)^2, hK], \quad \delta^2 < 1$ 

Это и есть окончательные асимптотические соотношения, с учетом (5.5.17), при которых справедливы уравнения (5.5.14).

В параграфе 3.7 были приведены подробные рассуждения, относящиеся к одновременному учету, при интегрировании уравнений (3.7.2), как моментных, так и безмоментных компонент напряженнодеформированного состояния. Здесь эти рассуждения остаются в силе, приобретая повышенную актуальность, поскольку компоненты указанных двух состояний переплетаются, входя одновременно в выражения для некоторых из искомых функций, например,  $T_1$  и  $T_2$ .

Одновременный учет относительно независимых компонент напряженно-деформированного состояния приводит к универсальности уравнений (5.5.14). В то же время это обстоятельство делает необходимым дальнейший асимптотический анализ указанных уравнений, поскольку во многих ситуациях выделяются какие-то комбинации указанных компонент при вторичной роли других элементов. Подобный анализ будет выполнен ниже.

# 5.6. БЕЗРАЗМЕРНАЯ ФОРМА ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Переведем уравнения (5.5.14) в безразмерную форму, пользуясь такими же преобразованиями, как и для пластин. Необходимо только учесть, что заранее неизвестны размерности криволинейных координат  $x_1$  и  $x_2$ , но известно, что размерность длины имеют произведения  $A_1x_1$  и  $A_2x_2$ . Коэффициенты  $A_{12}$  и  $A_{21}$  преобразуются так же, как дифференциальные операторы  $\partial_1/A_1$  и  $\partial_2/A_2$ . Учтем также преобразования радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , относя их, как и все величины с размерностью длины, к толщине оболочки 2h. В итоге получаем преобразования:

$$\frac{1}{A_{1}}\partial_{1} = \frac{1}{2h}\frac{1}{\overline{A}_{1}}\overline{\partial}_{1}, \ \frac{1}{A_{2}}\partial_{2} = \frac{1}{2h}\frac{1}{\overline{A}_{2}}\overline{\partial}_{2}, \ A_{12} = \frac{1}{2h}\overline{A}_{12}, \ A_{21} = \frac{1}{2h}\overline{A}_{21}$$
(5.6.1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{2h} \frac{1}{\overline{R}_1}, \ \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2h} \frac{1}{\overline{R}_2}, \ \overline{t} = \frac{a_p}{2h} t, \ \overline{\partial}_t = \frac{\partial}{\partial \overline{t}}, \ \overline{M}_1 = \frac{3b}{h^2 E} M_1, \ \overline{M}_2 = \frac{3b}{h^2 E} M_2, \ \overline{N} = \frac{3b}{h^2 E} N \\ \overline{H} &= \frac{3b}{h^2 E} H, \ \overline{Q}_1 = \frac{3}{4hG} Q_1, \ \overline{Q}_2 = \frac{3}{4hG} Q_2, \ \overline{w} = \frac{w}{2h}, \ \overline{W} = 2hW, \ \overline{T}_1 = \frac{b}{2hE} T_1, \ \overline{T}_2 = \frac{b}{2hE} T_2 \\ \overline{K} &= \frac{b}{2hE} K, \ \overline{S} = \frac{b}{2hE} S, \ \overline{v}_1 = \frac{v_1}{2h}, \ \overline{v}_2 = \frac{v_2}{2h}, \ \overline{q} = \frac{3b}{2E} q, \ \overline{m}_1 = \frac{3}{4hG} m_1, \ \overline{m}_2 = \frac{3}{4hG} m_2 \\ \overline{\tau}_1 &= \frac{b}{E} \tau_1, \ \overline{\tau}_2 = \frac{b}{E} \tau_2, \ \overline{p} = \frac{8b}{E} p, \ b = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}, \ a_p^2 = \frac{E}{\rho b}, \ a_s^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{aligned}$$

(5.5.19)

Выполняя все преобразования, получаем искомые уравнения в безразмерной форме. Запишем их, отбрасывая черточки над безразмерными величинами, так что одни и те же обозначения будут использованы и для размерных и для безразмерных величин. Это не приводит к путанице, поскольку обе формы записи не используются одновременно и всегда можно указать, какая из них имеется в виду.

Здесь в дальнейшем будет использоваться только безразмерная форма уравнений:

$$\begin{split} &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}M_{1} + A_{21}(M_{1} - M_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}H + 2A_{12}H - 8a_{s}^{2}Q_{1} - \partial_{t}^{2}\phi_{1} = -8a_{s}^{2}m_{1} \quad (5.6.2) \\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}H + 2A_{21}H + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}M_{2} + A_{12}(M_{2} - M_{1}) - 8a_{s}^{2}Q_{2} - \partial_{t}^{2}\phi_{2} = -8a_{s}^{2}m_{2} \\ &a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}Q_{1} + A_{2}Q_{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}Q_{2} + A_{12}Q_{2}\right) + N - \partial_{t}^{2}w = \frac{a_{s}^{2}}{3}\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}m_{1} + A_{2}m_{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}m_{2} + A_{12}m_{2}\right) \\ &\frac{3}{2}\left[\frac{T_{1}}{R_{1}} + \frac{T_{2}}{R_{2}} - \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)K\right] + N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W = q + \\ &+ \frac{a_{s}^{2}}{3}\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}m_{1} + A_{2}m_{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}S + 2A_{12}S + a_{s}^{2}\left(\frac{2}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)Q_{1} - \partial_{t}^{2}v_{1} = -\tau_{1} + \frac{a_{s}^{2}}{3}\left(\frac{2}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)m_{1} \\ \frac{1}{A_{1}}\partial_{t}S + 2A_{2}S + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}S + 2A_{12}S + a_{s}^{2}\left(\frac{2}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)Q_{2} - \partial_{t}^{2}v_{2} = -\tau_{2} + \frac{a_{s}^{2}}{3}\left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{2}{R_{2}}\right)m_{2} \\ &a_{s}^{2}\left(\frac{1}{R_{1}}\partial_{1}Q_{1} + \frac{A_{21}}{R_{2}}Q_{2} + A_{12}(T_{2} - T_{1}) + a_{s}^{2}\left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{2}{R_{2}}\right)Q_{2} - \partial_{t}^{2}v_{2} = -\tau_{2} + \frac{a_{s}^{2}}{3}\left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{2}{R_{2}}\right)m_{2} \\ &a_{s}^{2}\left(\frac{1}{R_{1}A_{1}}\partial_{1}Q_{1} + \frac{A_{21}}{R_{2}}Q_{1} + \frac{1}{R_{2}A_{2}}\partial_{2}Q_{2} + \frac{A_{12}}{R_{1}}Q_{2}\right) + \frac{M_{1}}{R_{1}} + \frac{M_{2}}{R_{2}} - \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)N + 8K + \partial_{t}^{2}V = p + \\ &+ \frac{1}{A_{1}}\partial_{t}\tau_{1} + A_{21}\tau_{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\tau_{2} + A_{12}\tau_{2} + \frac{a_{s}^{2}}{3}\left(\frac{1}{R_{1}A_{1}}\partial_{1}m_{1} + \frac{A_{21}}{R_{2}}m_{1} + \frac{1}{R_{2}A_{2}}\partial_{2}m_{2} + \frac{A_{12}}{R_{1}}m_{2}\right) \\ &b\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{t}\phi_{1} + A_{12}\phi_{2}\right) = M_{1} - v(M_{2} + N), \quad b\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\phi_{2} + A_{21}\phi_{1}\right) = M_{2} - v(M_{1} + N) \\ &bW = N - v(M_{1} + M_{2}), \quad H = a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\phi_{1} - A_{12}\phi_{1} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\phi_{2} - A_{21}\phi_{2}\right) \\ &Q_{1} = \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}w + \phi_{1} + \frac{1}{3}m_{1} = \beta_{1} + \frac{1}{3}m_{1}, \quad Q_{2} = \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}w + \phi_{2} + \frac{1}{3}m_{2} = \beta_{2} + \frac{1}{3}m_{2} \\ \\ &$$

$$bV = K - v(T_1 + T_2), \ S = a_s^2 \left(\frac{1}{A_2}\partial_2 v_1 - A_{12}v_1 + \frac{1}{A_1}\partial_1 v_2 - A_{21}v_2\right)$$

Асимптотические соотношения (5.5.16), (5.5.17) можно теперь записать в форме:

$$\delta \sim \max(D^2, \mathsf{K}), \quad \delta < 1 \tag{5.6.3}$$
$$D = \max\left(\frac{\partial_1}{A_1}, \frac{\partial_2}{A_2}, \partial_1, A_{12}, A_{21}\right), \quad \mathsf{K} = \max\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right)$$

Особо подчеркнем, что в то время как в теории пластин проверяются только скорости изменения компонент напряженно-деформированного состояния по пространственным координатам и времени, в теории оболочек на равных проверяются также степени искривления координатных линий, задаваемые величинами A<sub>12</sub>, A<sub>21</sub>, 1/R<sub>1</sub>, 1/R<sub>2</sub>.

Интересно отметить, что проверяются не только кривизны срединной поверхности оболочки, но и кривизны координатных линий на этой поверхности; и те и другие должны быть достаточно малы, хотя степень искривления координатных линий, задаваемых величинами  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ , может быть большей, чем степень искривления срединной поверхности оболочки, задаваемая величинами  $1/R_1$ ,  $1/R_2$ . Это вытекает из того, что для  $A_{12}$  и  $A_{21}$ , входящих в состав величины D, учитываются их квадраты, в то время как величины  $1/R_1$ ,  $1/R_2$  учитываются, в составе величины K, непосредственно.

# 5.7. КОЭФФИЦИЕНТЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Выше специальная форма переменных коэффициентов уравнений теории упругости (5.1.1) облегчила разложение этих коэффициентов в ряды, необходимые при выводе уравнений теории оболочек. Обобщим эти результаты на произвольный случай. Начнем с коэффициентов  $H_{13}$ ,  $H_{23}$ . Для них используются только первые члены разложений в ряды по  $x_3$ , то есть значения при  $x_3 = 0$  (при условии, что  $x_3 = 0$  задают срединную поверхности оболочки):

$$K_1 = H_{13}(x_3 = 0), \quad K_2 = H_{23}(x_3 = 0)$$
 (5.7.1)

Величины  $K_1$  и  $K_2$  – это кривизны координатных линий  $x_1$  и  $x_2$  в направлении  $x_3$ . Можно записать, как в предыдущих параграфах,

$$K_1 = \frac{1}{R_1}, \quad K_2 = \frac{1}{R_2},$$
 (5.7.2)

но нужно помнить, что теперь величины  $R_1$  и  $R_2$  уже не обязательно являются главными радиусами кривизны срединной поверхности (если координатные линии  $x_1$  и  $x_2$  не являются линиями кривизны).

Используя эти результаты, запишем для остальных коэффициентов первые два члена разложения, подражая форме записи (5.4.3):

$$\frac{1}{H_{1}} \approx \frac{1}{A_{1}} - \frac{A_{3}x_{3}}{R_{1}B_{1}}, \frac{1}{H_{2}} \approx \frac{1}{A_{2}} - \frac{A_{3}x_{3}}{R_{2}B_{2}}, \frac{1}{H_{3}} \approx \frac{1}{A_{3}} - \frac{x_{3}}{B_{3}}, H_{12} \approx A_{12} - \frac{A_{3}x_{3}}{R_{1}}B_{12} (5.7.3)$$

$$H_{21} \approx A_{21} - \frac{A_{3}x_{3}}{R_{2}}B_{21}, H_{31} \approx A_{31} - \frac{A_{3}x_{3}}{R_{1}}B_{31}, H_{32} \approx A_{32} - \frac{A_{3}x_{3}}{R_{2}}B_{32}$$

$$A_{12} = \frac{1}{A_{1}A_{2}}\frac{\partial A_{1}}{\partial x_{2}}, A_{21} = \frac{1}{A_{2}A_{1}}\frac{\partial A_{2}}{\partial x_{1}}, A_{31} = \frac{1}{A_{3}A_{1}}\frac{\partial A_{3}}{\partial x_{1}}, A_{32} = \frac{1}{A_{3}A_{2}}\frac{\partial A_{3}}{\partial x_{2}}$$

Принципиально новой, по сравнению со случаем специализированной системы координат, является здесь возможность использования переменного коэффициента Н<sub>3</sub>. Поскольку это масштабный коэффициент вдоль координатных линий  $x_3$ , то его возможная зависимость от  $x_1$  и  $x_2$  означает, что значение этого коэффициента различно для различных точек срединной поверхности оболочки. Основную роль здесь играет величина  $A_3 = H_3(x_3 = 0)$ . При этом постоянному (малому) значению  $x_{3} = h$ соответствует переменное произведение hA<sub>3</sub>, то есть переменная толщина оболочки. Коэффициенты А<sub>31</sub> и А<sub>32</sub> задают скорости изменения этой толщины вдоль координатных линий  $x_1$  и  $x_2$ .

Таким образом, использование произвольной системы координат позволяет, во-первых, использовать в качестве координатных линий на срединной поверхности оболочки не обязательно линии кривизны, а вовторых, рассматривать оболочки переменной толщина.

5.8. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Обобщим результаты, полученные в параграфе 5.5. Таблице (5.2.3), с учетом соотношений (5.7.1),...,(5.7.3), соответствуют следующие уравнения первого и второго приближения:

$$\partial_{3}\sigma_{13}^{1} = 0, \ \partial_{3}\sigma_{23}^{1} = 0, \ \partial_{3}u_{3}^{1} = 0$$

$$(5.8.1)$$

$$\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\sigma_{13}^{1} + (A_{21} + 2A_{31})\sigma_{13}^{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\sigma_{23}^{1} + (A_{12} + 2A_{32})\sigma_{23}^{1} + \frac{1}{A_{3}}\partial_{3}\sigma_{33}^{1} - \rho\partial_{1}^{2}u_{3}^{1} = 0$$

$$G\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{3}^{1} - A_{31}u_{3}^{1} + \frac{1}{A_{3}}\partial_{3}u_{1}^{1}\right) = \sigma_{13}^{1}, \ G\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}u_{3}^{1} - A_{32}u_{3}^{1} + \frac{1}{A_{3}}\partial_{3}u_{2}^{1}\right) = \sigma_{23}^{1}$$

$$E\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{1}^{1} + A_{12}u_{2}^{1} + \frac{1}{R_{1}}u_{3}^{1}\right) = \sigma_{11}^{1} - \nu\left(\sigma_{22}^{1} + \sigma_{33}^{1}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}u_{2}^{1} + A_{21}u_{1}^{1} + \frac{1}{R_{2}}u_{3}^{1}\right) = \sigma_{22}^{1} - \nu\left(\sigma_{11}^{1} + \sigma_{33}^{1}\right)$$

$$\begin{split} & G\bigg(\frac{1}{A_2}\partial_2 u_1^1 - A_{12}u_1^1 + \frac{1}{A_1}\partial_1 u_2^1 - A_{21}u_2^1\bigg) = \sigma_{12}^1 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{11}^1 + (A_{21} + A_{31})\sigma_{11}^1 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{12}^1 + (2A_{12} + A_{32})\sigma_{12}^1 + \frac{1}{A_3}\partial_3\sigma_{13}^2 + \\ & + \bigg(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}\bigg)\sigma_{13}^1 - A_{21}\sigma_{22}^1 - A_{31}\sigma_{33}^1 - \rho\partial_t^2 u_1^1 = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{12}^1 + (2A_{21} + A_{31})\sigma_{12}^1 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{22}^1 + (A_{12} + A_{32})\sigma_{22}^1 + \frac{1}{A_3}\partial_3\sigma_{23}^2 + \\ & + \bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}\bigg)\sigma_{23}^1 - A_{12}\sigma_{11}^1 - A_{32}\sigma_{33}^1 - \rho\partial_t^2 u_2^1 = 0 \\ & E\bigg(\frac{1}{A_3}\partial_3 u_3^2 + A_{31}u_1^1 + A_{32}u_2^1\bigg) = \sigma_{33}^1 - v\bigg(\sigma_{11}^1 + \sigma_{22}^1\bigg) \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{13}^2 + (A_{21} + 2A_{31})\sigma_{13}^2 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{23}^2 + (A_{12} + 2A_{32})\sigma_{23}^2 + \frac{1}{A_3}\partial_3\sigma_{33}^2 - \\ & - \frac{A_{3}x_3}{R_1B_1}\partial_1\sigma_{13}^1 - \bigg(\frac{A_{3}x_3}{R_2}B_{21} + 2\frac{A_{3}x_3}{R_1}B_{31}\bigg)\sigma_{13}^1 - \frac{A_{3}x_3}{R_2B_2}\partial_2\sigma_{23}^1 - \bigg(\frac{A_{3}x_3}{R_1}B_{12} + \\ & 2\frac{A_{3}x_3}{R_2}B_{32}\bigg)\sigma_{23}^1 - \frac{x_3}{B_3}\partial_3\sigma_{33}^1 + \bigg(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\bigg)\sigma_{33}^1 - \frac{1}{R_1}\sigma_{11}^1 - \frac{1}{R_2}\sigma_{22}^1 - \rho\partial_t^2u_3^2 = 0 \end{split}$$

Удерживая для всех искомых функций константы интегрирования только в первом приближении, разыскиваем решение этих уравнений в виде:  $\sigma_{13}^{1} = \sigma_{13,1}^{1}, \ \sigma_{23}^{1} = \sigma_{23,1}^{1}, \ u_{3}^{1} = u_{3,1}^{1}, \ \sigma_{33}^{1} = A_{3}x_{3}\sigma_{33,1}^{1} + \sigma_{33,2}^{1}, \ u_{1}^{1} = A_{3}x_{3}u_{1,1}^{1} + u_{1,2}^{1} \quad (5.8.2)$   $u_{2}^{1} = A_{3}x_{3}u_{2,1}^{1} + u_{2,2}^{1}, \ \sigma_{11}^{1} = A_{3}x_{3}\sigma_{11,1}^{1} + \sigma_{11,2}^{1}, \ \sigma_{22}^{1} = A_{3}x_{3}\sigma_{22,1}^{1} + \sigma_{22,2}^{1}, \ \sigma_{12}^{1} = A_{3}x_{3}\sigma_{12,1}^{1} + \sigma_{12,2}^{1}$   $\sigma_{13}^{2} = \frac{1}{2}(A_{3}x_{3})^{2}\sigma_{13,1}^{2} + A_{3}x_{3}\sigma_{13,2}^{2}, \ \sigma_{23}^{2} = \frac{1}{2}(A_{3}x_{3})^{2}\sigma_{23,1}^{2} + A_{3}x_{3}\sigma_{23,2}^{2}$   $u_{3}^{2} = \frac{1}{2}(A_{3}x_{3})^{2}u_{3,1}^{2} + A_{3}x_{3}u_{3,2}^{2}, \ \sigma_{33}^{2} = \frac{1}{6}(A_{3}x_{3})^{3}\sigma_{33,1}^{2} + \frac{1}{2}(A_{3}x_{3})^{2}\sigma_{33,2}^{2} + A_{3}x_{3}\sigma_{33,3}^{2}$ 

+

Подставляя (5.8.2) в (5.8.1) и расщепляя по одинаковым степеням x<sub>3</sub>, имеем:

$$\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\sigma_{13,1}^{1} + (A_{21} + 2A_{31})\sigma_{13,1}^{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\sigma_{23,1}^{1} + (A_{12} + 2A_{32})\sigma_{23,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{1} - \rho\partial_{t}^{2}u_{3}^{1} = 0 \quad (5.8.3)$$

$$G\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{3,1}^{1} - A_{31}u_{3,1}^{1} + u_{1,1}^{1}\right) = \sigma_{13,1}^{1}, \quad G\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}u_{3,1}^{1} - A_{32}u_{3,1}^{1} + u_{2,1}^{1}\right) = \sigma_{23,1}^{1}$$

$$E\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{1,1}^{1} + A_{12}u_{2,1}^{1}\right) = \sigma_{11,1}^{1} - \nu\left(\sigma_{22,1}^{1} + \sigma_{33,1}^{1}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}u_{1,2}^{1} + A_{12}u_{2,2}^{1} + \frac{W}{R_{1}}\right) = \sigma_{11,2}^{1} - \nu\left(\sigma_{22,2}^{1} + \sigma_{33,2}^{1}\right)$$

$$\begin{split} & \mathsf{E}\bigg(\frac{1}{A_2}\partial_2 u_{2,1}^1 + A_{2,1}u_{1,1}^1\bigg) = \sigma_{22,1}^1 - \mathsf{v}\bigg(\sigma_{11,1}^1 + \sigma_{33,1}^1\bigg) \\ & \mathsf{E}\bigg(\frac{1}{A_2}\partial_2 u_{2,2}^1 + A_{21}u_{1,2}^1 + \frac{\mathsf{w}}{\mathsf{R}_2}\bigg) = \sigma_{22,2}^1 - \mathsf{v}\bigg(\sigma_{11,2}^1 + \sigma_{33,2}^1) \\ & \mathsf{G}\bigg(\frac{1}{A_2}\partial_2 u_{1,1}^1 - A_{12}u_{1,1}^1 + \frac{1}{A_1}\partial_1 u_{2,1}^1 - A_{21}u_{2,1}^1\bigg) = \sigma_{12,1}^1 \\ & \mathsf{G}\bigg(\frac{1}{A_2}\partial_2 u_{1,2}^1 - A_{12}u_{1,2}^1 + \frac{1}{A_1}\partial_1 u_{2,2}^1 - A_{21}u_{2,2}^1\bigg) = \sigma_{12,2}^1 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{11,1}^1 + (A_{21} + A_{31})\sigma_{11,1}^1 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{12,1}^1 + (2A_{12} + A_{32})\sigma_{12,1}^1 + \sigma_{13,1}^2 - \\ & - A_{21}\sigma_{22,1}^2 - A_{31}\sigma_{33,1}^1 - \rho_0^2h_{1,1}^1 = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{11,2}^1 + (A_{21} + A_{31})\sigma_{11,2}^1 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{12,2}^1 + (2A_{12} + A_{32})\sigma_{12,2}^1 + \sigma_{13,2}^2 + \\ & + \bigg(\frac{2}{\mathsf{R}_1} + \frac{1}{\mathsf{R}_2}\bigg)\sigma_{13,1}^1 - A_{21}\sigma_{22,2}^1 - A_{31}\sigma_{33,2}^1 - \rho_0^2h_{1,2}^1 = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{12,1}^1 + (2A_{21} + A_{31})\sigma_{12,1}^1 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{22,1}^1 + (A_{12} + A_{32})\sigma_{12,2}^1 + \sigma_{23,1}^2 - \\ & - A_{12}\sigma_{11,1}^1 - A_{32}\sigma_{33,1}^1 - \rho_0^2h_{1,2}^1 = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{12,2}^1 + (2A_{21} + A_{31})\sigma_{12,2}^1 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{22,2}^1 + (A_{12} + A_{32})\sigma_{22,2}^1 + \sigma_{23,2}^2 - \\ & - A_{12}\sigma_{11,1}^1 - A_{32}\sigma_{33,1}^1 - \rho_0^2h_{1,2}^1 = 0 \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{12,2}^1 + (2A_{21} + A_{31})\sigma_{12,2}^1 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{22,2}^1 + (A_{12} + A_{32})\sigma_{22,2}^1 + \sigma_{23,2}^2 - \\ & - A_{12}\sigma_{11,1}^1 - A_{32}\sigma_{33,1}^1 - \rho_0^2h_{1,2}^1 - \sigma_{33,2}^1 - \rho_0^2h_{1,2}^2 = 0 \\ & \mathsf{E}(u_{3,1}^2 + A_{31}u_{1,1}^1 + A_{32}u_{2,1}^1) = \sigma_{33,1}^1 - \mathsf{v}(\sigma_{11,1}^1 + \sigma_{22,1}^1) \\ & \mathsf{E}(u_{3,2}^2 + A_{31}u_{1,2}^1 + A_{32}u_{2,2}^1) = \sigma_{33,2}^1 - \mathsf{v}(\sigma_{11,1}^1 + \sigma_{22,2}^1) \\ & \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{13,1}^2 + (A_{21} + 2A_{31})\sigma_{13,1}^2 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{23,2}^2 + (A_{12} + 2A_{32})\sigma_{23,1}^2 + \sigma_{33,2}^2 - \sigma_{33,2}^2 - \\ & - \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{13,1}^2 + (A_{21} + 2A_{31})\sigma_{13,1}^2 + \frac{1}{A_2}\partial_2\sigma_{23,2}^2 + (A_{12} + 2A_{32})\sigma_{23,2}^2 + \sigma_{33,2}^2 - \\ & - \frac{1}{A_1}\partial_1\sigma_{13,1}^1 - \bigg(\frac{1}{\mathsf{R}_2}\mathsf{B}_{21} + \frac{2}{\mathsf{R}_1}\mathsf{B}_{31}\bigg)\sigma_{13,1}^1 - \frac{1}{\mathsf{R}_2$$

Дополним эти уравнения граничными условиями:

Симметризация дает:

$$\frac{1}{2}(A_{3}h)^{2}\sigma_{13,1}^{2} + \sigma_{13,1}^{1} = \frac{\tau_{1}^{+} + \tau_{1}^{-}}{2}; \ \sigma_{13,2}^{2} = \frac{\tau_{1}^{+} - \tau_{1}^{-}}{2A_{3}h}$$

$$\frac{1}{2}(A_{3}h)^{2}\sigma_{23,1}^{2} + \sigma_{23,1}^{1} = \frac{\tau_{2}^{+} + \tau_{2}^{-}}{2}; \ \sigma_{23,2}^{2} = \frac{\tau_{2}^{+} - \tau_{2}^{-}}{2A_{3}h}$$

$$\frac{1}{6}(A_{3}h)^{3}\sigma_{33,1}^{2} + A_{3}h(\sigma_{33,3}^{2} + \sigma_{33,1}^{1}) = \frac{q^{+} - q^{-}}{2}; \ \frac{1}{2}(A_{3}h)^{2}\sigma_{33,2}^{2} + \sigma_{33,2}^{1} = \frac{q^{+} + q^{-}}{2}$$

$$D = \sigma_{13} + \sigma_{13}$$

Вводим обозначения, подобные использованным в параграфе 5.5, но с естественной заменой величины h на  $A_3h$ :

$$\begin{split} &\sigma_{13,1}^{1} = G\beta_{1}, \ \sigma_{23,1}^{1} = G\beta_{2}, \ u_{3,1}^{1} = w, \ u_{1,1}^{1} = \phi_{1}, \ u_{2,1}^{1} = \phi_{2}, \ u_{1,2}^{1} = v_{1}, \ u_{2,2}^{1} = v_{2} \ (5.8.6) \\ &M_{1} = \frac{2}{3} (A_{3}h)^{2} \sigma_{11,1}^{1}, \ M_{2} = \frac{2}{3} (A_{3}h)^{2} \sigma_{22,1}^{1}, \ H = \frac{2}{3} (A_{3}h)^{2} \sigma_{12,1}^{1}, \ N = \frac{2}{3} (A_{3}h)^{2} \sigma_{33,1}^{1}, \ u_{3,1}^{2} = W \\ &T_{1} = 2A_{3}h \sigma_{11,2}^{1}, \ T_{2} = 2A_{3}h \sigma_{22,2}^{1}, \ S = 2A_{3}h \sigma_{12,2}^{1}, \ K = 2A_{3}h \sigma_{33,2}^{1}, \ u_{3,2}^{2} = V \\ &Q_{1} = \frac{1}{3} (A_{3}h)^{3} \sigma_{13,1}^{2} + 2A_{3}h \sigma_{13,1}^{1}, \ Q_{2} = \frac{1}{3} (A_{3}h)^{3} \sigma_{23,1}^{2} + 2A_{3}h \sigma_{23,1}^{1} \\ &q = q^{+} - q^{-}, \ m_{1} = 2A_{3}h \frac{\tau_{1}^{+} + \tau_{1}^{-}}{2}, \ m_{2} = 2A_{3}h \frac{\tau_{2}^{+} + \tau_{2}^{-}}{2}, \ p = \frac{q^{+} + q^{-}}{2}, \ \tau_{1} = \tau_{1}^{+} - \tau_{1}^{-}, \ \tau_{2} = \tau_{2}^{+} - \tau_{2}^{-} \\ &V$$
 чтем также соотношения, вытекающие из (5.8.5), (5.8.6): \\ &\sigma\_{13,1}^{2} = \frac{3(m\_{1} - Q\_{1})}{2(A\_{3}h)^{3}}, \ \sigma\_{13,1}^{1} = \frac{3Q\_{1} - m\_{1}}{4A\_{3}h}, \ \sigma\_{23,1}^{2} = \frac{3(m\_{2} - Q\_{2})}{2(A\_{3}h)^{3}}, \ \sigma\_{13,1}^{1} = \frac{3Q\_{2} - m\_{2}}{4A\_{3}h} \ (5.8.7) \\ &Oкончательно, из (5.8.3), (5.8.5),...,(5.8.7) имеем: \\ &\frac{1}{A\_{1}} \partial\_{1}M\_{1} + A\_{21}(M\_{1} - M\_{2}) - A\_{31}(2M\_{1} + N) + \frac{1}{A\_{2}} \partial\_{2}H + 2(A\_{12} - A\_{32})H - Q\_{1} - \ (5.8.8) \\ &- \frac{2}{3}(A\_{3}h)^{3}\rho\partial\_{t}^{2}\phi\_{1} = -m\_{1}; \ \frac{2}{3}(A\_{3}h)^{3}E \left(\frac{1}{A\_{1}}\partial\_{t}\phi\_{1} + A\_{12}\phi\_{2}\right) = M\_{1} - \nu(M\_{2} + N) \\ &\frac{1}{A\_{1}} \partial\_{1}H + 2(A\_{21} - A\_{31})H + \frac{1}{A\_{2}} \partial\_{2}M\_{2} + A\_{12}(M\_{2} - M\_{1}) - A\_{32}(2M\_{2} + N) - Q\_{2} - \\ &- \frac{2}{3}(A\_{3}h)^{3}\rho\partial\_{t}^{2}\phi\_{2} = -m\_{2}; \ \frac{2}{3}(A\_{3}h)^{3}E \left(\frac{1}{A\_{2}}\partial\_{2}\phi\_{2} + A\_{21}\phi\_{1}\right) = M\_{2} - \nu(M\_{1} + N) \end{aligned}

$$\begin{split} &\frac{3}{2} \bigg[ \frac{1}{A_1} \partial_1 Q_1 + (A_{21} + A_{31}) Q_1 + \frac{1}{A_2} \partial_2 Q_2 + (A_{12} + A_{32}) Q_2 \bigg] + \frac{3}{(A_3h)^2} N - 2A_3h\rho \partial_t^2 w = \\ &= \frac{1}{2} \bigg[ \frac{1}{A_1} \partial_1 m_1 + (A_{21} + A_{31}) m_1 + \frac{1}{A_2} \partial_2 m_2 + (A_{12} + A_{32}) m_2 \bigg] \\ &\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \bigg( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \bigg) K - A_{31} Q_1 - A_{32} Q_2 + \frac{2}{(A_3h)^2} N + \frac{2}{3} A_3h\rho \partial_t^2 w + \frac{1}{3} (A_3h)^2 \rho \partial_t^2 W = \\ &= q + \frac{1}{3} \bigg[ \frac{1}{A_1} \partial_1 m_1 + (A_{21} - 2A_{31}) m_1 + \frac{1}{A_2} \partial_2 m_2 + (A_{12} - 2A_{32}) m_2 \bigg] \\ &\frac{1}{A_1} \partial_1 T_1 + A_{21} (T_1 - T_2) - A_{31} K + \frac{1}{A_2} \partial_2 S + 2A_{12} S + \frac{3}{2} \bigg( \frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} \bigg) Q_1 - 2A_3h\rho \partial_t^2 v_1 = \\ &= -\tau_1 + \frac{1}{2} \bigg( \frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} \bigg) m_1; \ 2A_3hE \bigg( \frac{1}{A_1} \partial_1 v_1 + A_{12} v_2 + \frac{w}{R_1} \bigg) = T_1 - v(T_2 + K) \\ &\frac{1}{A_1} \partial_1 S + 2A_{21} S + \frac{1}{A_2} \partial_2 T_2 + A_{12} (T_2 - T_1) - A_{32} K + \frac{3}{2} \bigg( \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2} \bigg) Q_2 - 2A_3h\rho \partial_t^2 v_2 = \\ &= -\tau_2 + \frac{1}{2} \bigg( \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2} \bigg) m_2; \ 2A_3hE \bigg( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_2 + A_{21} v_1 + \frac{w}{R_2} \bigg) = T_2 - v(T_1 + K) \\ &\frac{3}{2} \bigg[ \frac{1}{R_1R} \partial_1 Q_1 + \bigg( \frac{1}{R_2} B_{21} + \frac{2}{R_1} B_{31} - \frac{A_1}{R_1R_1} A_{31} \bigg) Q_1 + \frac{1}{R_2B_2} \partial_2 Q_2 + \bigg( \frac{1}{R_1} B_{12} + \frac{2}{R_2} B_{32} - \frac{A_2}{R_2B_2} A_{32} \bigg) Q_2 \bigg] + \\ &+ \frac{3}{(A_3h)^2} \bigg[ \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} - \bigg( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{B_3} \bigg) N \bigg] + \frac{2}{(A_3h)^2} K + 2A_3h\rho \partial_t^2 V = \\ &= \frac{4}{A_3h} p + \frac{1}{A_1} \partial_1 \tau_1 + (A_{21} + A_{31}) \tau_1 + \frac{1}{A_2} \partial_2 \tau_2 + (A_{12} + A_{32}) \tau_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \bigg[ \frac{1}{R_1R_1} \partial_1 m_1 + \bigg( \frac{1}{R_2} B_{21} - \frac{A_1}{R_1R_1} A_{31} \bigg) m_1 + \frac{1}{R_2} \partial_2 m_2 + \bigg( \frac{1}{R_1} B_{12} + \frac{2}{R_2} B_{32} - \frac{A_2}{R_2B_2} A_{32} \bigg) m_2 \bigg] \\ &\frac{2}{3} (A_3h)^3 E (W + A_{31} \phi_1 + A_{32} \phi_2) = N - v(M_1 + M_2) \\ &Q_1 = \frac{4}{A_3h} G \bigg( \frac{1}{A_1} \partial_1 w - A_{31} w + \phi_1 \bigg) + \frac{m_1}{3} = \frac{4}{3} A_3h G \beta_1 + \frac{m_1}{3} \\ &Q_2 = \frac{4}{3} A_3h G \bigg( \frac{1}{A_2} \partial_2 \phi_1 - A_{12} \phi_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \phi_2 - A_{21} \phi_2 \bigg) = H \\ &2A_3hE(V + A_{31}v_1 + A_{32}v_2) = K - v(T_1 + T_2) \end{aligned}$$

$$2A_{3}hG\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{1} - A_{12}v_{1} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{2} - A_{21}v_{2}\right) = S$$

Перейдем к асимптотическим оценкам. В силу преобразований (5.5.1), с учетом (5.7.1),...,(5.7.3), соотношения (5.3.4) принимают вид:

$$\delta^{-0.5} \frac{\partial_1}{A_1} \sim \delta^{-1.5} \frac{\partial_1}{R_1 B_1} A_3 x_3 \sim \delta^{-0.5} \frac{\partial_2}{A_2} \sim \delta^{-1.5} \frac{\partial_2}{R_2 B_2} A_3 x_3 \sim \frac{\partial_3}{A_3} \sim \delta^{-1} \partial_3 \frac{x_3}{B_3} \sim (5.8.9)$$
  
$$\sim \delta^{0.5} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t \sim \delta^{-0.5} A_{12} \sim \delta^{-1.5} \frac{A_3 x_3}{R_1} B_{12} \sim \delta^{-0.5} A_{21} \sim \delta^{-1.5} \frac{A_3 x_3}{R_2} B_{21} \sim \delta^{-1} \frac{1}{R_1} \sim \delta^{-1} \frac{1}{R_2} \sim \delta^{-0.5} A_{31} \sim \delta^{-0.5} A_{31} \sim \delta^{-0.5} A_{32} \sim \delta^{-1.5} \frac{A_3 x_3}{R_2} B_{32}$$

Здесь не выписаны соотношения для искомых функций, которые, как и во всех предыдущих случаях, удовлетворяются автоматически, в силу уравнений (5.8.8). Из (5.8.9) получаем:

$$\delta \sim \left( A_3 \partial_3^{-1} \frac{\partial_1}{A_1} \right)^2 \sim \frac{A_3 \partial_3^{-1}}{R_1} < 1$$
(5.8.10)

Ó÷èòûâàÿ соотношения  $\partial_3^{-1} \sim x_3 \sim h$ , а также рассуждения, приведенные при выводе уравнений оболочек постоянной толщины, окончательно имеем:

$$\delta \sim \max\left[ (A_{3}hD)^{2}, A_{3}hK \right] \quad \delta^{2} < 1 \quad (5.8.11)$$

$$D = \max\left\{ \frac{\partial_{1}}{A_{1}}, \frac{\partial_{2}}{A_{2}}, \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_{t}, A_{12}, A_{21}, A_{31}, A_{32} \right]; \quad \mathsf{K} = \max\left\{ \frac{1}{R_{1}}, \frac{1}{R_{2}} \right\} \quad (5.8.12)$$

$$\frac{\partial_{1}}{B_{1}} \sim \frac{\partial_{2}}{B_{2}} \sim B_{12} \sim B_{21} \sim B_{31} \sim B_{32} \le D; \quad \frac{1}{B_{3}} \le \mathsf{K} \quad (5.8.12)$$

Таким образом, количество необходимых проверок увеличилось, по сравнению с оболочкой постоянной толщины. Это связано, во-первых, с учетом величин  $A_{31}$  и  $A_{32}$ , задающих скорости изменения толщины оболочки в направлениях  $x_1$  и  $x_2$ , а во-вторых, с необходимостью рассмотрения соотношений (5.8.12), учитывающих веса вторых приближений в разложениях коэффициентов уравнений теории упругости. В случае использования специализированной системы координат соотношения вида (5.8.12) удовлетворялись автоматически, в силу свойств самой системы координат, но для произвольной системы координат подобные соотношения, в принципе, нуждаются в отдельной проверке.

Как и в случае оболочки постоянной толщины, погрешность описывается величиной порядка  $\delta^2$ . Следовательно, выведенные уравнения справедливы для относительно быстро изменяющихся напряженнодеформированных состояний и относительно толстых оболочек. Граничные условия для оболочек переменной толщины формулируются так же, как в случае оболочек постоянной толщины.

# 6. АСИМПТОТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УТОЧНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Выведенные в предыдущей главе уравнения теории оболочек подвергаются дополнительному анализу с целью выявления типичных напряженно-деформированных состояний. Использование уточненных уравнений позволяет получить основные виды известных ранее уравнений теории оболочек и некоторые новые результаты.

# 6.1. Построение процедуры последовательных приближений

Запишем уравнения (5.6.2) для случая отсутствия нагрузок на лицевых поверхностях оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}M_{1} + A_{21}(M_{1} - M_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}H + 2A_{12}H - 8a_{s}^{2}Q_{1} - \partial_{t}^{2}\phi_{1} = 0 \quad (6.1.1) \\ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}H + 2A_{21}H + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}M_{2} + A_{12}(M_{2} - M_{1}) - 8a_{s}^{2}Q_{2} - \partial_{t}^{2}\phi_{2} = 0 \\ a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}Q_{1} + A_{21}Q_{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}Q_{2} + A_{12}Q_{2}\right) + N - \partial_{t}^{2}W = 0 \\ \frac{3}{2}\left[\frac{T_{1}}{R_{1}} + \frac{T_{2}}{R_{2}} - \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)K\right] + N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}W + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W = 0 \\ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}T_{1} + A_{21}(T_{1} - T_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}S + 2A_{12}S + a_{s}^{2}\left(\frac{2}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)Q_{1} - \partial_{t}^{2}v_{1} = 0 \\ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}S + 2A_{21}S + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}T_{2} + A_{12}(T_{2} - T_{1}) + a_{s}^{2}\left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{2}{R_{2}}\right)Q_{2} - \partial_{t}^{2}v_{2} = 0 \\ \left(\frac{1}{R_{1}A_{1}}\partial_{1}Q_{1} + \frac{A_{21}}{R_{2}}Q_{1} + \frac{1}{R_{2}A_{2}}\partial_{2}Q_{2} + \frac{A_{12}}{R_{1}}Q_{2}\right) + \frac{M_{1}}{R_{1}} + \frac{M_{2}}{R_{2}} - \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)N + 8K + \partial_{t}^{2}V = 0 \\ \left(\frac{1}{R_{1}A_{1}}\partial_{1}\varphi_{1} + A_{12}\varphi_{2}\right) = M_{1} - v(M_{2} + N); \ b\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\varphi_{2} + A_{21}\varphi_{1}\right) = M_{2} - v(M_{1} + N) \\ bW = N - v(M_{1} + M_{2}); \ H = a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\varphi_{1} - A_{12}\varphi_{1} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\varphi_{2} - A_{21}\varphi_{2}\right) \\ Q_{1} = \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}W + \phi_{1}; \ Q_{2} = \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}W + \phi_{2} \\ \left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{1}v_{1} + A_{12}v_{2} + \frac{W}{R_{1}}\right) = T_{1} - v(T_{2} + K); \ b\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{2} + A_{21}v_{1} + \frac{W}{R_{2}}\right) = T_{2} - v(T_{1} + K) \\ \end{array}$$

bV = K - v(T<sub>1</sub> + T<sub>2</sub>); S = 
$$a_s^2 \left( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_1 - A_{12} v_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 v_2 - A_{21} v_2 \right)$$

Данные уравнения инвариантны относительно преобразований:

$$\begin{split} \phi_{1} &= \delta^{\gamma} \phi_{1}^{*}, \ \phi_{2} = \delta^{\gamma} \phi_{2}^{*}, \ w = \delta^{\gamma} w^{*}, \ W = \delta^{\gamma} W^{*}, \ v_{1} = \delta^{\gamma} v_{1}^{*}, \ v_{2} = \delta^{\gamma} v_{2}^{*} \quad (6.1.2) \\ V &= \delta^{\gamma} V^{*}, \ M_{1} = \delta^{\gamma} M_{1}^{*}, \ M_{2} = \delta^{\gamma} M_{2}^{*}, \ N = \delta^{\gamma} N^{*}, \ H = \delta^{\gamma} H^{*}, \ Q_{1} = \delta^{\gamma} Q_{1}^{*}, \ Q_{2} = \delta^{\gamma} Q_{2}^{*} \\ T_{1} &= \delta^{\gamma} T_{1}^{*}, \ T_{2} = \delta^{\gamma} T_{2}^{*}, \ K = \delta^{\gamma} K^{*}, \ S = \delta^{\gamma} S^{*} \end{split}$$

Это позволяет не подвергать растяжениям при асимптотическом анализе одну из искомых функций, сравнивая с ней остальные.

Выполним преобразования:

$$\frac{\partial_1}{A_1} = \delta^{\alpha_1} \frac{\partial_1^*}{A_1^*}, \frac{\partial_2}{A_2} = \delta^{\alpha_2} \frac{\partial_2^*}{A_2^*}, A_{12} = \delta^{\alpha_3} A_{12}^*, A_{21} = \delta^{\alpha_4} A_{21}^*, \partial_t = \delta^{\alpha_5} \partial_t^* \quad (6.1.3)$$

$$\frac{1}{R_1} = \delta^{\alpha_6} \frac{1}{R_1^*}, \ \frac{1}{R_2} = \delta^{\alpha_7} \frac{1}{R_2^*}, \ \phi_1 = \delta^{\alpha_8} \phi_1^*, \ \phi_2 = \delta^{\alpha_9} \phi_2^*, \ w = \delta^{\alpha_{10}} w^*, \ W = \delta^{\alpha_{11}} W^*, \ N = N^*$$

$$\mathbf{v}_{1} = \delta^{\alpha_{12}} \mathbf{v}_{1}^{*}, \mathbf{v}_{2} = \delta^{\alpha_{13}} \mathbf{v}_{2}^{*}, \mathbf{V} = \delta^{\alpha_{14}} \mathbf{V}^{*}, \mathbf{Q}_{1} = \delta^{\alpha_{15}} \mathbf{Q}_{1}^{*}, \mathbf{Q}_{2} = \delta^{\alpha_{16}} \mathbf{Q}_{2}^{*}, \mathbf{M}_{1} = \delta^{\alpha_{17}} \mathbf{M}_{1}^{*}$$
$$\mathbf{M}_{2} = \delta^{\alpha_{18}} \mathbf{M}_{2}^{*}, \mathbf{H} = \delta^{\alpha_{19}} \mathbf{H}^{*}, \mathbf{T}_{1} = \delta^{\alpha_{20}} \mathbf{T}_{1}^{*}, \mathbf{T}_{2} = \delta^{\alpha_{21}} \mathbf{T}_{2}^{*}, \mathbf{S} = \delta^{\alpha_{22}} \mathbf{S}^{*}, \mathbf{K} = \delta^{\alpha_{23}} \mathbf{K}^{*}$$
и потребуем выполнения соотношений:

$$\frac{\partial_1^*}{A_1^*} \sim \frac{\partial_2^*}{A_2^*} \sim A_{12}^* \sim A_{21}^* \sim 1; \ \partial_1^* \sim 1; \ \frac{1}{R_1^*} \sim \frac{1}{R_2^*} \sim 1$$
(6.1.4)

$$\phi_1^* \sim \phi_2^* \sim W^* \sim W^* \sim v_1^* \sim v_2^* \sim V^* \sim Q_1^* \sim Q_2^* \sim N^* \sim M_1^* \sim M_2^* \sim H^* \sim T_1^* \sim T_2^* \sim S^* \sim K^*$$

Выпишем таблицу показателей степени δ, приобретаемых, после преобразований (6.1.3), членами уравнений (6.1.1):

$$\begin{aligned} \alpha_{1} + \alpha_{17}, \ \alpha_{4} + \alpha_{17}, \ \alpha_{4} + \alpha_{18}, \ \alpha_{2} + \alpha_{19}, \ \alpha_{3} + \alpha_{19}, \ \alpha_{15}, \ 2\alpha_{5} + \alpha_{8} \end{aligned} (6.1.5) \\ \alpha_{1} + \alpha_{19}, \ \alpha_{4} + \alpha_{19}, \ \alpha_{2} + \alpha_{18}, \ \alpha_{3} + \alpha_{18}, \ \alpha_{3} + \alpha_{17}, \ \alpha_{16}, \ 2\alpha_{5} + \alpha_{9} \\ \alpha_{1} + \alpha_{15}, \ \alpha_{4} + \alpha_{15}, \ \alpha_{2} + \alpha_{16}, \ \alpha_{3} + \alpha_{16}, \ 0, \ 2\alpha_{5} + \alpha_{10} \\ \alpha_{6} + \alpha_{20}, \ \alpha_{7} + \alpha_{21}, \ \alpha_{6} + \alpha_{23}, \ \alpha_{7} + \alpha_{23}, \ 0, \ 2\alpha_{5} + \alpha_{10}, \ 2\alpha_{5} + \alpha_{11} \\ \alpha_{1} + \alpha_{20}, \ \alpha_{4} + \alpha_{20}, \ \alpha_{4} + \alpha_{21}, \ \alpha_{2} + \alpha_{22}, \ \alpha_{3} + \alpha_{22}, \ \alpha_{6} + \alpha_{15}, \ \alpha_{7} + \alpha_{15}, \ 2\alpha_{5} + \alpha_{12} \\ \alpha_{1} + \alpha_{22}, \ \alpha_{4} + \alpha_{22}, \ \alpha_{2} + \alpha_{21}, \ \alpha_{3} + \alpha_{21}, \ \alpha_{3} + \alpha_{20}, \ \alpha_{6} + \alpha_{16}, \ \alpha_{7} + \alpha_{16}, \ 2\alpha_{5} + \alpha_{13} \\ \alpha_{1} + \alpha_{6} + \alpha_{15}, \ \alpha_{4} + \alpha_{7} + \alpha_{15}, \ \alpha_{2} + \alpha_{7} + \alpha_{16}, \ \alpha_{3} + \alpha_{6} + \alpha_{16}, \ \alpha_{6} + \alpha_{17}, \ \alpha_{7} + \alpha_{18}, \ \alpha_{6}, \ \alpha_{7}, \ \alpha_{23}, \ 2\alpha_{5} + \alpha_{14} \\ \alpha_{1} + \alpha_{8}, \ \alpha_{3} + \alpha_{9}, \ \alpha_{17}, \ \alpha_{18}, \ 0; \ \alpha_{2} + \alpha_{9}, \ \alpha_{4} + \alpha_{8}, \ \alpha_{18}, \ \alpha_{17}, \ 0 \\ \alpha_{11}, \ 0, \ \alpha_{17}, \ \alpha_{18}; \ \alpha_{19}, \ \alpha_{2} + \alpha_{8}, \ \alpha_{3} + \alpha_{8}, \ \alpha_{1} + \alpha_{9}, \ \alpha_{4} + \alpha_{9} \\ \alpha_{15}, \ \alpha_{1} + \alpha_{10}, \ \alpha_{8}; \ \alpha_{16}, \ \alpha_{2} + \alpha_{10}, \ \alpha_{20}, \ \alpha_{21}, \ \alpha_{23} \\ \alpha_{2} + \alpha_{13}, \ \alpha_{4} + \alpha_{12}, \ \alpha_{7} + \alpha_{10}, \ \alpha_{21}, \ \alpha_{20}, \ \alpha_{23} \\ \alpha_{14}, \ \alpha_{23}, \ \alpha_{20}, \ \alpha_{21}; \ \alpha_{22}, \ \alpha_{2} + \alpha_{12}, \ \alpha_{3} + \alpha_{12}, \ \alpha_{1} + \alpha_{13}, \ \alpha_{4} + \alpha_{13} \end{aligned}$$

Используя эту таблицу, будем разыскивать различные варианты параметров  $\alpha_1,...,\alpha_{23}$  при помощи ЭВМ исходя, как и ранее, из критерия

минимального упрощения. Для уменьшения числа параметров и объема вычислений примем упрощающие предположения:

$$\frac{\partial_1}{A_1} \sim \frac{\partial_2}{A_2} \sim A_{12} \sim A_{21}; \frac{1}{R_1} \sim \frac{1}{R_2}; \phi_1 \sim \phi_2; v_1 \sim v_2; Q_1 \sim Q_2$$
(6.1.6)  
$$M_1 \sim M_2 \sim H; T_1 \sim T_2 \sim S,$$

откуда следует:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4; \ \alpha_6 = \alpha_7; \ \alpha_8 = \alpha_9; \ \alpha_{12} = \alpha_{13}; \ \alpha_{15} = \alpha_{16}$$
(6.1.7)  
$$\alpha_{17} = \alpha_{18} = \alpha_{19}; \ \alpha_{20} = \alpha_{21} = \alpha_{22}$$

Конкретные результаты вычислений будут приведены в следующих параграфах.

Перейдем к построению процедуры последовательных приближений, которая может понадобиться в некоторых случаях. Представляем в виде рядов искомые функции:

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{1i}, \dots, K = \sum_{i=1}^{\infty} K_i$$
(6.1.8)

и коэффициенты уравнений (6.1.1):

$$\frac{1}{A_1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{A_{1i}}, \dots, A_{12} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{12i}, \dots, \frac{1}{R_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{R_{2i}}$$
(6.1.9)

Заменяем преобразования (6.1.3) и соотношения (6.1.4) на преобразования:

$$\begin{split} \partial_{1} &= \delta^{\alpha_{1}} \partial_{1}^{*}, \ \partial_{2} = \delta^{\alpha_{2}} \partial_{2}^{*}, \ \frac{1}{A_{1i}} = \delta^{i-1} \frac{1}{A_{1i}^{*}}, \ \frac{1}{A_{2i}} = \delta^{i-1} \frac{1}{A_{2i}^{*}}, \ A_{12i} = \delta^{\alpha_{3}+i-1} A_{12i}^{*} \quad (6.1.10) \\ A_{21i} &= \delta^{\alpha_{4}+i-1} A_{21i}^{*}, \ \partial_{t} = \delta^{\alpha_{5}} \partial_{t}^{*}, \ \frac{1}{R_{1i}} = \delta^{\alpha_{6}+i-1} \frac{1}{R_{1i}^{*}}, \ \frac{1}{R_{2i}} = \delta^{\alpha_{7}+i-1} \frac{1}{R_{2i}^{*}}, \ \phi_{1i} = \delta^{\alpha_{8}+i-1} \phi_{1i}^{*} \\ \phi_{2i} &= \delta^{\alpha_{9}+i-1} \phi_{2i}^{*}, \ w_{i} = \delta^{\alpha_{10}+i-1} w_{i}^{*}, \ W_{i} = \delta^{\alpha_{11}+i-1} W_{i}^{*}, \ v_{1i} = \delta^{\alpha_{12}+i-1} v_{1i}^{*}, \ v_{2i} = \delta^{\alpha_{13}+i-1} v_{2i}^{*} \\ V_{i} &= \delta^{\alpha_{14}+i-1} V_{i}^{*}, \ Q_{1i} = \delta^{\alpha_{15}+i-1} Q_{1i}^{*}, \ Q_{2i} = \delta^{\alpha_{16}+i-1} Q_{2i}^{*}, \ N_{i} = \delta^{i-1} N_{i}^{*}, \ M_{1i} = \delta^{\alpha_{17}+i-1} M_{1i}^{*} \\ M_{2i} &= \delta^{\alpha_{18}+i-1} M_{2i}^{*}, \ H_{i} = \delta^{\alpha_{19}+i-1} H_{i}^{*}, \ T_{1i} = \delta^{\alpha_{20}+i-1} T_{i}^{*}, \ T_{2i} = \delta^{\alpha_{21}+i-1} T_{2i}^{*} \\ S_{i} &= \delta^{\alpha_{22}+i-1} S_{i}^{*}, \ K_{i} = \delta^{\alpha_{23}+i-1} K_{i}^{*} \quad (i = 1, 2, ...), \end{split}$$

приводящие к соотношениям:

$$\frac{\partial_{1}^{*}}{A_{1i}^{*}} \sim \frac{\partial_{2}^{*}}{A_{2i}^{*}} \sim A_{12i}^{*} \sim A_{21i}^{*} \sim 1; \ \partial_{t}^{*} \sim 1; \ \frac{1}{R_{1i}^{*}} \sim \frac{1}{R_{2i}^{*}} \sim 1$$
(6.1.11)  
$$\varphi_{1i}^{*} \sim \varphi_{2i}^{*} \sim w_{i}^{*} \sim W_{i}^{*} \sim v_{1i}^{*} \sim v_{2i}^{*} \sim V_{i}^{*} \sim Q_{1i}^{*} \sim Q_{2i}^{*} \sim N_{i}^{*} \sim M_{1i}^{*} \sim M_{2i}^{*} \sim H_{i}^{*} \sim H_{i}^{*} \sim T_{1i}^{*} \sim T_{2i}^{*} \sim S_{i}^{*} \sim K_{i}^{*} \sim N_{1}^{*} \quad (i = 1, 2, ...)$$

Подставляя ряды (6.1.8) и (6.1.9) в уравнения (6.1.1) и выполняя расщепление по одинаковым степеням  $\delta$ , соответствующее заданным значениям параметров  $\alpha_1,...,\alpha_{23}$ , получаем бесконечную рекуррентную систему уравнений, инвариантную относительно добавочных преобразований вида (6.1.10). Использование этой инвариантности

позволяет, не меняя формы уравнений, вернуться от преобразованных к исходным переменным.

Рекуррентные системы уравнений сохраняют инвариантность и относительно преобразований (6.1.2), приобретающих теперь вид:

$$\begin{split} \phi_{1i} &= \delta^{\gamma} \phi_{1i}^{*}, \ \phi_{2i} = \delta^{\gamma} \phi_{2i}^{*}, \ w_{i} = \delta^{\gamma} w_{i}^{*}, \ W_{i} = \delta^{\gamma} W_{i}^{*}, \ v_{1i} = \delta^{\gamma} v_{1i}^{*}, \ v_{2i} = \delta^{\gamma} v_{2i}^{*} \quad (6.1.12) \\ V_{i} &= \delta^{\gamma} V_{i}^{*}, \ M_{1i} = \delta^{\gamma} M_{1i}^{*}, \ M_{2i} = \delta^{\gamma} M_{2i}^{*}, \ N_{i} = \delta^{\gamma} N_{i}^{*}, \ H_{i} = \delta^{\gamma} H_{i}^{*}, \ Q_{1i} = \delta^{\gamma} Q_{1i}^{*}, \ Q_{2i} = \delta^{\gamma} Q_{2i}^{*} \\ T_{1i} &= \delta^{\gamma} T_{1i}^{*}, \ T_{2i} = \delta^{\gamma} T_{2i}^{*}, \ K_{i} = \delta^{\gamma} K_{i}^{*}, \ S_{i} = \delta^{\gamma} S_{i}^{*} \quad (i = 1, 2, ...) \end{split}$$

Совместное использование преобразований (6.1.10) и (6.1.12) позволяет, в ряде случаев, находить решение уравнений первого приближения и рекуррентных систем уравнений как инвариантно-групповых решений.

#### 6.2. ПРИФРОНТОВЫЕ АСИМПТОТИКИ

Рассмотрим следующие два набора параметров, соответствующие быстроизменяющимся по пространственным координатам и времени напряженно-деформированным состояниям.

Случай 1.  $\alpha_1 = -0.5, \alpha_2 = -0.5, \alpha_3 = -0.5, \alpha_4 = -0.5, \alpha_5 = -0.5, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = 0, \alpha_8 = 0.5, \alpha_9 = 0.5, \alpha_{10} = 1, \alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 0.5, \alpha_{13} = 0.5, \alpha_{14} = 1, \alpha_{15} = 0.5, \alpha_{16} = 0.5, \alpha_{17} = 0, \alpha_{18} = 0, \alpha_{19} = 0, \alpha_{20} = 0, \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 0, \alpha_{23} = 0.$  Таблица (6.1.5) принимает вид:

$$\begin{split} & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ -0.5 & (6.2.1) \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 & (6.2.1) \\ & 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 & (-0.5) & ($$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2} \left[ \frac{T_{1,1}}{R_{1,1}} + \frac{T_{2,1}}{R_{2,1}} - \left( \frac{1}{R_{1,1}} + \frac{1}{R_{2,1}} \right) K_1 \right] + N_1 + \frac{1}{2} \partial_t^2 W_1 + \frac{1}{16} \partial_t^2 W_1 = 0 \\ &\frac{1}{A_{1,1}} \partial_1 T_{1,1} + A_{21,1} \left( T_{1,1} - T_{2,1} \right) + \frac{1}{A_{2,1}} \partial_2 S_1 + 2A_{12,1} S_1 - \partial_t^2 V_{1,1} = 0 \\ &\frac{1}{A_{1,1}} \partial_1 S_1 + 2A_{21,1} S_1 + \frac{1}{A_{2,1}} \partial_2 T_{2,1} + A_{12,1} \left( T_{2,1} - T_{1,1} \right) - \partial_t^2 V_{2,1} = 0 \\ &a_s^2 \left( \frac{1}{R_{1,1} A_{1,1}} \partial_1 Q_{1,1} + \frac{A_{21,1}}{R_{2,1}} Q_{1,1} + \frac{1}{R_{2,1} A_{2,1}} \partial_2 Q_{2,1} + \frac{A_{12,1}}{R_{1,1}} Q_{2,1} \right) + \frac{M_{1,1}}{R_{1,1}} + \frac{M_{2,1}}{R_{2,1}} - \\ &- \left( \frac{1}{R_{1,1}} + \frac{1}{R_{2,1}} \right) N_1 + 8K_1 + \partial_t^2 V_1 = 0; \quad 0 = K_1 - v \left( T_{1,1} + T_{2,1} \right) \\ \left( \frac{1}{A_{1,1}} \partial_1 \phi_{1,1} + A_{121} \phi_{2,1} \right) = M_{1,1} - v \left( M_{2,1} + N_1 \right); \quad b \left( \frac{1}{A_{2,1}} \partial_2 \phi_{2,1} + A_{21,1} \phi_{1,1} \right) = M_{2,1} - v \left( M_{1,1} + N_1 \right) \\ &0 = N_1 - v \left( M_{1,1} + M_{2,1} \right); \quad Q_{1,1} = \frac{1}{A_{1,1}} \partial_1 W_1 + \phi_{1,1}; \quad Q_{2,1} = \frac{1}{A_{2,1}} \partial_2 W_1 + \phi_{2,1} \\ &H_1 = a_s^2 \left( \frac{1}{A_{2,1}} \partial_2 \phi_{1,1} - A_{12,1} \phi_{1,1} + \frac{1}{A_{1,1}} \partial_1 \phi_{2,1} - A_{21,1} \phi_{2,1} \right) \\ &\frac{1}{2} \partial_1 V_{1,1} + A_{12,1} V_{2,1} \right] = T_1 - v \left( T_2 + K_1 \right) b \left( \frac{1}{2} \partial_2 V_{2,1} + A_{21,1} \phi_{2,1} \right) \\ &= T_2 - v \left( T_1 + K_1$$

$$\left(\frac{1}{A_{1,1}}\partial_{1}v_{1,1} + A_{12,1}v_{2,1}\right) = T_{1,1} - \nu(T_{2,1} + K_{1}), \ b\left(\frac{1}{A_{2,1}}\partial_{2}v_{2,1} + A_{21,1}v_{1,1}\right) = T_{2,1} - \nu(T_{1,1} + K_{1})$$
$$S_{1} = a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{2,1}}\partial_{2}v_{1,1} - A_{12,1}v_{1,1} + \frac{1}{A_{1,1}}\partial_{1}v_{2,1} - A_{21,1}v_{2,1}\right)$$

Эти уравнения соответствуют прифронтовым зонам вблизи фронтов изгибных и продольных волн, движущихся с безразмерной скоростью, равной единице, а также крутильных и поперечных волн, движущихся со скоростью *a*<sub>s</sub>. Процедуру последовательных приближений, а также решение соответствующих уравнений построим позже, при решении конкретных задач. Пока же прокомментируем некоторые асимптотические оценки.

Значения параметров  $\alpha_6 = \alpha_7 = 0$  говорят о том, что допускаются сравнительно большие значения кривизн  $1/R_1 \sim 1/R_2 \sim 1$ . Это не соответствует тем оценкам (5.6.3), при которых выводились уравнения (5.6.2). Однако на самом деле несоответствия нет. Речь идет о том, что строящейся на основе уравнений первого приближения (6.2.2) процедуре последовательных приближений не противоречат достаточно большие значения кривизны, даже большие, чем возможны на самом деле.

То же самое относится и к значениям параметров  $\alpha_3 = -0.5$ ,  $\alpha_4 = -0.5$ . Они означают, что процедура последовательных приближений допускает большие значения коэффициентов  $A_{12}$  и  $A_{21}: A_{12} \sim A_{21} > 1$ . На самом деле подобные значения этих коэффициентов, в соответствии с (5.6.3), невозможны, однако если процедура последовательных приближений справедлива при больших значениях коэффициентов, то тем более она будет справедлива и при малых их значениях.

Вопрос об относительно высоких скоростях изменения по пространственным координатам и времени, что в принципе также не соответствует оценкам (5.6.3), уже обсуждался ранее при решении задач в рамках теории пластин.

$$\begin{split} &a_{s}^{2} \Biggl( \frac{1}{R_{1,1}A_{1,1}} \partial_{1}Q_{1,1} + \frac{A_{21,1}}{R_{2,1}}Q_{1,1} + \frac{1}{R_{2,1}A_{2,1}} \partial_{2}Q_{2,1} + \frac{A_{12,1}}{R_{1,1}}Q_{2,1} \Biggr) + 8K_{1} + \partial_{t}^{2}V_{1} = 0 \\ &b \Biggl( \frac{1}{A_{1,1}} \partial_{1}\phi_{1,1} + A_{12,1}\phi_{2,1} \Biggr) = M_{1,1} - v \Bigl( M_{2,1} + N_{1} \Bigr) \\ &b \Biggl( \frac{1}{A_{2,1}} \partial_{2}\phi_{2,1} + A_{21,1}\phi_{1,1} \Biggr) = M_{2,1} - v \Bigl( M_{1,1} + N_{1} \Bigr); \quad bW_{1} = N_{1} - v \Bigl( M_{1,1} + M_{2,1} \Bigr) \\ &H_{1} = a_{s}^{2} \Biggl( \frac{1}{A_{2,1}} \partial_{2}\phi_{1,1} - A_{12,1}\phi_{1,1} + \frac{1}{A_{1,1}} \partial_{1}\phi_{2,1} - A_{21,1}\phi_{2,1} \Biggr) \\ &b \Biggl( \frac{1}{A_{1,1}} \partial_{1}v_{1,1} + A_{12,1}v_{2,1} \Biggr) = T_{1,1} - v \Bigl( T_{2,1} + K_{1} \Bigr) \\ &b \Biggl( \frac{1}{A_{2,1}} \partial_{2}v_{2,1} + A_{21,1}v_{1,1} \Biggr) = T_{2,1} - v \Bigl( T_{1,1} + K_{1} \Bigr); \quad 0 = K_{1} - v \Bigl( T_{1,1} + T_{2,1} \Bigr) \\ &S_{1} = a_{s}^{2} \Biggl( \frac{1}{A_{2,1}} \partial_{2}v_{1,1} - A_{12,1}v_{1,1} + \frac{1}{A_{1,1}} \partial_{1}v_{2,1} - A_{21,1}v_{2,1} \Biggr) \end{split}$$

Данные уравнения описывают прифронтовые зоны продольных, поперечных и сдвиговых волн. В остальном к ним относится все то, что было сказано выше в случае 1.

#### 6.3. БЫСТРОИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим два случая напряженно-деформированных состояний, изменяющихся более медленно, чем рассмотренные в предыдущем параграфе, но все еще достаточно быстро.

Случай 1.  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0.5, \alpha_7 = 0.5, \alpha_8 = 0, \alpha_9 = 0, \alpha_{10} = 0, \alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = 0.5, \alpha_{13} = 0.5, \alpha_{14} = 0.5, \alpha_{15} = 0, \alpha_{16} = 0, \alpha_{17} = 0, \alpha_{18} = 0, \alpha_{19} = 0, \alpha_{20} = 0.5, \alpha_{21} = 0.5, \alpha_{22} = 0.5, \alpha_{23} = 0.5$ . Таблица (6.1.5) имеет вид:

Соответствующие упрощенные уравнения будут:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}M_{1} + A_{21}(M_{1} - M_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}H + 2A_{12}H - 8a_{s}^{2}Q_{1} - \partial_{t}^{2}\varphi_{1} &= 0 \quad (6.3.2) \\ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}H + 2A_{21}H + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}M_{2} + A_{12}(M_{2} - M_{1}) - 8a_{s}^{2}Q_{2} - \partial_{t}^{2}\varphi_{2} &= 0 \\ a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}Q_{1} + A_{21}Q_{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}Q_{2} + A_{12}Q_{2}\right) + N - \partial_{t}^{2}w &= 0 \\ N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W &= 0; \quad Q_{1} &= \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}w + \varphi_{1}; \quad Q_{2} &= \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}w + \varphi_{2} \\ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}T_{1} + A_{21}(T_{1} - T_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}S + 2A_{12}S + a_{s}^{2}\left(\frac{2}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)Q_{1} - \partial_{t}^{2}v_{1} &= 0 \\ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}S + 2A_{21}S + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}T_{2} + A_{12}(T_{2} - T_{1}) + a_{s}^{2}\left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{2}{R_{2}}\right)Q_{2} - \partial_{t}^{2}v_{2} &= 0 \\ a_{s}^{2}\left(\frac{1}{R_{1}A_{1}}\partial_{1}Q_{1} + \frac{A_{21}}{R_{2}}Q_{1} + \frac{1}{R_{2}A_{2}}\partial_{2}Q_{2} + \frac{A_{12}}{R_{1}}Q_{2}\right) + \frac{M_{1}}{R_{1}} + \frac{M_{2}}{R_{2}} - \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)N + 8K + \partial_{t}^{2}V = 0 \\ b\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\varphi_{1} + A_{12}\varphi_{2}\right) &= M_{1} - v(M_{2} + N); \quad b\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\varphi_{2} + A_{21}\varphi_{1}\right) &= M_{2} - v(M_{1} + N) \\ bW &= N - v(M_{1} + M_{2}); \quad H = a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\varphi_{1} - A_{12}\varphi_{1} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\varphi_{2} - A_{21}\varphi_{2}\right) \\ b\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{1} + A_{12}v_{2} + \frac{w}{R_{1}}\right) &= T_{1} - v(T_{2} + K); \quad b\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{2} + A_{21}v_{1} + \frac{w}{R_{2}}\right) &= T_{2} - v(T_{1} + K) \\ bV &= K - v(T_{1} + T_{2}); \quad S = a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{1} - A_{12}v_{1} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{2} - A_{21}v_{2}\right) \end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что при нагрузке и граничных условиях, соответствующих преобладанию моментного напряженно-деформированного состояния, быстроизменяющиеся компоненты этого состояния можно разыскивать при помощи уравнений изгиба пластин (в криволинейных координатах на срединной плоскости). Безмоментное напряженнодеформированное состояние является здесь второстепенным и разыскивается отдельно, как следствие моментного состояния.

Случай 2.  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0.5, \alpha_7 = 0.5, \alpha_8 = 0, \alpha_9 = 0, \alpha_{10} = 0, \alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = -0.5, \alpha_{13} = -0.5, \alpha_{14} = -0.5, \alpha_{15} = 0, \alpha_{16} = 0, \alpha_{17} = 0, \alpha_{18} = 0, \alpha_{19} = 0, \alpha_{20} = -0.5, \alpha_{21} = -0.5, \alpha_{22} = -0.5, \alpha_{23} = -0.5.$  Таблица (6.1.5) будет: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0,

$$\begin{split} & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ & 0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ & 0, 0, \ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ & 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ & 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ & 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ & -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ & -0.5, \$$

Из этих уравнений следует, что при нагрузке и граничных условиях, соответствующих преобладанию плоского напряженно-деформированного состояния, быстроизменяющиеся компоненты этого состояния можно разыскивать при помощи уточненных уравнений плоского напряженного состояния (в криволинейных координатах на срединной плоскости). Изгибное напряженно-деформированное состояние является здесь второстепенным и разыскивается отдельно, как следствие плоского состояния.

В обоих рассмотренных случаях, в соответствии со значениями параметров  $\alpha_6 = \alpha_7 = 0.5$ , должны выполняться соотношения:

$$\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{R_2}\right)^2 < 1 \tag{6.3.5}$$

Это соответствует условиям (5.6.3), то есть допускается максимальная степень искривления срединной поверхности оболочки, при которой справедливы исходные уравнения (6.1.1). То, что при этом уравнения оболочки превращаются в уравнения пластины связано с быстрой изменяемостью по пространственным координатам, соответствующей значениям параметров  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

Значения  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$  говорят о том, что допускаются большие величины  $A_{12} \sim A_{21} \sim 1$ , хотя на самом деле, в соответствии с (5.6.3), эти величины всегда меньше единицы.

## 6.4. УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Перейдем к анализу более медленно изменяющихся напряженнодеформированных состояний. Значениям параметров  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 0.5, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = 1, \alpha_7 = 1, \alpha_8 = -1.5, \alpha_9 = -1.5, \alpha_{10} = -2, \alpha_{11} = -1, \alpha_{12} = -1.5, \alpha_{13} = -1.5, \alpha_{14} = -1, \alpha_{15} = -0.5, \alpha_{16} = -0.5, \alpha_{17} = -1, \alpha_{18} = -1, \alpha_{19} = -1, \alpha_{20} = -1, \alpha_{21} = -1, \alpha_{22} = -1, \alpha_{23} = 0$ отвечает следующий вид таблицы (6.1.5):

$$\begin{split} &a_s^2 \Biggl( \frac{1}{A_1} \partial_1 Q_1 + A_{21} Q_1 + \frac{1}{A_2} \partial_2 Q_2 + A_{12} Q_2 \Biggr) + N - \partial_t^2 w = 0 \\ &\frac{3}{2} \Biggl( \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \Biggr) + N + \frac{1}{2} \partial_t^2 w = 0; \quad \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} + 8K = 0; \quad \frac{1}{A_1} \partial_1 w + \phi_1 = 0; \quad \frac{1}{A_2} \partial_2 w + \phi_2 = 0 \\ &\frac{1}{A_1} \partial_1 T_1 + A_{21} (T_1 - T_2) + \frac{1}{A_2} \partial_2 S + 2A_{12} S = 0; \quad b \Biggl( \frac{1}{A_1} \partial_1 \phi_1 + A_{12} \phi_2 \Biggr) = M_1 - v M_2 \\ &\frac{1}{A_1} \partial_1 S + 2A_{21} S + \frac{1}{A_2} \partial_2 T_2 + A_{12} (T_2 - T_1) = 0; \quad b \Biggl( \frac{1}{A_2} \partial_2 \phi_2 + A_{21} \phi_1 \Biggr) = M_2 - v M_1 \\ &b W = -v (M_1 + M_2); \quad H = a_s^2 \Biggl( \frac{1}{A_2} \partial_2 \phi_1 - A_{12} \phi_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \phi_2 - A_{21} \phi_2 \Biggr) \\ &b \Biggl( \frac{1}{A_1} \partial_1 v_1 + A_{12} v_2 + \frac{w}{R_1} \Biggr) = T_1 - v T_2; \quad b \Biggl( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_2 + A_{21} v_1 + \frac{w}{R_2} \Biggr) = T_2 - v T_1 \\ &b V = -v (T_1 + T_2); \quad S = a_s^2 \Biggl( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_1 - A_{12} v_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 v_2 - A_{21} v_2 \Biggr) \\ &\text{ Here numery is a particle.} \end{split}$$

Перепишем их в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}M_{1} + A_{21}(M_{1} - M_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}H + 2A_{12}H - 8a_{s}^{2}Q_{1} = 0 \end{aligned} (6.4.3) \\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}H + 2A_{21}H + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}M_{2} + A_{12}(M_{2} - M_{1}) - 8a_{s}^{2}Q_{2} = 0 \\ &a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}Q_{1} + A_{21}Q_{1} + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}Q_{2} + A_{12}Q_{2}\right) - \frac{3}{2}\partial_{\tau}^{2}w - \frac{3}{2}\left(\frac{T_{1}}{R_{1}} + \frac{T_{2}}{R_{2}}\right) = 0 \\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}T_{1} + A_{21}(T_{1} - T_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}S + 2A_{12}S = 0; \ \varphi_{1} = -\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}w \\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}S + 2A_{21}S + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}T_{2} + A_{12}(T_{2} - T_{1}) = 0; \ \varphi_{2} = -\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}w \\ &M_{1} = a_{1}^{2}\left[\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\varphi_{1} + A_{12}\varphi_{2} + v\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\varphi_{2} + A_{21}\varphi_{1}\right)\right] \\ &M_{1} = a_{1}^{2}\left[\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\varphi_{1} - A_{12}\varphi_{1} + v\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\varphi_{1} - A_{21}\varphi_{2}\right)\right] \\ &H = a_{s}^{2}\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\varphi_{1} - A_{12}\varphi_{1} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\varphi_{2} - A_{21}\varphi_{2}\right) \\ &T_{1} = a_{1}^{2}\left[\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{1} + A_{12}v_{2} + \frac{w}{R_{1}} + v\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{2} + A_{21}v_{1} + \frac{w}{R_{2}}\right)\right] \end{aligned}$$

$$T_{2} = a_{1}^{2} \left[ \frac{1}{A_{2}} \partial_{2} v_{2} + A_{21} v_{1} + \frac{w}{R_{2}} + v \left( \frac{1}{A_{1}} \partial_{1} v_{1} + A_{12} v_{2} + \frac{w}{R_{1}} \right) \right]$$

$$S = a_{s}^{2} \left( \frac{1}{A_{2}} \partial_{2} v_{1} - A_{12} v_{1} + \frac{1}{A_{1}} \partial_{1} v_{2} - A_{21} v_{2} \right); \quad a_{1}^{2} = \frac{1 - 2v}{(1 - v)^{2}}$$

$$N = -\frac{1}{2} \partial_{t}^{2} w - \frac{3}{2} \left( \frac{T_{1}}{R_{1}} + \frac{T_{2}}{R_{2}} \right); \quad K = -\frac{1}{8} \left( \frac{M_{1}}{R_{1}} + \frac{M_{2}}{R_{2}} \right)$$

$$W = -\frac{v}{b} (M_{1} + M_{2}); \quad V = -\frac{v}{b} (T_{1} + T_{2})$$
(6.4.4)

Уравнения (6.4.3) являются уравнениями пологой оболочки классического типа [13]. Главным в них является моментное напряженнодеформированное состояние; безмоментное квазистатическое напряженнодеформированное состояние является второстепенной добавкой к моментному.

Соотношения (6.4.4) служат для отыскания функций, обычно не учитываемых в классической теории.

асимптотические оценки, которым Рассмотрим соответствуют параметров  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ уравнения (6.4.3). Значения приводят К соотношениям  $(\partial_1/A_1)^2 \sim (\partial_2/A_2)^2 < 1$ , в то время, как в соответствии с (5.6.3), допускаются соотношения  $(\partial_1/A_1)^4 \sim (\partial_2/A_2)^4 < 1$ . Следовательно, (6.4.3) пригодны для меньшей скорости уравнения изменения по пространственным координатам, чем исходные уравнения (6.1.1).

Значение  $\alpha_5 = 1$  говорит о еще более медленном изменении по времени  $\partial_t < 1$ .

Значения  $\alpha_6 = \alpha_7 = 1$  указывают на относительно малую искривленность пологой оболочки  $1/R_1 \sim 1/R_2 < 1$ , в то время как для исходных уравнений (6.1.1) справедливы соотношения (6.3.5), соответствующие большей степени искривленности. Это подтверждает справедливость мнения о том, что пологую оболочку можно считать слабо искривленной пластиной [17].

Интересно отметить, что к указанным выше достаточно очевидным асимптотическим ограничениям добавляются и ограничения на степень искривления координатных линий на срединной поверхности оболочки. Это следует из значений параметров  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0.5$ , из которых вытекают соотношения  $(A_{12})^2 \sim (A_{21})^2 < 1$ , в то время как для исходных уравнений (6.1.1), в соответствии с (5.6.3), справедливы соотношения  $(A_{12})^4 \sim (A_{21})^4 < 1$ , удовлетворяющиеся при бо́льших значениях коэффициентов  $A_{12}$  и  $A_{21}$ .

Поскольку в уравнениях (6.4.3) преобладают моментные эффекты, они будут дополнены ниже вариантами безмоментых уравнений.

#### 6.5. ВАРИАНТЫ БЕЗМОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим следующие значения параметров асимптотического интегрирования:  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 0.5, \alpha_5 = 0.5, \alpha_6 = 0.5, \alpha_7 = 0.5, \alpha_8 = -0.5, \alpha_8 =$  $\alpha_9 = -0.5, \alpha_{10} = -1, \alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = -1, \alpha_{13} = -1, \alpha_{14} = -0.5, \alpha_{15} = 0.5, \alpha_{16} = 0.5, \alpha_{17} = 0, \alpha_{18} = 0, \alpha_{18}$  $\alpha_{19} = 0, \ \alpha_{20} = -0.5, \ \alpha_{21} = -0.5, \ \alpha_{22} = -0.5, \ \alpha_{23} = 0.5.$  Им соответствует такой вид таблицы (6.1.5): 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5 (6.5.1)0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5 1, 1, 1, 1, 0, 0 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0 0.5, -0.5, -0.5; 0.5, -0.5, -0.5-0.5, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5, 0.5-0.5, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5, 0.5-0.5, 0.5, -0.5, -0.5; -0.5, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5Упрощенные уравнения, отвечающие этой таблице, будут:  $\frac{1}{\Delta}\partial_{1}M_{1} + A_{21}(M_{1} - M_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}H + 2A_{12}H - 8a_{s}^{2}Q_{1} - \partial_{t}^{2}\varphi_{1} = 0$ (6.5.2) $\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}H + 2A_{21}H + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}M_{2} + A_{12}(M_{2} - M_{1}) - 8a_{s}^{2}Q_{2} - \partial_{t}^{2}\varphi_{2} = 0$  $N - \partial_t^2 w = 0; \ \frac{3}{2} \left( \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + N + \frac{1}{2} \partial_t^2 w = 0$  $\frac{1}{A}\partial_{1}T_{1} + A_{21}(T_{1} - T_{2}) + \frac{1}{A}\partial_{2}S + 2A_{12}S - \partial_{t}^{2}v_{1} = 0$  $\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}S + 2A_{21}S + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}T_{2} + A_{12}(T_{2} - T_{1}) - \partial_{t}^{2}v_{2} = 0$  $\frac{M_{1}}{R_{1}} + \frac{M_{2}}{R_{2}} - \left(\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}}\right)N + 8K + \partial_{t}^{2}V = 0; \quad \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}w + \phi_{1} = 0; \quad \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}w + \phi_{2} = 0$  $b\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\phi_{1}+A_{12}\phi_{2}\right)=M_{1}-v(M_{2}+N); \ b\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\phi_{2}+A_{21}\phi_{1}\right)=M_{2}-v(M_{1}+N)$ bW = N - v(M<sub>1</sub> + M<sub>2</sub>); H =  $a_s^2 \left( \frac{1}{A_1} \partial_2 \phi_1 - A_{12} \phi_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \phi_2 - A_{21} \phi_2 \right)$  $b\left(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{1} + A_{12}v_{2} + \frac{w}{R_{1}}\right) = T_{1} - vT_{2}; \ b\left(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{2} + A_{21}v_{1} + \frac{w}{R_{2}}\right) = T_{2} - vT_{1}$ 

$$bV = -v(T_1 + T_2); \ S = a_s^2 \left( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_1 - A_{12} v_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 v_2 - A_{21} v_2 \right)$$

Перепишем их в виде:

W =

$$\begin{split} &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}T_{1} + A_{21}(T_{1} - T_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}S + 2A_{12}S - \partial_{1}^{2}v_{1} = 0 \quad (6.5.3) \\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}S + 2A_{21}S + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}T_{2} + A_{12}(T_{2} - T_{1}) - \partial_{1}^{2}v_{2} = 0 \\ &\frac{T_{1}}{R_{1}} + \frac{T_{2}}{R_{2}} + \partial_{1}^{2}w = 0; \quad S = a_{s}^{2} \left( \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{1} - A_{12}v_{1} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{2} - A_{21}v_{2} \right) \\ &T_{1} = a_{1}^{2} \left[ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{1} + A_{12}v_{2} + \frac{w}{R_{1}} + v \left( \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{2} + A_{21}v_{1} + \frac{w}{R_{2}} \right) \right] \\ &T_{2} = a_{1}^{2} \left[ \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{2} + A_{21}v_{1} + \frac{w}{R_{2}} + v \left( \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{1} + A_{12}v_{2} + \frac{w}{R_{1}} \right) \right] \\ &\phi_{1} = -\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}w; \quad \phi_{2} = -\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}w; \quad N = \partial_{1}^{2}w \quad (6.5.4) \\ &M_{1} = a_{1}^{2} \left[ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\phi_{1} + A_{12}\phi_{2} + v \left( \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\phi_{2} + A_{21}\phi_{1} \right) \right] + cN; \quad c = \frac{v}{1-v} \\ &M_{2} = a_{1}^{2} \left[ \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\phi_{2} + A_{21}\phi_{1} + v \left( \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\phi_{1} + A_{12}\phi_{2} \right) \right] + cN \\ &H = a_{s}^{2} \left( \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\phi_{1} - A_{12}\phi_{1} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\phi_{2} - A_{21}\phi_{2} \right) \\ &Q_{1} = \frac{1}{8a_{s}^{2}} \left[ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}M_{1} + A_{21}(M_{1} - M_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}H + 2A_{12}H - \partial_{1}^{2}\phi_{1} \right] \\ &Q_{1} = \frac{1}{8a_{s}^{2}} \left[ \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}M_{2} + A_{12}(M_{2} - M_{1}) + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}H + 2A_{21}H - \partial_{1}^{2}\phi_{2} \right] \\ &\frac{1}{b} \left[ N - v(M_{1} + M_{2}) \right]; \quad V = -\frac{v}{b}(T_{1} + T_{2}); \quad K = \frac{8}{8} \left[ \left( \frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}} \right) N - \frac{M_{1}}{R_{1}} - \frac{M_{2}}{R_{2}} - \partial_{1}^{2}V \right] \\ \end{array}$$

Уравнения (6.5.3) являются, собственно, безмоментными уравнениями оболочки. Уравнения (6.5.4) служат для отыскания функций, не входящих в (6.5.3) и играющих здесь второстепенную роль.

Значение параметра  $\alpha_5 = 0.5$  показывает что уравнения (6.5.3) пригодны для описания более быстро изменяющегося во времени напряженно-деформированного состояния, чем уравнения пологой оболочки, полученные в предыдущем параграфе. Параметры  $\alpha_6 = \alpha_7 = 0.5$  показывают, что здесь допускаются и большая степень искривленности срединной поверхности, такая же, как для исходных уравнений (6.1.1).

Уравнения (6.5.3), (6.5.4) можно считать дополняющими уравнения пологой оболочки (6.4.3), так как в последних преобладает моментное напряженно-деформированное состояние, а здесь преобладает безмоментное. Однако уравнения (6.5.3), (6.5.4) справедливы для оболочек большей кривизны, чем уравнения (6.4.3). Разумеется, уравнения, записанные для большей кривизны, можно использовать и в случае меньшей кривизны, но в последнем случае целесообразнее использовать уравнения, изначально рассчитанные на ту же кривизну, что и уравнения (6.4.3).

Рассмотрим следующие значения параметров:  $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 0.5, \alpha_5 = 0.5, \alpha_6 = 1, \alpha_7 = 1, \alpha_8 = -1.5, \alpha_9 = -1.5, \alpha_{10} = -1, \alpha_{11} = -1, \alpha_{12} = -1.5, \alpha_{13} = -1.5, \alpha_{14} = -1, \alpha_{15} = -0.5, \alpha_{16} = -0.5, \alpha_{17} = -1, \alpha_{18} = -1, \alpha_{19} = -1, \alpha_{20} = -1, \alpha_{21} = -1, \alpha_{22} = -1, \alpha_{23} = 0.$ Соответствующий вид таблицы (6.1.5) будет:

$$\begin{split} &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ &0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0 \\ &0, \ 0, \ 1, \ 1, \ 0, \ 0, \ 0 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ 0.5, \ 0.5, \ -0.5 \\ &-0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ &-1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ 0 \\ &-1, \ 0, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ 0 \\ &-1, \ 0, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ 0 \\ &-1, \ 0, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ 0 \\ &-1, \ 0, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ 0 \\ &-1, \ 0, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ -1, \ 0 \\ &-1, \ 0, \ -1,$$

bW = 
$$-v(M_1 + M_2)$$
;  $H = a_s^2 \left( \frac{1}{A_2} \partial_2 \phi_1 - A_{12} \phi_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \phi_2 - A_{21} \phi_2 \right)$ ;  $\phi_1 = 0$ ;  $\phi_2 = 0$   
 $b \left( \frac{1}{A_1} \partial_1 v_1 + A_{12} v_2 \right) = T_1 - vT_2$ ;  $b \left( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_2 + A_{21} v_1 \right) = T_2 - vT_1$   
 $bV = -v(T_1 + T_2)$ ;  $S = a_s^2 \left( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_1 - A_{12} v_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 v_2 - A_{21} v_2 \right)$   
Перепишем их в виде:

The perturned for the budge:  $\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}T_{1} + A_{21}(T_{1} - T_{2}) + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}S + 2A_{12}S - \partial_{t}^{2}v_{1} = 0 \quad (6.5.7)$   $\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}S + 2A_{21}S + \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}T_{2} + A_{12}(T_{2} - T_{1}) - \partial_{t}^{2}v_{2} = 0$   $T_{1} = a_{1}^{2} \left[ \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{1} + A_{12}v_{2} - v \left( \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{2} + A_{21}v_{1} \right) \right]$   $T_{2} = a_{1}^{2} \left[ \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{2} + A_{21}v_{1} - v \left( \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{1} + A_{12}v_{2} \right) \right]$   $S = a_{s}^{2} \left( \frac{1}{A_{2}}\partial_{2}v_{1} - A_{12}v_{1} + \frac{1}{A_{1}}\partial_{1}v_{2} - A_{21}v_{2} \right); \quad \frac{T_{1}}{R_{1}} + \frac{T_{2}}{R_{2}} + \partial_{t}^{2}w = 0$   $\phi_{1} = 0; \quad \phi_{2} = 0; \quad M_{1} = 0; \quad M_{2} = 0; \quad H = 0; \quad Q_{1} = 0; \quad Q_{2} = 0; \quad W = 0 \quad (6.5.8)$   $N = \partial_{t}^{2}w; \quad V = -\frac{v}{b}(T_{1} + T_{2}); \quad K = -\frac{1}{8}\partial_{t}^{2}V$ 

Уравнения (6.5.7) можно рассматривать, как безмоментные уравнения пологой оболочки, поскольку значения параметров  $\alpha_6 = \alpha_7 = 1$  соответствуют такой же кривизне срединной поверхности, как в случае моментных уравнений пологой оболочки. В своей основной части эти уравнения совпадают с уравнениями обобщенного плоского напряженного состояния, записанными в криволинейных координатах. Связь с прогибом w осуществляется только в шестом уравнении (6.5.7) по уже найденным из первых пяти уравнений усилиям  $T_1$  и  $T_2$ . Обратим внимание на соотношения (6.5.8), в соответствии с которыми

напряженно-деформированного состояния моментная часть полностью отсутствует. Этим данные уравнения существенно отличаются от уравнений (6.5.3), (6.5.4), которые дают ненулевые моментные компоненты. Отсутствие моментных компонент в уравнениях (6.5.7), (6.5.8) облегчает их стыковку с позволяя удовлетворить граничным уравнениями (6.4.3),условиям, связанным с моментным напряженно-деформированным состоянием, при решении уравнений (6.4.3) (полагая безмоментные граничные условия нулевыми), а граничным условиям, связанным с безмоментным состоянием – решении уравнений (6.5.7).

В итоге получается, что уравнения (6.4.3) и (6.5.7) образуют полную систему уравнений пологой оболочки, учитывающих все и моментные и безмоментные эффекты и соответствующие граничные условия. Добавление уравнений (6.5.7) к уравнениям (6.4.3) необходимо, поскольку безмоментные компоненты в (6.4.3) являются второстепенными и квазистатическими, в то время как уравнения (6.5.7) дают полноценную динамическую картину безмоментного напряженно-деформированного состояния.

Рассмотрим в заключение данного параграфа еще один случай:  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1, \alpha_5 = 0.5, \alpha_6 = 0.5, \alpha_7 = 0.5, \alpha_8 = -1, \alpha_9 = -1, \alpha_{10} = -1, \alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = -0.5, \alpha_{13} = -0.5, \alpha_{14} = -0.5, \alpha_{15} = 0, \alpha_{16} = 0, \alpha_{17} = 0, \alpha_{18} = 0, \alpha_{19} = 0, \alpha_{20} = -0.5, \alpha_{21} = -0.5, \alpha_{22} = -0.5, \alpha_{23} = 0.5.$  Таблица (6.1.5) будет:

$$\begin{split} &8a_{s}^{2}Q_{1}+\partial_{t}^{2}\phi_{1}=0;\ 8a_{s}^{2}Q_{2}+\partial_{t}^{2}\phi_{2}=0; N-\partial_{t}^{2}w=0;\ \frac{3}{2}\bigg(\frac{T_{1}}{R_{1}}+\frac{T_{2}}{R_{2}}\bigg)+N+\frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w=0\ (6.5.10)\\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}T_{1}+A_{21}\big(T_{1}-T_{2}\big)+\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}S+2A_{12}S+a_{s}^{2}\bigg(\frac{2}{R_{1}}+\frac{1}{R_{2}}\bigg)Q_{1}-\partial_{t}^{2}v_{1}=0\\ &\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}S+2A_{21}S+\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}T_{2}+A_{12}\big(T_{2}-T_{1}\big)+a_{s}^{2}\bigg(\frac{1}{R_{1}}+\frac{2}{R_{2}}\bigg)Q_{2}-\partial_{t}^{2}v_{2}=0\\ &\frac{M_{1}}{R_{1}}+\frac{M_{2}}{R_{2}}-\bigg(\frac{1}{R_{1}}+\frac{1}{R_{2}}\bigg)N+8K+\partial_{t}^{2}V=0;\ \phi_{1}=0;\ \phi_{2}=0;\ S=0\\ &b\bigg(\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\phi_{1}+A_{12}\phi_{2}\bigg)=M_{1}-v\big(M_{2}+N\big);\ b\bigg(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\phi_{2}+A_{21}\phi_{1}\bigg)=M_{2}-v\big(M_{1}+N\big)\\ &bW=N-v\big(M_{1}+M_{2}\big);\ H=a_{s}^{2}\bigg(\frac{1}{A_{2}}\partial_{2}\phi_{1}-A_{12}\phi_{1}+\frac{1}{A_{1}}\partial_{1}\phi_{2}-A_{21}\phi_{2}\bigg)\\ &b\frac{w}{R_{1}}=T_{1}-vT_{2};\ b\frac{w}{R_{2}}=T_{2}-vT_{1};\ bV=-v\big(T_{1}+T_{2}\big) \end{split}$$

Из них следует:

$$a_{1}^{2}\left(\frac{1}{R_{1}^{2}} + \frac{2\nu}{R_{1}R_{2}} + \frac{1}{R_{2}^{2}}\right)w + \partial_{t}^{2}w = 0; \ T_{1} = a_{1}^{2}\left(\frac{w}{R_{1}} + \nu\frac{w}{R_{2}}\right); \ T_{2} = a_{1}^{2}\left(\frac{w}{R_{2}} + \nu\frac{w}{R_{1}}\right) \ (6.5.11)$$

$$\phi_1 = 0; \phi_2 = 0; Q_1 = 0; Q_2 = 0; S = 0; H = 0; N = \partial_t^2 w; M_1 = cN; M_2 = cN$$
 (6.5.12)

$$bW = N - v(M_1 + M_2); \ bV = K - v(T_1 + T_2); \ \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)N + 8K + \partial_t^2 V = 0$$
$$\frac{1}{A_1}\partial_1 T_1 + A_{21}(T_1 - T_2) - \partial_t^2 v_1 = 0; \ \frac{1}{A_2}\partial_2 T_2 + A_{12}(T_2 - T_1) - \partial_t^2 v_2 = 0$$

Уравнения (6.5.11) описывают колебания оболочки либо замкнутого типа, либо на больших расстояниях от границ. Они соответствуют более медленному изменению по пространственным координатам, чем по времени. Кривизна оболочки в данном случае допускается максимально возможной из допускаемых уравнениями (6.1.1). Но в то же время допускаются только малые значения величин  $A_{12}$  и  $A_{21}$ .

#### 6.6. КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯИЗГИБА ОБОЛОЧКИ

Во всех рассмотренных выше вариантах упрощения уравнений (6.1.1) существенным было выполнение гипотез (6.1.5), облегчающих поиск параметров асимптотического интегрирования за счет снижения их количества. Однако бывают ситуации, когда некоторые из соотношений (6.1.5) не выполняются. Это относится, в частности, к цилиндрическим оболочкам или к оболочкам, подобным цилиндрическим – коническим, в форме однополостного гиперболоида и тому подобным.

Рассмотрим, в связи с эти, следующие значения параметров:  $\alpha_1 = = 0.5, \alpha_2 = 1.5, \alpha_3 = 1.5, \alpha_4 = 1.5, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = 2, \alpha_7 = 1, \alpha_8 = -1.5, \alpha_9 = -0.5, \alpha_{10} = -2, \alpha_{11} = -1, \alpha_{12} = -1.5, \alpha_{13} = -0.5, \alpha_{14} = -1, \alpha_{15} = -0.5, \alpha_{16} = 0.5, \alpha_{17} = -1, \alpha_{18} = -1, \alpha_{19} = 0, \alpha_{20} = 0, \alpha_{21} = -1, \alpha_{22} = 0, \alpha_{23} = 0$ . В сравнении со значениями, использованными в параграфе 6.4, произошли изменения, соответствующие более медленному изменению по координате  $x_2$ , меньшей степени кривизны координатных линий на срединной поверхности оболочки, задаваемых коэффициентами  $A_{12}$  и  $A_{21}$ , меньшей кривизне  $1/R_1$ , меньшему значению перемещения  $v_2$  и меньшим значениям усилий  $Q_2$ , H, T<sub>1</sub>, S. Таблица (6.1.5) принимает теперь вид:

$$\begin{array}{l} -1, \ 0, \ -1, \ -1; \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 1 \\ -0.5, \ -1.5, \ -1.5; \ 0.5, \ -0.5, \ -0.5 \\ -1, \ 1, \ 0, \ 0, \ -1, \ 0; \ 0, \ 0, \ 0, \ 1 \\ 0, \ 0, \ -1; \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 1 \\ Contretterthyto uve typomethile typathethyt bytt: \\ \hline 1 \\ Contretterthyto uve typomethile typathethyt bytt: \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ A_1^{-1} \partial_1 M_1 - 8a_s^2 Q_1 = 0; \ \frac{1}{A_1} \partial_1 H + \frac{1}{A_2} \partial_2 M_2 + A_{12} (M_2 - M_1) - 8a_s^2 Q_2 = 0 \quad (6.6.2) \\ a_s^2 \frac{1}{A_1} \partial_1 Q_1 + N - \partial_1^2 W = 0; \ \frac{3}{2} \frac{T_2}{R_2} + N + \frac{1}{2} \partial_1^2 W = 0 \\ \hline \frac{1}{A_1} \partial_1 T_1 - A_{21} T_2 + a_s^2 \frac{1}{R_2} Q_1 - \partial_1^2 V_1 = 0; \ \frac{1}{A_1} \partial_1 S + \frac{1}{A_2} \partial_2 T_2 + A_{12} T_2 = 0 \\ \hline \frac{M_2}{R_2} + 8K = 0; \ b \frac{1}{A_1} \partial_1 \varphi_1 = M_1 - v M_2; \ 0 = M_2 - v M_1 \\ b W = -v (M_1 + M_2); \ H = a_s^2 \left( \frac{1}{A_2} \partial_2 \varphi_1 - A_{12} \varphi_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \varphi_2 \right) \\ \hline \frac{1}{A_1} \partial_1 W + \varphi_1 = 0; \ \frac{1}{A_2} \partial_2 W + \varphi_2 = 0; \ \frac{b}{A_1} \partial_1 V_1 = -v T_2; \ b \frac{W}{R_2} = T_2 \\ b V = -v T_2; \ S = a_s^2 \left( \frac{1}{A_2} \partial_2 V_1 - A_{12} V_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 V_2 \right) \\ \text{Tepennument N B BURE:} \\ \varphi_1 = -\frac{1}{A_1} \partial_1 W; \ M_1 = a_1^2 \frac{1}{A_1} \partial_1 \varphi_1; \ \frac{1}{A_1} \partial_1 M_1 - 8a_s^2 Q_1 = 0 \quad (6.6.3) \\ a_s^2 \frac{1}{A_1} \partial_1 Q_1 - \frac{3b}{2R_2^2} W - \frac{3}{2} \partial_1^2 W = 0 \\ \text{T}_2 = \frac{b}{R_2} W; \ N = -\frac{3}{2} \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{2} \partial_1^2 W; \ M_2 = v M_1; \ W = -\frac{v}{b} (M_1 + M_2) \quad (6.6.4) \\ \varphi_2 = -\frac{1}{A_2} \partial_2 W; \ H = a_s^2 \left( \frac{1}{A_2} \partial_2 \varphi_1 - A_{12} \varphi_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \varphi_2 \right); \ V = -\frac{v}{b} T_2 \\ Q_2 = \frac{1}{8a_s^2} \left[ \frac{1}{A_1} \partial_1 H + \frac{1}{A_2} \partial_2 M_2 + A_{12} (M_2 - M_1) \right]; \ K = -\frac{M_2}{8R_2} \\ \frac{b}{A_1} \partial_1 v_1 = -v T_2; \ \frac{1}{A_1} \partial_1 T_1 - A_{21} T_2 + a_s^2 \frac{1}{R_2} Q_1 - \partial_1^2 v_1 = 0 \\ \frac{1}{A_1} \partial_1 S + \frac{1}{A_2} \partial_2 T_2 + A_{12} T_2 = 0; \ S = a_s^2 \left( \frac{1}{A_2} \partial_2 v_1 - A_{12} v_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 v_2 \right) \end{array}$$

Основными здесь являются уравнения (6.6.3), подобные по форме уравнениям поперечных колебаний балки переменного сечения, лежащей на

упругом основании. Аналогичные уравнения были известны и ранее [91] для цилиндрической оболочки.

После решения указанных уравнений с нахождением функций w,  $\phi_1$ ,  $M_1$  и  $Q_1$ , из уравнений (6.6.4) можно найти остальные искомые функции. При этом функции  $T_2$ , N,  $M_2$ , W,  $\phi_2$ , H, V,  $Q_2$  и К находятся непосредственно, а  $v_1$ ,  $T_1$ , S и  $v_2$  – при помощи дополнительных интегрирований по  $x_1$ .

## 7. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ

# ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

На основе уравнений теории оболочек, полученных в главах 5 и 6, решен ряд задач о распространении нестационарных волновых процессов в цилиндрической оболочке. Эти задачи являются обобщением на случай осесимметричной цилиндрической оболочки соответствующих одномерных задач, решенных для пластин в разделе 4. Выявлены некоторые новые эффекты, возникающие за счет замкнутости оболочки.

# 7.1. УРАВНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим безразмерные уравнения цилиндрической оболочки с радиусом срединной поверхности, равным R. Координатные линии x<sub>1</sub> направим вдоль оси оболочки, а x<sub>2</sub> – в поперечном направлении. Тогда в уравнениях (6.1.1) будет:

$$A_1 = A_2 = 1; \ A_{12} = A_{21} = 0; \ \frac{1}{R_1} = 0; \ \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} = \varepsilon$$
 (7.1.1)

В итоге получается следующая система уравнений цилиндрической оболочки:

$$\begin{split} \partial_{1}M_{1} + \partial_{2}H - 8a_{s}^{2}Q_{1} - \partial_{t}^{2}\phi_{1} &= 0; \ \partial_{1}H + \partial_{2}M_{2} - 8a_{s}^{2}Q_{2} - \partial_{t}^{2}\phi_{2} &= 0 \quad (7.1.2) \\ a_{s}^{2}(\partial_{1}Q_{1} + \partial_{2}Q_{2}) + N - \partial_{t}^{2}w &= 0; \ \frac{3}{2}\varepsilon(T_{2} - K) + N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W &= 0 \\ \partial_{1}T_{1} + \partial_{2}S + a_{s}^{2}\varepsilon Q_{1} - \partial_{t}^{2}v_{1} &= 0; \ \partial_{1}S + \partial_{2}T_{2} + 2a_{s}^{2}\varepsilon Q_{2} - \partial_{t}^{2}v_{2} &= 0 \\ a_{s}^{2}\varepsilon\partial_{2}Q_{2} + \varepsilon(M_{2} - N) + 8K + \partial_{t}^{2}V &= 0; \ bW &= N - \nu(M_{1} + M_{2}) \\ b\partial_{1}\phi_{1} &= M_{1} - \nu(M_{2} + N); \ b\partial_{2}\phi_{2} &= M_{2} - \nu(M_{1} + N); \ Q_{1} &= \partial_{1}w + \phi_{1}; \ Q_{2} &= \partial_{2}w + \phi_{2} \\ H &= a_{s}^{2}(\partial_{2}\phi_{1} + \partial_{1}\phi_{2}); \ b\partial_{1}v_{1} &= T_{1} - \nu(T_{2} + K); \ b(\partial_{2}v_{2} + \varepsilon w) = T_{2} - \nu(T_{1} + K) \\ bV &= K - \nu(T_{1} + T_{2}); \ S &= a_{s}^{2}(\partial_{2}v_{1} + \partial_{1}v_{2}) \end{split}$$

Путем очевидных преобразований получаем уравнения в перемещениях:

$$\partial_1^2 \varphi_1 + a_s^2 \partial_2^2 \varphi_1 + e \partial_1 \partial_2 \varphi_2 - 8 a_s^2 (\partial_1 w + \varphi_1) + c \partial_1 W - \partial_t^2 \varphi_1 = 0$$

$$\partial_2^2 \varphi_2 + a_s^2 \partial_1^2 \varphi_2 + e \partial_1 \partial_2 \varphi_1 - 8 a_s^2 (\partial_2 w + \varphi_2) + c \partial_2 W - \partial_t^2 \varphi_2 = 0$$

$$(7.1.3)$$

$$\begin{split} &a_{s}^{2} \left( \partial_{1}^{2} w + \partial_{2}^{2} w \right) + e (\partial_{1} \phi_{1} + \partial_{2} \phi_{2}) + W - \partial_{t}^{2} w = 0 \\ &3a_{s}^{2} \varepsilon (\partial_{2} v_{2} + \varepsilon w - V) + W + c (\partial_{1} \phi_{1} + \partial_{2} \phi_{2}) + \frac{1}{2} \partial_{t}^{2} w + \frac{1}{16} \partial_{t}^{2} W = 0 \\ &\partial_{1}^{2} v_{1} + a_{s}^{2} \partial_{2}^{2} v_{1} + e \partial_{1} \partial_{2} v_{2} + e \varepsilon \partial_{1} w + c \partial_{1} V + a_{s}^{2} \varepsilon \phi_{1} - \partial_{t}^{2} v_{1} = 0 \\ &\partial_{2}^{2} v_{2} + a_{s}^{2} \partial_{1}^{2} v_{2} + e \partial_{1} \partial_{2} v_{1} + \left( 1 + 2a_{s}^{2} \right) \varepsilon \partial_{2} w + c \partial_{2} V + 2a_{s}^{2} \varepsilon \phi_{2} - \partial_{t}^{2} v_{2} = 0 \\ &a_{s}^{2} \varepsilon (\partial_{2}^{2} w + 3\partial_{2} \phi_{2} - 2W) + 8c (\partial_{1} v_{1} + \partial_{2} v_{2} + \varepsilon w) + 8V + \partial_{t}^{2} V = 0 \\ M_{1} = \partial_{1} \phi_{1} + c (\partial_{2} \phi_{2} + W); \ M_{2} = \partial_{2} \phi_{2} + c (\partial_{1} \phi_{1} + W); \ N = W + c (\partial_{1} \phi_{1} + \partial_{2} \phi_{2}) \\ Q_{1} = \partial_{1} w + \phi_{1}; \ Q_{2} = \partial_{2} w + \phi_{2}; \ K = V + c (\partial_{1} v_{1} + \partial_{2} v_{2} + \varepsilon w); \ e = \frac{1}{2(1 - v)} \\ T_{1} = \partial_{1} v_{1} + c (\partial_{2} v_{2} + \varepsilon w + V); \ T_{2} = \partial_{2} v_{2} + \varepsilon w + c (\partial_{1} v_{1} + V); \ c = \frac{1}{1 - v} \end{split}$$

Для обоих вариантов уравнений остаются в силе асимптотические оценки (5.6.3), принимающие теперь вид:

$$\delta^2 < 1; \quad \delta \sim \max(D^2, \varepsilon), \quad D = \max(\partial_1, \partial_2, \partial_1)$$
 (7.1.4)

Таким образом, для цилиндрической оболочки достаточно проверять скорости изменения напряженно-деформированного состояния по пространственным координатам и времени и один геометрический параметр.

В случае осевой симметрии  $(\partial_2 = 0)$  уравнения (7.1.2) распадутся на две независимые подсистемы:

$$\partial_{1}M_{1} - 8a_{s}^{2}Q_{1} - \partial_{t}^{2}\phi_{1} = 0; \quad a_{s}^{2}\partial_{1}Q_{1} + N - \partial_{t}^{2}w = 0$$

$$(7.1.5)$$

$$\frac{3}{2}\varepsilon(T_{2} - K) + N + \frac{1}{2}\partial_{t}^{2}w + \frac{1}{16}\partial_{t}^{2}W = 0; \quad \partial_{1}T_{1} + a_{s}^{2}\varepsilon Q_{1} - \partial_{t}^{2}v_{1} = 0$$

$$\varepsilon(M_{2} - N) + 8K + \partial_{t}^{2}V = 0; \quad bW = N - \nu(M_{1} + M_{2}); \quad b\partial_{1}\phi_{1} = M_{1} - \nu(M_{2} + N)$$

$$0 = M_{2} - \nu(M_{1} + N); \quad Q_{1} = \partial_{1}w + \phi_{1}; \quad b\partial_{1}v_{1} = T_{1} - \nu(T_{2} + K)$$

$$b\varepsilon w = T_{2} - \nu(T_{1} + K); \quad bV = K - \nu(T_{1} + T_{2})$$

$$\partial_{1}H - 8a_{s}^{2}Q_{2} - \partial_{t}^{2}\phi_{2} = 0; \quad \partial_{1}S + 2a_{s}^{2}\varepsilon Q_{2} - \partial_{t}^{2}v_{2} = 0$$

$$H = a_{s}^{2}\partial_{1}\phi_{2}; \quad Q_{2} = \phi_{2}; \quad S = a_{s}^{2}\partial_{1}v_{2}$$

Уравнения (7.1.5) описывают распространение изгибных, сдвиговых и продольных волн; уравнения (7.1.6) – крутильных и поперечных волн.

В дальнейшем будем рассматривать только уравнения (7.1.5). Преобразуем эти уравнения к форме уравнений в перемещениях:

$$\partial_{1}^{2} \phi_{1} - 8a_{s}^{2} (\partial_{1} w + \phi_{1}) + c\partial_{1} W - \partial_{t}^{2} \phi_{1} = 0$$

$$a_{s}^{2} \partial_{1}^{2} w + e\partial_{1} \phi_{1} + W - \partial_{t}^{2} w = 0$$

$$3a_{s}^{2} \varepsilon (\varepsilon w - V) + W + c\partial_{1} \phi_{1} + \frac{1}{2} \partial_{t}^{2} w + \frac{1}{16} \partial_{t}^{2} W = 0$$

$$\partial_{1}^{2} v_{1} + e\varepsilon \partial_{1} w + c\partial_{1} V + a_{s}^{2} \varepsilon \phi_{1} - \partial_{t}^{2} v_{1} = 0$$

$$-2a_{s}^{2} \varepsilon W + 8c(\partial_{1} v_{1} + \varepsilon w) + 8V + \partial_{t}^{2} V = 0$$

$$M_{1} = \partial_{1} \phi_{1} + cW; \quad M_{2} = c(\partial_{1} \phi_{1} + W); \quad N = W + c\partial_{1} \phi_{1}; \quad Q_{1} = \partial_{1} w + \phi_{1}$$

$$T_{1} = \partial_{1} v_{1} + c(\varepsilon w + V); \quad T_{2} = \varepsilon w + c(\partial_{1} v_{1} + V); \quad K = V + c(\partial_{1} v_{1} + \varepsilon w)$$

$$(7.1.7)$$
Выбор одной из двух форм уравнений (7.1.5) и (7.1.7) будет зависеть от решаемой задачи.

#### 7.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ДЕЙСТВИИ ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННЫХ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА И ПРОДОЛЬНОГО УСИЛИЯ НА ТОРЕЦ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБОЛОЧКИ

Построим процедуру последовательных приближений, используя уравнения (7.1.7) и опираясь на первый вариант прифронтовой асимптотики, приведенный в параграфе 6.2:

$$\begin{aligned} \partial_{1}^{2} \phi_{i} - 8a_{s}^{2} (\partial_{1} w_{i-1} + \phi_{i-1}) + c\partial_{1} W_{i-1} - \partial_{t}^{2} \phi_{i} &= 0 \end{aligned} \tag{7.2.1} \\ a_{s}^{2} \partial_{1}^{2} w_{i} + e\partial_{1} \phi_{i} + W_{i-1} - \partial_{t}^{2} w_{i} &= 0 \end{aligned} \\ 3a_{s}^{2} \varepsilon (\varepsilon w_{i-1} - V_{i-1}) + W_{i-1} + c\partial_{1} \phi_{i} + \frac{1}{2} \partial_{t}^{2} w_{i} + \frac{1}{16} \partial_{t}^{2} W_{i} &= 0 \end{aligned} \\ \partial_{1}^{2} v_{i} + e\varepsilon \partial_{1} w_{i-1} + c\partial_{1} V_{i-1} + a_{s}^{2} \varepsilon \phi_{i-1} - \partial_{t}^{2} v_{i} &= 0 \end{aligned} \\ - 2a_{s}^{2} \varepsilon W_{i-1} + 8c(\partial_{1} v_{i} + \varepsilon w_{i-1}) + 8V_{i-1} + \partial_{t}^{2} V_{i} &= 0 \end{aligned} \\ M_{1i} = \partial_{1} \phi_{i} + cW_{i-1}; \ M_{2i} = c(\partial_{1} \phi_{i} + W_{i-1}); \ N_{i} = W_{i-1} + c\partial_{1} \phi_{i} \end{aligned} \\ Q_{i} &= \partial_{1} w_{i} + \phi_{i}; \ T_{1i} = \partial_{1} v_{i} + c(\varepsilon w_{i-1} + V_{i-1}); \ T_{2i} = \varepsilon w_{i-1} + c(\partial_{1} v_{i} + V_{i-1}) \end{aligned}$$

Здесь опущен, для простоты, индекс 1 у функций  $\phi_1, \, v_1$  и  $Q_1.$ 

Решение подобных систем уравнений детально описано в главе 4, поэтому здесь оно будет проведено с меньшими подробностями.

Представим выражения для искомых функций в виде:

$$\begin{split} \phi_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \phi_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=2}^{i} \phi_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-1} \quad (7.2.2) \\ M_{1i} &= \sum_{j=1}^{i} M_{1i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-2} + \sum_{j=2}^{i} M_{1i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-2} \\ v_{i} &= \sum_{j=1}^{i} v_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=2}^{i} v_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-1} \\ T_{1i} &= \sum_{j=1}^{i} T_{1i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-2} + \sum_{j=2}^{i} T_{1i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j-2} \\ V_{i} &= \sum_{j=1}^{i} V_{i,j}^{1} x^{i-j} (t-x)^{a+i+j} + \sum_{j=2}^{i} V_{i,j}^{2} x^{i-j} (a_{s}t-x)^{a+i+j} \end{split}$$

$$\begin{split} \mathbf{w}_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \mathbf{w}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (t-\mathbf{x})^{\mathsf{a}+i+j} + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{w}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s}t-\mathbf{x})^{\mathsf{a}+i+j} \\ \mathbf{W}_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \mathbf{W}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (t-\mathbf{x})^{\mathsf{a}+i+j} + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{W}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s}t-\mathbf{x})^{\mathsf{a}+i+j} \\ \mathbf{Q}_{i} &= \sum_{j=1}^{i} \mathbf{Q}_{i,j}^{1} \mathbf{x}^{i-j} (t-\mathbf{x})^{\mathsf{a}+i+j-1} + \sum_{j=1}^{i} \mathbf{Q}_{i,j}^{2} \mathbf{x}^{i-j} (a_{s}t-\mathbf{x})^{\mathsf{a}+i+j-1} \end{split}$$

(функции  $M_{2i}, T_{2i}, N_i$  и  $K_i$ , для краткости, рассматривать не будем).

Подставляя (7.2.2) в (7.2.1) и приводя подобные по одинаковым степеням х, t-х и *a*<sub>s</sub>t-х, получаем рекуррентные формулы для отыскания коэффициентов сумм (7.2.2):

$$\begin{split} \phi_{i,j}^{1} &= \frac{1}{2(i-j)(a+i+j-1)} \left\{ (i-j+1)(i-j)\phi_{i,j-1}^{1} - 8a_{s}^{2} \left[ (i-j)w_{i-1,j-1}^{1} - (7.2.3) - (a+i+j-1)w_{i-1,j}^{1} + \phi_{i-1,j}^{1} \right] + c \left[ (i-j)W_{i-1,j-1}^{1} - (a+i+j-1)W_{i-1,j}^{1} \right] \right\} \\ v_{i,j}^{1} &= \frac{1}{2(i-j)(a+i+j-1)} \left\{ (i-j+1)(i-j)v_{i,j-1}^{1} + e \epsilon \left[ (i-j)w_{i-1,j-1}^{1} - (a+i+j-1)w_{i-1,j}^{1} \right] + c \left[ (i-j)V_{i-1,j-1}^{1} - (a+i+j-1)V_{i-1,j} \right] + a_{s}^{2} \epsilon \phi_{i-1,j}^{1} \right\} \\ &= (j=1,\dots,i-1) \end{split}$$

$$w_{i,j}^{1} = \frac{1}{(1-a_{s}^{2})(a+i+j)(a+i+j-1)} \left\{ a_{s}^{2} \left[ (i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^{1} - 2(i-j+1)(a+i+j-1)w_{i,j-1}^{1} \right] + e \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^{1} - (a+i+j-1)\phi_{i,j}^{1} \right] + W_{i-1,j-1}^{1} \right\}$$

$$W_{i,j}^{1} = \frac{16}{(a+i+j)(a+i+j-1)} \left\{ 3a_{s}^{2} \varepsilon \left( V_{i-1,j-1}^{1} - \varepsilon w_{i-1,j-1}^{1} \right) - W_{i-1,j-1}^{1} + c \left[ (a+i+j-1)\phi_{i,j}^{1} - (i-j+1)\phi_{i,j-1}^{1} \right] \right\} - 8w_{i,j}^{1}$$

$$\begin{split} V_{i,j}^{1} &= \frac{1}{(a+i+j)(a+i+j-1)} \left\{ 2a_{s}^{2} \varepsilon W_{i-1,j-1}^{1} - 8V_{i-1,j-1}^{1} - 8c \Big[ (i-j+1)v_{i,j-1}^{1} - (a+i+j-1)v_{i,j-1}^{1} - 8v_{i-1,j-1}^{1} - 8c \Big[ (i-j+1)v_{i,j-1}^{1} - (a+i+j-1)v_{i,j}^{1} + cW_{i-1,j-1}^{1} - (a+i+j-1)v_{i,j}^{1} + cW_{i-1,j-1}^{1} - (a+i+j-1)v_{i,j}^{1} + cW_{i-1,j-1}^{1} - (a+i+j-1)v_{i,j}^{1} + cV_{i-1,j-1}^{1} - (a+i+j-1)v_{i,j}^{1} + c(\varepsilon w_{i-1,j-1}^{1} + V_{i-1,j-1}^{1}) (j=1,...,i) \\ Q_{i,j+1}^{2} &= \frac{1}{(1-a_{s}^{2})(a+i+j)(a+i+j-1)} \left\{ 2(i-j)(a+i+j-1)\varphi_{i,j}^{2} - (i-j+1)(i-j)\varphi_{i,j-1}^{2} + 8a_{s}^{2} \Big[ (i-j)w_{i-1,j-1}^{2} - (a+i+j-1)w_{i-1,j-1}^{2} - (a+i+j-1)W_{i-1,j-1}^{2} + (a+i+j-1)w_{i-1,j-1}^{2} - c \Big[ (i-j)W_{i-1,j-1}^{2} - (a+i+j-1)W_{i-1,j-1}^{2} \Big] \right\} \end{split}$$

$$\begin{split} v_{i,j+1}^{2} &= \frac{1}{\left(1 - a_{s}^{2}\right)\left(a + i + j\right)\left(a + i + j - 1\right)} \left\{2(i - j)(a + i + j - 1)v_{i,j}^{2} - (i - j + 1)(i - j)v_{i,j-1}^{2} - e\epsilon\left[(i - j)w_{i-1,j-1}^{2} - (a + i + j - 1)w_{i-1,j}^{2}\right] - a_{s}^{2}\epsilon\phi_{i-1,j}^{2}\right\} \\ M_{1i,j+1}^{2} &= (i - j)\phi_{i,j}^{2} - (a + i + j)\phi_{i,j+1}^{2} + cW_{i-1,j}^{2} \\ T_{1i,j+1}^{2} &= (i - j)v_{i,j}^{2} - (a + i + j)v_{i,j+1}^{2} + c\left(\epsilon w_{i-1,j}^{2} + V_{i-1,j}^{2}\right) \\ V_{i,j+1}^{2} &= \frac{1}{a_{s}^{2}(a + i + j + 1)(a + i + j)} \left\{2a_{s}^{2}\epsilon W_{i-1,j}^{2} - 8c\left[(i - j)v_{i,j}^{2} - (a + i + j)v_{i,j+1}^{2} + \epsilon w_{i-1,j}^{2}\right] - 8V_{i-1,j}^{2}\right\} \\ w_{i,j}^{2} &= \frac{1}{2a_{s}^{2}(i - j)(a + i + j)} \left\{a_{s}^{2}(i - j + 1)(i - j)w_{i,j-1}^{2} + e\left[(i - j)\phi_{i,j}^{2} - (a + i + j)\phi_{i,j+1}^{2}\right] + W_{i-1,j}^{2}\right\} \quad (j = 1, \dots, i - 1) \\ W_{i,j}^{2} &= \frac{16}{a_{s}^{2}(a + i + j)(a + i + j - 1)} \left\{3a_{s}^{2}\epsilon\left(V_{i-1,j-1}^{2} - \epsilon w_{i-1,j-1}^{2}\right) - W_{i-1,j-1}^{2} - c\left[(i - j + 1)\phi_{i,j-1}^{2} - (a + i + j)-1)\phi_{i,j}^{2}\right]\right\} - 8w_{i,j}^{2} \end{split}$$

Из этих формул не находятся коэффициенты  $\phi_{i,i}^1, v_{i,i}^1$  и  $w_{i,i}^2$  Для их отыскания используем граничные условия. Пусть при x=0, то есть на торце полубесконечной (x≥0) оболочки задан изгибающий момент:

$$M_{1}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( M_{1i,i}^{1} + M_{1i,i}^{2} a_{s}^{a+2i\cdot2} \right) t^{a+2i\cdot2} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i} t^{a+2i\cdot2}$$
(7.2.4)

Отсюда:

$$M_{1i,i}^{1} = f_{i} - M_{1i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-2} \quad (i = 1, 2, ...)$$

$$W_{2} (7, 2, 3) \text{ HOLYHARM:}$$
(7.2.5)

Из (7.2.3) получаем:

$$\varphi_{i,i}^{1} = \frac{1}{a + 2i - 1} \left( \varphi_{i,i-1}^{1} + cW_{i-1,i-1}^{1} - M_{1i,i}^{1} \right) \quad (i = 1, 2, ...)$$
(7.2.6)

В случае внезапно приложенного постоянного момента  $M_1(0,t) = 1$  будет  $a = 0, f_1 = 1, f_i = 0$  (i > 1). При нулевом моменте будет и  $f_1 = 0$ .

При заданном на торце оболочки продольном усилии:

$$T_{1}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( T_{1i,i}^{1} + T_{1i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-2} \right) t^{a+2i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} q_{i} t^{a+2i-2}$$
(7.2.7)

получаем:

$$T_{li,i}^{1} = q_{i} - T_{li,i}^{2} a_{s}^{a+2i-2}$$

$$v_{i,i}^{1} = \frac{1}{a+2i-1} \left[ v_{i,i-1}^{1} + c \left( \varepsilon w_{i-1,i-1}^{1} + V_{i-1,i-1}^{1} \right) - T_{li,i}^{1} \right] \quad (i = 1, 2, ...)$$
(7.2.8)

Внезапно приложенной постоянной силе  $T_1(0,t) = 1$  соответствует **a** = 0,  $q_1 = 1$ ,  $q_i = 0$  (i > 1). При отсутствии продольной нагрузки будет и  $q_1 = 0$ .

Таким образом, полученное решение может соответствовать приложенной нагрузке как вида изгибающего момента, так и вида продольной силы. Могут действовать обе нагрузки одновременно или одна из них.

Если действует только продольное усилие, то вместо нулевого изгибающего момента можно задать нулевую угловую скорость  $\partial_t \varphi(0,t) = 0$ , получая:

$$\varphi_{i,i}^{1} = -\varphi_{i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-1}$$
 (i = 1,2,...) (7.2.9)

Если приложить только изгибающий момент, то вместо нулевого продольного усилия можно задать нулевую продольную скорость  $\partial_t v(0,t) = 0$ , получая:

$$\mathbf{v}_{i,i}^{1} = -\mathbf{v}_{i,i}^{2} a_{s}^{\mathbf{a}+2i-1}$$
 (i = 1,2,...) (7.2.10)

Кроме этих условий следует еще задать либо перерезывающую силу:

$$Q(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( Q_{i,i}^{1} + Q_{i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-1} \right) t^{a+2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} g_{i} t^{a+2i-1},$$
(7.2.11)

что дает:

$$Q_{i,i}^{2} = (g_{i} - Q_{i,i}^{1})a_{s}^{1-2i-a}$$

$$w_{i,i}^{2} = \frac{1}{a+2i}(w_{i,i-1}^{2} + \phi_{i,i}^{2} - Q_{i,i}^{2}) \quad (i = 1, 2, ...),$$
(7.2.12)

либо скорость прогиба:

$$\partial_{t} \mathbf{w}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{a} + 2i) \Big( \mathbf{w}_{i,i}^{1} + \mathbf{w}_{i,i}^{2} a_{s}^{\mathbf{a}+2i} \Big) t^{\mathbf{a}+2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} g_{i} t^{\mathbf{a}+2i-1}, \quad (7.2.13)$$

получая:

$$w_{i,i}^2 = \left(\frac{g_i}{a+2i} - w_{i,i}^1\right) a_s^{-2i-a} \quad (i = 1, 2, ...)$$
 (7.2.14)

При нулевой перерезывающей силе или скорости прогиба будет  $g_i = 0$   $(i \ge 1)$ .

Полученное решение, в принципе, охватывает всю возмущенную зону 0≤х≤t. Однако, как и в аналогичных случаях для пластин, фактически его применение ограничено началом движения или, при больших значениях времени, прифронтовыми зонами.

Прифронтовые зоны более подробно будут изучены ниже. Однако заранее можно сказать, в соответствии с результатами, полученными в параграфе 6.3, что они будут мало отличаться от аналогичных результатов для пластины.

В то же время приграничные зоны в данном случае будут иметь принципиальные отличия от таких же зон для пластин. Этот вопрос также будет отдельно исследован ниже.

## 7.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ВНЕЗАПНО ПРИЛОЖЕННОЙ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩЕЙ СИЛЫ НА ТОРЕЦ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБОЛОЧКИ

Построим процедуру последовательных приближений, аналогичную приведенной в предыдущем параграфе, но уже с преобладанием w над  $\phi \sim v$ :

$$\begin{split} & a_s^2 \partial_1^2 w_i + e \partial_1 \phi_{i-1} + W_{i-1} - \partial_t^2 w_i = 0; \ Q_i = \partial_1 w_i + \phi_{i-1} \quad (7.3.1) \\ & 3a_s^2 \epsilon (\epsilon w_{i-1} - V_{i-2}) + W_{i-1} + c \partial_1 \phi_{i-1} + \frac{1}{2} \partial_t^2 w_i + \frac{1}{16} \partial_t^2 W_i = 0 \\ & \partial_1^2 \phi_i - 8a_s^2 (\partial_1 w_i + \phi_{i-1}) + c \partial_1 W_i - \partial_t^2 \phi_i = 0 \\ & \partial_1^2 v_i + e \epsilon \partial_1 w_i + c \partial_1 V_{i-1} + a_s^2 \epsilon \phi_{i-1} - \partial_t^2 V_i = 0 \\ & - 2a_s^2 \epsilon W_i + 8c (\partial_1 v_i + \epsilon w_i) + 8V_{i-1} + \partial_t^2 V_i = 0 \\ & M_{1i} = \partial_1 \phi_i + c W_i; \ T_{1i} = \partial_1 v_i + c (\epsilon w_i + V_{i-1}) \quad (i = 1, 2, ...) \\ Pemenue yabahenuň (7.3.1) ишем в виде: \\ & w_i = \sum_{j=2}^i w_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=1}^i W_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{a+i+j-1} \\ & Q_i = \sum_{j=2}^i Q_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-2} + \sum_{j=1}^i Q_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{a+i+j-2} \\ & \phi_i = \sum_{j=1}^i \phi_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{a+i+j} + \sum_{j=1}^i \phi_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{a+i+j} \\ & v_i = \sum_{j=1}^i v_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{a+i+j} + \sum_{j=1}^i V_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{a+i+j} \\ & V_i = \sum_{j=1}^i V_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{a+i+j} + \sum_{j=1}^i V_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{a+i+j} \\ & V_i = \sum_{j=1}^i V_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=1}^i V_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{a+i+j-1} \\ & T_{1i} = \sum_{j=1}^i T_{1i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{a+i+j-1} + \sum_{j=1}^i T_{1i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{a+i+j-1} (i=1,2,...) \end{split}$$

Коэффициенты сумм (7.3.2) находим из рекуррентных формул:

$$w_{i,j}^{2} = \frac{1}{2a_{s}^{2}(i-j)(a+i+j-1)} \left\{ a_{s}^{2}(i-j+1)(i-j)w_{i,j-1}^{2} + (7.3.3) \right\}$$

$$\begin{split} &+e\Big[(i-j)\varphi_{i-l,j-1}^{2}-(a+i+j-1)\varphi_{i-l,j}^{2}\Big]+W_{i-l,j}^{2}\Big] \quad (j=1,...,i-1) \\ &W_{i,j}^{2}=\frac{16}{a_{i}^{2}(a+i+j-1)(a+i+j-2)} \{3a_{i}^{2}e\Big(V_{i-2,j-2}^{2}-\varepsilon W_{i-1,j-1}^{2}\Big)-W_{i-1,j-1}^{2}-c\Big[(i-j+1)\psi_{i,j-1,j-2}^{2}-(a+i+j-2)\varphi_{i-1,j-1}^{2}\Big]\Big)-8W_{i,j}^{2} \\ &Q_{i,j}^{2}=(i-j+1)W_{i,j-1}^{2}-(a+i+j-1)W_{i,j}^{2}+\varphi_{i-1,j-1}^{2}\Big) \\ &\varphi_{i,j}^{2}=\frac{1}{(1-a_{s}^{2})(a+i+j)(a+i+j-1)} \{2(i-j+1)(a+i+j-1)\varphi_{i,j-1}^{2}-c\Big[(i-j+1)W_{i,j-2}^{2}+8a_{s}^{2}\Big[(i-j+1)W_{i,j-1}^{2}-(a+i+j-1)W_{i,j}^{2}+\varphi_{i-1,j-1}^{2}\Big]-c\Big[(i-j+1)W_{i,j-1}^{2}-(a+i+j-1)W_{i,j}^{2}\Big]\Big\} \\ &V_{i,j}^{2}=\frac{1}{(1-a_{s}^{2})(a+i+j)(a+i+j-1)} \{2(i-j+1)(a+i+j-1)V_{i,j-1}^{2}-c\Big[(i-j+1)W_{i,j-2}^{2}-ce\Big[(i-j+1)W_{i,j-1}^{2}-(a+i+j-1)W_{i,j}^{2}\Big]-c\Big[(i-j+1)V_{i-1,j-2}^{2}-ce\Big[(i-j+1)W_{i,j-1}^{2}-(a+i+j-1)W_{i,j-1}^{2}\Big]-c\Big[(i-j+1)V_{i-1,j-1}^{2}-(a+i+j-1)V_{i,j-1}^{2}-(a+i+j-1)W_{i,j-1}^{2}\Big]-c\Big[(i-j+1)V_{i-1,j-1}^{2}-(a+i+j-1)V_{i,j-1}^{2}-(a+i+j-1)W_{i,j-1}^{2}\Big]-c\Big[(i-j+1)V_{i-1,j-1}^{2}-(a+i+j-1)V_{i,j-1}^{2}-(a+i+j-1)V_{i,j-1}^{2}-(a+i+j)V_{i,j-1}^{2}-(a+i+j)V_{i,j-1}^{2}-c\Big[(i-j+1)V_{i,j-1}^{2}-(a+i+j)V$$

$$T_{li,j}^{1} = (i - j + 1)v_{i,j-1}^{1} - (a + i + j)v_{i,j}^{1} + c\left(\varepsilon w_{i,j}^{1} + V_{i-1,j-1}^{1}\right) \quad (j = 1,...,i)$$

Для отыскания коэффициентов  $w_{i,i}^2, \phi_{i,i}^1, v_{i,i}^1$ , не находимых из (7.3.3), используем граничные условия.

Зададим на торце х=0 оболочки перерезывающую силу:

$$Q(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( Q_{i,i}^{1} + Q_{i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-2} \right) t^{a+2i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} g_{i} t^{a+2i-2},$$
(7.3.4)

получая:

$$Q_{i,i}^{2} = \left(g_{i} - Q_{i,i}^{1}\right) a_{s}^{2-2i-a}$$

$$w_{i,i}^{2} = \frac{1}{a + 2i - 1} \left(w_{i,i-1}^{2} + \phi_{i-1,i-1}^{2} - Q_{i,i}^{2}\right) \quad (i = 1, 2, ...)$$
(7.3.5)

В случае внезапно приложенной постоянной силы будет  $a = 0, g_1 = 1, g_i = 0$  (i > 1).

Зададим также при х=0 либо изгибающий момент:

$$\mathbf{M}_{1}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \mathbf{M}_{1i,i}^{1} + \mathbf{M}_{1i,i}^{2} a_{s}^{\mathbf{a}+2i-1} \right) t^{\mathbf{a}+2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i} t^{\mathbf{a}+2i-1},$$
(7.3.6)

получая:

$$M_{1i,i}^{1} = f_{i} - M_{1i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-1}$$

$$\phi_{i,i}^{1} = \frac{1}{a+2i} \left( \phi_{i,i-1}^{1} + cW_{i,i}^{1} - M_{1i,i}^{1} \right) \quad (i = 1, 2, ...),$$
(7.3.7)

либо угловую скорость:

$$\partial_t \varphi(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{a} + 2i) \Big( \varphi_{i,i}^1 + \varphi_{i,i}^2 a_s^{\mathbf{a}+2i} \Big) t^{\mathbf{a}+2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^{\mathbf{a}+2i-1},$$
(7.3.8)

получая:

$$\varphi_{i,i}^{1} = \frac{f_{i}}{a+2i} - \varphi_{i,i}^{2} a_{s}^{a+2i} \quad (i = 1, 2, ...)$$
(7.3.9)

При нулевых моменте или угловой скорости будет  $f_i = 0$   $(i \ge 1)$ .

Аналогично задаем при х=0 продольное усилие:

$$T_{1}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( T_{1i,i}^{1} + T_{1i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-1} \right) t^{a+2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} q_{i} t^{a+2i-1},$$
(7.3.10)

откуда:

$$T_{1i,i}^{1} = q_{i} - T_{1i,i}^{2} a_{s}^{a+2i-1}$$

$$v_{i,i}^{1} = \frac{1}{a+2i} \left[ v_{i,i-1}^{1} + c \left( \varepsilon w_{i,i}^{1} + V_{i-1,i-1}^{1} \right) - T_{1i,i}^{1} \right] \quad (i = 1, 2, ...),$$
(7.3.11)

либо продольную скорость:

$$\partial_{t} \mathbf{v}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{a} + 2i) \Big( \mathbf{v}_{i,i}^{1} + \mathbf{v}_{i,i}^{2} a_{s}^{\mathbf{a}+2i} \Big) t^{\mathbf{a}+2i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} q_{i} t^{\mathbf{a}+2i-1}, \quad (7.3.12)$$

откуда:

$$v_{i,i}^{1} = \frac{q_{i}}{a+2i} - v_{i,i}^{2} a_{s}^{a+2i}$$
 (i = 1,2,...) (7.3.13)

При нулевой силе или скорости будет  $q_i = 0$   $(i \ge 1)$ .

Полученное решение описывает всю возмущенную зону от границы оболочки до первого фронта, но практически пригодно либо для начала движения, либо, при больших значениях времени, для прифронтовых зон.

Последние будут подробнее изучены ниже и мало отличаются от аналогичных зон для пластины.

Также ниже будет исследована приграничная зона, значительно отличающаяся в данном случае от приграничной зоны для пластины.

#### 7.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИФРОНТОВЫХ ЗОН

Построим для полученных в двух предыдущих параграфах решений асимптотические формулы для прифронтовых зон.

Решение, полученное в параграфе 7.2, интересно тем, что в нем совмещаются два различных напряженно-деформированных состояния равного веса – изгибное и продольное. При этом первые фронты в обоих случаях движутся с одинаковыми безразмерными скоростями, равными единице. Это приводит к определенному взаимодействию решений в прифронтовой зоне.

Поступая так же, как ранее для уравнения Клейна-Гордона и уравнений пластины, удержим в (7.2.2) слагаемые, преобладающие при  $t \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow t$ , то есть слагаемые с *j*=1, получая для зоны вблизи первого фронта:

Отсюда получаем:

$$\phi_{i,1}^{1} = -\frac{4r}{(i-1)(a+i)}\phi_{i-1,1}^{1}; \quad r = 1 + 2c^{2}$$

$$v_{i,1}^{1} = -\frac{4c^{2}}{(i-1)(a+i)}v_{i-1,1}^{1} + \frac{\epsilon}{2(i-1)(a+i)}\phi_{i-1,1}^{1} \quad (i = 2, 3, ...)$$
(7.4.3)

Формулы для изгибных составляющих напряженно-деформированного состояния здесь полностью совпадают с аналогичными формулами для пластины, полученными в параграфе 4.4. Поэтому, естественно, что и окончательные результаты будут теми же:

$$\varphi^{1} \approx \varphi_{1,1}^{1} (t-x)^{a+1} \Lambda_{a+1}(z_{1}); \ M_{1}^{1} \approx M_{11,1}^{1} (t-x)^{a} \Lambda_{a}(z_{1})$$
(7.4.4)  
$$w^{1} \approx w_{1,1}^{1} (t-x)^{a+2} \Lambda_{a+2}(z_{1}); \ Q^{1} \approx Q_{1,1}^{1} (t-x)^{a+1} \Lambda_{a+1}(z_{1}); \ z_{1} = \sqrt{16rx(t-x)}$$

Рассмотрим вторую из рекуррентных формул (7.4.3). В ней совмещаются два различных рекуррентных процесса, поэтому выражение для  $v_{i,1}^1$  будем разыскивать в виде:

$$\mathbf{v}_{i,1}^{1} = \frac{\left(-4c^{2}\right)^{i-1}\Gamma(\mathbf{a}+2)}{(i-1)!\Gamma(\mathbf{a}+i+1)}\mathbf{A} + \frac{\left(-4r\right)^{i-1}\Gamma(\mathbf{a}+2)}{(i-1)!\Gamma(\mathbf{a}+i+1)}\mathbf{B}; \ \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{v}_{1,1}^{1}$$
(7.4.5)

Подставляя (7.4.5) в (7.4.3) имеем:

$$B = -\frac{\varepsilon(1-\nu)}{8}\phi_{1,1}^{1}; A = v_{1,1}^{1} + \frac{\varepsilon(1-\nu)}{8}\phi_{1,1}^{1}$$
(7.4.6)

Отсюда окончательно получаем:

$$v^{1} \approx \left[ v_{1,1}^{1} + \frac{\varepsilon(1-\nu)}{8} \varphi_{1,1}^{1} \right] (t-x)^{a+1} \Lambda_{a+1}(z) -$$

$$-\frac{\varepsilon(1-\nu)}{8} \varphi_{1,1}^{1} (t-x)^{a+1} \Lambda_{a+1}(z_{1}); \quad z = \sqrt{16c^{2}x(t-x)}$$

$$T^{1} \approx \left[ T_{1,1}^{1} + \frac{\varepsilon(1-\nu)}{8} M_{1,1}^{1} \right] (t-x)^{a} \Lambda_{a}(z) - \frac{\varepsilon(1-\nu)}{8} M_{1,1}^{1} (t-x)^{a} \Lambda_{a}(z_{1})$$
(7.4.7)

Эти выражения показывают, что на продольные компоненты напряженно-деформированного состояния оказывают влияние изгибные компоненты и в прифронтовой зоне смешиваются осцилляции двух различных типов, изученные ранее в главе 4 отдельно для продольных и изгибных волн.

Из граничных условий (7.2.5), (7.2.6) и (7.2.8) следует:

$$\mathbf{M}_{11,1}^{1} = \mathbf{f}_{1}; \ \mathbf{T}_{11,1}^{1} = \mathbf{q}_{1}; \ \boldsymbol{\phi}_{1,1}^{1} = -\frac{\mathbf{f}_{1}}{\mathbf{a}+1}; \ \mathbf{v}_{1,1}^{1} = -\frac{\mathbf{q}_{1}}{\mathbf{a}+1}$$
(7.4.8)

В случае внезапно приложенной постоянной продольной силы и отсутствия на границе изгибающего момента будет:

$$a = 0, q_1 = 1, f_1 = 0, T_{11,1}^1 = 1, v_{1,1}^1 = -1, M_{11,1}^1 = 0, \phi_{1,1}^1 = 0$$

$$T^1 \approx \Lambda_0(z); v^1 \approx -(t - x)\Lambda_1(z)$$
(7.4.9)

Эти результаты в точности совпадают с полученными в параграфе 4.2 для пластины. Для изгибных компонент полученные здесь формулы дают

нулевые результаты. На самом деле эти компоненты присутствуют, но описываются величинами более высоких порядков малости.

В случае внезапно приложенного постоянного изгибающего момента и отсутствия на границе продольного усилия имеем:

$$\mathbf{a} = 0, \ \mathbf{f}_{1} = 1, \ \mathbf{q}_{1} = 0, \ \mathbf{M}_{11,1}^{1} = 1, \ \mathbf{\phi}_{1,1}^{1} = -1, \ \mathbf{T}_{11,1}^{1} = 0, \ \mathbf{v}_{1,1}^{1} = 0$$

$$\mathbf{M}_{1}^{1} \approx \Lambda_{0}(\mathbf{z}_{1}); \ \mathbf{\phi}^{1} \approx -(\mathbf{t} - \mathbf{x})\Lambda_{1}(\mathbf{z}_{1})$$

$$\mathbf{T}_{1}^{1} \approx \frac{\varepsilon(1 - \nu)}{8} [\Lambda_{0}(\mathbf{z}) - \Lambda_{0}(\mathbf{z}_{1})]; \ \mathbf{v}^{1} \approx -\frac{\varepsilon(1 - \nu)}{8} (\mathbf{t} - \mathbf{x}) [\Lambda_{1}(\mathbf{z}) - \Lambda_{1}(\mathbf{z}_{1})]$$

$$(7.4.10)$$

Здесь чисто изгибные компоненты напряженно-деформированного состояния совпадают с аналогичными для пластины; присутствуют, хотя и небольшие по величине, продольные компоненты.

Рассмотрим зону вблизи второго фронта в задаче о действии на торец оболочки внезапно приложенной перерезывающей силы. Эта зона очень мало отличается от аналогичной зоны для пластины. Изгибные компоненты напряженно-деформированного состояния остаются прежними; добавляются второстепенные продольные компоненты:

было предсказано ранее в В целом, как И параграфе 6.3, быстроизменяющиеся прифронтовые зоны во всех случаях мало отличаются от аналогичных зон для пластин. Некоторый интерес здесь составили только проблемы, взаимодействием распространяющихся связанные с с одинаковыми скоростями фронтов продольных и изгибных волн.

## 7.5. ПРИГРАНИЧНАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

При решении плоской задачи о продольно нагруженном слое было показано, что приграничную зону описывают классические уравнения обобщенного плоского напряженного состояния. В случае продольно нагруженной цилиндрической оболочки имеем похожую ситуацию, но теперь для описания приграничной зоны используем безмоментные уравнения оболочки (6.5.3). Для осесимметричной цилиндрической оболочки они принимают вид:

или:

$$a_1^2 \partial_1^2 \mathbf{v} + a_1^2 \mathbf{v} \varepsilon \partial_1 \mathbf{w} - \partial_t^2 \mathbf{v} = 0; \quad a_1^2 \varepsilon^2 \mathbf{w} + a_1^2 \mathbf{v} \varepsilon \partial_1 \mathbf{v} + \partial_t^2 \mathbf{w} = 0$$

$$\mathbf{T}_1 = a_1^2 (\partial_1 \mathbf{v} + \mathbf{v} \varepsilon \mathbf{w}); \quad \mathbf{T}_2 = a_1^2 (\varepsilon \mathbf{w} + \mathbf{v} \partial_1 \mathbf{v})$$
(7.5.2)

 $\partial_1 T_1 - \partial_1^2 v = 0; \ \varepsilon T_2 + \partial_1^2 w = 0; \ T_1 = a_1^2 (\partial_1 v + v \varepsilon w); \ T_2 = a_1^2 (\varepsilon w + v \partial_1 v)$ (7.5.1)

Эти уравнения описывают распространение сравнительно медленно изменяющегося напряженно-деформированного состояния с квазифронтом  $x=a_1t$ . Переход от основного фронта x=t к квазифронту описывается решениями, приведенными в параграфах 7.2 и 7.4, и практически не отличается от аналогичного перехода в случае плоского слоя.

Однако, в отличие от плоского слоя, здесь возникает еще один квазифронт с дополнительной перестройкой напряженно-деформиро-ванного состояния. В самом деле, структура уравнений (7.5.2) совпадает со структурой уравнений (4.2.1), с точностью до значений коэффициентов. При этом роль поперечного перемещения V здесь играет прогиб оболочки w, а роль усилия K – кольцевое усилие  $T_2$ . Но уравнения (4.2.1) описывают перестройку от напряженно-деформированного состояния вблизи фронта x=t к квазифронту x=a\_1t, следовательно, и здесь должна происходить аналогичная перестройка.

Для выявления этой дополнительной перестройки подвергнем уравнения (7.5.2) вновь асимптотическому анализу, такому же, какому подвергались уравнения (4.2.1) в параграфе 4.2.

Начнем со случая медленноизменяющегося напряженно-деформиованного состояния, при котором упрощенные уравнения, строящиеся аналогично случаю 2 из параграфов 4.1 и 4.2, имеют вид:

 $\varepsilon \mathbf{w} = -\mathbf{v}\partial_1 \mathbf{v}; \ \mathbf{T}_2 = \mathbf{0}; \ \mathbf{T}_1 = \mathbf{b}\partial_1 \mathbf{v}; \ \mathbf{b}\partial_1^2 \mathbf{v} - \partial_t^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (7.5.3)

Эти уравнения описывают распространение продольной волны с квазифронтом, скорость которого равна  $a_2 = \sqrt{b}$ . Такая скорость соответствует размерной скорости  $\sqrt{E/\rho}$  или скорости распространения продольной волны в стержне.

Вспомним анализ, проведенный в параграфе 4.2. Там было показано, что вблизи фронта x=t напряженное состояние является принципиально трехмерным, что и дает скорость распространения фронта, соответствующую трехмерным уравнениям теории упругости.

Постепенное уменьшение напряжения  $\sigma_{33}$  приводит к образованию квазифронта x=a<sub>1</sub>t, вблизи которого напряженное состояние является двумерным, то есть напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  (и соответствующие усилия T<sub>1</sub> и T<sub>2</sub>) имеют одинаковый порядок. Уменьшение напряжения  $\sigma_{33}$  связано с самоуравновешенными колебаниями слоя по толщине.

В случае плоского слоя двумерное напряженное состояния сохраняется вплоть до нагруженной границы. Но в замкнутой цилиндрической оболочке вновь возникают самоуравновешенные колебания, на этот раз радиальные колебания всей оболочки в целом. Медленные колебания такого типа, возникающие уже позади второго квазифронта, описываются упрощенными уравнениями, строящимися аналогично случаю 3 из параграфов 4.1 и 4.2 и имеющими вид:

$$a_1^2 \varepsilon^2 \mathbf{w} + \partial_t^2 \mathbf{w} = 0; \ a_1^2 \mathbf{v} \varepsilon \partial_1 \mathbf{w} - \partial_t^2 \mathbf{v} = 0; \ \mathbf{T}_1 = a_1^2 \mathbf{v} \varepsilon \mathbf{w}; \ \mathbf{T}_2 = a_1^2 \varepsilon \mathbf{w}$$
(7.5.4)

Более быстрые радиальные колебания похожего вида, возникающие непосредственно после прохождения первого квазифронта, приводят к уменьшению второго напряжения  $\sigma_{22}$  (усилия  $T_2$ ), в результате чего напряженное состояние становится одномерным, то есть оболочка как бы превращается в стержень. Образуется новый квазифронт  $x=a_2t$ ,

соответствующий уравнениям (7.5.3); вновь возникающее напряженнодеформированное состояние сохраняется уже до самой границы x=0.

В случае действующей на границе внезапно приложенной силы  $T_1 = 1$  решение уравнений (7.5.3) имеет вид:

$$T_{1} = 1; \ v_{1} = -\frac{1}{a_{2}^{2}} (a_{2}t - x) \quad (x \le a_{2}t)$$
(7.5.5)

Переход от квазифронта  $x=a_1t$  к квазифронту  $x=a_2t$  описывается при помощи первого рекуррентного процесса. Представляя искомые функции в виде рядов:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{v}_i; \ \mathbf{T}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{T}_{1i}; \ \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{w}_i$$
(7.5.6)

записываем для членов этих рядов рекуррентную систему уравнений:

$$a_{1}^{2}\partial_{1}^{2}\mathbf{v}_{i} + a_{1}^{2}\nu\epsilon\partial_{1}\mathbf{w}_{i-1} - \partial_{t}^{2}\mathbf{v}_{i} = 0$$

$$a_{1}^{2}\epsilon^{2}\mathbf{w}_{i-1} + a_{1}^{2}\nu\epsilon\partial_{1}\mathbf{v}_{i} + \partial_{t}^{2}\mathbf{w}_{i} = 0; \ \mathbf{T}_{1i} = a_{1}^{2}(\partial_{1}\mathbf{v}_{i} + \nu\epsilon\mathbf{w}_{i-1}) \quad (i = 1, 2, ...)$$
(7.5.7)

Решение этих уравнений ищем в виде:

$$v_{i} = \sum_{j=1}^{i} v_{i,j} x^{i-j} (a_{1}t - x)^{a+i+j-1} \quad (i = 1, 2, ...)$$

$$w_{i} = \sum_{j=1}^{i} w_{i,j} x^{i-j} (a_{1}t - x)^{a+i+j}; T_{1i} = \sum_{j=1}^{i} T_{1i,j} x^{i-j} (a_{1}t - x)^{a+i+j-2}$$
(7.5.8)

Подставляя (7.5.8) в (7.5.7) и приводя подобные по одинаковым степеням х и  $a_1$ t-х, получаем рекуррентные формулы для коэффициентов сумм (7.5.8):

$$v_{i,j} = \frac{1}{2(i-j)(a+i+j-1)} \{ (i-j+1)(i-j)v_{i,j-1} + (7.5.9) + v\epsilon [(i-j)w_{i-1,j-1} - (a+i+j-1)w_{i-1,j}] \} \quad (j=1,...,i-1)$$

$$w_{i,j} = \frac{1}{(a+i+j)(a+i+j-1)} \{ v\epsilon [a+i+j-1)v_{i,j} - (i-j+1)v_{i-1,j-1}] - \epsilon^2 w_{i-1,j-1} \}$$

$$T_{1i,j} = a_1^2 [(i-j+1)v_{i,j-1} - (a+i+j-1)v_{i,j} + v\epsilon w_{i-1,j-1}] \quad (j=1,...,i)$$

Из этих формул не находятся коэффициенты вида v<sub>i,i</sub>; для их нахождения используем граничное условие при x=0:

$$T_{1}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_{1i,i} a_{1}^{a+2i-2} t^{a+2i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} q_{i} t^{a+2i-2}$$
(7.5.10)

Отсюда:

$$T_{1i,i} = q_i a_1^{2-2i-a} \quad (i = 1, 2, ...),$$
(7.5.11)

а из (7.5.9) имеем:

$$\mathbf{v}_{i,i} = \frac{1}{\mathbf{a} + 2i - 1} \left( \mathbf{v}_{i,i-1} + \mathbf{v} \varepsilon \mathbf{w}_{i-1,i-1} - \frac{1}{a_1^2} \mathbf{T}_{1i,i} \right) \quad (i = 1, 2, ...)$$
(7.5.12)

В случае внезапно приложенной постоянной силы  $T_1=1$  будет a=0,  $q_1 = 1 \ \text{i} \ q_i = 0 \ (i > 1).$ 

Найдем асимптотические выражения для прифронтовой 30НЫ. Удерживая в (7.5.8) только слагаемые с j=1, преобладающие вблизи фронта, получаем:

$$\mathbf{v} \approx (a_1 \mathbf{t} - \mathbf{x})^{\mathbf{a}+1} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{v}_{i,1} [\mathbf{x} (a_1 \mathbf{t} - \mathbf{x})]^{i-1}$$
 (7.5.13)

$$w \approx (a_1 t - x)^{a+2} \sum_{i=1}^{\infty} w_{i,1} [x(a_1 t - x)]^{i-1}; \ T_1 \approx (a_1 t - x)^a \sum_{i=1}^{\infty} T_{1i,1} [x(a_1 t - x)]^{i-1}$$

Из (7.5.9) имеем:

$$v_{i,1} = -\frac{v\epsilon}{2(i-1)} w_{i-1,1}; \ w_{i,1} = \frac{v\epsilon}{a+i+1} v_{i,1}; \ T_{1i,1} = -a_1^2 (a+i) v_{i,1} \quad (i = 1, 2, ...) \quad (7.5.14)$$
  
Отсюда:

$$\mathbf{v}_{i,1} = -\frac{(\mathbf{v}\varepsilon)^2}{2(i-1)(\mathbf{a}+i)} \mathbf{v}_{i-1,1} \quad (i=2,3,...)$$
(7.5.15)

И:

$$v \approx v_{1,1} (a_1 t - x)^{a+1} \Lambda_{a+1}(y); \quad y = \sqrt{2(v\epsilon)^2 x (a_1 t - x)}$$

$$T_1 \approx T_{11,1} (a_1 t - x)^a \Lambda_a(y); \quad w \approx w_{1,1} (a_1 t - x)^{a+2} \Lambda_{a+2}(y)$$

$$T_{11,1} = q_1; \quad v_{1,1} = -\frac{q_1}{a_1^2(a+1)}; \quad w_{1,1} = -\frac{v\epsilon q_1}{a_1^2(a+1)(a+2)}$$
(7.5.16)

В случае внезапно приложенной постоянной силы T<sub>1</sub>(0,t)=1 будет  $a = 0, q_1 = 1$ и:

$$T_1 \approx \Lambda_0(y); \ v \approx -\frac{1}{a_1^2} (a_1 t - x) \Lambda_1(y); \ w \approx -\frac{v\varepsilon}{2a_1^2} (a_1 t - x)^2 \Lambda_2(y)$$
 (7.5.17)

Эти результаты показывают, что вблизи квазифронта  $x=a_1t$  вновь образуется осциллирующая прифронтовая зона, но с частотой осцилляций, значительно меньшей, чем вблизи основного фронта x=t (что следует из выражения для у (7.5.16)).

рисунках 7.1, 7.2 приведены графики Τ<sub>1</sub>, Ha для усилия иллюстрирующие полученные результаты (v=0.3, ε=0.1). Для зоны вблизи основного фронта x=t использована асимптотическая формула (7.4.9); далее показана перестройка от квазифронта  $x=a_1t$  к квазифронту  $x=a_2t$ . Видно, как быстроизменяющаяся зона вблизи первого фронта сменяется значительно более медленно изменяющейся зоной вблизи квазифронта  $x=a_1t$ , а затем решение стремится к постоянному значению (7.5.5) за квазифронтом  $x=a_2t$ .

Полученные результаты достаточно интересны сами ПО себе, двухступенчатый перехода иллюстрируя процесс ОТ трехмерного напряженного состояния к одномерному и еще раз показывают роль самоуравновешенных колебаний в образовании квазифронтов.



Рис. 7.1. Эволюция продольного усилия  $T_1$  с двумя квазифронтами;  $\epsilon{=}0.1$ 



Рис. 7.2. Прифронтовая зона с двумя квазифронтами для продольного усилия  $T_1$ .  $\varepsilon\!=\!0.1$ 

# 7.6. ПРИГРАНИЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ СЛУЧАЕВ ИЗГИБНЫХ НАГРУЗОК

Перейдем к задаче о действии на торец оболочки изгибающего момента и перерезывающей силы. Эти нагрузки для оболочки являются самоуравновешенными, поэтому, естественно, что роль приграничной

асимптотики в обоих случаях играет статика. Однако, на самом деле, вопрос является несколько более сложным; как и в случае продольной нагрузки, происходит процесс двойной перестройки.

Рассмотрим уравнения (6.6.3), которые в случае цилиндрической оболочки принимают вид:

$$\varphi = -\partial_1 \mathbf{w}; \ \mathbf{M}_1 = a_1^2 \partial_1 \varphi; \ \mathbf{Q} = \frac{1}{8a_s^2} \partial_1 \mathbf{M}_1; \ a_s^2 \partial_1 \mathbf{Q} - \frac{3}{2} \mathbf{b} \varepsilon^2 \mathbf{w} - \frac{3}{2} \partial_t^2 \mathbf{w} = 0 \quad (7.6.1)$$

или:

$$\partial_{1}^{4} \mathbf{w} + \frac{12b\epsilon^{2}}{a_{1}^{2}} \mathbf{w} + \frac{12}{a_{1}^{2}} \partial_{t}^{2} \mathbf{w} = 0$$

$$\varphi = -\partial_{1} \mathbf{w}; \ \mathbf{M}_{1} = -a_{1}^{2} \partial_{1}^{2} \mathbf{w}; \ \mathbf{Q} = -\frac{a_{1}^{2}}{8a_{s}^{2}} \partial_{1}^{3} \mathbf{w}$$
(7.6.2)

Эти уравнения, в соответствии со способом их получения, отвечают медленным изменениям по х и t, следовательно, могут играть роль медленноизменяющейся асимптотики приграничного типа. Рассмотрим подробнее первое уравнение (7.6.2). Оно содержит три слагаемых, веса которых определяются величинами  $\partial_1$ ,  $\partial_t$  и  $\varepsilon$ . Не составляет никакого труда провести и в этом случае формальный асимптотический анализ, подобный проведенному в предыдущих случаях.

Прибегнем, однако, в этом случае к неформальному рассмотрению. Уравнения (7.6.1) и (7.6.2) отличаются от классических уравнений изгиба пластины (4.6.2.6) только наличием слагаемого с  $\varepsilon^2$ . Решения, полученные для пластины в параграфе 4.6, являются быстроизменяющимися по х и t в начале движения; с ростом времени быстроизменяющаяся зона удаляется от границы х=0. Следовательно, в начале движения, а также в дальнейшем достаточно далеко от границы, в первом уравнении (7.6.2) преобладают первый и третий члены; отбрасывая второй член, получаем классические уравнения изгиба пластины.

Учитывая, что для пластины классические уравнения давали решение, удовлетворительно описывающее возмущенную область в зоне от границы до второго фронта, можно считать, что для оболочки то же решение справедливо в этой зоне для начала движения, а для больших значений времени оно описывает более узкую зону, примыкающую сзади ко второму фронту.

С ростом времени величины  $\partial_1$  и  $\partial_t$  уменьшаются, причем вблизи границы оператор  $\partial_t$  уменьшается быстрее, чем  $\partial_1$ . В итоге в этой зоне решающую роль в первом уравнении (7.6.2) приобретают первое и второе слагаемое и мы приходим к статическим уравнениям:

$$\partial_1^4 \mathbf{w} + 4\omega^4 \mathbf{w} = 0; \quad \omega^4 = \frac{3b\epsilon^2}{a_1^2}$$
  
 $\phi = -\partial_1 \mathbf{w}; \quad \mathbf{M}_1 = -a_1^2 \partial_1^2 \mathbf{w}; \quad \mathbf{Q} = -\frac{a_1^2}{8a_s^2} \partial_1^3 \mathbf{w}$ 
  
(7.6.3)

Это уже обыкновенные дифференциальные уравнения, линейные, с постоянными коэффициентами. Разыскиваем решение первого уравнения (7.6.3) в виде:

$$w = De^{kx}; k^4 + 4\omega^4 = 0$$
 (7.6.4)

Решение характеристического уравнения будет:

$$\mathbf{k} = \pm \omega (1 + \mathbf{i}) \tag{7.6.5}$$

Выбирая из четырех корней два с отрицательными действительными частями, соответствующими убывающему с удалением от торца x=0 оболочки решению, окончательно получаем:

$$w = e^{-\omega x} (D_1 \cos \omega x + D_2 \sin \omega x)$$
(7.6.6)  
Для остальных искомых функций, в соответствии с (7.6.3), имеем:  

$$\varphi = \omega e^{-\omega x} [(D_1 - D_2) \cos \omega x + (D_1 + D_2) \sin \omega x]$$
(7.6.7)  

$$M_1 = 2a_1^2 \omega^2 e^{-\omega x} (D_2 \cos \omega x - D_1 \sin \omega x)$$
  

$$Q = \frac{a_1^2 \omega^3}{4a_s^2} e^{-\omega x} [(D_1 - D_2) \sin \omega x - (D_1 + D_2) \cos \omega x]$$

Рассмотрим три варианта граничных условий: 1) При x = 0  $M_1 = M_0$ ,  $Q = Q_0$ . Отсюда:

$$M_{0} = 2a_{1}^{2}\omega^{2}D_{2}; \ Q_{0} = -\frac{a_{1}^{2}\omega^{3}}{4a_{s}^{2}}(D_{1} + D_{2})$$
$$D_{2} = \frac{M_{0}}{2a_{1}^{2}\omega^{2}}; \ D_{1} = -D_{2} - \frac{4a_{s}^{2}}{a_{1}^{2}\omega^{3}}Q_{0}$$
(7.6.8)

2) При 
$$x = 0$$
  $M_1 = M_0$ ,  $w = 0$ :  
 $D_1 = 0$ ;  $D_2 = \frac{M_0}{2\pi^2 w^2}$ 
(7.6.9)

3) При x = 0 Q = Q<sub>0</sub>, 
$$\varphi = 0$$
:  
 $Q_0 = -\frac{a_1^2 \omega^3}{4a_s^2} (D_1 + D_2); D_1 - D_2 = 0$   
 $D_1 = D_2 = -\frac{2a_s^2}{a_1^2 \omega^3} Q_0$ 
(7.6.10)

Полученное решение пригодно только для сравнительно тонких оболочек, для которых справедливо соотношение є<<1, поскольку только в этом случае справедливы уравнения (6.6.3).

Для более толстых оболочек приведенные выше рассуждения остаются в силе, но уже требуется решать статические уравнения, непосредственно получаемые из (7.1.7) при  $\partial_t = 0$ :

$$\partial_{1}^{2} \varphi - 8a_{s}^{2} (\partial_{1} w + \varphi) + c\partial_{1} W = 0; \quad a_{s}^{2} \partial_{1}^{2} w + e\partial_{1} \varphi + W = 0 \quad (7.6.11)$$

$$3a_{s}^{2} \varepsilon (\varepsilon w - V) + W + c\partial_{1} \varphi = 0; \quad \partial_{1}^{2} v + e\varepsilon \partial_{1} w + c\partial_{1} V + a_{s}^{2} \varepsilon \varphi = 0$$

$$-a_{s}^{2} \varepsilon W + 4c (\partial_{1} v + \varepsilon w) + 4V = 0; \quad M_{1} = \partial_{1} \varphi + cW; \quad Q = \partial_{1} w + \varphi; \quad T_{1} = \partial_{1} v + c (\varepsilon w + V)$$

Из третьего и пятого из этих уравнений находим:  

$$W = -W_{\phi}\partial_{1}\phi - W_{v}\varepsilon\partial_{1}v - W_{w}\varepsilon^{2}w; V = -V_{\phi}\varepsilon\partial_{1}\phi - V_{v}\partial_{1}v - V_{w}\varepsilonw$$
(7.6.12)  

$$W_{\phi} = \frac{4c}{F_{1}}; W_{v} = \frac{12ca_{s}^{2}}{F_{1}}; W_{w} = \frac{12a_{s}^{2}(1+c)}{F_{1}}; V_{\phi} = \frac{a_{s}^{2}c}{F_{1}}; V_{v} = W_{\phi}; V_{w} = \frac{4c+3a_{s}^{4}\varepsilon^{2}}{F_{1}}$$

$$F_{1} = 4 - 3a_{s}^{4}\varepsilon^{2}$$
Исключая W и V из остальных уравнений имеем:  

$$(1 - cW_{\phi})\partial_{1}^{2}\phi - cW_{v}\varepsilon\partial_{1}^{2}v - (8a_{s}^{2} + cW_{w}\varepsilon^{2})\partial_{1}w - 8a_{s}^{2}\phi = 0$$
(7.6.13)  

$$a_{s}^{2}\partial_{1}^{2}w + (e - W_{\phi})\partial_{1}\phi - W_{v}\varepsilon\partial_{1}v - W_{w}\varepsilon^{2}w = 0$$
(1 - cV<sub>v</sub>) $\partial_{1}^{2}v - cV_{\phi}\varepsilon\partial_{1}^{2}\phi + (e - cV_{w})\varepsilon\partial_{1}w + a_{s}^{2}\varepsilon\phi = 0$ 

$$M_{1} = (1 - cW_{\phi})\partial_{1}\phi - cW_{v}\varepsilon\partial_{1}v - cW_{w}\varepsilon^{2}w; Q = \partial_{1}w + \phi$$

$$T_{1} = (1 - cV_{v})\partial_{1}v - cV_{\phi}\varepsilon\partial_{1}\phi + c(1 - V_{w})\varepsilonw$$
Исключая отсюда также v окончательно получаем:  

$$a_{11}\partial_{1}^{2}\phi - a_{12}\phi - a_{13}\partial_{1}^{3}w - a_{12}\partial_{1}w = 0$$
(7.6.14)  

$$a_{21}\partial_{1}^{2}\phi + a_{22}\varepsilon^{2}\phi + a_{23}\partial_{1}^{3}w + a_{24}\varepsilon^{2}\partial_{1}w = 0$$

$$M_{1} = a_{11}\partial_{1}\phi - a_{13}\partial_{1}^{2}w; Q = \partial_{1}w + \phi$$

$$a_{11} = 1 - ce; a_{12} = 8a_{s}^{2}; a_{13} = ca_{s}^{2}; a_{21} = (e - W_{\phi})(1 - cV_{v}) - cV_{\phi}W_{v}\varepsilon^{2}$$

$$a_{22} = W_{v}a_{s}^{2}; a_{23} = a_{s}^{2}(1 - cV_{v}); a_{24} = (e - cV_{w})W_{v} - (1 - cV_{v})W_{w}$$
Ищем решение этих уравнений в виде:  

$$\phi = Ee^{kx}; w = De^{kx}$$
(7.6.15)

Подставляя (7.6.15) в (7.6.14) приходим к характеристическому уравнению:

$$b_{1}k^{4} + b_{2}k^{2} + b_{3} = 0$$

$$b_{1} = a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13}; \quad b_{2} = a_{21}a_{12} - a_{12}a_{23} + (a_{11}a_{24} + a_{22}a_{13})\epsilon^{2}$$

$$b_{3} = (a_{22}a_{12} - a_{12}a_{24})\epsilon^{2}$$
(7.6.16)

Решая характеристическое уравнение, учтем, что его корни не могут сильно отличаться от корней уравнения (7.6.4), следовательно, дискриминант должен быть отрицательным:

$$k^{2} = k_{1} \pm k_{2}i; \ k_{1} = -\frac{b_{2}}{2b_{1}}; \ k_{2} = \frac{1}{2b_{1}}\sqrt{4b_{1}b_{3} - b_{2}^{2}}$$
 (7.6.17)

Вводя обозначения:

$$\gamma = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}; \ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1}$$
 (7.6.18)

окончательно получаем:

$$k_{1,2} = -n \pm i\omega; \ n = \sqrt{\gamma} \cos\frac{\alpha}{2}; \ \omega = \sqrt{\gamma} \sin\frac{\alpha}{2}$$
 (7.6.19)

Здесь вновь удержаны только корни с отрицательными действительными частями. В итоге решение имеет вид:

$$\varphi = e^{-nx} (E_1 \cos \omega x + E_2 \sin \omega x)$$

$$w = e^{-nx} (D_1 \cos \omega x + D_2 \sin \omega x)$$

$$M_1 = e^{-nx} \langle \{a_{11} (\omega E_2 - nE_1) - a_{13} [(n^2 - \omega^2) D_1 - 2n\omega D_2] \} \cos \omega x - \\ - \{a_{11} (nE_2 + \omega E_1) + a_{13} [2n\omega D_1 + (n^2 - \omega^2) D_2] \} \sin \omega x \rangle$$

$$Q = e^{-nx} [(D_2 \omega - D_1 n + E_1) \cos \omega x + (E_2 - D_2 n - D_1 \omega) \sin \omega x]$$
(7.6.20)

Связь между коэффициентами  $E_1, E_2$  и  $D_1, D_2$  находится после подстановки выражений для  $\phi$  и w в первое из уравнений (7.6.14):

$$\begin{split} E_1 &= e_1 D_1 + e_2 D_2; \ E_2 = -e_2 D_1 + e_1 D_2 \eqno(7.6.21) \\ e_1 &= \frac{b_{11} d_{11} - b_{12} d_{12}}{F_2}; \ e_1 = \frac{b_{11} d_{12} + b_{12} d_{11}}{F_2}; \ F_2 = b_{11}^2 + b_{12}^2 \\ b_{11} &= a_{11} \left(n^2 - \omega^2\right) - a_{12}; \ b_{12} &= 2a_{11} n \omega \\ d_{11} &= a_{13} n \left(3\omega^2 - n^2\right) - a_{12} n; \ d_{12} &= a_{13} \omega \left(3n^2 - \omega^2\right) + a_{12} \omega \\ \text{Удовлетворяем вновь трем видам граничных условий:} \\ 1) \ При \ x &= 0 \ M_1 &= M_0, \ Q &= Q_0; \\ M_0 &= a_{11} \left(\omega E_2 - nE_1\right) - a_{13} \left[ \left(n^2 - \omega^2\right) D_1 - 2n\omega D_2 \right] \right] \ Q_0 &= D_2 \omega - D_1 n + E_1 \eqno(7.6.22) \\ C \ yverom \ (7.6.21) \ получаем: \\ D_1 &= \frac{M_0 f_{22} - Q_0 f_{12}}{F_3}; \ D_2 &= \frac{Q_0 f_{11} - M_0 f_{21}}{F_3}; \ F_3 &= f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12} \eqno(7.6.23) \\ f_{11} &= -a_{11} (\omega e_2 + ne_1) - a_{13} \left(n^2 - \omega^2\right) f_{12} = a_{11} (\omega e_1 - ne_2) + 2a_{13} n \omega; f_{21} = e_1 - n; f_{22} = \omega + e_2 \\ 2) \ При \ x &= 0 \ M_1 = M_0, \ w &= 0: \\ D_1 &= 0; \ D_2 &= \frac{M_0}{f_{12}} \eqno(7.6.24) \\ 3) \ При \ x &= 0 \ Q = Q_0, \ \phi = 0: \\ E_1 &= 0; \ D_1 &= \frac{Q_0 e_2}{f_{21} e_2 - f_{22} e_1}; \ D_2 &= -\frac{e_1}{e_2} D_1 \eqno(7.6.25) \end{split}$$





Рис. 7.5. Эволюция перерезывающей силы Q. М<sub>10</sub>=1, Q<sub>0</sub>=0, ε=0.4 •••• – прифронтовая асимптотика; •••• – классический изгиб пластины —— – статика









оооо – классический изгиб пластины; — - статика



На рисунках 7.3,...,7.10 приведены графики искомых функций для задач торец оболочки внезапно приложенных 0 действии на постоянных изгибающего момента и перерезывающей силы. На этих графиках изображены как результаты, соответствующие решениям, полученным в параграфах 7.2 и 7.3, так и результаты, полученные здесь. Видно, что в зоне между первым и вторым фронтом графики практически не отличаются от аналогичных графиков, полученных в главе 4 для пластинки. Позади второго фронта точное решение вначале тяготеет к автомодельному решению, соответствующему классическим уравнениям изгиба пластины, а затем отходит от него, перестраиваясь к статическому решению. Таким образом, графики подтверждают сказанное выше о том, что и в задачах с преобладанием изгибных напряженно-деформированного компонент состояния двойная перестройка: вначале происходит ОТ быстроизменяющегося динамического состояния к медленноизменяющемуся динамическому состоянию, а затем к статике. Но, в отличие от продольных волн, здесь квазифронты не образуются.

Чрезмерно большое значение параметра є=0.4 выбрано с целью продемонстрировать эффекты перестроек уже в начале движения, когда вся возмущенная зона описывается решением типа прифронтовой асимптотики. При меньших значениях є перестройка происходит позже, когда уже нет возможности охватить всю картину одним решением.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Айнола Л.Я. О расчетных моделях упругих пластинок для динамических задач.//Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук. 1963. № 1. С. 31–37.
- 2. Айнола Л.Я. Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек.//Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем и техн. наук. 1965. № 3. С. 337–344.
- 3. Айнола Л.Я., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек.//Изв АН ЭстССР. сер. физ.-матем. и техн. наук. 1965. № 1. С. 3–63.
- 4.Алумяэ Н.А. О применимости метода расчленения напряженнодеформированного состояния при решении осесимметричных задач динамики замкнутой цилиндрической оболочки.//Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук. – 1961. – № 3. – С. 171–181.
- 5. Алумяэ Н.А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластинок./Труды VI Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Баку, 1966. М., «Наука», 1966. С. 53–69.
- 6. Алумяэ Н.А. Теория упругих оболочек и пластинок./Механика в СССР за 50 лет, т. III. М., «Наука», 1972. С. 227–266.
- 7. Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашев С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск, Изд. «Наука», Сибирское отделение, 1985. 142 с.

- 8. Векслер Н.Д. О распространении упругих волн в оболочках вращения переменной толщины при осесимметричной деформации.// Прикл. мех. 1968. т. 4, № 4. С. 53–59.
- 9. Векслер Н.Д. Распространение упругих волн в оболочках вращения при осесимметричной деформации.//Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 3. С. 163–166.
- 10. Векслер Н.Д., Нигул У.К. К теории волновых процессов при осесимметричной деформации сферической оболочки.//Изв. АН СССР. Инж. ж. 1966. № 1. С. 74–80.
- 11. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М., «Наука», 1982. 288 с.
- 12. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965. 347 с.
- 13. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее применение в технике. М.–Л., Гостехиздат, 1949. 784 с.
- 14. Ворович И.И. Общие проблемы пластин и оболочек./Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966. С. 287–301.
- 15. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.//ПММ. 1962. т. 26, вып. 4. С. 662–686.
- 16. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.//ПММ. 1963. т. 27, вып. 4. С. 593–608.
- 17. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976. 510 с.
- 18. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.В., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1979. 384 с.
- 19. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М., ВИНИТИ, 1973. 272 с.
- 20. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок.//ПММ 1978 т. 42, вып. 5. С. 54–63.
- 21. Жупиев А.Л., Шамровский А.Д. Решение некоторых динамических задач плоской теории упругости.//Гидроаэромеханика и теория упругости. Изд. Днепропетровск. ун-та. 1973. вып. 16. С. 83–89.
- 22. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. К., Изд. АН УССР, 1963. 174 с.
- 23. Кильчевский Н.А., Издебская Г.А., Киселевская Л.М. Лекции по аналитической механике оболочек. К., «Вища школа», 1974. 232 с.
- 24. Маневич Л.И., Павленко А.В., Шамровский А.Д. Применение методов теории групп к решению динамических задач для ортотропных пластин./Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969, М., «Наука», 1970. С. 408–412.

- 25. Нигул У.К. Применение трехмерной теории упругости к анализу волнового процесса изгиба полубесконечной плиты при кратковременно действующей краевой нагрузке.//ПММ. 1963. т. 27, вып. 6. С. 1044–1056.
- 26. Нигул У.К. О методах и результатах анализа переходных процессов изгиба упругой плиты.//Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук. 1965. № 3. С. 345–384.
- 27. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек./Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, М., «Наука», 1966. С. 593–599.
- 28. Нигул У.К. Сопоставление результатов анализа переходных процессов в оболочках и пластинках по теории упругости и приближенным теориям.//ПММ. 1969. т. 33, вып. 2. С. 308–322.
- 29. Нигул У.К. Волновые процессы деформации оболочек и пластин./ Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск. М., «Наука», 1970. С. 846–883.
- 30. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962. 241 с.
- 31. Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, изд. НГУ, 1966. 131 с.
- 32. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1978. 399 с.
- 33. Овсянников Л.В., Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ дифференциальных уравнений механики./Общая механика. Итоги науки и техники. М., 1975, вып. 2. С. 79–113.
- 34. Пожуев В.И., Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Распространение антиплоской самоуравновешенной упругой волны от границы полупространства.//Изв. РАН, МТТ. 1996. № 2. С. 124–133.

35. Рейснер Э. Некоторые проблемы теории оболочек. Пер. с англ. Под ред. Э.И. Григолюка./Упругие оболочки. – М., Изд. иностр. лит., 1962. – С. 7–65.

36. Селезов І.Т. Про Гіпотези, які лежать в основі уточнених рівнянь поперечних коливань пластин і деякі особливості цих рівнянь.// Прикл. механіка. – 1961. – т. VII, вип. 5. – С. 538–546.

37. Селезов И.Т. Исследование распространения упругих волн в плитах и оболочках./Труды конференции по теории пластин и оболочек. – Казань, 1961. – С. 347–352.

- 38.Селезов И.Т. Изучение волновых процессов в цилиндрической оболочке на основании обобщенной теории.//Прикл. мех. 1963. т. 9, вып. 5. С. 71–80.
- 39.Скрыпник И.А. Двумерное моделирование процессов распространения трехмерных упругих волн в плоском слое. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Запорожье, 1996. 139 с.

- 40.Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости для случая антиплоских волн./Theoretical Foundation in Civil Engineering. Тезисы докл. междун. конф. – Dnepropetrovsk. Warsaw, 1993. – С. 44–49.
- 41.Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Двумерное моделирование трехмерных продольных волн в плоском слое./Математическое моделирование физико-механических полей и интенсификация промышленного производства. Запорожье, 1995. С. 43–50.
- 42. Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Двумерное моделирование трехмерных поперечных и изгибных волн в плоском слое./ Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства. Запорожье, 1995. С. 51–56.
- 43. Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Графическое моделирование волновых процессов в пластинах и оболочках./Современные проблемы геометрического моделирования. Тез. докл. междун. н. практ. конф. Мелитополь, 1995. С. 164.
- 44.Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Изд. «Судостроение», Ленинград, 1972. 374 с.
- 45. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959. 328 с.
- 46. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Пер. с англ. под ред. Г.С. Шапиро. М,. Физматгиз, 1963. 635 с.
- 47. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин.//ПММ. 1948. т. VII, вып. 3. С. 267–300.
- 48.Шамровский А.Д. Применение методов теории групп к решению задач теории пластин типа Тимошенко.//Гидроаэромеханика и теория упругости Днепропетровск 1972. вып 14. С. 157–164.
- 49.Шамровский А.Д. Применение методов теории групп к исследованию волновых процессов в упругих пластинах и оболочках. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Днепропетровск, 1972. 127 с.
- 50.Шамровский А.Д. Распространение упругих волн от края кругового выреза в цилиндрической оболочке типа Тимошенко.//Изв. АН СССР, МТТ. 1974. № 4. С. 69–79.
- 51.Шамровский А.Д. Исследование прифронтовых 30H В задаче 0 упругих распространении волн ОТ края кругового выреза В цилиндрической оболочке типа Тимошенко.//Изв. АН СССР, МТТ. – 1976. – № 6. – C. 59–67.
- 52.Шамровский А.Д. Асимптотическое интегрирование статических уравнений теории упругости в декартовых координатах с автоматизированным поиском параметров интегрирования.//ПММ. 1979. том. 43, вып. 5. С. 859–868.
- 53.Шамровский А.Д. Алгоритм поиска упрощенных моделей сложных систем./Вопросы механики и прикладной математики, вып. 3. Изд. Томского ун-та, 1981. С. 13–26.

- 54. Эйбрассон Х.Н., Пласс Х.Дж., Риппергер Э.А. Распространение волн напряжений в стержнях и балках./В кн. Проблемы механики. М., ИЛ, 1061, вып.3.
- 55.Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1968. 344 с.
- 56.Boley B.A., Chao C.C. Some solutions of the Timoshenko beam equations.//J. Appl. Mech. 1955. v. 22, N 4. C. 579–586.
- 57.Boley B.A., Chao C.C. Timoshenko beams under dynamic load.//J. Appl. Mech. 1958. v. 25. № 1. C. 123–132.
- 58.Flugger W., Zajac E.E. Bending impact waves in beams.//Ingr. Arch. 1959 v. 28. C. 59–70.
- 59.Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells.//Proc. Roy. Soc. A. 1962. v. 266, № 1325. C. 711–717.
- 60.Green A.E., Naghdi P.M. Some remarks on the linear theory of shells. //Quart. Journ. Mech. And Applied Math. Vol. XVIII. Pt. 3. 1965. C. 257–276.
- 61.Koiter W.T. Foundations and basic equations of shell theory./A Survey of recent progress. Theory of thin shells, 2nd simp. Copenhagen, 1967. Spring-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969. C 45–71.
- 62.Koiter W.T., Simmons T.G. Foundations of shell theory./Appl. Mech. Proc. of 13th Intern. Congr. of theoretical and Appl. Mech. Spring-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973. C 217–240.
- 63.Medic M.A. On classical plate-theory and wave propagation.//J. Appl. Mech. 1961. v. 28, N 2. C. 223–228.
- 64.Miklowitz J. Transient wave propagation in elastic rods and plates.// J. Geophys. Res. 1964 v. 68, № 4. C. 1190–1192.
- 65.Miclowitz J. Elastic wave propagation./Applied Mech. Survey. Spartan Books, Washington, D.S., 1966. 120 c.
- 66.Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates.//J. Appl. Mech. 1951. v. 18, № 1. C. 31–38.
- 67.Mindlin R.D. Waves and vibrations in isotropic elastic plates.//Struct. Mech. Proc. 1st Sympos. on Naval Struct. Mech. Pergamon Press, 1960. C 37–41.
- 68.Naghdi P.M. On the theory of thin elastic shells.//Quart. Appl. Math. 1957. v. 14, № 4. C. 369–380.
- 69.Naghdi P.M. A new derivation of the general equations of elastic shells.//Int. J. Engng. Sci. 1963. v. 1. C. 51–60.
- 70.Naghdi P.M. Foundation of elastic shell theory.//Progress in solid mechanics, v.
  4. North-Holland publishing company, Amsterdam. 1963. C. 64–81.
- 71.Naghdi P.M. Further results in the derivation of the general equations of elastic shells.//Int. J. Engng. Sci. 1964. v. 2. C. 41–66.
- 72.Naghdi P.M., Cooper R.M. Propagation of elastic waves in cylyndrical shells including the effects of transverse shear and rotatory inertia.//J. Acoust. Soc. Amer. 1956 v. 28, № 1. C. 56–63.
- 73. Reissner E. On the foundation of the theory of elastic shells./Appl. Mech. Proc. of the 11th Int. Congr. of Appl. Mech. Munich (1964), (1966). C. 13–31.

Научное издание

Александр Дмитриевич Шамровский

# Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости

Редактор Компьютерный оригинал-макет А.Д. Шамровский А.Д. Шамровский

Подписано к печати 10.06.97 г. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 9,4. Уч. изд. л. 9,4. Тираж 300 экз. Заказ №10

> Издательство Запорожской государственной инженерной академии 330006, г. Запорожье, пр. Ленина, 226

> Отпечатано в типографии Запорожской государственной инженерной академии 330006, г. Запорожье, пр. Ленина, 226