Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Челябинский государственный университет

Г.А. Свиридюк   Г.А. Кузнецов

Математический анализ II

Учебное пособие

Челябинск 1999

Содержание

1 КОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

... А она отвернулась, вздернув
носик, и Том услышал:
— Пф! Некоторые только и делают,
что ломаются; думают, что это
кому-нибудь интересно!
Марк Твен. "Приключения Тома Сойера"

1 Определение и метрическая структура множества $\mathbb{R}^n$

Любая математическая теория изучает объекты двух видов — множества и отображения. Среди всех множеств данной теории принято выделять некоторое универсальное множество, называемое *универсумом.* Основное свойство универсума заключается в том, что все остальные множества являются его подмножествами. Универсумом конечномерного математического анализа служит n-мерное координатное пространство.

Определение 1.1 Множество всевозможных упорядоченных наборов $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, состоящих из n действительных чисел $x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, будем называть *n-мерным координатным пространством* $\mathbb{R}^n$. Другими словами, множество $\mathbb{R}^n$ — декартово произведение n экземпляров множества $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ сомножителей}}.$$

Простыми примерами множества $\mathbb{R}^n$ являются плоскость (при $n = 2$) и пространство (при $n = 3$) с фиксированными системами прямоугольных координат. Каждый набор $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать одной буквой $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ и в соответствии с указанной геометрической терминологией называть *точкой* пространства $\mathbb{R}^n$. Число x^i в наборе $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ будем называть *i-той координатой* точки x. В двумерном и трехмерном случаях мы часто будем прибегать к традиционным обозначениям ((x, y) и (x, y, z)) координат.

Пространство $\mathbb{R}^{\ltimes}$ само по себе — не очень интересный для наблюдения и не очень нужный нам объект. Пользы от этого пространства будет гораздо больше, если наделить его метрической структурой.

Определение 1.2 Пусть X — произвольное множество, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ — отображение, ставящее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов множества X в соответствие действительное число. Отображение d *задает метрическую структуру на множестве* X, если

(i) $\forall x, y \in X \ (d(x, y) \geq 0)$;

(ii) $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;

(iii) $\forall x, y \in X \ (d(x, y) = d(y, x))$;

(iv) $\forall x, y, z \in X \ (d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z))$.

Отображение d в этом случае называется *метрикой* или *расстоянием* на множестве X, а пара (X, d) — *метрическим пространством.*

Упражнение 1.1 Показать, что множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с отображением $d_a(x, y) = a|x - y|$, где $a > 0$, является метрическим пространством.

Упражнение 1.2 Показать, что множество $C[a, b]$ (т.е. множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций) с отображением $d(f, g) = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$ является метрическим пространством.

Нашей целью является задание метрической структуры на множестве $\mathbb{R}^n$. Покажем, что это можно сделать посредством отображения

$$d_n(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1}$$

где $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Для этого установим *неравенство Коши*[1]*-Буняковского*[2].

[1] Огюстен Луи Коши (1789-1857) — французский математик. Один из основоположников теорий функций, математического анализа и математической физики.

[2] Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889) — русский математик, прославившийся работами по неравенствам.

Лемма 1.1 *Пусть числа* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

$\circ$ Если все числа $a_i = 0$, то неравенство Коши-Буняковского очевидно. Пусть существует число $a_i \neq 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0 .$$

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 . \qquad (1.2)$$

Очевидно, $\forall t \in \mathbb{R}\ (F(t) \geq 0)$, поэтому квадратный трехчлен (1.2) имеет либо два одинаковых корня, либо не имеет корней вовсе. Значит, его дискриминант неположителен, т.е.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0 . \bullet$$

Следствие 1.1 *В условиях леммы 1.1 справедливо следующее неравенство:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (1.3)$$

$\circ$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 . \bullet$$

Теперь у нас все готово для получения главного результата данного параграфа.

Теорема 1.1 *Отображение d_n, определенное формулой (1.1), задает метрическую структуру на множестве $\mathbb{R}^n$.*

$\circ$ Действительно, отображение d_n из (1.1) каждым двум точкам $x, y \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие число и очевидно удовлетворяет аксиомам (i)-(iii) определения 1.2. Проверим выполнение аксиомы (iv). Для этого в (1.3) положим

$$a_i = x^i - y^i\,,\ b_i = y^i - z^i\,,\ i = 1, 2, \dots, n\,,$$

где $(x^1, x^2, \dots, x^n) = x$ и $(y^1, y^2, \dots, y^n) = y$ — произвольные точки из $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$a_i + b_i = x^i - z^i\,,\ i = 1, 2, \dots, n$$

и потому

$$d_n(x, z) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x^i - z^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n}(y^i - z^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(x, y) + d_n(y, z)\,. \bullet$$

Замечание 1.1 Поскольку $d_1(x, y) = |x - y|$, то в дальнейшем метрику d_n пространства $\mathbb{R}^n$ будем обозначать символом

$$|x - y|_n = d_n(x, y)\,.$$

2 Последовательности в метрическом пространстве и полнота множества $\mathbb{R}^n$

Пусть (x, d) — метрическое пространство. Напомним, что *последовательностью точек $x_k \in X$* называется отображение $\mathbb{N} \to X$, которое обозначают символом $\{x_k\}$.

Определение 2.1 Последовательность точек $\{x_k\}$ метрического пространства (X, d) *сходится к точке $a \in X$* (*имеет предел $a \in X$*), если

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, a) = 0\,.$$

В таком случае пишут

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a\,.$$

Последовательность $\{x_k\}$ точек метрического пространства (X,d) называется *ограниченной*, если

$$\forall a \in X\ \ \exists c \in \mathbb{R}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (d(x_k,a) \le c)\,.$$

Теорема 2.1 *Пусть $\{x_k\}$ — последовательность точек метрического пространства (X,d). Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) если последовательность $\{x_k\}$ сходится, то она ограничена;

(ii) последовательность $\{x_k\}$ не может сходиться к двум разным пределам;

(iii) последовательность $\{x_k\}$ точек $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n$ сходиться к точке $a = (a^1, a^2, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ точно тогда, когда каждая числовая последовательность $\{x_k^i\}$ сходится к числу a^i, $i = 1, 2, \dots, n$.

∘ (i) Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, тогда в силу определения 2.1 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,a) = 0$. Отсюда в силу свойств числовых последовательностей получаем, что последовательность $\{d(x_k,a)\}$ ограничена, т.е.

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \ \forall k \in \mathbb{N}\ \ (d(x_k,a) \le c)\,.$$

(ii) Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,a) = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,b) = 0$. В силу (i), (iii) и (iv) определения 1.2 имеем

$$0 \le d(a,b) \le d(x_k,a) + d(x_k,b)\,.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $d(a,b) = 0$.

(iii) Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - a|_n = 0$. Поэтому при всех $i = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$0 \le |x_k^i - a^i| \le \left(\sum_{j=1}^{n} (x_k^j - a)^2\right)^{\frac{1}{2}} = |x_k - a|_n \to 0$$

при $k \to \infty$.

Наоборот, если $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = a^i$, то $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k^i - a^i| = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Значит,

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - a|_n = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_k^i - a^i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0\,.\bullet$$

Определение 2.2 Последовательность $\{x_k\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k, m > N \ \ (d(x_k, x_m) < \varepsilon)\,.$$

Теорема 2.2 *Если последовательность $\{x_k\}$ точек метрического пространства (X, d) сходится, то она фундаментальна.*

$\circ$ Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \begin{cases} \forall k > N \ \ (d(x_k, a) < \frac{\varepsilon}{2})\,; \\ \forall l > N \ \ (d(x_l, a) < \frac{\varepsilon}{2})\,. \end{cases}$$

Отсюда

$$d(x_k, x_l) \le d(x_k, a) + d(x_l, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\bullet$$

Обратное не верно, что показывает следующий

Пример 2.1 Пусть $X = (0, 1]$, а $d(x, y) = |x - y|$. Очевидно, что (X, d) — метрическое пространство. Рассмотрим последовательность $\{\frac{1}{k}\} \subset X$. Эта последовательность фундаментальна, но не сходится ни к одной точке множества X.

Определение 2.3 Метрическое пространство (X, d) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

Пример 2.2 В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с метрикой d_1 — полное метрическое пространство.

Теорема 2.3 $(\mathbb{R}^n, d_n)$ — *полное метрическое пространство.*

$\circ$ Пусть $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность точек в $\mathbb{R}^n$. Поскольку

$$|x_k^i - x_l^i| \le |x_k - x_l|_n\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

то координатные последовательности $\{x_k^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тоже будут фундаментальными последовательностями в $\mathbb{R}$, и в силу критерия Коши для числовых последовательностей последовательности $\{x_k^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, будут сходиться. В силу (iii) теоремы 2.1 последовательность $\{x_k\}$ также будет сходиться. $\bullet$

3 Подмножества метрического пространства

В дальнейшем отождествим множество X и метрическое пространство (X, d). Это отождествление значительно упростит наше изложение, т.к. вместо того, чтобы писать "пусть (X, d) — метрическое пространство, а множество $M \subset X$", мы будем писать "пусть множество $M \subset X$", подразумевая, что $X \equiv (X, d)$.

Итак, пусть X — метрическое пространство. Одним из важнейших его подмножеств является *шар радиуса $r > 0$ с центром $a \in X$*

$$B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}\,.$$

Пример 3.1 Если $X = \mathbb{R}$, то шар $B_r(a)$ — это интервал $(a - r, a + r)$. Если $X = \mathbb{R}^2$, то шар $B_r(a)$ — это круг $\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : (x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 < r^2\}$.

Определение 3.1 Пусть множество $M \subset X$. Точка $x_0 \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если

$$\exists r > 0\ \ (B_r(x_0) \subset M)\,.$$

Множество всех внутренних точек множества M называется *внутренностью* множества M и обозначается символом $\overset{\circ}{M}$.

Если $M = \overset{\circ}{M}$, то множество M называется *открытым*. Пустое множество $\emptyset$ считается *открытым по определению.*

Замечание 3.1 Если метрическое пространство X является универсумом, то оно также считается *открытым по определению.*

Пример 3.2 Шар $B_r(a)$ в метрическом пространстве X — открытое множество.

Действительно, пусть точка $x_0 \in B_r(a)$, т.е. $d(x_0, a) < r$. Возьмем $0 < \varepsilon < r - d(x_0, a)$. Шар $B_\varepsilon(x_0) \subset B_r(a)$, поскольку для любой точки $x \in B_\varepsilon(x_0)$ имеем

$$d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a) < \varepsilon + d(x_0, a) < r - d(x_0, a) + d(x_0, a) = r$$

в силу аксиом метрики (см. определение 1.2).

Установим некоторые простые свойства открытых множеств.

Теорема 3.1 *(i) Объединение любой совокупности открытых множеств — открытое множество.*

(ii) Пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество.

∘ (i) Пусть $M = \cup M_i$, M_i — открытые подмножества X. Возьмем точку $x \in M$. Существует M_i такое, что $x \in M_i$. Поскольку M_i открыто, то существует шар $B_r(x) \subset M_i$. Поскольку $B_r(x) \subset M$, то M открыто.

(ii) Пусть $M = \bigcap\limits_{i=1}^{m} M_i$, M_i — открытые подмножества X. Возьмем точку $x \in M$. Тогда $x \in M_i$, $i = 1, \ldots, m$. Поскольку M_i открыты, то существуют шары $B_{\varepsilon_i}(x) \subset M_i$. Возьмем $\varepsilon = \min \varepsilon_i$. Тогда $B_\varepsilon(x) \subset M_i$, $i = 1, \ldots, m$, и потому $B_\varepsilon(x) \subset M$. •

Определение 3.2 Пусть X — метрическое пространство. *Окрестностью* O_{x_0} точки $x_0 \in X$ будем называть любое открытое множество, содержащееся в X и содержащее точку x_0. Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечное множество точек множества M. Точка множества M, не являющаяся предельной точкой множества M, называется *изолированной точкой* множества M. Множество $M \subset X$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, получающееся после присоединения к множеству M всех его предельных точек, называется *замыканием* множества M и обозначается $\overline{M}$.

Предельная точка может принадлежать множеству M, а может и не принадлежать. Каждая изолированная точка $x_0 \in M$ имеет окрестность O_{x_0} такую, что $O_{x_0} \cap M = \{x_0\}$. Каждая точка множества M является либо предельной, либо изолированной точкой.

Теорема 3.2 *Пусть X — метрическое пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) Множество $M \subset X$ замкнуто.

(ii) Множество $X \setminus M$ открыто.

∘ ($\Rightarrow$) Пусть $M \subset X$ замкнуто, т.е. содержит все свои предельные точки. Докажем, что $N = x \setminus M$ — открытое множество. Если это не так, то существует точка $x \in N$ такая, что

$x \notin \overset{\circ}{N}$. Тогда в любой окрестности O_x есть точки, не принадлежащие N, т.е. принадлежащие M. Поэтому x есть предельная точка множества M, следовательно, $x \in M$. Но $N \cap M = \emptyset$. Противоречие.

($\Leftarrow$) Пусть множество $N = X \setminus M$ открыто. Покажем, что M замкнуто. Пусть x — предельная точка M, предположим, что $x \notin M$. Тогда $x \in N$, и в силу открытости N существует окрестность $O_x \subset N$. Отсюда $O_x \cap M = \emptyset$ и, следовательно, x — не предельная точка M. Противоречие. •

Из теоремы 3.2 непосредственно следует, что множества X и $\emptyset$ замкнуты. Кстати сказать, это единственные подмножества универсума X являющиеся одновременно и замкнутыми, и открытыми.

Упражнение 3.1 Доказать, что

(i) пересечение любой совокупности замкнутых множеств — замкнутое множество;

(ii) Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество.

Определение 3.3 Множество $M \subset X$ называется *компактным*, если из любой последовательности $\{x_k\} \subset M$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей множеству M.

Напомним, что *подпоследовательностью* последовательности $\{x_k\}$ называется композиция последовательности $\{x_k\}$ и возрастающей последовательности $\{k_l\}$ натуральных чисел.

Ниже мы приведем некоторые основные свойства компактных множеств, а сейчас введем еще одно важное понятие.

Определение 3.4 Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если существует шар $B_r(a) \subset X$ такой, что $M \subset B_r(a)$.

Упражнение 3.2 Пусть $M \subset X$ есть последовательность точек $\{x_k\}$. Доказать, что определения 2.1 и 3.4 эквивалентны.

Теорема 3.3 *Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.*

∘ Докажем замкнутость. Пусть $M \subset X$ — компакт, и $a \in X$ — предельная точка множества M. Покажем, что $a \in M$. Рассмотрим систему шаров

$$B_{\frac{1}{k}}(a) = \{x \in X : d(x,a) < \frac{1}{k}\}\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Поскольку $B_{\frac{1}{k}}(a) \cap M \neq \emptyset$, то в каждом шаре $B_{\frac{1}{k}}(a)$ выберем точку, принадлежащую M, которую обозначим через x_k. Последовательность $\{x_k\} \subset M$ и сходится к a, поскольку

$$0 \leq d(x_k, a) < \frac{1}{k} \to 0\ \ (k \to \infty)\,.$$

Ввиду компактности M точка $a \in M$.

Докажем ограниченность. Предположим, что M — неограниченное множество. Тогда возьмем $a \in M$ и рассмотрим систему шаров

$$B_k(a) = \{x \in X : d(x,a) < k\}\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Поскольку M неограничено, то $B_k(a)$ не содержит M ни при каком $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, $\forall k \in \mathbb{N}\ (B_k(a) \cap M \neq \emptyset)$.

Стало быть, можно выбрать последовательность $\{x_k\} \subset M$ такую, что $k \leq d(x_k, a) < k+1$. В силу свойства (iv) метрики при $l > k+1$ имеем

$$d(x_k, x_l) \geq d(x_l, a) - d(x_k, a)$$

Откуда

$$d(x_k, x_l) \geq l - (k+1) \geq 1\,,$$

т.е. из последовательности $\{x_k\}$ невозможно выбрать сходящуюся подпоследовательность. •

В заключение параграфа введем и обсудим очень важное в дальнейшем понятие.

Определение 3.5 Точка $x \in X$ метрического пространства X называется *граничной точкой* множества $M \subset X$, если для любой окрестности O_x имеем $O_x \cap M \neq \emptyset$ и $O_x \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$. Множество всех граничных точек множества M называется *границей* множества M и обозначается символом ∂M.

Теорема 3.4 *Пусть X — метрическое пространство и множество $M \subset X$. Тогда $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$.*

$\circ$ Пусть $x \in \partial M$. Поскольку для любой окрестности O_x имеем $O_x \cap M \neq \emptyset$, то x — предельная точка M, т.е. $x \in \overline{M}$; а поскольку $O_x \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$, то x не является внутренней точкой множества M и потому $x \notin \overset{\circ}{M}$.

Пусть $x \in \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$. Поскольку $x \in \overline{M}$, то $O_x \cap M \neq \emptyset$ для любой окрестности O_x. Поскольку $x \notin \overset{\circ}{M}$, то $O_x \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ для любой окрестности O_x. Поэтому $x \in \partial M$. $\bullet$

4 Основные теоремы о множествах пространства $\mathbb{R}^n$

В конечномерном анализе существуют естественные обобщения теорем о вложенных отрезках, о конечном покрытии и о предельной точке. Однако все эти утверждения мы приводить не будем; ограничимся только теми, которые будут нам полезны в дальнейшем. Начнем с обобщения теоремы Больцано[3]-Вейерштрасса[4] (которая, как мы знаем, является следствием теоремы о предельной точке).

Теорема 4.1 *Из любой ограниченной последовательности точек пространства $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

[3]Бернард Больцано (1781-1848) — чешский математик, философ, богослов. Основные работы относятся к теории множеств, математическому анализу, механике и физике.

[4]Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815-1897) — немецкий математик. Основные работы в области математического анализа и теории аналитических функций.

$\circ$ Пусть последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ограничена. Отсюда следует ограниченность каждой ее координатной последовательности:

$$|x_k^j| \le \left(\sum_{j=1}^{n}(x_k^j)^2\right)^{\frac{1}{2}} < c\,,\ i = 1, \ldots, n\,,\ \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{x_k\}$ выделим подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$, координатная последовательность $\{x_{k_l}^1\}$ которой сходится, скажем, к x_0^1. Затем из последовательности $\{x_{k_l}\}$ выделим подпоследовательность $\{x_{k_{l_m}}\}$, координатная последовательность $\{x_{k_{l_m}}\}$ которой сходится, скажем, к x_0^2. Поступив таким же образом и со всеми остальными координатными последовательностями, мы получим требуемую подпоследовательность. $\bullet$

Следствие 4.1 *Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно точно тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

$\circ$ Необходимость следует из теоремы 3.3. Докажем достаточность. Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и замкнуто. Возьмем произвольную последовательность $\{x_k\} \subset M$. Ввиду ее ограниченности выберем подпоследовательность $\{x_{k_l}\} \subset \{x_k\}$, сходящуюся к точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. В силу замкнутости M точка $x_0 \in M$. $\bullet$

Прежде чем обобщить утверждение, известное в одномерном анализе как теорема Коши-Кантора[5], дадим следующее

Определение 4.1 Множество

$$\prod\nolimits_a^b = \{x \in \mathbb{R}^n : a^i \le x^i \le b^i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

где $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$, $b = (b^1, b^2, \ldots, b^n)$, будем называть *$n$-мерным прямоугольником* (или просто — *прямоугольником*).

В одномерном случае прямоугольник $\prod_a^b = [a, b]$; в двумерном случае — $\prod_a^b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^1 \le x \le b^1, a^2 \le y \le b^2\}$.

[5]Георг Кантор (1845-1918) — немецкий математик. Основоположник теории множеств.

Упражнение 4.1 Доказать, что множество Π_a^b компактно.

Определение 4.2 Число

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} (b^i - a^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

называется *диаметром* прямоугольника $\Pi_a^b \subset \mathbb{R}^n$.

Нетрудно заметить, что в случае $n = 1$ диаметр Π_a^b есть длина отрезка $[a, b]$, а в случае $n = 2, 3$ диаметр Π_a^b есть длина главной диагонали.

Теорема 4.2 *Пусть дана последовательность $\{\Pi_k\}$ прямоугольников $\Pi_k = \Pi_{a_k}^{b_k}$, вложенных друг в друга. Тогда существует точка $c \in \mathbb{R}^n$, принадлежащая всем прямоугольникам. Если последовательность $\{D_k\}$ диаметров этих прямоугольников стремится к нулю, то такая точка c является единственной.*

$\circ$ Из условия следует, что для всех $i = 1, \ldots, n$ отрезки $[a_k^i, b_k^i]$ вложены друг в друга. Поэтому из теоремы Коши-Кантора следует существование точки $c^i \in [a_k^i, b_k^i]$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Причем, если $D_k \to 0$, то и длины всех отрезков $|b_k^i - a_k^i| \to 0$ при $k \to \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому в случае $D_k \to 0$ при $k \to \infty$ точка $c = (c^1, c^2, \ldots, c^n)$ единственная. $\bullet$

Теорема о конечном покрытии (Бореля[6]-Лебега[7]) был обобщен на произвольное метрическое пространство X немецким математиком Г.Э. Гейне[8]. Мы рассмотрим теорему Гейне-Бореля-Лебега лишь в частном случае $X = \mathbb{R}^n$.

Определение 4.3 Совокупность открытых множеств $\{O_i : O_i \in \mathbb{R}^n, i \in I\}$ называется *открытым покрытием* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если $X \subset \bigcap\limits_{i\in I} O_i$. Открытое покрытие $\{O_i\}$ называется *конечным*, если множество I конечно.

Теорема 4.3 *Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно точно тогда, когда из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.*

$\circ$Доказательство необходимости проведем в случае $n = 2$, поскольку в этом случае оно очень наглядно. В общем случае оно проводится аналогично.

Итак, пусть множество $M \subset \mathbb{R}^2$ — компакт. Предположим, что существует его открытое покрытие, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия. Пусть $\{O_i\}$ — такое открытое покрытие множества M. В силу теоремы 4.1 множество M ограничено, поэтому существует прямоугольник $\prod_a^b \supset M$. Разделим $\prod_a^b$ на четыре равные части.
В силу предположения среди получившихся прямоугольников найдется по крайней мере один (допустим $\prod_1$) такой, что множество $\prod_1 \cap M$ нельзя покрыть конечным числом множеств из $\{O_i\}$.

Разделим $\prod_1$ на четыре части аналогично предыдущему и укажем прямоугольник $\prod_2$, для которого утверждение теоремы не верно. Продолжив процесс неограниченно, получим по-

[6]Эмиль Борель (1871-1956) — французский математик. Работы относятся к теории функций, теории вероятностей, теории чисел, алгебре, геометрии и математическому анализу.

[7]Анри Леон Лебег (1875-1941) — французский математик. Работы относятся к теории функций и теории интегрирования.

[8]Генрих Эдуард Гейне (1821-1881) — немецкий математик. Основные направления исследований — основания математики, математическая физика и теория функций.

следовательность $\{\Pi_k\}$ вложенных друг в друга прямоугольников, диаметры которых стремятся к нулю, причем для этих прямоугольников утверждение теоремы не верно.

В силу теоремы 4.2 существует единственная точка $c \in \mathbb{R}^2$ такая, что $c \in \Pi_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В силу замкнутости M точка c принадлежит M, и поэтому накрыта некоторым множеством O_i, т.е. $c \in O_i$. Ввиду открытости O_i имеет место включение $O_i \supset \Pi_k$ для достаточно большого k. Мы пришли к противоречию, поскольку с одной стороны, не существует никакой конечной подсистемы O_i, покрывающей Π_k, а с другой — Π_k покрывается одним множеством.

Теперь докажем достаточность, т.е. предположим, что из любого открытого покрытия множества $M \subset \mathbb{R}^n$ можно выбрать конечное подпокрытие. Покажем, что M ограничено и замкнуто. Чтобы доказать ограниченность M, выберем произвольно $r > 0$ и рассмотрим систему шаров $\{B_r(x) : x \in M\}$. Очевидно, $\{B_r(x)\}$ — открытое покрытие M. Пусть $\{B_r(x_1), \dots, B_r(x_m)\}$ — конечное подпокрытие, тогда шар $B_R(x_1) \supset B_r(x_i)\ \forall i = 1, \dots, m$, если $R > 2mr$ и, следовательно, $B_R(x_1) \supset M$, т.е. M ограничено.

Чтобы доказать замкнутость M, достаточно (в силу теоремы 3.2) показать открытость $\mathbb{R}^n \setminus M$. Пусть точка $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$.

Окружим каждую точку $x \in M$ шаром $B_r(x)$ радиуса

$$r = \frac{|x - x_0|_n}{2}.$$

откуда $x_0 \notin \overline{B}_r(x)$ при любом $x \in M$. Система $\{B_r(x)\}$ образует, очевидно, покрытие M. Выберем конечное подпокрытие

$$\{B_r(x_1), \dots, B_r(x_m)\},$$

причем $M \subset \cup \overline{B}_r(x_i)$.

Поскольку $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x_i)$, то $x_0 \in \cap(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x_i))$ — открытому множеству. Но так как

$$\bigcap_{i=1}^{m} (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x_i)) = \mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \overline{B}_r(x_i)) \subset \mathbb{R}^n \setminus M,$$

то x_0 — внутренняя точка множества $\mathbb{R}^n \setminus M$. Следовательно $\mathbb{R}^n \setminus M$ открыто, а множество M — замкнуто. •

5 Линейная и евклидова структура множества $\mathbb{R}^n$

Определение 5.1 Говорят, что на множестве X задана *линейная структура*, если на нем

(i) определено аддитивное отображение (операция сложения)

$$+ : X \times X \to X \ \ (\text{ т.е. } \forall x, y \in X((x + y) \in X))$$

со следующими свойствами:

$$\forall x, y \in X \ \ (x + y = y + x) \text{ — коммутативность;}$$

$$\forall x, y, z \in X \ \ (x + (y + z) = (x + y) + z) \text{ — ассоциативность;}$$

$$\exists \mathbb{O} \in X \ \ \forall x \in X \ \ (x + \mathbb{O} = x)$$

— существование нейтрального элемента;

$$\forall x \in X \ \ \exists y \in X \ \ (x + y = \mathbb{O})$$

— существование противоположного элемента;

(ii) определено мультипликативное отображение (операция умножения)

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X \ \ (\text{т.е. } \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X \ \ (\alpha x \in X))$$

со следующими свойствами:

$$\forall x \in X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ (\alpha x = x\alpha) \text{ — коммутативность;}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X \ \ (\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x) \text{ — ассоциативность;}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \forall x, y \in X \ \ ((\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \, , \ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y)$$

— дистрибутивность.

Пара $(X, \mathbb{R})$ называется *линейным пространством над полем действительных чисел*, а элементы линейного пространства называются *векторами*.

Упражнение 5.1 Пусть $(X, \mathbb{R})$ — линейное пространство. Доказать, что

(i) нейтральный элемент $\mathbb{O} \in X$ единственен;

(ii) при любом $x \in X$ $0 \cdot x = x \cdot 0 = \mathbb{O}$.

Определение 5.2 Говорят, что на линейном пространстве $(X, \mathbb{R})$ задана *евклидова структура*, если задано отображение

$$< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$$

такое, что

(i) $\forall x \in X \ \ (< x, x > \geq 0)$;

(ii) $(< x, x >= 0) \Leftrightarrow (x = \mathbb{O})$;

(iii) $\forall x, y \in X \ \ (< x, y >=< y, x >)$;

(iv) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \forall x, y \in X \ \ (< \alpha x, y >= \alpha < x, y >)$;

(v) $\forall x, y, z \in X \ \ (< x + y, z >=< x, z > + < y, z >)$.

Отображение $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$ в этом случае называется *скалярным произведением*, а тройка $(X, \mathbb{R}, < \cdot, \cdot >)$ — *евклидовым пространством*.

Замечание 5.1 В дальнейшем ради простоты записи будем отождествлять евклидово пространство $(X, \mathbb{R}, < \cdot, \cdot >)$ и множество X.

Теорема 5.1 *Множество* $\mathbb{R}^n$ *— евклидово пространство.*

$\circ$ Для доказательства достаточно задать операции сложения, умножения на число и скалярное произведение. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, а $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим

$$x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)\,, \tag{5.4}$$

$$\alpha x = (\alpha x^1, \alpha x^2, \ldots, \alpha x^n)\,, \tag{5.5}$$

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x^i y^i\,. \tag{5.6}$$

Проверку того, что формулы (5.4)-(5.6) задают требуемые операции, предоставим читателю в качестве упражнения. $\bullet$

Итак, на множестве $\mathbb{R}^n$ существуют две структуры — метрическая и евклидова. В соответствии с первой элементы $\mathbb{R}^n$ мы нызываем точками, а в соответствии со второй — векторами. Другими словами, каждой точке $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ставится в соответствие вектор с "началом" в точке $(0, 0, \ldots, 0)$ и "концом" в точке x, и наоборот, каждому вектору, "растущему" из точки $(0, 0, \ldots, 0)$ можно поставить в соответствие точку, являющуюся его "вершиной". В дальнейшем мы будем часто пользоваться этим соответствием между метрической и евклидовой структурами на $\mathbb{R}^n$, а сейчас напомним некоторые понятия линейной алгебры.

Число

$$\sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.7}$$

называется *нормой вектора* $x \in \mathbb{R}^n$ и обозначается символом $|x|_n$. Сравнивая (5.7) с (1.1), нетрудно убедиться в том, что $|x|_n$ представляет собой расстояние от точки $\mathbb{O}$ до точки x. Два вектора $x, y \in \mathbb{R}^n$ называются *ортогональными*, если $< x, y >= 0$. Вектора конечнго множества $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$

называется *линейно независимыми* векторами, если

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = 0\,.$$

Множество из n линейно независимых векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ называется *базисом* пространства $\mathbb{R}^n$. Отличительной особенностью базиса является то, что любой вектор $y \in \mathbb{R}^n$ можно единственным образом представить в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\,.$$

Базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *ортонормальным*, если $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$, где δ_{ij} *символ Кронекера*[9]

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j\,; \\ 0, & i \neq j\,, \end{cases}$$

а $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Теперь пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество векторов. Построим квадратную матрицу порядка m

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \| < x_i, x_j > \|\,,$$

которая носит название *матрицы Грама*[10]. Определитель матрицы Грама называется *определителем Грама* и обозначается символом

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \det \| < x_i, x_j > \|\,.$$

Отметим некоторые свойства матрицы и определителя Грама, которые будут полезны нам в дальнейшем.

Теорема 5.2 *(i) Матрица Грама симметрична.*

(ii) Матрица Грама положительно определена точно тогда, когда векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейно незевисимы.

(iii) Определитель Грама равен квадрату объема параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

[9] Леопольд Кронекер (1823-1891) — немецкий математик. Основные работы относятся к теории чисел, алгебре и теории эллиптических функций.

[10] Йорген Педерсен Грам (1850-1916) — датский математик. Основные работы по математической статистике, теории чисел и теории приближения функций.

∘ Справедливость утверждения (i) и (ii) непосредственно вытекает из определений скалярного произведения и матрицы Грама. Доказательство утверждения (iii) можно найти в любом достаточно полном учебнике по линейной алгебре или в монографии по теории матриц. •

Упражнение 5.2 Показать, что множества $C[a,b]$ и $C^k[a,b]$, $k \in \mathbb{N}$ являются линейными пространствами.

2 НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

— Господа, — очень торжественно начал молодой, — я вам открою мою тайну, я чувствую к вам доверие! По происхождению я — герцог!
Марк Твен. "Приключения Гекльберри Финна"

1 Предел функции многих переменных

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Отображение $f : X \to \mathbb{R}$ называется *функцией многих переменных*, которую в дальнейшем ради простоты записи мы будем называть просто *функцией*. Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается символом $\operatorname{dom} f$, а множество

$$\operatorname{im} f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \operatorname{dom} f (y = f(x))\}$$

называется областью значений функции f.

Наряду с известными из одномерного анализа понятиями $\operatorname{dom} f$ и $\operatorname{im} f$ в конечномерном анализе весьма полезным является понятие *множества уровня* $c \in \operatorname{im} f$, т.е. прообраза

$$f^{-1}(c) = \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) = c\}$$

точки c. Прояснить смысл этого понятия поможет следующий

Пример 1.1 Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.$$

Очевидно $\operatorname{dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, т.е. круг в $\mathbb{R}^2$ радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$; $\operatorname{im} f = [0, 1]$. Множество уровня $c \in [0, 1]$ — это окружность $x^2+y^2 = 1-c^2$, состоящая из точек, "высота" которых на полусфере $\{x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$ равна в точности c.

Одной из простейших функций является линейная функция.

Определение 1.1 Отображение $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такое, что
(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ (l(x+y) = l(x) + l(y))$,
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ (l(\alpha x) = \alpha l(x))$,
называется *линейной функцией.*

Линейная функция устроена весьма просто, как показывает следующая

Теорема 1.1 *Пусть* $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— линейная функция. Тогда существует единственный вектор* $a \in \mathbb{R}^n$ *такой, что* $l(x) = <a, x> \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

∘ Обозначим $a^i = l(e_i)$, где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — некоторый (произвольный, но фиксированный на все время доказательства) базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \ \forall x \in \mathbb{R}^n \, .$$

Поэтому

$$l(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i l(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i a^i = <a, x> \, ,$$

где $a = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$.

Далее, покажем единственность вектора a. Пусть существует вектор $b \in \mathbb{R}^n$ такой, что $l(x) = <b, x> \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $<a-b, x> = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, в том числе и $<a-b, a-b> = 0$. Отсюда $a = b$. •

Упражнение 1.1 Найти множество уровней произвольной линейной функции, определенной на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$.

Определение 1.2 Число $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *в точке* $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \operatorname{dom} f \, (0 < |x - x_0|_n < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon) \, .$$

Определение 1.3 Число $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *в точке* $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, если

$$\forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} f \, ((x_k \neq x_0 \wedge \lim_{k\to\infty} x_k = x_0) \Rightarrow (\lim_{k\to\infty} f(x_k) = y_0)) \, .$$

Как и в одномерном случае определения 1.2 и 1.3 дают понятия *предела по Коши и по Гейне* соответственно.

Упражнение 1.2 Доказать эквивалентность определений 1.2 и 1.3.

Часто предел функции $y = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в точке $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ записывают в виде

$$\lim_{\substack{x^1 \to x_0^1 \\ x^2 \to x_0^2 \\ \dots \\ x^n \to x_0^n}} f(x) = y_0$$

и называют *кратным пределом.*

Пример 1.2 Покажем, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) = 0 \, .$$

Для этого воспользуемся определением предела функции по Коши. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда $\forall (x, y) \in B_\delta(0, 0)$ (т.е. $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$) имеем $|x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon$.

Пример 1.3 Покажем, что функция $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке $(0,0)$. Для этого воспользуемся определением предела функции по Гейне. Выберем две последовательности $\{(\frac{1}{k},\frac{1}{k})\}$ и $\{(\frac{1}{k},-\frac{1}{k})\}$. Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k},\frac{1}{k})=\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k},-\frac{1}{k})=(0,0)\,,$$

однако

$$\lim_{k\to\infty}f(\frac{1}{k},\frac{1}{k})=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}=1\,,\ \text{а}\ \lim_{k\to\infty}f(\frac{1}{k},-\frac{1}{k})=-1\,.$$

Приведенные пределы подтверждают содержательность введенного понятия предела. Это понятие (т.е. понятие кратного предела функции в точке) не следует путать с понятием *повторного предела функции* $y=f(x)$ *в точке* $x_0(x_0^1,x_0^2,\ldots,x_0^n)$:

$$\lim_{x^n\to x_0^n}\ \lim_{x^{n-1}\to x_0^{n-1}}\cdots\lim_{x^2\to x_0^2}\ \lim_{x^1\to x_0^1}f(x)\,,$$

где предел функции $y=f(x)$ вычисляется последовательно: сначала при $x^1\to x_0^1$, потом $x^2\to x_0^2$ и т.д. в том порядке, в котором указано. К слову сказать, порядок перехода к повторному пределу тоже может быть разным. Чтобы показать различие этих двух понятий, приведем два примера, но прежде докажем утверждение, полезное при нахождении различных пределов. Но прежде заметим, что *проколотой окрестностью* точки x называется множество $\overset{\bullet}{O}_x=O_x\setminus\{x_0\}$, где O_x — окрестность точки $x\in\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2 *Пусть функции f и φ определены в проколотой окрестности точки $x_0\in\mathbb{R}^n$, причем $|f(x)|\le\varphi(x)$ $\forall x\in\overset{\bullet}{O}_{x_0}$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, то и $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.*

$\circ$ Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, то в силу определения по Коши при любом $\varepsilon>0$ найдется шар $B_\delta(x_0)$ такой, что если $x\in B_\delta(x_0)\cap\overset{\bullet}{O}_{x_0}$, то $|\varphi(x)|<\varepsilon$. По условию $|f(x)|\le\varphi(x)$, поэтому

$$\forall x\in B_\delta(x_0)\cap\overset{\bullet}{O}_{x_0}\ \ (|f(x)|<\varepsilon)\,,$$

т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\,.$$

•

Пример 1.4 Как показано в примере 1.3 функция $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет кратного предела в точке $(0,0)$. Однако ее повторные пределы существуют и равны нулю, поскольку

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} f(x,y) = 0\,.$$

Пример 1.5 Для функции $f(x,y) = x \sin\frac{1}{y}$, $y \neq 0$ справедливо неравенство $|f(x,y) \leq |x|$. В силу теоремы 1.2 кратный предел этой функции

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \sin\tfrac{1}{y} = 0\,,$$

но при $x \neq 0$ не существует предел

$$\lim_{y \to 0} x \sin\frac{1}{y}\,,$$

а потому не существует и соответствующий повторный предел.

2 Предел вектор-функции многих переменных

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$ называется *вектор-функцией многих переменных.* В дальнейшем ради краткости вектор-функцию многих переменных будем называть просто *вектор-функцией.* Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ задается формулой

$$y = f(x) = \mathrm{col}(f^1(x), f^2(x), \ldots, f^m(x)) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ \cdots \\ f^m(x) \end{pmatrix}\,,$$

где $f^i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ есть функция n переменных. Каждая функция $y^i = f^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ называется *компонентой* вектор-функции $y = f(x)$.

В будущем мы покажем, что все свойства вектор-функций существенным образом зависят от ее компонент. А сейчас заметим, что $\operatorname{dom} f = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{dom} f^i$, и перейдем к рассмотрению простейших, но очень важных примеров вектор-функций.

Пример 2.1 Простейшим примером вектор-функции является последовательность $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ точек пространства $\mathbb{R}^n$

Пример 2.2 Вектор-функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ одного переменного $t \in [a, b]$ задает множество точек в $\mathbb{R}^n$, которое называется *путем*:

$$\Gamma_f[a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x^i = f^i(t),\, t \in [a, b],\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Путь $\Gamma_f[a, b]$ называется *непрерывным*, если все компоненты $f^i = f^i(t)$ — непрерывные функции (одного переменного).

Пример 2.3 Вектор-функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемая формулой

$$f(x^1, x^2) = \operatorname{col}(x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2),$$

называется *переходом к полярным координатам*. Отличительным ее свойством является то, что она

прямоугольники	переводит в	круги
$\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x^1 \le R,$ $0 \le x^2 \le 2\pi\}$		$\{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 :$ $(y^1)^2 + (y^2)^2 \le R^2\}$

Пример 2.4 Вектор-функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, задаваемая формулой

$$f(x^1, x^2, x^3) = \operatorname{col}(x^1 \cos x^3 \sin x^2, x^1 \sin x^3 \sin x^2, x^1 \cos x^2),$$

называется *переходом к сферическим координатам.* Ее отличительной особенностью является то, что она переводит

прямоугольники	в	шары
$\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 :$		$\{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 :$
$0 \le x^1 \le R,$		$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 \le R^2\}$
$0 \le x^2 \le \pi, 0 \le x^3 \le 2\pi\}$		

Пример 2.5 Вектор-функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, задаваемая формулой

$$f(x^1, x^2, x^3) = \mathrm{col}(x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2, x^3)\,,$$

называется *переходом к цилиндрическим координатам.* Отличительной ее характеристикой является перевод

прямоугольников	в	цилиндры
$\{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3:$ $0\le x^1\le R,$ $0\le x^2\le 2\pi, 0\le x^3\le a\}$		$\{(y^1,y^2,y^3)\in\mathbb{R}^3:$ $(y^1)^2+(y^2)^2\le R^2,$ $0\le y^3\le a\}$

Упражнение 2.1 Рассмотреть образы прямоугольников

$$\{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x^1\le R\,,\ -\frac{\pi}{2}\le x^2\le\frac{\pi}{2}\,,\ 0\le x^3\le 2\pi\}$$

при отображении f если $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ — вектор-функция, задаваемая формулой

$$f(x^1,x^2,x^3)=\mathrm{col}(x^1\cos x^3\cos x^2, x^1\sin x^3\cos x^2, x^1\sin x^2)\,.$$

Одним из важнейших является частный случай — линейная вектор-функция. Вектор-функция $l:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ называется *линейной*, если линейны все ее компоненты. Об устройстве линейной вектор-функции говорит следующая

Теорема 2.1 *Пусть $l:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ — линейная вектор-функция. Тогда существует единственная $m\times n$ матрица A такая, что $l(x)=Ax\ \forall x\in\mathbb{R}^n$*

$\circ$ В силу теоремы 1.1 линейная вектор-функция $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет вид

$$l(x) = \begin{pmatrix} l^1(x) \\ l^2(x) \\ \vdots \\ l^m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < a_1, x > \\ < a_2, x > \\ \vdots \\ < a_m, x > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ . & . & . & . \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = Ax\,.$$

где $A = \|a_j^i\|$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ — матрица, единственность которой имеет место в силу единственность векторов $a_1, a_2, \cdots, a_m$. $\bullet$

А теперь введем понятие предела вектор-функции в точке по Коши и по Гейне.

Определение 2.1 Точка $y_0 \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом* вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если либо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \operatorname{dom} f \ (0 < |x - x_0|_n < \delta) \Rightarrow (|f(x) - y_0|_m < \varepsilon),$$

либо

$$\forall \{x_k\} \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\} \ (\lim_{k\to\infty} x_k = x_0) \Rightarrow (\lim_{k\to\infty} f(x_k) = y_0)\,.$$

Теорема 2.2 *Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \in \mathbb{R}^n$ имеет в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ предел $x_0 \in \mathbb{R}^m$ точно тогда, когда ее компоненты $f^i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ имеют в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ пределы y_0^i, $i = 1, 2, \dots, m$, т.е.*

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) = \operatorname{col}(\lim_{x\to x_0} f^1(x), \lim_{x\to x_0} f^2(x), \dots, \lim_{x\to x_0} f^m(x))\,.$$

$\circ$ Доказательство вытекает из очевидного неравенства

$$|f^i(x) - y_0^i| \le |f(x) - y_0|_m \le \sqrt{m} \max_{1\le j\le m} |f^j(x) - y_0^j|\,,$$

верного при любом $i = 1, 2, \dots, m$. $\bullet$

Упражнение 2.2 Доказать эквивалентность определений по Коши и по Гейне предела вектор-функции в точке.

3 Локальные свойства непрерывных функций и вектор-функций

Выше мы определили сначала функцию $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ многихпеременных, а потом посредством функции определили вектор-функцию $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Сейчас же мы заметим, что функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ является частным случаем вектор-функции при $m = 1$. Поэтому мы будем изучать в основном локальные свойства непрерывных вектор-функций, делая оговорки о функциях по мере необходимости

Определение 3.1 Вектор-функция$f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Вектор функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *непрерывной на множестве* $X_0 \subset X$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Вектор-функция называется *непрерывной*, если она непрерывна в области определения.

Локальными свойствами непрерывных вектор-функций мы будем называть те свойства, которыми обладают вектор-функции, непрерывные в точке. Как и в одномерном случае локальные свойства непрерывных вектор-функций полностью определяются свойствами предела. Поэтому сначала сформулируем и докажем необходимые в дальнейшем свойства предела.

Теорема 3.1 *Если вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет предел в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, то этот предел единственнен.*

Упражнение 3.1 Доказать теорему 3.1.

Замечание 3.1 Теорема 3.1 устанавливает корректность определения 3.1.

Определение 3.2 Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченной на множестве* X, если

$$\forall a \in \mathbb{R}^m \ \ \exists c \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X \ \ (|f(x) - a|_m < c)\,.$$

Другими словами, у ограниченной на множестве X вектор-функции f все ее значения должны лежать в некотором шаре $B_c(a)$.

Теорема 3.2 *Пусть вектор-функция f имеет предел в точке x_0. Тогда f ограничена на множестве* $\operatorname{dom} f \cap O_{x_0}$.

Упражнение 3.2 Доказать теорему 3.2.

Определение 3.3 Пусть

$$f(x) = \operatorname{col}(f^1(x), f^2(x), \ldots, f^m(x))\,,$$

$$g(x) = \operatorname{col}(g^1(x), g^2(x), \ldots, g^m(x))$$

— две вектор-функции, имеющие общую область определения $X \subset \mathbb{R}^n$. Их суммой называется вектор-функция

$$(f+g)(x) = \operatorname{col}(f^1(x) + g^1(x), f^2(x) + g^2(x), \ldots$$

$$\ldots, f^m(x) + g^m(x)) \ \ \forall x \in X\,.$$

Произведением вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется вектор-функция

$$(\alpha f)(x) = \operatorname{col}(\alpha f^1(x), \alpha f^2(x), \ldots, \alpha f^m(x)) \ \ \forall x \in X\,.$$

Теорема 3.3 *Пусть вектор-функции $f, g : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ имеют предел в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда вектор-функции $f+g$, $\alpha f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ тоже имеют предел в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, причем*

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\,, \ \ \lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x)\,.$$

Упражнение 3.3 Доказать теорему 3.3.

Для вектор-функций $f, g : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, вообще говоря, невозможно определить их произведение $f \cdot g$ или частное $\dfrac{f}{g}$ (почему?). Однако для функций $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ такие понятия вполне определяемы.

Определение 3.4 Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ — две функции. Их *произведением* (*частным*) называется функция

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \left(\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

(Частное двух функций определяется при естественном требовании $g(x) \neq 0$ при всех $x \in X$).

Теорема 3.4 *Пусть функции $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ имеют предел в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда функции $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ тоже имеют предел в точке x_0 (вторая при условии, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$), причем*

$$\lim_{x \to x_0} f \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Упражнение 3.4 Доказать теорему 3.4.

Определение 3.5 Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ и $g : Y \to \mathbb{R}^l$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, причем $\operatorname{im} f \subset Y$ — две вектор-функции. Тогда их *композицией* называется вектор-функция

$$(g \circ f)(x) = \operatorname{col}(g^1(f^1(x), \ldots, f^m(x)), \ldots, g^l(f^1(x), \ldots, f^m(x)),$$

$$g \circ f : X \to \mathbb{R}^l, \ \ X \subset \mathbb{R}^n.$$

Теорема 3.5 *Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет предел в точке $x_0 \in X$, а $g : Y \to \mathbb{R}^l$, $\operatorname{im} f \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке*

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Тогда композиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}^l$ *имеет предел в точке* x_0, *причем*

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y) \, .$$

$\circ$ По условию существует предел $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$. В силу определения предела по Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in Y \ (0 < |y - y_0|_m < \delta) \Rightarrow (|g(y) - z_0|_l < \varepsilon) \, . \tag{3.1}$$

По условию существует также предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. В силу определения предела по Коши для фиксированного $\delta > 0$ имеем

$$\exists \sigma > 0 \ \ \forall x \in X \ \ (0 < |x - x_0|_n < \sigma) \Rightarrow (|f(x) - y_0|_m < \delta) \, . \tag{3.2}$$

Положив $y = f(x)$, что возможно по условию, и комбинируя высказывания (3.1) и (3.2) в одно высказывание, получим

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \sigma > 0 \ \ \forall x \in X \ \ (0 < |x - x_0| < \sigma) \Rightarrow (|(g \circ f)(x) - z_0|_l < \varepsilon) \, ,$$

что эквивалентно утверждению теоремы. $\bullet$

Теорема 3.6 *(i) Непрерывная в точке* $x_0 \in X$ *вектор-функция* $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ *ограничена на множестве* $O_{x_0} \cap X$.

(ii) Сумма непрерывных в точке $x_0 \in X$ *вектор-функций* $f, g : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ *непрерывна в этой точке.*

(iii) Произведение непрерывной в точке $x_0 \in X$ *вектор-функции* $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ *непрерывно в этой точке.*

(iv) Произведение $f \cdot g$ *и частное* $\dfrac{f}{g}$ *двух непрерывных в точке* $x_0 \in X$ *функций* $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ *непрерывны в этой точке (частное при естественном условии* $g(x_0) \neq 0$*).*

(v) Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X$, *а вектор-функция* $g : Y \to \mathbb{R}^l$, $\operatorname{im} f \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ *непрерывна в точке* $y_0 = f(x_0)$. *Тогда их композиция* $g \circ f : X \to \mathbb{R}^l$ *непрерывна в точке* x_0.

○ Доказательство теоремы проводится простыми ссылками на определение 3.1 и теоремы 3.2 - 3.5. •

Упражнение 3.5 Доказать, что вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ точно тогда, когда в точке x_0 непрерывны все ее компоненты $f^i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Упражнение 3.6 Доказать, что вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничена на множестве X точно тогда, когда на этом множестве ограничены все ее компоненты $f^i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Определение 3.6 Функцию $f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ будем называть *элементарной функцией*, если она получена из переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и констант при помощи конечного числа арифметических операций и операций композиции элементарных функций одного переменного. Вектор-функцию $f(x) = \mathrm{col}(f^1(x), f^2(x), \ldots, f^m(x))$ будем называть *элементарной вектор-функцией*, если все ее компоненты $f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ — элементарные функции.

Теорема 3.7 *Элементарные вектор-функции многих переменных непрерывны.*

Упражнение 3.7 Доказать теорему 3.7.

4 Глобальные свойства функций и вектор-функций

Напомним, что *глобальными* мы называем те свойства, которыми обладает вектор-функция, непрерывная на множестве. Как и в предыдущем параграфе мы будем в основном заниматься глобальными свойствами непрерывных вектор-функций, делая оговорки насчет непрерывных функций по мере необходимости.

Теорема 4.1 *Непрерывная на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$ вектор-функция $f :\to \mathbb{R}^m$ ограничена на нем.*

$\circ$ Пусть точка $x \in X$. В силу локальных свойств непрерывных вектор-функций существует окрестность O_x такая, что на множестве $O_x \cap X$ вектор-функция f ограничена. В силу компактности множества X можно выбрать конечное число окрестностей $\{O_{x_i} : i = 1, 2, \ldots, k\}$, покрывающих множество X, причем на множестве $O_{x_i} \cap X$ $i = 1, 2, \ldots, k$ вектор-функция f ограничена. Другими словами, образ $f[O_{x_i} \cap X] \subset B_{r_i}(y_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Конечное объединение ограниченных множеств ограничено. Отсюда следует утверждение теоремы. $\bullet$

Следствие 4.1 *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$ — непрерывная на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$ вектор-функция. Тогда множество $f[X] \subset \mathbb{R}^m$ — тоже компакт.*

$\circ$ В силу теоремы 4.1 множество $f[X]$ ограничено. Установим его замкнутость. Пусть $y_0 \in \mathbb{R}^m$ — предельная точка множества $f[X]$, т.е. существует последовательность $\{y_k\} \subset f[X]$, сходящаяся к точке y_0. Рассмотрим последовательность $\{x_k\} \subset X$ такую, что $f(x_k) = y_k$. В силу компактности множества X можно выбрать подпоследовательность $\{x_{k_l}\} \subset \{x_k\}$, сходящуюся к точке $x_0 \in X$. Поскольку вектор-функция f непрерывна, то

$$\lim_{k_l \to \infty} f(x_{k_l}) = f(x_0)\,.$$

С другой стороны, $f(x_{k_l}) = y_{k_l}$, причем

$$\lim_{k_l \to \infty} y_{k_l} = y_0\,.$$

Отсюда, $y_0 = f(x_0) \in X$. $\bullet$

Это утверждение несколько вольно можно перефразировать так: “непрерывный образ компакта — компакт”.

Следствие 4.2 *Непрерывная на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$ функция $f : X \to \mathbb{R}$ принимает на нем наибольшее и наименьшее значение.*

∘ По теореме 4.1 функция $f : X \to \mathbb{R}$ ограничена на множестве X, т.е. множество значений $f[X] \subset \mathbb{R}$ ограничено. Следовательно, существует точная верхняя грань $s = \sup\limits_{x \in X} f(x)$. Предположим, что не существует точки $x_0 \in X$ такой, что $s = f(x_0)$. Тогда в силу локальных свойств функция $\varphi(x) = (s - f(x))^{-1}$ непрерывна на множестве X. Отсюда в силу теоремы 4.1 функция φ ограничена на множестве X. Однако в силу определения точной верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \ \ (s - f(x) < \varepsilon)\,,$$

т.е. $\varphi(x) > \varepsilon^{-1}$. Противоречие.

Существование точки $x \in X$, в которой функция f принимает наименьшее значение, доказывается аналогично. •

Теорему 4.1 и следствия 4.1 и 4.2 можно считать обобщением одномерной теоремы Вейерштрасса о максимальном значении непрерывной функции.

Определение 4.1 Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $X \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in X \ (|x_1 - x_2|_n < \delta) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)|_m < \varepsilon).$$

Упражнение 4.1 Доказать, что вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ равномерно непрерывная на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ точно тогда, когда все ее компоненты $f^i : X \to \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \ldots, m$ равномерно непрерывны на X.

Теперь мы сформулируем и докажем обобщение теоремы Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции.

Теорема 4.2 *Непрерывная на компакте* $X \subset \mathbb{R}^n$ *вектор-функция* $f : X \to \mathbb{R}^m$ *равномерно непрерывна на нем.*

∘ Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на множестве X, но не равномерно непрерывна. Это означает

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \exists x_k, x'_k \in X \ \ (|x_k - x'_k| < \frac{1}{k}) \wedge (|f(x_k) - f(x'_k)| \geq \varepsilon)\,.$$

Так как множество X компактно, то из последовательности $\{x_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$. Кроме того,

$$0 \le |x'_{k_l} - x_0|_n \le |x'_{kl} - x_{k_l}|_n + |x_{k_l} - x_0|_n < \frac{1}{k_l} + |x_{k_l} - x_0| \to 0\,,$$

при $k_l \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{k_l\to\infty} x'_{k_l} = x_0$. В силу непрерывности вектор-функции f имеем

$$\lim_{k_l\to\infty} f(x_{k_l}) = \lim_{k_l\to\infty} f(x'_{k_l}) = f(x_0)\,.$$

Однако по предположению имеем

$$|f(x_{k_l}) - f(x'_{k_l})|_m \ge \varepsilon\,.$$

Отсюда после перехода к пределу получаем

$$|f(x_0) - f(x_0)|_m \ge \varepsilon > 0\,.$$

Противоречие. •

Определение 4.2 Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ существует непрерывный путь $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a,b]$, целиком лежащий в X, т.е. $\gamma : [a,b] \to X$, и такой, что $\gamma(a) = x_1$, а $\gamma(b) = x_2$. Открытое связное множество X будем называть *областью*.

Теорема 4.3 *Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на связном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множество $f[X] \subset \mathbb{R}^m$ тоже связно.*

∘ Выберем две точки $y_1, y_2 \in f[X]$ и рассмотрим точки $x_1, x_2 \in X$ такие, что $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Поскольку X связно, то существует непрерывный путь $\gamma : [a,b] \to X$, такой, что $\gamma(a) = x_1$, а $\gamma(b) = x_2$. Рассмотрим вектор-функцию $\Gamma(t) = f \circ \gamma(t)$. $\Gamma : [a,b] \to f[X]$, причем Γ непрерывна как композиция непрерывных функций и $\Gamma(a) = f(\gamma(a)) = f(x_1) = y_1$, а $\Gamma(b) = f(\gamma(b)) = f(x_2) = y_2$, т.е. $\Gamma : [a, b] \to f[X]$ — непрерывный путь. Ввиду произвола в выборе точек y_1, y_2 множество $f[X]$ связно. •

Перефразируя, теорему 4.3 можно выразить так: "непрерывный образ связного множества связен".

Следствие 4.3 *Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на связном множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ и принимающая в точках $x_1, x_2 \in X$ значения $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, принимает на множестве X все значения из отрезка с концами y_1 и y_2.*

◦ В силу связности X существует непрерывный путь $\gamma[a, b] \to X$ такой, что $\gamma(a) = x_1$, а $\gamma(b) = x_2$. Функция $g = f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, и связное множество $[a, b]$ отображает в связное множество — отрезок с концами y_1 и y_2. Поскольку путь γ лежит в X, все доказано. •

Нетрудно заметить, что следствие 4.3 является обобщением одномерной теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции.

3 ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ И ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

— Так для чего же тебе потребовалось
его освобождать, если он уже
свободный?
— Только женщина может задать
такой вопрос! А как же приключения — то?
Марк Твен. "Приключения Гекльберри Финна"

1 Необходимые условия дифференцируемости функций и вектор-функций в точке

Введение линейной структуры на множестве $\mathbb{R}^n$ (что эквивалентно заданию прямоугольных координат) позволяет многие физические понятия, такие как потенциал, давление, температура, плотность — трактовать как функции многих переменных; а такие понятия как скорость, напряжение электрического поля, импульс — трактовать как вектор-функции многих переменных, причем в качестве этих переменных берутся координаты точек пространства $\mathbb{R}^3$. Как хорошо известно, в одномерном случае многие векторные величины являются производными скалярных величин (например, напряженность электрического поля есть производная потенциала этого поля). Осмыслению понятия "производная" в приложении к функциям и вектор-функциям многих переменных посвящен этот раздел.

Определение 1.1 Пусть вектор $h \in \mathbb{R}^m$. Вектор-функция $\alpha : X \to \mathbb{R}^n$ называется *беконечно малой* в точке x области $X \subset \mathbb{R}^m$, если $\alpha(x+h) \to \mathbb{O}$ при $\|h\| \to 0$. Будем писать $\alpha(x+h) = o(x+h)$, если $\alpha(x+h) = \beta(x+h)\|h\|$, причем β — бесконечно малая в точке x.

Укажем на очевидное утверждение: $(h \to \mathbb{O} \Leftrightarrow (\|h\| \to 0)$.

Определение 1.2 Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — область. Вектор-функцию $f : X \to \mathbb{R}^n$ назовем *дифференцируемой в точке*

$x \in X$, если существует линейная вектор-функция $f'_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ такая, что

$$f(x+h) - f(x) = f'_x(h) + o(x+h) \ \ \forall h \in \mathbb{R}^m \ \ (x+h \in X)\,.$$

Отображение $x \to f'_x$, ставящее в соответствие $\forall x \in X$ линейную вектор-функцию $f'_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, называется *производной вектор-функции* $f : X \to \mathbb{R}^n$.

Заметим сразу, что в силу определения 1.3 вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $x \in X$ точно тогда, когда в этой точке дифференцируемы все ее компоненты.

В одномерном случае $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ линейной функцией $f'_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет число, равное значению производной дифференцируемой в точке $x \in (a,b)$ функции f, поэтому $f'_x(h) = f'_x h \ \forall h \in \mathbb{R}$. Для ответа на вопрос, чем является производная функции многих переменных, нам потребуется понятие частной производной.

Определение 1.3 Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — область, а $f : X \to \mathbb{R}$ — функция. Предел

$$\lim_{h^i \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + h^i, x^{i+1}, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n)}{h^i}\,,$$

если он существует, называется *частной производной* функции f в точке $x \in X$ и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$.

Теорема 1.1 *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x области $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в этой точке функция f имеет частные производные по всем переменным, причем*

$$f'_x(h) = \frac{\partial f}{\partial x^1}h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}h^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}h^n$$

для любого вектора $h = (h^1, h^2, \ldots, h^n)$.

$\circ$ Пусть $x \in X$. Выберем вектор $h = (0, \dots, 0, h^i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы $x + h \in X$. Предположим, что вектор $a \in \mathbb{R}^m$, задающий линейную функцию $f'_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, имеет координаты $a = (a^1, a^2, \dots, a^n)$. Тогда

$$f'_x h =< a, h >= a^i h^i \,.$$

Ввиду дифференцируемости функции f в точке x имеем

$$\begin{gathered} f(x+h) - f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^{i-1}, x^i + h^i, x^{i+1}, \dots, x^n) - \\ -f(x^1, x^2, \dots, x^i, \dots, x^n) = \\ = a^i h^i + \beta(x+h)|h^i| \,, \end{gathered}$$

поскольку $\|h\| = (|h^i|^2)^{\frac{1}{2}} = |h^i|$. Отсюда

$$\lim_{h^i \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^i} = a^i \,,$$

т.е. $a^i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x)$. Ввиду единственности вектора a других возможностей нет. $\bullet$

Установленный теоремой 1.1 вектор a носит название *градиента* функции f в точке x и обозначается

$$\operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\right) = \nabla f(x) \,.$$

Таким образом, *производной* функции $f : X \to \mathbb{R}$ называется вектор-функция $f'_x : X \to \mathbb{R}^n$, ставящая в соответствии каждой точке $x \in X$ градиент ∇f функции $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2 *Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке x области $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в этой точке все компоненты вектор-функции f имеют частные производные по всем переменным, причем*

$$f'_x(h) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} h^1 + \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} h^2 + \ldots + \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n} h^n \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} h^1 + \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} h^2 + \ldots + \dfrac{\partial f^2}{\partial x^n} h^n \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} h^1 + \dfrac{\partial f^n}{\partial x^2} h^2 + \ldots + \dfrac{\partial f^n}{\partial x^n} h^n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

для любого вектора $h = (h^1, h^2, \ldots, h^n)$.

$\circ$ Ввиду определения 1.2 и теоремы 1.1 доказательство очевидно. $\bullet$

Выражение (1.1) записывается в виде $f'_x(h) = J_f(x)h$, где матрица

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}(x) := \left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \right\|_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$$

называется *матрицей Якоби*[11] вектор-функции f в точке $x \in X$. Таким образом, *производной* вектор-функции называется отображение $f'_x : X \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, ставящее каждой точке $x \in X$ в соответствие матрицу Якоби. (Здесь через $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обозначено множество матриц $n \times m$).

Мы не ставим перед собой цель сколько-нибудь полно исследовать матриц-функции (т.е. отображения, ставящие в соответствие каждой точке матрицу), однако заметим, что матриц-функции (как, впрочем, и более общие тензор-функции) обладают теми же свойствами, которыми обладают их компоненты. В будущем мы к этому еще вернемся, а сейчас загадаем загадку: что будет производной матрицы Якоби?

Вернемся к основной цели нашего повествования — выяснению необходимых условий дифференцируемости вектор-функции в точке. Из теорем 1.1, 1.2 следует, что необходимым условием диифференцируемости является наличие частных производных. В одномерном анализе дифференцируемость функции в точке эквивалента существованию производной в этой точке. В конечномерном анализе из существования частных производных в точке *не следует* дифференцируемость функции в этой точке. Чтобы показать это, проведем небольшое исследование.

[11]Карл Густав Якоб Якоби (1804-1851) — известный немецкий математик ряда работ по математическому анализу.

Сначала заметим, что

$$\text{дифференцируемость в точке} \;\Rightarrow\; \text{непрерывность в точке}\,. \tag{1.2}$$

Действительно, в силу определения 1.2 имеем

$$f(x+h) - f(x) = f'_x(h) + o(x+h)\,.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x) + \lim_{h\to 0}(f'_x(h) + o(x+h)) = f(x)\,.$$

Утверждение (1.2) эквивалентно следующему:

$$\text{разрывность в точке} \;\Rightarrow\; \text{недифференцируемость в точке}\,.$$

Теперь рассмотрим

Пример 1.1 Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy = 0\,; \\ 1, & \text{если } xy \neq 0\,; \end{cases}$$

равна нулю на осях координат, поэтому ее частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

в точке $(0,0)$, очевидно, существуют. В то же время функция f в точке $(0,0)$ разрывна и, следовательно, недифференцируема.

2 Локальные свойства дифференцируемых функций и вектор-функций

Напомним, что локальными называются те свойства, которыми обладают функции и вектор-функции, дифференцируемые в точке.

Теорема 2.1 *а) Пусть вектор-функции $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в точке x области $X \subset \mathbb{R}^m$, тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ вектор-функция $\alpha f + \beta g : X \to \mathbb{R}^n$ также дифференцируема в точке x, причем*

$$(\alpha f + \beta g)'_k = \alpha f'_x + \beta g'_x \,.$$

б) Пусть вектор-функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке x области $X \subset \mathbb{R}^m$, тогда $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ и $\dfrac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ также дифференцируемы в точке x, причем

$$(f \circ g)'_x = g \cdot f'_x + f \cdot g'_x \,;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_x = \frac{g \cdot f'_x - f \cdot g'_x}{g^2} \,.$$

∘ Доказательство этой теоремы аналогично одномерному случаю и потому опускается. •

Теорема 2.2 *Пусть вектор-функция $f, g : X \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке x области $X \subset \mathbb{R}^l$, а вектор-функция $g : Y \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $y = f(x)$ области $Y \subset \mathbb{R}^m$, причем $Y \supset f[X]$. Тогда их коипозиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемость в точке $x \in X$, причем*

$$(g \circ f)'_x = g'_y \cdot f'_x \,, \;\; y = f(x) \,.$$

∘ Пусть $h \in \mathbb{R}^l$ такой вектор, что $x + h \in X$. Тогда

$$(g \circ f)(x + h) - (g \circ f)(x) = g(f(x + h)) - g(f(x)) =$$

$$= g'_{f(x)}(f(x + h) - f(x)) + o(f(x + h)) =$$

$$g'_{f(x)}(f'_x(h) + o(x + h)) + o(f(x + h)) =$$

$$= g'_{f(x)}(f'_x(h)) + g'_{f(x)} o(x + h) + o(f(x + h)) =$$

$$= (g'_y \circ f'_x)(h) + o(x + h) \,,$$

где $y = f(x)$, $g'_y \circ f'_x : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ — линейная вектор-функция (как композиция линейных вектор-функций) и, кроме того

$$g'_y o(x+h) \to \mathbb{O} \text{ при } \|h\| \to 0\,;$$

$$o(f(x+h)) \to \mathbb{O} \text{ при } \|h\| \to 0\,.\bullet$$

В координатной форме содержание теоремы заключается в том, что если $x \in X$ и

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^l}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^l(x)} \end{pmatrix} = \left\| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \right\|_{j=1,\dots,l}^{i=1,\dots,m},$$

а $y = f(x) \in Y$ и

$$J_g(y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g^1}{\partial y^1}(y) & \dots & \dfrac{\partial g^1}{\partial y^m}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial g^n}{\partial y^1}(y) & \dots & \dfrac{\partial g^n}{\partial y^m}(y) \end{pmatrix} = \left\| \frac{\partial g^k}{\partial y^j}(y) \right\|_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n},$$

то матрица Якоби в точке $x \in X$ композиции $g \circ f$ равна

$$J_{g\circ f}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g^1}{\partial y^1} & \dots & \dfrac{\partial g^1}{\partial y^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial g^n}{\partial y^1} & \dots & \dfrac{\partial g^n}{\partial y^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial y^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^m}{\partial x^l} \end{pmatrix}, \qquad (2.3)$$

где $y^i = f^i(x)$, $i = 1, \dots, m$.

Полученная формула (2.3) будет основой при рассмотрении всех важных частных случаев.

Следствие 2.1 *Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке x области $X \subset \mathbb{R}^m$, а функция $g : Y \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $y = f(x)$ области $Y \subset \mathbb{R}^n$*

такой, что $Y \supset f[X]$. *Тогда их композиция* $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $x \in \mathbb{R}^l$, *причем*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x^i} = \frac{\partial g}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^i} + \frac{\partial g}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial x^i} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\,, \;\; i = 1, \ldots, m\,,$$

где $y^i = f^i(x)$, $i = 1, \ldots, n$.

○ Действительно, в силу (2.3) имеем

$$J_{g \circ f}(x) = \nabla g(y) J_f(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial y^1}, \frac{\partial g}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial y^n}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$J_{g \circ f}(x) = \nabla f \circ g(x) = \left(\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x^m}\right).$$

Сравнивая, получаем

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x^i} = \left\langle \nabla g(y), \mathrm{col}\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^i}, \frac{\partial f^2}{\partial x^i}, \ldots, \frac{\partial f^n}{\partial x^i}\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^i} + \frac{\partial g}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial x^i} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\,,$$

где $i = 1, \ldots, n$ •

Следствие 2.2 *Пусть вектор-функция* $f : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *дифференцируема в точке* $t \in (a, b)$, *а функция* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $x = f(t)$ *области* $X \subset \mathbb{R}^n$ *такой, что* $X \supset f(a, b)$. *Тогда их композиция* $g \circ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* t, *причем*

$$g \circ f_t' = \frac{\partial g}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial t}\,.$$

○ Доказательство, очевидно, стоит в предыдущем доказательстве положить $m = 1$ и сделать некоторые переобозначения. •

3 Достаточные условия дифференцируемости функций и вектор-функций

Лемма 3.1 *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена в области $X \subset \mathbb{R}^n$, и пусть отрезок $[x, x+h]$ с концами x и $x+h$ содержится в X. Если f непрерывна в точках отрезка $[x, x+h]$ и дифференцируема в точках интервала $(x, x+h)$, то найдется точка $\xi \in (x, x+h)$ такая, что*

$$f(x+h) - f(x) = f'_\xi(h)\,. \tag{3.4}$$

$\circ$ Рассмотрим вектор-функцию $g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, имеющую вид $g(t) = ht + x$. Она, очевидно, непрерывна для любого $t \in [0,1]$ и дифференцируема для любого $t \in (0,1)$. Построим композицию $f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Композиция $f \circ g$ тоже непрерывна $\forall t \in [0,1]$ и дифференцируема $\forall t \in (0,1)$, поскольку для любого $t \in [0,1]$ точка $ht + x \in [x, x+h]$. В силу теоремы Лагранжа имеем

$$f \circ g(1) - f \circ g(0) = (f \circ g)'_\tau\,,$$

где $\tau \in (0,1)$. В силу теоремы 2.2 имеем

$$(f \circ g)'_\tau = f'_\xi \cdot g'_\tau = f'_\xi(h)\,,$$

где $\xi = h\tau + x \in (x, x+h)$. Окончательно получаем

$$f \circ g(1) - f \circ g(0) = f(x+h) - f(x) = f'_\xi(h)\,.\bullet$$

Распишем соотношение (3.4) в декартовых координатах:

$$f(x+h) - f(x) = f(x^1+h^1, x^2+h^2, \ldots, x^n+h^n) - f(x^1, x^2, \ldots, x^n) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(\xi)h^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(\xi)h^n =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1+\tau h^1, x^2+\tau h^2, \ldots, x^n+\tau h^n)h^1 +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1+\tau h^1, x^2+\tau h^2, \ldots, x^n+\tau h^n)h^2 + \ldots +$$
$$\ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1+\tau h^1, x^2+\tau h^2, \ldots, x^n+\tau h^n)h^n\,.$$

Теорема 3.1 *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в некоторой окрестности точки x области $X \subset \mathbb{R}^n$ частные производные по всем переменным, которые непрерывны в точке x. Тогда f дифференцируема в точке $x \in X$.*

$\circ$ Без ограничения общности считаем окрестность точки x шаром $B_r(x)$. Тогда вместе с точками $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $x + h = (x^1 + h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n)$ шару $B_r(x)$ принадлежат также точки $(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n)$, …, $(x^1, x^2, \ldots, x^n + h^n)$ и соединяющие их отрезки. Воспользуемся этим, применяя лемму 3.1:

$$f(x+h)-f(x) = f(x^1+h^1, x^2+h^2, \ldots, x^n+h^n)-f(x^1, x^2, \ldots, x^n) =$$
$$= f(x^1 + h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n) - f(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n)+$$
$$+f(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n) - f(x^1, x^2, \ldots, x^n + h^n) + \ldots +$$
$$+f(x^1, x^2, \ldots, x^n + h^n) - f(x^1, x^2, \ldots, x^n) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1 + \tau h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n)h^1+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, x^2 + \tau h^2, \ldots, x^n + h^n)h^1 + \ldots +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1, x^2, \ldots, x^n + \tau h^n)h^n\,.$$

Пока что мы воспользовались лишь существованием частных производных, а теперь воспользуемся их непрерывностью и запишем предыдущую выкладку в виде

$$f(x+h)-f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}h^1+\alpha_1 h^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}h^2+\alpha_2 h^2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x^n}h^n+\alpha_n h^n\,,$$

где частные производные посчитаны в точке $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — бесконечно малые при $h \to 0$. Но это означает, что

$$f(x + h) - f(x) = f'_x(h) + o(h)\,,$$

где

$$f'_x(h) = \frac{\partial f}{\partial x^1}h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}h^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}h^n\,.\bullet$$

Итак, теорема 3.1 приводит достаточные условия дифференцируемости функции $f : X \to \mathbb{R}$, определенной в области $X \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 3.2 *Пусть для каждой компоненты вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^n$ в окрестности точки x области $X \subset \mathbb{R}^n$ выполнены условия теоремы 3.1. Тогда f дифференцируема в точке x.*

○ В силу определения 1.2 вектор-функция дифференцируема точно тогда, когда дифференцируема каждая ее компонента, поэтому доказательство теоремы излишне. ●

Определение 3.1 Вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемой в области* $X \subset \mathbb{R}^m$, если f дифференцируема в каждой точке $x \in X$. Дифференцируемая вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^n$ называется *непрерывно дифференцируемой* в области $X \subset \mathbb{R}^m$, если частные производные всех ее компонент — непрерывные в области X функции. Множество всех непрерывно дифференцируемых в области $X \subset \mathbb{R}^m$ вектор-функций $f : X \to \mathbb{R}^n$ будем обозначать символом $C^1(X, \mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.3 *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — область и $f : X \to \mathbb{R}^n$ — элементарная вектор-функция. Тогда $f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$.*

○ В силу определения ?? и таблицы производных частные производные по всем переменным всех компонент вектор-функции f — элементарные функции. В силу теоремы 3.2 эти частные производные непрерывны. ●

4 Высшие производные и дифференциалы

Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ в каждой точке x области $X \subset \mathbb{R}^n$, то эта частная производная является функцией $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} : X \to \mathbb{R}$, которая тоже может иметь частную производную в точке $x \in X$, именно

$\dfrac{\partial}{\partial x^j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$, которая называется *частной производной второго порядка* (или просто *второй частной производной*) функции f. Возникает вопрос о влиянии порядка дифференцирований на вычисляемую вторую производную.

Теорема 4.1 *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в некоторой окрестности точки x области $X \subset \mathbb{R}^n$ частные производные*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad \textit{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i},$$

которые непрерывны в точке x. Тогда эти частные производные совпадают в точке x.

$\circ$ Не теряя общности, заменим окрестность точки x шаром $B_r(x) \subset X$, а функцию $f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — функцией только двух переменных, $f(x) = f(x^i, x^j)$. Нам предстоит проверить, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x),$$

если в точке $x = (x^i, x^j)$ обе частные производные непрерывны.

Выберем вектор $h = (h^i, h^j)$ такой, что $x + h \in B_r(x)$. Тогда и точки $(x^i + h^i, x^j)$, $(x^i, x^j + h^j)$ тоже лежат в $B_r(x)$. Введем вспомогательную функцию

$$F(h^i, h^j) = f(x^i{+}h^i, x^j{+}h^j) - f(x^i{+}h^i, x^j) - f(x^i, x^j{+}h^j) + f(x^i, x^j).$$

Если $F(h^i, h^j)$ рассматривать как разность

$$F(h^i, h^j) = \psi(1) - \psi(0),$$

где $\psi(t) := \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x^i + \tau h^i, x^j + t h^j)$, применим теорему Лагранжа еще раз и получим

$$F(h^i, h^j) = \psi'(\xi) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x^i + \tau h^i, x^j + \xi h^j) h^i h^j\,. \qquad (4.5)$$

Теперь представим $F(h^i, h^j)$ в виде разности

$$F(h^i, h^j) = \tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0),$$

где $\tilde{\varphi}(t) =: f(x^i+h^i, x^j+th^j)-f(x^i, x^j+th^j)$. Применив теорему Лагранжа, получим

$$F(h^i, h^j) = \tilde{\varphi}'(\hat{\tau}) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x^i+h^i, x^j+\hat{\tau}h^j)h^j - \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i, x^j+\hat{\tau}h^j)h^j \,.$$

Представив еще раз $F(h^i, h^j)$ в виде разности

$$F(h^i, h^j) = \tilde{\psi}(1) - \tilde{\psi}(0)\,,$$

где $\tilde{\psi}(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}(x^i + th^i, x^j + \hat{\tau}h^j)h^j$, получим, что

$$F(h^i, h^j) = \tilde{\psi}'(\hat{\xi}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x^i + \hat{\xi}h^i, x^j + \hat{\tau}h^j)h^i h^j \,. \qquad (4.6)$$

Сравнивая (4.5) и (4.6), получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x^i + \tau h^i, x^j + \xi h^j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x^i + \hat{\xi}h^i, x^j + \hat{\tau}h^j)\,.$$

Воспользовавшись непрерывностью рассматриваемых частных производных в точке (x^i, x^j), при предельном переходе $(h^i, h^j) \to (0, 0)$ получим требуемое. •

Определив вторые частные производные функции f в точке $x \in X$ нетрудно определить третьи, четвертые и т.д.

Определение 4.1 $C^k(X, \mathbb{R}^n)$ — множество вектор-функций $f : X \to \mathbb{R}^n$, компоненты которых имеют все частнае производные до порядка k включительно, непрерывные в области $X \subset \mathbb{R}^m$.

В силу теоремы 4.1 нахождение всех частных производных до порядка k включительно любой компоненты вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^n$, определенной в области $X \subset \mathbb{R}^m$, не зависит от порядка дифференцирования.

Определение 4.2 $C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ — множество вектор-функций $f : X \to \mathbb{R}^n$, компоненты которых имеют все частнае производные любого порядка, непрерывные в области $X \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема 4.2 *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^n$ — элементарная вектор-функция, определенная в области $X \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$.*

○ Теорема доказывается аналогично теореме 3.3. ●

Для дальнейшего продвижения вперед нам необходимо понятие тензора.

Определение 4.3 Упорядоченный набор $i_1, i_2, \ldots, i_l$ натуральных чисел назовем *мультииндексом ранга* $l > 0$. Будем говорить, что задан *тензор ранга* l (задана *тензор-функция ранга* l, если каждому мультииндексу $i_1, i_2, \ldots, i_l$ ранга l из конечного множества

$$\{i_1, \ldots, i_l : 1 \le i_1 \le I_1, \ldots, 1 \le i_l \le I_l, I_1, \ldots, I_l \in \mathbb{N}\}$$

поставлено в соответствие число $T^{i_1, i_2, \ldots, i_l} \in \mathbb{R}$ (поставлена в соответствие функция $T^{i_1, i_2, \ldots, i_l} : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$). Число $T^{i_1, i_2, \ldots, i_l}$ (функция $T^{i_1, i_2, \ldots, i_l}$) называется *компонентой тензора* $\|T^{i_1, i_2, \ldots, i_l}\|$ (*тензор-функции* $\|T^{i_1, i_2, \ldots, i_l}(x)\|$).

Таким образом, тензор ранга 1 — это вектор $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \|x^i\|$, а тензор ранга 2 — матрица порядка $n \times m$:

$$\begin{pmatrix} x^{11} & x^{12} & \ldots & x^{1m} \\ x^{21} & x^{22} & \ldots & x^{2m} \\ . & . & . & . \\ x^{n1} & x^{n2} & \ldots & x^{nm} \end{pmatrix} = \|x^{ij}\| \,.$$

Примерами тензор-функций ранга 1 и 2 служат вектор-функция и ее матрица Якоби соответственно. Удобно в дальнейшем *тензором ранга* 0 считать любое число, а *тензор-функцией ранга* 0 — любую функцию.

Пусть теперь $f \in C^k(X, \mathbb{R})$, X — область в $\mathbb{R}^n$, $k \ge 1$. Тогда по теореме 3.1 существует производная $f'_x : X \to \mathbb{R}^n$, которая каждому $x \in X$ ставит в соответствие градиент ∇f. Другими словами, производная тензор-функции ранга 0 $f : X \to \mathbb{R}$ есть тензор-функция ранга 1

$$f'_x : X \to \mathbb{R}^n \,, \;\; f'_x : x \to \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(x) \,.$$

Если $k \geq 2$, то по теореме 3.2 вектор-функция $f'_x(x) = \nabla f(x)$ имеет производную $(f'_x)'_x : X \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, которая каждому $x \in X$ ставит в соответствие матрицу Якоби

$$(f'_x)'_x : x \to \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix} (x) \,. \tag{4.7}$$

По аналогии с предыдущем случаем производную $(f'_x)'_x$ вектор-функции $f'_x(x) = \nabla f(x)$ называют второй призводной функции $f : X \to \mathbb{R}$, т.е. $(f'_x)'_x = f''_{xx}$. Кроме тог, матрица (4.7) носит название матрицы Гессе[12] функции f в точке x и обозначается символом $H_f(x)$. Таким образом, все сказанное выше можно записать в виде

$$H_f(x) = J_{\nabla f}(x) \,.$$

На тензорном языке это выглядит так: вторая производная тензор-функции ранга 0 есть тензор функция ранга 2, полученная взятием градиента от каждой компоненты тензор-функции ранга 1, являющейся первой производной тензор-функции ранга 0. Эти соображения приводят нас к следующему определению.

Определение 4.4 Пусть $f \in C^k(X, \mathbb{R})$ — функция, определенная в области $X \subset \mathbb{R}^n$, и пусть определена тензор-функция ранга l

$$\left\| \frac{\partial^l f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_l}} \right\| (x) \,, \;\; 1 \leq i_j \leq n \,, \;\; 1 \leq l \leq k \,, \tag{4.8}$$

являющаяся l-той производной функции f. Тогда $l+1$-*ой производной* функции f называется тензор-функция ранга $l+1$,

[12] Людвиг Отто Гессе (1811-1874) — немецкий математик. Основные работы относятся к геометрии.

полученная взятием градиента от каждой компоненты тензор-функции (4.8).

Упражнение 4.1 Определить высшие производные вектор-функции $f \in C^k(X, \mathbb{R}^n)$, заданной в области $X \subset \mathbb{R}^m$.

Теперь перейдем к определению дифференциала функции многих переменных.

Определение 4.5 *Сверткой* тензора $\|T^{i_1 i_2 \dots i_l}\|$ ранга $l \geq 1$ и вектора $h = (h^1, h^2, \dots, h^{I_j})$ по индексу $1 \leq i_j \leq I_j$ называется тензор ранга $l-1$, компоненты $\tilde{T}^{i_1 i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_l}$ которого равны

$$\sum_{i_j=1}^{I_j} T^{i_1 i_2 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_l} h^{i_j}\,.$$

Таким образом, свертка тензора $g = (g^1, g^2, \dots, g^m)$ равна 1 и вектора $h = (h^1, h^2, \dots, h^m)$ есть число (тензор ранга 0)

$$\sum_{i=1}^{m} h^i g^i\,.$$

Свертка тензора $\|g^{ij}\|$ ранга 2 и вектора $h = (h^j)$ есть вектор (тензор ранга 1) с компонентами

$$\left(\sum_{j=1}^{m} g^{1j} h^j, \sum_{j=1}^{m} g^{2j} h^j, \dots, \sum_{j=1}^{m} g^{nj} h^j, \right)\,.$$

Полученный в результате свертки тензор ранга $l-1 \geq 1$ можно опять свернуть с каким-либо вектором и получить в результате тензор ранга $l-2$.

Определение 4.6 *Дифференциалом* $d^l f(x)$ порядка $l \geq 1$ функции $f \in C^k(X, \mathbb{R})$, $k \geq l$ в точке x области $X \subset \mathbb{R}^n$ называется l-кратная свертка l-той производной функции f (тензор-функции ранга l) в точке x с вектором $dx = (dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$, т.е.

$$d^l f(x) \sum_{\substack{i_1=1\\ i_2=1\\ \dots\\ i_l=1}}^{n} \frac{\partial^l f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_n}}(x) dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_l}\,.$$

Таким образом,

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n =< \nabla f(x), dx >;$$

$$d^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j =< H_f(x)dx, dx > .$$

Упражнение 4.2 Определить дифференциал любого порядка вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^n$, определенный в области $X \subset \mathbb{R}^m$, и выписать df и $d^2 f$.

5 Формула Тейлора

Определение 5.1 Пусть $h \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор, $\|h\| = 1$. $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, определенная в области $X \subset \mathbb{R}^n$, $x \in X$. Предел $\lim\limits_{t \to 0+} f(x + th)$, если он существует, называется *пределом f в точке x по направлению h.*

Упражнение 5.1 Показать, что из существования предела функции f в точке $x \in X$ следует существование предела по любому направлению.

Обратное неверно, как показывает следующий

Пример 5.1 Найдем предел функции $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ по направлению (α^1, α^2) в точке $(0, 0)$;

$$\lim_{t \to 0+} f(0 + t\alpha^1, 0 + t\alpha^2) = \lim_{t \to 0+} \frac{\alpha^1 \alpha^2}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}.$$

Итак, функция $f(x, y)$ имеет предел в точке $(0, 0)$ по любому направлению (α^1, α^2), однако предела в точке $(0, 0)$ эта функция не имеет.

Определение 5.2 Пусть $h \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор, $\|h\| = 1$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ — функция, определенная в области $X \subset \mathbb{R}^n$, $x \in X$. Предел

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t},$$

если он существует, называется *производной функции* f *по направлению* h *в точке* x и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial h}$.

Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, & xy \neq 0\,; \\ 0\,, & xy = 0\,, \end{cases}$$

как показано в примере 1.1, имеет производные по направлениям $(1,0)$ и $(0,1)$ в точке $(0,0)$, однако не дифференцируема в этой точке.

Лемма 5.1 *Пусть функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке по любому направлению* $h \in \mathbb{R}^n$, *причем*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) =< \nabla f(x), h > \ .$$

$\circ$ Пусть $h \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор единичной длины. Поскольку точка $x \in X$ внутренняя, то $\exists T \in \mathbb{R}_+ \ \forall t \in [-T,T]$ $(x+th \in X)$. Вектор-функция $\varphi : [o,T] \to \mathbb{R}^n$, заданная формулой $\varphi(t) = x + th$ дифференцируема в точке $t = 0$ (очевидно!), причем $\varphi'_t = h$. Из условия теоремы и в силу теоремы 2.2 получаем

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} =< \nabla f(x), h > \ .\bullet$$

Теперь возьмем функцию $f \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ и вектор $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x+h \in X$ для некоторой точки $x \in X$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x+th)\,, \ \ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}\,.$$

Она дифференцируема сколь угодно раз $\forall t \in (0,1)$. Обозначим ее l-тую производную символом $\varphi_t^{(l)}$.

Лемма 5.2

$$\varphi_t^{(l)} = \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^l f(x+th)\,.$$

$\circ$ Доказательство проведем методом математической индукции. Пусть $l = 1$, тогда, рассуждая как при доказательстве леммы 5.1, получим

$$f_t' =< \nabla f(x+th), h >= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x+th)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x+th)h^2 + \ldots +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x+th)h^n = \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right) f(x+th)\,.$$

Предположим теперь, что при $l = k$ утверждение леммы справедливо. Тогда

$$\varphi_t^{(k+1)} = (\varphi_t^{(k)})_t' =$$
$$= \left\langle \nabla \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^k f(x+th), h \right\rangle =$$
$$= \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^k \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x+th)h^1 + \ldots +\right.$$
$$\left.+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x+th)h^n\right) =$$
$$= \left(h^1\frac{\partial}{\partial x^1} + h^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + h^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{k+1} f(x+th)\,.\bullet$$

Замечание 5.1 Пользуясь тензорным языком, вторую производную функции $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ можно записать в видв

$$\varphi_t'' = \langle \nabla < \nabla f(x+th), h >, h\rangle =$$
$$= \left\langle (\frac{\partial}{\partial x^1}(\frac{\partial f}{\partial x^1}h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}h^n), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(\frac{\partial f}{\partial x^1}h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}h^n)), h \right\rangle =$$
$$=< H_f(x+th)h, h > \ .$$

Замечание 5.2 Зафиксируем точки $x_0, x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим вектор $dx = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n) = (x^1 - x_0^1, x^2 - x_0^2, \ldots, x^n - x_0^n)$. Положив $dx = h$, из леммы 5.2 получим при $t = 0$

$$\varphi_{t=0}^{(l)} = \left(dx^1\frac{\partial}{\partial x^1} + dx^1\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + dx^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^l f(x) =$$
$$= \sum_1^n \frac{\partial^l f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_l}}(x) dx^{i_1}dx^{i_2}\ldots dx^{i_l} = d^l f(x)\,.$$

Теорема 5.1 *Пусть $f \in C^{l+1}(B_r(x), \mathbb{R})$, где шар $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$, вектор $h \in \mathbb{R}^n$ таков, что $x + h \in B_r(x)$. Тогда*

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + h^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^k f(x) + R_{l+1}(x, h)\,,$$

где

$$R_{l+1}(x, h) = \frac{1}{(l+1)!} \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + h^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{l+1} f(x + \tau h)\,,$$

$0 \leq \tau \leq 1$, *— остаточный член в форме Лагранжа, либо*

$$R_{l+1}(x, h) = \frac{1}{(l+1)!} \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + h^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{l+1} f(x) + o(\|h\|^l)$$

— остаточный член в форме Пеано.

∘ Заметим, что $(x + h \in B_r(x)) \Rightarrow (x - h \in B_r(x))$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi : [-1, 1] \to B_r(x)\,,$$

заданную формулой $\varphi(t) = f(x + th)$. По построению $\varphi \in C^l[-1, 1]$, поэтому к ней применима формула Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} \varphi_0^{(k)} + R_l(x, \tau)$$

с остаточным членом в форме Лагранжа или Пеано. Отсюда посредством леммы 5.2 получаем требуемое. •