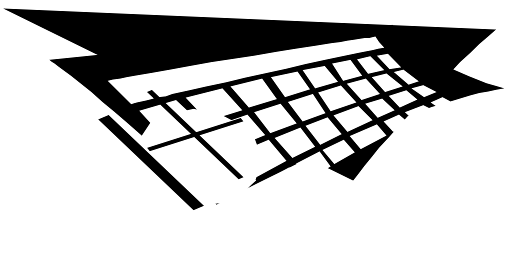
Г. В. ВАЩЕНКО

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ОСНОВЫ КОНЕЧНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

$$L^{(n-1)} \dots L^{(1)} A^{(1)} = A^{(n)}$$



Красноярск 2005

Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО “СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

Г. В. ВАЩЕНКО

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ОСНОВЫ КОНЕЧНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Утверждено редакционно-издательским советом СибГТУ
в качестве учебного пособия для студентов направлений 552800 и 654600
специальности 220400 всех форм обучения

Красноярск 2005

УДК 519.612.2
ББК 22.193

ВАЩЕНКО Г. В. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА. ОСНОВЫ КОНЕЧНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: Учебное пособие для студентов направлений 552800 и 654600, специальности 220400 всех форм обучения. - Красноярск: СибГТУ, 2005. - 80 с.

Излагаются конечные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Описание каждого метода сопровождается представлением вычислительной схемы метода, матричной и координатной формами записи, возможного алгоритма реализации, рассмотрением примеров, упражнениями, задачами и лабораторными заданиями.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс "Вычислительная математика". Может быть полезно аспирантам и преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу и программированию.

Ил. 8, библиогр. назв. 15.

Рецензенты:
д.т.н., проф. Л.Ф. Ноженкова (ИВМ СО РАН)
к.т.н., доц. Т. Г. Зингель (СибГТУ)

ВВЕДЕНИЕ

В пособии излагаются конечные методы решения систем линейных алгебраических уравнений такие, как метод исключения Гаусса и его модификации, метод Жордана-Гаусса, компактная схема (LU-разложение), метод квадратных корней, метод ортогонализации.

В лекционное время не только невозможно, но иногда бывает нецелесообразно приводить одновременно со словесным описанием метода его вычислительную схему как в координатной, так и в матричной формах записи, рассматривать примеры применения метода и возможный алгоритм реализации. Поэтому пособие является дополнением практического характера к лекционному курсу по разделу “Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений”.

Содержание пособия организовано таким образом, чтобы обеспечить наибольшую эффективность в усвоении того или иного метода и его алгоритмических основ. Каждый из разделов пособия, начиная со второго, содержит представление вычислительной схемы в матричной и координатной формах, возможного алгоритма реализации, описанного на псевдокоде, примеры применения метода, упражнения, задачи, лабораторные задания и завершается перечнем контрольных вопросов. Количество задач и упражнений, включенных в каждый раздел, достаточно для обеспечения практических и лабораторных занятий, домашних заданий, контрольных и зачетов по данной тематике. Некоторые из задач могут служить основой постановок заданий для выполнения курсовых работ, предусмотренных программой курса.

Учитывая специфику специальности 220400 в лабораторные работы включены задания, требующие использования одной из систем, предназначенной для решения математических задач : MathCad или MatLab.

Первый раздел содержит необходимые сведения из линейной алгебры, теории матриц и машинной арифметики. Для активного исполь-зования этих сведений в конце раздела приводятся упражнения и задачи. Данный раздел можно рассматривать как справочный при освоении мето-дов, алгоритмов, выполнении упражнений, задач и лабораторных работ.

Предполагается, что векторы и матрицы действуют в вещественном пространстве, а рассматриваемые методы ограничиваются применением их для нахождения решений уравнений с неособенными квадратными матрицами.

Учебное пособие разработано на основе лекционного курса “Вычислительная математика” читаемого автором студентам специальности 220400 “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем” факультета автоматизации и информационных технологий (ФАИТ) Сибирского государственного технологического университета.

1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данном разделе приводятся основные сведения из линейной алгебры, теории матриц и машинной арифметики.

1.1 Конечные методы. Вычислительные алгоритмы. Погрешности. Вычислительная устойчивость

Решение систем линейных алгебраических уравнений является одной из основных задач как в линейной алгебре, так и во многих приложениях.

Конечные методы. Пусть дана система

$$Ax = b, \tag{1.1.1}$$

где A - $(n \times n)$ -матрица, x и b – вектор -столбцы.

В общем случае, всякий численный метод в линейной алгебре рассматривается как некоторая последовательность выполнения заданных арифметических операций над элементами входных данных.

Конечным или прямым методом называется такой метод, который дает возможность найти решение за конечное число арифметических операций при любых входных данных.

Суть конечных методов состоит в преобразовании системы (1.1.1) в такую равносильную систему, для которой матрица системы легко обращается и, значит, легко находится решение системы. Если обе части равенства (1.1.1) умножить слева на невырожденные матрицы L_1, L_2, ..., L_k, то новая система будет равносильна системе (1.1.1)

$$L_k L_{k-1} \ldots L_1 Ax = L_k L_{k-1} \ldots L_1 b. \tag{1.1.2}$$

При этом матрицы L_i подбираются такими, чтобы матрица в левой части системы (1.1.2) была достаточно простой структуры, например, треугольной, диагональной или ортогональной. В этом случае легко вычисляются определитель матрицы A исходной системы и обратная к A матрица A^{-1}.

Одним из первых конечных методов является метод исключения Гаусса. Этот метод дает возможность привести исходную систему к системе с верхнетреугольной матрицей с помощью левых треугольных матрицы L_i. Существуют схемы с выбором главного элемента, компактная схема. К методу гауссовского исключения относятся метод Жордана-Гаусса, схема оптимального исключения, которые приводят исходную систему (1.1.1) к системе с диагональной матрицей.

Все эти методы составляют группу *методов исключения*, суть которых состоит в том, что при каждом умножении на матрицу L_i в матрице исходной системы исключается один или несколько элементов.

Другую группу методов составляют методы, основанные на построении вспомогательной системы векторов, связанных с матрицей исходной системы и ортогональных в некоторой метрике. Одним из первых методов этой группы является метод ортогонализации строк, который приводит к нахождению решения в виде вектора, ортогонального всем векторам составляющим систему. Матрицы L_i в этом методе - левые треугольные, матрица системы - ортогональная. Возможна и ортогонализация столбцов, тогда матрицами L_i будут верхнетреугольные.

Вычислительные алгоритмы. В общем случае под вычислительным алгоритмом понимается точно определенная последовательность действий над данными, позволяющая с помощью вычислительной машины преобразовать за конечное число операций некоторый массив данных, называемый *входными данными*, в другой массив, называемый *выходными данными*.

Вычислительный алгоритм в задачах линейной алгебры состоит из двух частей: *вычислительной схемы* и *алгоритма*. Вычислительная схема описывает действия с элементами матриц, строками и столбцами матриц и др. Вычислительная схема не связана с конкретной вычислительной машиной. Алгоритм предназначен для реализации заданной вычислительной схемы с помощью программы для конкретной вычислительной машины. Алгоритм может включать в себя не только вычисления непосредственно по заданной вычислительной схеме, но и должен учитывать требования к организации ввода и вывода, размещения массива данных с целью обеспечения оптимальных временных характеристик и затрат памяти вычислительной машины.

Погрешности. Вычислительный алгоритм, как правило, связан с потерей точности. Потеря точности возникает из-за погрешностей, которые появляются на различных этапах вычислений. Основными источниками погрешностей являются: *погрешность модели*, *погрешность входных данных*, *погрешность аппроксимации*, *погрешность округлений*.

Погрешность модели связана с приближенным математическим описанием некоторого реального процесса.

Погрешность входных данных возникает в силу ошибок измерения, наблюдения и т.п., а также ошибок округления при вводе данных и размещения данных в памяти вычислительной машины.

Погрешность аппроксимации связана с ограничениями при вычислениях по заданному вычислительному алгоритму или на отдельных этапах его функционирования.

Погрешность округления возникает в результате необходимости представления числа в виде конечной последовательности цифр и зависит от конкретной вычислительной машины, выбора режима представления и работы с этими данными (вычисления с одинарной и двойной точностью).

Вычислительная устойчивость. Вычислительный алгоритм характеризуется устойчивостью. Под *устойчивостью вычислительного* алгоритма понимается свойство, характеризующее скорость накопления суммарной вычислительной погрешности. Чем лучше свойство устойчивости вычислительного алгоритма, тем меньше результаты вычислений зависят от выбора конкретной вычислительной машины.

1.2. Векторы и матрицы

Матрицы. Таблица вещественных чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей размера* $m \times n$ или $m \times n$*-матрицей*. Числа a_{ij} называются *элементами* этой матрицы. Индекс i указывает номер строки, а индекс j - номер столбца, на пересечении которых расположен данный элемент a_{ij}. Для явного указания элементов матрицы используется обозначение $A = (a_{\mathrm{ij}})$.

Сумма и разность матриц. Пусть a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} - элементы $m \times n$ - матриц A, B, C соответственно. Матрица C называется *суммой матриц* A и B ($C = A + B$), если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Аналогично определяется разность матриц, именно, $C = A - B$, если $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Складывать и вычитать можно только матрицы одинаковых размеров.

Произведение матриц. *Произведение* $m \times n$ *- матрицы* $A = (a_{ij})$ *на вещественное число* α ($C = \alpha A = A\alpha$) определяется по формуле $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Произведение $m \times n$ *-матрицы* $A = (a_{ij})$ на $s \times k$ *-матрицу* $B = (b_{ij})$ ($C = AB$) определено лишь при $s = n$ как $m \times k$ *-матрица* C с элементами c_{ij},

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}\,, 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le k.$$

Произведение матриц определено, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Транспонирование матриц. *Транспонированной к* $m \times n$ *-матрице* $A = (a_{ij})$ называется $n \times m$*-матрица* $A^{\mathrm{T}} = (a'_{ij})$ с элементами $a'_{ij} = a_{ji}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Для транспонированной матрицы справедливы следующие свойства:

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$, т.е. дважды транспонированная матрица совпадает с исходной.
2. $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.
3. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

Вектор. Под *вектор -столбцом* x размером $n \times 1$ понимается матрица размером $n \times 1$, т.е.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вектор -строкой x размером $1 \times n$ называется *матрица* размером $1\times n$, т.е.

$$x = \left(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots,\ \ x_n\right).$$

Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковое число компонент, и если их соответствующие компоненты равны, т.е. $x = y$, если совпадают их размерности и $x_1 = y_1$, ..., $x_n = y_n$.

Векторы одинаковых размеров, являющиеся одновременно столбцами или строками, можно складывать (вычитать) как матрицы одинаковых размеров.

Произведение $m \times n$ *-матрицы* A на *вектор-столбец* x определяется как

$$y = Ax, \text{ или } y_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}x_p\ ,\ 1 \le i \le m,$$

где a_{ip} -элементы матрицы A, x_p -компоненты вектора x, а y_i -компонеты вектора y.

Произведение *вектор-строки* x на $m \times n$ *-матрицу* A определяется как

$$y = xA, \text{ или } y_i = x_1 a_{1i} + \ldots + x_n a_{ni} = \sum_{p=1}^{n} x_p a_{pi}\ ,\ 1 \le i \le m,$$

где a_{ip} -элементы матрицы A, x_p -компоненты вектора x, а y_i -компоненты вектора y.

На множестве векторов одинаковых размеров определена операция скалярного произведения. Пусть $x = \left(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots,\ \ x_n\right)^T$, $y = \left(y_1,\ \ y_2,\ \ \ldots,\ \ y_n\right)^T$ или $x = \left(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots,\ \ x_n\right)$ и $y = \left(y_1,\ \ y_2,\ \ \ldots,\ \ y_n\right)$, тогда *скалярное произведение* векторов x и y обозначается через (x, y) и вычисляется по формуле

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{p=1}^{n} x_p y_p\ .$$

Скалярное произведение удовлетворяет следующим свойствам:

1. $(x, x) \ge 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $(x, y) = (y, x)$ для любых векторов x, y;
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для любых векторов x, y и z;
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любых векторов x, y и числа λ.

Векторы x и y называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. $(x, y) = 0$. Нулевой вектор 0 ортогонален любому вектору x, т.е. $(0, x) = 0$.

n - мерный вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ называется *неотрицательным,* если все его компоненты $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ называется *полуположительным*, если $x_i \geq 0$ и, если хотя бы одна его компонента $x_i > 0$. Вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ называется *положительным*, если $x_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Квадратные матрицы. Матрица A размера $n \times n$ называется *квадратной,* а число n - порядком этой матрицы.

Для множества квадратных матриц порядка n справедливы все вышеописанные операции. Для любых двух квадратных матриц одного и того же порядка n всегда определено их произведение.

Матрица $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot\ldots\cdot A}_{k}$ называется *k-ой степенью* матрицы A, где k-целое число. Справедливы правила: $A^p A^s = A^{p+s}$; $(A^p)^s = A^{ps}$.

Нижнетреугольные матрицы. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *нижней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Верхнетреугольные матрицы. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *верхней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

Диагональные матрицы. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *диагональной*, если $a_{ij} \neq 0$ при $i = j$, а остальные элементы равны нулю и записывается как $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn})$.

Диагональная матрица A называется *единичной E*, если $a_{ij} = 1$ при $i = j$, а остальные элементы равны нулю.

Симметрические матрицы. Матрица A называется *симметрической*, если $A = A^{\mathrm{T}}$, т.е. если $(a_{ij}) = (a_{ji})$.

Определитель квадратной матрицы. Определитель $\det A$ квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ порядка n вводится рекуррентно, именно,

если $A = (a)$ -матрица порядка 1, то $\det A = a$; если A -порядка $n > 1$, то

$$\det A = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \ \ldots\ + (-1)^n a_{1n}A_{1n} = \sum_{p=1}^{n} a_{1p} \det A_{1p} \,,$$

где A_{1j} - а*лгебраическое дополнение* порядка n-1 к элементу a_{1j} строки матрицы A.

(Это определение основано на теореме Лапласа, формулируемой ниже по тексту).

Определитель матрицы A обладает следующими свойствами:

1. $\det(AB) = \det A \det B$
2. $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$.
3. $\det E = 1$.
4. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$, α - число.
5. $\det A \neq 0$ - условие невырожденности матрицы A.

Определитель треугольной и диагональной матриц равен произведению ее диагональных элементов, т.е.

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} ,$$

где a_{ii} - элементы, стоящие на главной диагонали матрицы A.

Минором M k-го *порядка* матрицы A называется определитель матрицы, составленный из элементов данной матрицы, стоящих на пересечении произвольно выбранных ее k строк и k столбцов с сохранением их порядка, т.е *минор* k-го *порядка* есть определитель квадратной матрицы размером $k \times k$.

Пусть, например, в матрице A выбраны произвольные k строк с номерами i_1, i_2 ,..., i_k и k столбцов с номерами j_1, j_2 ,..., j_k., тогда *минором порядка* k будет определитель обозначаемый как

$$M = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix},$$

где i_1, i_2 ,..., i_k - номера строк, j_1, j_2 ,..., j_k.- номера столбцов матрицы A.

Дополнительным минором к минору M порядка k называется определитель порядка n - k, полученный из матрицы A вычеркиванием тех k строк и k столбцов, в которых расположен M.

Алгебраическим дополнением минора M называется его дополнительный минор, взятый со знаком $(-1)^{v}$, где

$$v = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k .$$

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}.

Если номера строк, в которых расположен минор M, совпадают с номерами столбцов, то минор M называется *главным минором* и обозначается как $M = A(i_1\, i_2 \ldots i_k)$. Например, минорами 1-го порядка являются элементы матрицы, а матрица, полученная из A вычеркиванием i - ой строки и j-го столбца, называется *минором* элемента a_{ij}.

Теорема Лапласа [1]. *Пусть в матрице A порядка n произвольно выбраны k строк* (*или k столбцов*), $1 \le k \le n-1$. *Тогда определитель* $\det A$ *равен произведению всех миноров порядка k, содержащихся в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Ранг матрицы. Максимальное число линейно независимых строк матрицы A называется *рангом матрицы A* или, рангом по строкам, и обозначается как *rangA*.

Если рассматривать строки матрицы A как n-мерные векторы, а столбцы - как m-мерные векторы, то и ранг системы строк, и ранг системы столбцов равны рангу матрицы. Из этого следует, что ранг транспонированной матрицы A^{T} совпадает с рангом A.

Ранг матрицы определяется и через миноры матрицы A. Именно, максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется *рангом* этой матрицы.

Обратная матрица. Пусть A и B- квадратные матрицы порядка n и $AB = E$, тогда матрица B называется *обратной* к A и обозначается как A^{-1}, т.е. $A A^{-1} = A^{-1} A = E$.

Если A^{-1} существует, то матрица A называется *невырожденной*. В противном случае матрица A называется *вырожденной*, или *сингулярной*.

Основные свойства обратной матрицы:

1.$\det A^{-1} \det A = \det E = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = 1/ \det A$.

2. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ и, в общем случае $(A_1 A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$.

3.$(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Один из способов нахождения обратной матрицы A^{-1} к исходной A состоит в следующем.

Пусть A - невырожденная матрица порядка n, $\det A \neq 0$. Вычисляется определитель $\det A$ и составляется союзная (присоединенная) матрица $A_s = (A_{ji})$, состоящая из алгебраических дополнений соответствующих элементов a_{ij} матрицы A, при этом миноры элементов строк размещаются в соответствующих столбцах. Далее, все элементы матрицы A_s делятся на величину определителя $\det A$. Таким образом, $A^{-1} = A_s / \det A$.

Ортогональные матрицы. Вещественная матрица Q называется *ортогональной*, если $Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}$ или $QQ^{\mathrm{T}} = Q^{\mathrm{T}}Q = E$. Ортогональная матрица Q имеет следующие свойства:

1.Пусть q_i, $i = 1, 2, ..., n$ - столбцы ортогональной матрицы Q, тогда из равенства $Q^{\mathrm{T}}Q = E$ следует, что $(q_i, q_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Это равенсто означает, что система $q_1, q_2, ..., q_n$ векторов ортонормирована. Аналогичное равенство справедливо и для строк матрицы Q.

2.Для суммы квадратов элементов строк (столбцов) матрицы Q выполняется равенство

$$\sum_{p=1}^{n} q_{ip}^2 = \sum_{p=1}^{n} q_{pi}^2 = 1.$$

3.Определитель ортогональной матрицы равен ± 1, $\det Q = \pm 1$.

Положительно определенные матрицы. Матрица A называется *положительно определенной*, если для любого $x \neq 0$ выполняется неравенство $(Ax, x) > 0$.

Для определения того, что является ли данная матрица положительно определенной или нет, служит проверка выполнения условий Сильвестра [1],[2],[7].

Теорема (*критерий Сильвестра).* *Для положительной определенности матрицы A необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы были положительными, т.е.*

$$a_{11} = \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Нормальные матрицы. Матрица, перестановочная со своей транспонированной $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$ называется *нормальной*.

1.3. Линейные пространства

Линейное пространство. Под линейным (векторным) пространством в вычислительных методах линейной алгебры понимается n-мерное арифметическое линейное пространство R^n, элементами которого являются упорядоченные наборы по n чисел, называемые *n-мерными вектор - столбцами* (*вектор -строками*) [1], [2], [7].

Абстрактное понятие линейного пространства характеризуют две операции: *сложения векторов* и *умножения на скаляр*. Пусть $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)^{\mathrm{T}}$ - элементы из R^n, α -вещественное число, тогда сумма $x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n)^{\mathrm{T}}$ и произведение $\alpha x = (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \ldots,\ \alpha x_n)^{\mathrm{T}}$ также принадлежат пространству R^n. В линейном пространстве выполняются следующие свойства:

$$x + y = y + x,\ \ x + (y + z) = (x + y) + z,\ \ x + 0 = x,\ \ x + (-x) = 0,$$
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,\ \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,\ \ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),\ 1x = x,$$

где $x, y, z \in R^n$, $0 = (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ - нулевой вектор пространства R^n, α, β, 1- вещественные числа.

Подпространства. Множество L векторов из R^n называется *подпространством* пространства R^n, если

а) вместе с каждым x из L оно содержит и все векторы αx ($\alpha x \in L$);

б) вместе с векторами x, y из L оно содержит их сумму $x + y$ ($x + y \in L$).

Подпространство L может состоять из одного вектора - *нулевого*, в этом случае подпространство называется *тривиальным*. Нетривиальное подпространство, не совпадающее с R^n, называется *собственным*. Например, векторы из R^3 вида $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha + 3\beta,\ 3\alpha + 2\beta,\ 4\alpha + 5\beta)$ образуют собственное подпространство R^3.

Пусть L_1 и L_2 линейные подпространства из R^n, тогда множество векторов, принадлежащих как L_1, так и L_2 называется *пересечением* подпространств L_1 и L_2. *Суммой* подпространств $L_1 + L_2$ называется множество всех сумм $x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Если для каждого вектора x из $L = L_1 + L_2$ представление $x = x_1 + x_2$ единственно, то L называется *прямой суммой* подпространств L_1 и L_2.

Линейная зависимость и независимость. Линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L \subset R^n$ с коэффициентами α_k называется *вектор* вида

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = \sum_{p=1}^{k} \alpha_p x_p .$$

Система векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ называется *линейно зависимой*, если можно подобрать такие коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, среди которых хотя бы один отличен от нуля, что линейная комбинация $x = \sum_{p=1}^{k} \alpha_p x_p$ является нулевым вектором.

Система векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ называется *линейно независимой*, если равенство $\sum_{p=1}^{k} \alpha_p x_p = 0$ выполняется лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Пример. Векторы из R^3

$x_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ линейно зависимы, так как $x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$.

Однако x_1, x_2 линейно независимы, т.к. из равенства $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Множество всех линейных комбинаций фиксированной системы векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ называется *линейной оболочкой* этой системы векторов.

Базис пространства. Система линейно независимых векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ пространства R^n, называется *базисом* R^n, если любой вектор z из R^n можно представить в виде $z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Все базисы в R^n состоят из одинакового числа n векторов, а число n называется *размерностью* пространства R^n.

Коэффициенты α_1, α_2, ... , α_n в разложении некоторого вектора z по базису $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называются *компонентами* (*координатами*) вектора z.

В пространстве R^n имеется базис, называемый *естественным*, или *стандартным*. Этот базис образован единичными векторами

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Особенность этого базиса состоит в том, что координатами некоторого вектора $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в этом базисе будут сами числа z_1, z_2, ..., z_n.

Система линейно независимых векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ из R^n, называется *ортонормированнм базисом* R^n, если векторы $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

попарно ортогональны друг другу и каждый из них имеет длину, равную единице, т.е.

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

В частности, стандартный базис является ортонормированным.

1.4. Нормы векторов и матриц

Норма вектора. В пространстве R^n скалярной характеристикой вектора является норма, которая дает возможность сравнивать векторы по величине и, которая, в общем случае, обобщает понятие длины вектора. Понятие нормы определяется аксиоматически [2].

Нормой вектора x называется действительное число (функционал) $\|x\|$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (неотрицательность);

2) $\|ax\| = |a|\|x\|$, a -произвольное число (скаляр);

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для произвольных x и y.

Норма вектора определяется различными способами в зависимости от целей исследования и условий задачи, но при любом определении норма должна удовлетворять вышеуказанным условиям 1), 2), 3).

Наиболее распространенными в практике вычислений являются следующие три нормы.

1. Равномерная норма $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

2. Абсолютная норма $\|x\|_l = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

3. Евклидова (сферическая) норма $\|x\|_k = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(x, x)} = |x|$.

Две векторные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные вещественные числа c_1 и c_2, что для любого вектора x выполняются неравенства

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 ,$$

причем c_1 и c_2 не зависят от выбора x

Неравенство Коши -Буняковского. Для любых векторов x, y справедливо неравенство

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Норма матриц. Рассмотрим теперь множество всех n x n -матриц. Для матриц понятие нормы также вводится аксиоматически.

Нормой квадратной матрицы A называется действительное число (функционал) $\|A\|$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (нулевая матрица);
2) $\|aA\| = |a|\|A\|$, a -произвольное число (скаляр);
3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ для произвольных A и B;
4) $\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$ для произвольных A и B.

Как и норму вектора, норму матрицы можно вводить различными способами, но поскольку матрицы и векторы, как правило, рассматривают ся совместно, то матричная норма должна соотноситься с векторной, т.е. матричная норма должна удовлетворять *условию согласованности*, именно, если для любых x и A справедливо неравенство $\|A\,x\| \leq \|A\|\,\|x\|$, тогда норма матрицы $\|A\|$ согласована с нормой вектора $\|x\|$.

Другим требованием к норме матрицы, является *условие подчиненности*. Норма матрицы A называется *подчиненной норме* вектора x, если выполняется равенство $\|A\| = \max\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\|$.

Условие подчиненности означает, что за подчиненную норму матрицы A при заданной норме вектора x принимается максимальная норма векторов Ax, когда x пробегает множество всех векторов, норма которых равна единице.

Матричные нормы соответствующие векторным нормам $\|x\|_\infty$, $\|x\|_l$ имеют вид

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \;,\quad \|A\|_l = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \;.$$

Эти нормы легко вычисляются. Евклидовая норма матрицы вычисляется сложнее и определяется как

$$\|A\|_k = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right]^{1/2} .$$

Матричную норму можно интерпретировать как максимальную длину вектора, полученного в результате действия преобразования A к векторам единичной сферы.

Энергетические нормы. Важный класс норм образуют так называемые *энергетические*, или A *-нормы,* определяемые выражением

$$\|x\|_A = (Ax, x)^{1/2} = \left(x^T, Ax\right)^{1/2},$$

где A - некоторая заданная симметрическая положительно определенная матрица. Евклидовая норма, в этом случае, получается как частный случай при A= E.

1.5. О системах линейных алгебраических уравнений

Система вида

$$\left.\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m, \end{array}\right\}, \qquad (1.5.1)$$

где a_{ij} ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$) и $b_1, ..., b_m$- заданные числа, $x_1, ..., x_n$ - неизвестные, называется *системой линейных алгебраических уравнений*. Линейная система (1.5.1) допускает следующие формы записи :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ или } \quad Ax = b,$$

где $A = (a_{ij})$ - $m \times n$-матрица системы, $x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор-столбец, $b = (b_1, ..., b_m)^{\mathrm{T}}$ - вектор-столбец свободных коэффициентов;

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip}x_p = b_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} (a_1, x) = b_1, \\ (a_2, x) = b_2, \\ \dots \\ (a_m, x) = b_m, \end{array}$$

где a_p, $p = 1, 2, ..., m$ - вектор-строки, $x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор-столбец неизвестных.

Система (1.5.1) называется *однородной*, если все b_i, $i = 1, 2, ..., m$ равны нулю. В противном случае, т.е. при $b \neq 0$, система называется *неоднородной*.

Система (1.5.1) называется *совместной*, если существует вектор $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ такой, что $Ax^0 = b$, тогда вектор x^0 называется *решением системы*, в противном случае - *несовместной*.

Множество решений системы (1.5.1) характеризуется следующим образом. Это множество может быть пустым, в этом случае система *несовместна*. Множество состоит из единственного решения, в этом случае система называется *определенной*. Множество имеет более одного решения, в этом случае система называется *неопределенной*.

Если присоединить столбец b к матрице A, то полученная матрица B называется *расширенной* матрицей системы (1.5.1).

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Условия совместности для линейной системы (1.5.1) даются следующей теоремой [1],[2].

Теорема Кронекера-Капелли. *Система* (1.5.1) *совместна в том и только в том случае, когда ранги расширенной и исходной матриц совпадают*, *т.е. rangA = rangB*.

Системы с квадратной матрицей. Пусть матрица системы (1.5.1) квадратная, $n = m$ и невырожденнная, $\det A \neq 0$ (это условие обеспечивает совместность и определенность), тогда единственное решение x_1, x_2, ..., x_n может быть получено по формулам Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \ \Delta_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j ,$$

где A_{ji} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

При больших n эти формулы не используются, так как число арифметических операций возрастает с ростом размерности и составляет $n^2 n!$.

Однородные системы линейных уравнений. Пусть у системы (1.5.1) все b_i, i =1, 2, ..., m равны 0, тогда система однородная, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } Ax = 0, \qquad (1.5.2)$$

где $A = (a_{ij})$, x - искомый вектор.

Если $\det A \neq 0$, то в силу формул Крамера система (1.5.2) имеет единственное решение $x = 0$.

Для того чтобы система (1.5.2) имела и ненулевые решения необходимо, чтобы $\det A = 0$. В этом случае совокупность всех решений системы (1.5.2) образует векторное пространство, которое называется *пространством решений*. Размерность этого пространства определяется следующей теоремой [1], [2].

Теорема. *Если n - число неизвестных однородной системы* (1.5.2) и *r - ранг матрицы A*, *то размерность пространства решений равна k = n- r*.

Любая линейно независимая система решений в числе $k = n - r$ называется *фундаментальной* для системы (1.5.2).

Для нахождения решения однородной системы (1.5.2) достаточно найти фундаментальную систему ее решений. Тогда все решения системы (1.5.2) будут линейными комбинациями фундаментальной системы.

В общем случае неоднородной системы (1.5.1), общее ее решение есть сумма произвольного частного решения и общего решения соответствую щей ей однородной системы. Справедлива теорема [1], [2].

Теорема. *Пусть система* (1.5.1) *совместна, то есть rangA = rangB, тогда общее ее решение представляется в виде суммы произвольного частного решения и общего решения соответствующей ей однородной системы.*

Любая линейная система $Ax = b$ может быть симметризована умножением слева на матрицу A^{T}.

1.6. Характеристики точности. Машинная арифметика

Характеристики точности. Для характеристики точности величины используются понятия абсолютной и относительной погрешности [2], [3], [4], [5], [9].

Пусть $\tilde{x}$ - приближенное значение числа, а x - точное его значение. *Абсолютной погрешностью (ошибкой)* приближенного числа $\tilde{x}$ называется разность между точным его значением и приближенным,

$$\Delta = \left| x - \tilde{x} \right|.$$

Точное значение x, как правило, неизвестно, поэтому указываются границы или оценки, в которых изменяется абсолютная погрешность. *Оценкой или предельной абсолютной погрешностью* приближенного числа $\tilde{x}$ является такое число Δ_x, что выполняется неравенство $\Delta \le \Delta_x$.

Относительной погрешностью (ошибкой) δ приближенного числа $\tilde{x}$ называется отношение абсолютной погрешности этого числа к модулю соответствующего приближенного значения,

$$\delta = \frac{\Delta x}{\left| \tilde{x} \right|} \text{ при } \tilde{x} \ne 0.$$

Оценкой или предельной относительной погрешностью приближенного числа $\tilde{x}$ является такое число δ_x, что выполняется неравенство $\delta \le \delta_x$.

Для величин, близких по значению к единице абсолютная и относительная ошибки почти одинаковы. Для очень больших или очень малых величин относительная и абсолютная ошибки представляются разными числами.

Пусть, например, точное значение некоторой величины x равно 0.00009, x = 0.00009, приближенное значение $\tilde{x}$ = 0.00008, тогда абсолютная погрешность Δ составит Δ = 0.00009 - 0.00008 = 0.00001, а относительная $\delta = 0.00001/0.00008 = 0.125$.

Пусть точное значение некоторой величины x равно 100200, $x = 100200$, приближенное значение $\tilde{x} = 100000$, тогда

$$\Delta = 100200 - 100000 = 200, \text{ а } \delta = 200/100000 = 0.002.$$

Абсолютная и относительная погрешности формулируются также и в терминах нормы.

Пусть $\tilde{x}$ -приближенное решение системы $Ax = b$, а x - точное его решение и пусть задана какая-либо норма вектора.

Абсолютной погрешностью (ошибкой) вектора $\tilde{x}$ называется число

$$\|\psi\| = \|x - \tilde{x}\|.$$

Относительной погрешностью (ошибкой) вектора $\tilde{x}$ называется число

$$\delta = \frac{\|\psi\|}{\|x\|} = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \text{ при } x \neq 0.$$

Относительная ошибка в равномерной норме может рассматриваться как оценка количества верных значащих цифр вектора $\tilde{x}$, именно, если

$$\delta = \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx 10^{-t},$$

то наибольшая по модулю компонента вектора $\tilde{x}$ имеет примерно t значащих цифр.

Машинная арифметика. Известно, что любое неотрицательное число x может быть представлено в виде степенного ряда [4], [5], [9]

$$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots a_0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \ldots,$$

где коэффициенты a_i могут принимать значения 0,1, 2,..., 9. Если перечислить подряд все коэффициенты, указать положение запятой и приписать числу некоторый знак, то число x запишется в следующей системе записи

$$x = \pm\, a_n\, a_{n-1} \ldots a_0\, a_{-1}\, a_{-2} \ldots .$$

Запись в виде степенного ряда справедлива и для произвольной системы счисления. Если зафиксировать некоторое целое положительное число p и целые числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$, то для произвольного неотрицательного числа справедливо представление

$$x = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_0 + b_{-1} p^{-1} + b_{-2} p^{-2} + \ldots,$$

где каждый из коэффициентов b_i может принимать одно из значений α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$. Справедлива и запись

$$x = \pm\, b_n\, b_{n-1} \ldots b_0,\, b_{-1}\, b_{-2} \ldots .$$

Такие способы изображения чисел называется *позиционными системами счисления.* Каждое число здесь занимает определенную позицию, а отсчет определяется положением коэффициента b_0.

Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Например, в числе 0.003070 первые три нуля не являются значащими, они только устанавливают десятичные разряды других цифр.

Значащую цифру называют *верной*, если абсолютная погрешность не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Например, для точного числа 46.97, число 47.00 является приближенным с тремя верными знаками, так как $\Delta = | 46.97 - 47.00 | = 0.03 < 0.5 \cdot 10^{-1}$.

О целых машинных числах. Целые числа в вычислительных машинах представляются целыми числами, принадлежащими некоторому отрезку $[N^-, N^+]$. Например, для 16- битовой архитектуры вычислительной машины под целые числа без знака отводится отрезок [0, 65535] или $[0, 2^{16}-1]$, а для целых со знаком [-32767, 32768] или $[-2^{15}-1, 2^{15}]$. Арифметические операции с целыми машинными числами выполняются точно, если результат не выходит за этот отрезок $[N^-, N^+]$. В противном случае фиксируется ошибка, а машинный результат операции не определен.

О вещественных машинных числах. В вычислительных машинах используется, в основном, представление вещественных чисел с плавающей запятой в экспоненциальной форме [4],[5],[9]. Ненулевые вещественные числа имеют вид

$$x = m \cdot b^p,$$

где b - основание системы счисления, p - порядок (или экспонента, или показатель числа), m - мантисса (дробная часть), $b^{-1} \le |m| \le b^0 = 1$.

Если под мантиссу m отводится n элементов в b -ичной системе, а под порядок k элементов, то вещественное число x представляется конечным числом вида

$$x \approx \mathrm{fl}(x) = \pm(\alpha_1 b^{-1} + \alpha_2 b^{-2} + \ldots + \alpha_n b^{-n}) \cdot b^e,$$

где $-b^k \le e \le b^k - 1$, $1 \le \alpha_1 \le b-1$, $0 \le \alpha_i \le b-1$ для всех i от 2 до n, fl - сокращение от float - плавающий.

На рисунке 1 схематично показана структура представления вещественного числа с плавающей запятой.

знак порядка	порядок (k разрядов)	знак мантиссы	мантисса (n разрядов)

Рисунок 1- Схема представления вещественного числа с плавающей запятой

Значения $\pm b^d$, $d = b^k$ определяют диапазон изменения вещественных чисел с плавающей запятой. При этом числа из отрезка $[-b^{-d}, b^{-d}]$ машина заменяет нулем, поэтому он называется *машинным нулем*, а числа, выходящие за границу отрезка $[-b^{d-1}, b^{d-1}]$, машина не воспринимает. Этот отрезок называется *машинной бесконечностью*.

Еще одной характеристикой вещественного числа с плавающей запятой является характеристика, называемая *машинным эпсилоном* ε или *macheps*, которая определяет расстояние между единицей и ближайшим следующим за ней числом с плавающей запятой. За машинный эпсилон ε принимается величина

$$\varepsilon = 1 \cdot b^{1-n},$$

здесь, как и выше, b - основание системы счисления, n-число разрядов, отводимых под мантиссу числа. Число ε является оценкой относительной и абсолютной погрешности чисел с плавающей запятой. Пусть x - некоторое число, а $\mathrm{fl}(x)$ - запись этого числа с плавающей запятой, тогда для относительной погрешности справедлива оценка

$\left|\dfrac{x - \mathrm{fl}(x)}{x}\right| \le \varepsilon$, а для абсолютной погрешности оценка $\left|x - \mathrm{fl}(x)\right| \le |x| \cdot \varepsilon$.

Как видно из этих неравенств, *относительная точность* одинакова и не зависит от количества разрядов, отводимых под мантиссу числа с плавающей запятой. Абсолютная погрешность, напротив, неодинакова в разных частях числового диапазона.

Таким образом, множество машинных вещественных чисел характеризуется следующими четырьмя целыми параметрами: основанием системы счисления $b \ge 2$, точностью n, нижней и верхней границами порядка. Машинные вещественные числа образуют конечное подмножество вещественных чисел, причем все машинные числа рациональны.

Арифметические операции с вещественными машинными числами. Пусть x и z -два машинных вещественных числа, пусть знак $\otimes$ обозначает одну из четырех арифметических операций +, –, ×, / и пусть результат выполнения операции с числами x и z на вычислительной машине обозначается через $(x \otimes z)_{м}$, тогда возможны следующие ситуации при выполнении операции на вычислительной машине [4], [5]:

если $|x \otimes z| < b^{-d-1}$, $d = b^k$, $|x \otimes z|_{м}= 0$ есть машинный нуль;

если $|x \otimes z| > b^{d-1}(1 - b^{-n})$, то возникает переполнение (машинная бесконечность);

если $b^{-d-1} \le |x \otimes z| \le b^{d-1}(1 - b^{-n})$ и $|x \otimes z|$ - машинное число, то $|x \otimes z|_{М}=|x \otimes z|$;

если $b^{-d-1} \le |x \otimes z| \le b^{d-1}(1 - b^{-n})$, но $|x \otimes z|$ - не машинное число, то $|x \otimes z|_{М}$ будет равно одному из ближайших к $|x \otimes z|$ машинных чисел.

Ошибкой округления при выполнении арифметических операций $\otimes$ называется величина

$\big|\, |x \otimes z|_{М} - |x \otimes z| \,\big| \le b^{-d-1}$, если $|x \otimes z| < b^{-d-1}$, $d = b^k$ и $\varepsilon \cdot |x \otimes z|$, если $b^{-d-1} \le |x \otimes z| \le b^{d-1}(1 - b^{-n})$.

Из определения ошибки округления следует оценка

$$\big|\, |x \otimes z|_{М} - |x \otimes z| \,\big| \le \max\{ b^{-d-1} , \varepsilon \cdot |x \otimes z|\} \le b^{-d-1} + \varepsilon \cdot |x \otimes z| .$$

Для вещественных машинных чисел арифметические операции не обладают свойствами дистрибутивности и ассоциативности, именно,

$((1 + (\varepsilon/b)_М)_М - 1)_М = 0, \quad ((1-1)_М + (\varepsilon/b)_М)_М = \varepsilon/b,$

здесь ε-машинный эпсилон.

В силу того, что арифметические операции не обладают свойствами ассоциативности и дистрибутивности, анализ ошибок округлений довольно затруднителен и здесь не рассматривается.

1.7. Об обусловленности

В вычислительной алгебре важным понятием является число обусловленности матрицы [2], [5], [9], которое может рассматриваться как мера чувствительности решения к возмущениям системы. Под *возмущениями* системы понимаются погрешности округления в результате арифметических действий и погрешности в исходных данных.

Рассмотрим линейную систему

$$Ax = b \tag{1.7.1}$$

с квадратной невырожденной матрицей A.

В результате решения системы получается, в большинстве случаев, приближенное решение $\tilde{x} = x + \Delta x$. Для оценки того насколько приближенное решение $\tilde{x}$ отличается от точного решения x применяется *обратный анализ погрешностей* [4], [5].

Пусть в системе (1.7.1) вместо истинного вектора b используется приближенный вектор $b+\Delta b$, т.е. “возмущается” только вектор b. В результате решения системы (1.7.1) получается вектор $\tilde{x} = x + \Delta x$, который можно рассматривать как точное решение возмущенной системы

$$A\tilde{x} = \tilde{b} \quad \text{или} \quad A\tilde{x} = b + \Delta b.$$

В этом случае справедлива оценка [4], связывающая относительные погрешности вектора-решения и вектора b

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} = \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|b\|}\ . \tag{1.7.2}$$

Пусть теперь в исходной системе (1.7.1) получила возмущение матрица A, тогда вектор $\tilde{x} = x + \Delta x$ рассматривается как точное решение возмущенной системы

$$\tilde{A}\,\tilde{x} = b \ \text{или}\ (A+\Delta A)(x + \Delta x) = b.$$

В этом случае справедлива следующая оценка

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|\tilde{A}\|} = \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A + \Delta A\|}\ . \tag{1.7.3}$$

Если в системе (1.7.1) возмущены и матрица A и вектор b, т.е. по сути решается система

$$\widetilde{A}\,\widetilde{x} = \widetilde{b} \text{ или } (A+\Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b,$$

то справедлива оценка

$$\frac{\|x-\widetilde{x}\|}{\|x\|} \le \frac{\|A\|\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|A^{-1}\Delta A\right\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right), \qquad (1.7.4)$$

при условии, что $\left\|A^{-1}\Delta A\right\| < 1$.

В неравенствах (1.7.2), (1.7.3) и (1.7.4) положительное число $\|A\|\left\|A^{-1}\right\|$ называется *числом обусловленности* и обозначается как *cond(A)*, т.е. *cond(A)* = $\|A\|\left\|A^{-1}\right\|$(*cond* от англ. conditioned -обусловленный).

Число обусловленности является коэффициентом связи между относительными погрешностями вектора-решения, вектора *b* и матрицей *A*.

Из неравенств (1.7.2), (1.7.3) и (1.7.4) следует, что *чем больше число обусловленности*, *тем сильнее влияют на решение исходной системы погрешности в исходных данных*. Таким образом, число обусловленности можно рассматривать как *меру чувствительности решения к погрешностям системы.*

В качестве примера рассмотим неравенство (1.7.2). Из этого неравенства видно, что даже если вектор-невязки $r = b - A\widetilde{x}$ мал, то относительные возмущения в решении могут быть большими, если число *cond(A)* значительно больше единицы.

Системы уравнений, у которых число обусловленности *cond(A)* велико, называются *плохо обусловленными*.

Для числа обусловленности справедлива оценка снизу, именно,

$$cond(A) = \|A\|\left\|A^{-1}\right\| \ge \left\|A\,A^{-1}\right\| = \|E\| = 1,$$

другими словами, число обусловленности не может быть меньше единицы.

В общем случае, вопрос о том является ли система плохо обусловленной или нет, решается для каждой конкретной системы.

Геометрически понятия обусловленности можно рассмотреть на примере системы двух уравнений с двумя неизвестными. Плохая обусловленность системы в этом случае означает, что прямые, являющиеся геометрическим образом уравнений, пересекаются на координатной плоскости под очень острым углом. Таким образом, если возмущения правой части уравнения рассматривать как параллельный перенос, а возмущения матрицы как поворот прямых, то небольшие погрешности (возмущения) приводят к значительному перемещению *точки пересечения* прямых, которая является геометрическим образом решения системы уравнений.

В многомерном случае геометрическая картина может быть сложней. Например, для трех переменных возможен случай плохой обусловленности, когда соответствующие трем уравнениям плоскости пересекаются под большими углами (т.е. далеки от параллельности), но линии их попарного пересечения почти параллельны.

Используя ту или иную конкретную норму можно определять различные числа обусловленности. Для вырожденных матриц $cond(A) = \infty$.

1.8. Задачи

1.Составить алгоритм для выполнения операции транспонирования прямоугольной матрицы $A_{m \times n}$, $m \neq n$, не выделяя дополнительного массива для хранения результата.

2.Составить алгоритм вычисления произведения матриц произвольных порядков, $C_{m\times s} = A_{m \times n}B_{q\times s}$. Предусмотреть проверку на равенство $n = q$. Матрицы A, B и C хранить как одномерные массивы, используя пересчет индексов.

3.Составить алгоритм разложения матрицы A в сумму $A = L+G+D$, где L -нижнетреугольная, G -диагональная, D -верхнетреугольная матрицы.

4.Составить алгоритм вычисления произведения двух симметричных матриц. Предусмотреть хранение матриц в одномерных массивах.

5.Составить алгоритм вычисления произведения вектор-строки x размерностью $(1 \times n)$ на матрицу $A_{m \times q}$, $z = xA$. Предусмотреть проверку на равенство $n = m$.

6.Показать, что произведение вектор-столбца x на вектор-строку y есть матрица ранга 1.

7.Показать, что произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.

8.Показать, что если матрица A ортогональна, то ортогональными будут и транспонированная к ней и обратная к A матрицы.

9.Указать вещественные значения s, при которых следующие матрицы вырождены

1. $\begin{pmatrix} 2-s & 2 & 3 \\ 0.1-s & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3-s & 1 & 2 \\ 0.2-s & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 3 & 2-s & 1 \\ 0.5 & 2-s & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1-s \\ 3 & 2-s & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1-s \\ 4 & 3-s & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1-s \\ 3 & 2-s & 0 \\ 1.2 & 0.1 & 2 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 0.1-s & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1.2-s \\ 0.5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 7 & 0.1 & 2 \\ 3-s & 5 & 1.4 \\ 2-s & 1 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 6 & 0.8 & 1-s \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & 3-s \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 3 & 0.4 & 0.5-s \\ 0.5 & 2..5 & 1 \\ 3 & 0 & 1.5-s \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 1 & 1.4 & 1.5+s \\ 0.7 & 3.1 & 2.1 \\ 4.5 & 1 & 2.5-s \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 3.5 & 0.9 & 1+s \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0.5 & 2-s \end{pmatrix}$

10.Показать, что $(Ax, y) = (x, A^{\mathrm{T}} y)$.

11.Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Показать, что $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для всех целых n.

12.Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Показать, что для $p(x) = x^2 - 4x + 5$, $p(A)=0$.

13.Указать, при каких значениях s следующие системы векторов ортогональны

1. $\begin{matrix} x_1 = (1, 3, 5, 1) \\ x_2 = (2, 2, -1.8, s) \end{matrix}$ 2. $\begin{matrix} x_1 = (2,\ s, -1,\ 2) \\ x_2 = (0.5, 4,\ 8,\ 5) \end{matrix}$ 3. $\begin{matrix} x_1 = (5,\ -0.5, 2,\ -6) \\ x_2 = (0.2, 3,\ s, 1.5) \end{matrix}$

4. $\begin{matrix} x_1 = (9,\ 1-s, 0.8,\ 0.1) \\ x_2 = (0.1, 3,\ 2s+1, 7) \end{matrix}$ 5. $\begin{matrix} x_1 = (4s,\ -0.1, 2,\ -4) \\ x_2 = (0.7, 5,\ s-1, 1.1) \end{matrix}$ 6. $\begin{matrix} x_1 = (1,\ -0.9, 3,\ -9) \\ x_2 = (10, 3s,\ 2, -2.5) \end{matrix}$

7. $\begin{matrix} x_1 = (2,\ 0.3, -3s,\ -7) \\ x_2 = (10, 3s,\ 2, -8.5s) \end{matrix}$ 8. $\begin{matrix} x_1 = (1,\ -0.7s, 1,\ -8) \\ x_2 = (11, 4s,\ 1, -2.5s) \end{matrix}$ 9. $\begin{matrix} x_1 = (13,\ 1.9, 1s,\ -5) \\ x_2 = (1, 3s-1,\ 2, 2.1) \end{matrix}$

14. Показать, что для суммы квадратов элементов строк (столбцов) ортогональной матрицы Q выполняется равенство

$$\sum_{p=1}^{n} q_{ip}^2 = \sum_{p=1}^{n} q_{pi}^2 = 1.$$

15. Составить алгоритм вычисления произведения матрицы $A_{m\,x\,q}$ на матрицу A^{T} транспонированную к исходной и алгоритм вычисления следа полученной матрицы (сумму элементов главной диагонали).

16.Показать, что из определения нормы вектора следует неравенство

$$\| x - y \| \geq \big| \| x \| - \| y \| \big|.$$

17.Показать, что нормы $\| x \|_\infty, \| x \|_l, \| x \|_k$ удовлетворяют аксиомам нормы.

18.Показать, что для вектора x размерности n выражение $\max_k (c_k |x_k|)$, где $c_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$ является нормой.

19.Показать, что для вектора x размерности n выражение $\sum_{k=1}^{n} c_k |x_k|$, где $c_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$ является нормой.

20.Показать, что для вектора x размерности n выражение $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k x_k^2}$, где $c_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$ является нормой.

21.Показать, что для норм $\|x\|_\infty, \|x\|_l$ вектора x размерности n справедливо неравенство $\|x\|_\infty \le \|x\|_l \le n\|x\|_\infty$.

22.Показать, что для норм $\|x\|_\infty, \|x\|_k$ вектора x размерности n справедливо неравенство $\|x\|_\infty \le \|x\|_k \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$.

23. Показать, что для норм $\|x\|_l$,$\|x\|_k$ вектора x размерности n справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_l \le \|x\|_k \le \|x\|_l$.

24. Построить на плоскости R^2 множество точек описываемое единичным шаром следующих норм:

1) $0.5|x_1| + 2|x_2|$ 2) $|x_1| + 3|x_2|$ 3) $2|x_1| + |x_2|$ 4) $0.1|x_1| + 4|x_2|$ 5) $1.5|x_1| + 3|x_2|$

6) $1.8|x_1| + 3.6|x_2|$ 7) $0.3|x_1| + 4|x_2|$ 8) $1.5|x_1| + |x_2|$ 9) $5|x_1| + 2|x_2|$ 10) $|x_1| + 9|x_2|$.

25. Показать, что из определения нормы матрицы следует неравенство

$$\|A - C\| \ge \big|\|A\| - \|C\|\big|.$$

26. Показать, что нормы $\|A\|_\infty, \|A\|_l$,$\|A\|_k$ удовлетворяют аксиомам нормы.

27. Вычислить l-норму для квадратных ($n\times n$)-матриц A с элементами

1) $a_{ij} = 2^{-|i-j|}$, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$. 2) $a_{ij} = 3^{-|i-j|}$, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$.

3) $a_{ij} = 5^{-|i-j|}$, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$. 4) $a_{ij} = 7^{-|i-j|}$, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$.

28. Указать такие значения k, при которых ∞ - норма квадратной матрицы A с элементами $a_{ij} = k^{-1}(k+1)^{-|i-j|}$ будет меньше единицы.

29. Показать справедливость неравенства

$$\|A\|_k^2 \le \|A\|_l \|A\|_\infty .$$

30. Доказать, что $\frac{1}{n}\|A\|_\infty \le \|A\|_l \le n\|A\|_\infty$.

2. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ГАУССА

Метод исключения Гаусса для решения линейных систем уравнений является основой многих вычислительных схем и сводится к преобразованию исходной системы к равносильной системе с верхнетреугольной матрицей.

2.1 Описание метода. Вычисление определителя. Обращение матрицы

Описание метода. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{2.1}$$

где $A = (a_{ij})$ - неособенная размерности $n\times n$ матрица, $detA \neq 0$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$ и $b = (b_1, ..., b_n)^T$ - векторы-столбцы.

Вычислительная схема метода состоит из двух этапов. Первый этап заключается в приведении системы к верхнетреугольному виду. Этот этап называется *прямым ходом.* Второй этап - определение неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется *обратным ходом*.

Прямой ход состоит в последовательном исключении (обнулении) коэффициентов при неизвестных $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, начиная с первого столбца. Исключение коэффициентов при x_k - ой переменной называется k -ым *циклом* метода исключения Гаусса.

Прямой ход реализуется по следующим формулам (индекс k в круглых скобках означает номер цикла (номер столбца)).

Умножение k - ой строки на число

$$d_{mk}^{(k)} = a_{mk}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, m = k+1, ..., n. \tag{2.2}$$

Вычитание k - ой строки из m - ой строки

$$a_{mp}^{(k+1)} = a_{mp}^{(k)} - d_{mk}^{(k)} \cdot a_{kp}^{(k)},\ p = k+1, \ldots, n;\ m>k \tag{2.3}$$

$$b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - d_{mk}^{(k)} \cdot b_k^{(k)}. \tag{2.4}$$

В результате n-1-го цикла получается система с верхнетреугольной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \cdot \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

или

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)}, \\
a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{n-1,n-1}^{(n-1)} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n &= b_{n-1}^{(n-1)}, \\
a_{nn}^{(n)} x_n &= b_n^{(n)}.
\end{aligned}$$

Элементы $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{nn}^{(n)}$, стоящие на главной диагонали полученной системы с верхнетреугольной матрицей (2.5), называются *ведущими элементами*.

Обратный ход - вычисление неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ реализуется по следующим формулам, начиная с последнего уравнения системы (2.5)

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad x_k = \frac{\left(b_k^{(k)} - \sum\limits_{p=k+1}^{n} a_{kp}^{(k)} x_p\right)}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1. \qquad (2.6)$$

Формулами (2.2) - (2.6) определяется поэлементная форма записи *основной вычислительной схемы метода исключения Гаусса*. Необходимым и достаточным условием применимости метода является неравенство нулю всех *ведущих элементов*, $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

Другая форма метода исключения Гаусса называемая *матрично-векторной* и получается из (2.2)-(2.6), если ввести набор нижних треугольных матриц $L^{(k)}$ вида

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & d_{k+1,k}^{(k)} & \ddots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & d_{n,k}^{(k)} & \ldots & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

с элементами $d_{mk}^{(k)} = -a_{mk}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, m = k+1, \ldots, n.$ Эти матрицы отличаются от единичных только поддиагональными элементами в k-м столбце. Процесс же прямого хода становится равносильным вычислению последовательных произведений

$$A^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)}; \; b^{(k+1)} = L^{(k)} b^{(k)}, k = 1, \ldots, n\text{-}1,$$

и будет начинаться с матрицы $A^{(1)}$ равной исходной матрице A, т.е. $A^{(1)} = A$ и матрицы $L^{(1)}$ вида

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате n-1-го цикла получается система с верхнетреугольной матрицей (2.5) .

Обратный ход записывается в виде

$$x = [A^{(n)}]^{-1}\, b^{(n)}.$$

На рисунке 2 представлен один из возможных алгоритмов, реализующий нахождение решения системы линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса (формулы (2.2) - (2.6)).

Алгоритм метода исключения Гаусса

прямой ход - вычисления по формулам 2.2 - 2.4
цикл по столбцам
Для k =1 **до** n -1 **выполнять**
    цикл по строкам m
    Для $m = k + 1$ **до** n **выполнять**
        вычисление коэффициента d - формула 2.2
        $d_{m,\,k} = a_{m,k} / a_{k,\,k}$; $a_{m,k} = 0$
        цикл по элементам m -ой строки - формула 2.3
        Для $p = k + 1$ **до** n **выполнять**
            $a_{m,\,p} = a_{m,\,p} - d_{m,\,k} \cdot a_{k,\,p}$
        конец цикла по p
        $b_m = b_m - d_{m,\,k} \cdot b_k$ *- вычисление правой части - формула* 2.4
    конец цикла по m
конец цикла по k
обратный ход - вычисление по формулам 2.6
    $x_n = b_n / a_{n,\,n}$
цикл для вычисления остальных n -1-го значения
    Для $i = n$ -1 **до** 1 **выполнять**
        цикл для вычисления внутренних слагаемых формулы 2.6
        Для $p = i + 1$ **до** n **выполнять**
            $s = s + a_{i,\,p} \cdot x_p$
        конец цикла по p
        вычисление i -го значения
            $x_i = (b_i - s)/ a_{i,\,i}$
    конец цикла по i
вывод полученного решения

Рисунок 2- Описание алгоритма основной схемы метода исключения Гаусса

Комментарий к алгоритму. Алгоритм реализует вычисления непосредственно по формулам (2.2) - (2.6) в предположении, что матрица A

и вектор b хранятся в разных массивах, ведущие элементы в каждом цикле не равны нулю, $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ и коэффициенты $d_{mk}^{(k)}$ не сохраняются.

*<u>Вычисление определителя матрицы</u>***.** Преобразования выполняемые по формулам (2.2)- (2.4) не изменяют определителя матрицы A исходной системы (2.1). Определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, стоящих на главной диагонали, поэтому из представления (2.5) следует, что определитель матрицы A равен произведению всех *ведущих элементов* в методе Гаусса, именно,

$$\det A = a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}. \qquad (2.7)$$

*<u>Вычисление обратной матрицы</u>***.** Применение метода исключения Гаусса для нахождения матрицы, обратной к исходной матрице A, основывается на том, что обратная матрица A^{-1} является единственным решением матричного уравнения

$$AX = E, \qquad (2.8)$$

где E - единичная матрица, X - $n \times n$ - матрица.

Если обозначить $A^{-1} = X$, то матрица X с элементами x_{ij} становится искомой. Перемножение матриц A и X приводит к n системам уравнений относительно n^2 неизвестных x_{ij}

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2.9)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Выражение (2.9) определяет систему уравнений для вычисления обратной матрицы в поэлементной форме. Если обозначить столбцы матрицы X, как векторы $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})^T$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а столбцы единичной матрицы E вектор -столбцами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то выражение (2.9) представляется в виде набора из n не связанных между собой систем матричных уравнений

$$Ax_1 = e_1 ; \; Ax_2 = e_2 ; \ldots ; \; Ax_n = e_n, \qquad (2.10)$$

с одной и той же матрицей A и правыми частями, отличающимися только расположением 1 в элементах векторов e_i. Для решения каждого из уравнений (2.10) применяется вычислительная схема (2.2)-(2.6), а получаемые значения x_i будут составлять столбцы обратной матрицы A^{-1} .

Рассмотрим примеры на нахождение решения системы линейных уравнений и обращение матрицы.

Пример 1. Дана система третьего порядка

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Требуется:

а) найти решение данной системы методом исключения Гаусса и вычислить определитель матрицы исходной системы;

б) выписать метод исключения в матрично - векторной форме.

Решение. а) В данном случае количество циклов равно двум, k =2. Реализация прямого хода осуществляется по формулам (2.2) - (2.4).

Для первого столбца, т.е. исключение коэффициентов первого столбца, ниже диагонального элемента, k = 1, имеем

$$d_{21}^{(1)} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{2}{5} = -0.4, \qquad d_{31}^{(1)} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{1}{5} = -0.2,$$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - d_{21}^{(1)} \cdot a_{11}^{(1)} = 2 - \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-5) = 0, \quad a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - d_{31}^{(1)} \cdot a_{11}^{(1)} = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) = 0,$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - d_{21}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)} = -6 - \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 7 = -3.2, \quad a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - d_{31}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)} = -3 - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 7 = -1.6,$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - d_{21}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)} = 3 - \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 1 = 3.4, \qquad a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - d_{31}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)} = -5 - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 1 = -4.8,$$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - d_{21}^{(1)} \cdot b_1^{(1)} = -1 - \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot 3 = 0.2, \quad b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - d_{31}^{(1)} \cdot b_1^{(1)} = -7 - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 3 = -6.4.$$

После первого цикла система уравнений запишется в виде

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 0 & -3.2 & 3.4 \\ 0 & -1.6 & -4.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.2 \\ -6.4 \end{pmatrix}.$$

Далее, цикл по второму столбцу, k = 2, т.е. исключение коэффициентов второго столбца, ниже диагонального элемента, имеем

$$d_{32}^{(2)} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-1.6}{-3.2} = 0.5, \quad a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - d_{32}^{(2)} \cdot a_{22}^{(2)} = -1.6 - \left(\frac{-1.6}{-3.2}\right) \cdot (-3.2) = 0,$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - d_{32}^{(2)} \cdot a_{23}^{(2)} = -4.8 - \left(\frac{-1.6}{-3.2}\right) \cdot 3.4 = -6.5,$$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - d_{32}^{(2)} \cdot b_2^{(2)} = -6.4 - \left(\frac{-1.6}{-3.2}\right) \cdot 0.2 = -6.5.$$

После второго цикла получаем систему с верхнетреугольной матрицей

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 0 & -3.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & -6.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.2 \\ -6.5 \end{pmatrix}.$$

Определитель вычислим с помощью формулы (2.7) и полученной верхнетреугольной матрицы

$$\det A = (-5)(-3.2)(-6.5) = -104.$$

Вычислим абсолютную и относительную погрешность вычисления определителя, имеем:

$$\Delta = |\,-104 + 104\,| = 0; \quad \delta = 0/\,|\,-104\,| = 0.$$

Для нахождения решения, т.е. вычисление значений x_1, x_2, x_3 используем формулы (2.6) обратного хода, получим

$x_3 = (-6.5)/(-6.5) = 1$, $x_2 = (0.2 - 3.4\cdot 1)/(-3.2) = 1$, $x_1 = (3 - 1\cdot 1 - 7\cdot 1)/(-5) = 1$.

Вычислим вектор - невязки r, имеем:

$$r = Ax - b \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение 1, 1, 1 является точным.

б) Для записи метода исключения в матрично-векторной форме введем матрицы $L^{(1)}$, $L^{(2)}$

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_{21}^{(1)} & 1 & 0 \\ d_{31}^{(1)} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_{32}^{(2)} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Процесс прямого хода запишется в виде

$$A^{(2)} = L^{(1)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 0 & -3.2 & 3.4 \\ 0 & -1.6 & -4.8 \end{pmatrix},$$

$$b^{(2)} = L^{(1)}b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.2 \\ -6.4 \end{pmatrix};$$

$$A^{(3)} = L^{(2)}A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 0 & -3.2 & 3.4 \\ 0 & -1.6 & -4.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 0 & -3.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & -6.5 \end{pmatrix},$$

$$b^{(3)} = L^{(2)}b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0.2 \\ -6.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.2 \\ -6.5 \end{pmatrix}.$$

Система для получения вектора - решения принимает вид

$$A^{(3)}x = b^{(3)} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 0 & -3.2 & 3.4 \\ 0 & 0 & -6.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.2 \\ -6.5 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Для матрицы A найти обратную A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим систему из трех матричных уравнений (2.10)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решая каждое из этих уравнений методом Гаусса получим столбцы обратной матрицы A^{-1}. Рассмотрим подробно получение первого столбца матрицы A^{-1}. Применяя формулы (2.2) -(2.5) и учитывая, что k =1, 2, имеем,

цикл по первому столбцу, k =1,

$$d_{21}^{(1)} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 2, \qquad d_{31}^{(1)} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 3,$$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - d_{21}^{(1)} \cdot a_{11}^{(1)} = 0, \qquad a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - d_{31}^{(1)} \cdot a_{11}^{(1)} = 0,$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - d_{21}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)} = 3 - 2 \cdot 2 = -1, \qquad a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - d_{31}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)} = 4 - 3 \cdot 2 = -2,$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - d_{21}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)} = 4 - 2 \cdot 3 = -2, \qquad a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - d_{31}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)} = 6 - 3 \cdot 3 = -3,$$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - d_{21}^{(1)} \cdot b_1^{(1)} = 0 - 2 \cdot 1 = -2, \qquad b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - d_{31}^{(1)} \cdot b_1^{(1)} = 0 - 3 \cdot 1 = -3,$$

цикл по второму столбцу, k = 2,

$$d_{32}^{(2)} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-2}{-1} = 2, \qquad a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - d_{32}^{(2)} \cdot a_{23}^{(2)} = -3 - 2 \cdot (-2) = 1,$$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - d_{32}^{(2)} \cdot b_2^{(2)} = -3 - 2 \cdot (-2) = 1.$$

В результате получаем систему для вычисления значений x_{11}, x_{21}, x_{31}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулы обратного хода (2.6), получим

$x_{31} = 1 / 1 = 1$, $x_{21} = -2 - 2 \cdot (-2) \cdot 1 / (-1) = 0$, $x_{11} = (1 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1)/(-1) = -2$.

Таким образом, первый столбец обратной матрицы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для второго и третьего столбцов, проводим аналогичные вычисления, получим

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В итоге, обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $AA^{-1} = E$.

2.2 О числе арифметических операций метода Гаусса

Оценка числа арифметических операций в методе Гаусса проводится непосредственным подсчетом в каждом цикле исключения. Как следует из формул (2.2) - (2.4) в каждом k - ом цикле исключения выполняются последовательно операции:

1. *Деления* - вычисление множителя $d_{mk} = a_{mk}/a_{kk}$, $m = k+1, ..., n$.

2. *Исключения* (вычитание и умножение)- $a_{mp} = a_{mp} - d_{mk}\, a_{kp}$, $p= k+1, ..., n$.

3. *Вычитания и умножения* (для правой части) - $b_m = b_m - d_{mk}\, b_k$.

Число делений в первом цикле составит (n - 1), на втором - (n - 2), и так далее, на последнем цикле одно деление.

Таким образом, общее число операций деления для прямого хода составит

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Операция исключение состоит из умножений на число d_{mk} и поэлементных вычитаний. Число умножений на первом цикле (k = 1) составляет $n(n-1)$, на втором - $(n-1)(n-2)$, и $1 \cdot 2$ умножений при $k = n-1$, а общее число умножений составит

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n-1) = \sum_{i=2}^{n-1} i(i-1),.$$

или

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\,(n-1)=\sum_{i=2}^{n-1} i(i-1)=\sum_{i=2}^{n-1}(i-1)^2+\sum_{i=2}^{n-1}(i-1)=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

Аналогичное число составляют и операции вычитания. Таким образом, число операций для *исключения* равно

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{3}+\frac{n(n-1)(n+1)}{3}=\frac{2n(n-1)(n+1)}{3}.$$

Для вычисления *правых частей* потребуется

$1+2+\ldots+(n-1)=\sum\limits_{i=1}^{n-1} i=\dfrac{n\,(n-1)}{2}$ - операций умножения и столько же операций вычитаний, а общее число операций для вычисления правой части составит

$$\sum_{i=1}^{n-1} i+\sum_{i=1}^{n-1} i=n\,(n-1).$$

Общая трудоемкость прямого хода будет равна

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2n(n-1)(n+1)}{3}+n\,(n-1).$$

(или порядка $O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$ арифметических операций).

Трудоемкость обратного хода. Обратный ход состоит из операций *деления*, *умножения* и *вычитания*. Для обратного хода согласно формулы (2.6) потребуется

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n\,(n-1)\text{ - операций.}$$

(или порядка $\approx O(n^2)$ арифметических операций).

Общая трудоемкость метода исключения Гаусса составит

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2n(n-1)(n+1)}{3}+n\,(n-1)+n\,(n-1)\approx O\left(\frac{2}{3}n^3\right).$$

Таким образом, вычислительная трудоемкость метода Гаусса описывается полиномами от n степени не выше третьей с коэффициентом 2/3 при старшем члене.

2.3 Модификации метода исключения Гаусса

Теоретически для реализации основной схемы исключения Гаусса, необходимо, чтобы все ведущие элементы $a_{kk}^{(k)}$ в формулах (2.2) - (2.6) были отличны от нуля. Однако при практических вычислениях для уменьшения вычислительной погрешности и исключения деления на нуль требуется, чтобы $a_{kk}^{(k)}$ в каждом *k*-ом цикле прямого хода (формулы (2.3) - (2.4)) были максимально большими с тем, чтобы обеспечить выполнения неравенств $\left| d_{mk}^{(k)} \right| \leq 1$ или $\left| a_{kp}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \right| \leq 1$. Выбор максимального ведущего элемента может осуществляться различными способами, но наиболее распространенными являются: *схема с частичным выбором* и *схема с полным выбором ведущего элемента* [4], [5].

Схема исключения с частичным выбором. Частичный выбор состоит в том, что на *k*- ом цикле прямого хода в качестве ведущего элемента выбирается *наибольший по модулю элемент* в *k*- ом столбце, т.е. $max\ a_{ij}^{(k)}$ при $i \geq k, j = k$. При этом, если имеется несколько максимальных по модулю элементов, то за ведущий принимается тот из них, который находится в строке с наименьшим номером. Данная схема равносильна перестановке соответствующих уравнений в исходной системе.

На рисунке 3 представлен один из возможных алгоритмов исключения с выбором по столбцам.

Алгоритм исключения Гаусса с частичным выбором ведущего элемента

цикл по столбцам
Для k **=** 1 **до** n-1 **выполнять**
  поиск максимального по абсолютной величине элемента
  в k - ом столбце
  imax = индекс строки такой, что $abs(a_{\mathrm{imax,k}}) = max\ abs(a_{\mathrm{ik}})$, $i >= k, j = k$
  проверка на нуль ведущего элемента
  перестановка строк с *индексами k и imax*
   для j = 1 **до** n **выполнять**
    переставить a_{kj} и $a_{\mathrm{imax,\,j}}$
    переставить b_{k} и b_{imax}
   конец цикла по j
  реализация прямого хода - формулы 2.2 - 2.4
конец цикла по *k*
  реализация обратного хода - формулы 2.6
вывод полученного решения

Рисунок 3- Описание алгоритма с частичным выбором

Комментарий к алгоритму. Алгоритм реализует вычисления в предположении, что ведущие элементы в каждом цикле не равны нулю, $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, коэффициенты $d_{mk}^{(k)}$ не сохраняются, отсутствует подсчет количества перестановок, которые требуются для учета знака у определителя.

Схема исключения с полным выбором. Полный выбор ведущего элемента состоит в том, что на k- ом цикле прямого хода в качестве ведущего элемента выбирается *наибольший по модулю элемент* в неприведенной части матрицы, т.е. $max\, a_{ij}^{(k)}$ при $i \geq k, j \geq k$. При этом, если имеется несколько максимальных по модулю элементов, то за ведущий элемент принимается тот из них, который находится в строке и столбце с наименьшими номерами.

На рисунке 4 представлен один из возможных алгоритмов с выбором по всей неприведенной части матрицы, начиная с исходной матрицы системы.

Алгоритм исключения Гаусса с полным выбором ведущего элемента

цикл по столбцам
Для k =1 **до** n - 1 **выполнять**
поиск максимального по абсолютной величине элемента в оставшейся части матри цы (неприведенной)
imax, jmax - индексы столбца и строки такие, что
$abs(a_{\text{imax, jmax}}) = max\ abs(a_{\text{ik}})$, $i >= k, j >= k$
проверка на нуль ведущего элемента
перестановка строки и столбца с индексами imax и jmax
реализация прямого хода - формулы 2.2 -2.4
конец цикла по k
реализация обратного хода - формулы 2.6
вывод полученного решения

Рисунок 4- Описание алгоритма с полным выбором

Комментарий к алгоритму. Аналогично предыдущему алгоритму, данный алгоритм реализует вычисления в предположении, что ведущие элементы в каждом цикле не равны нулю, $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, без сохранения коэффициентов $d_{mk}^{(k)}$ и подсчета количества перестановок, которые требуются для учета знака у определителя.

2.4 Задачи

1. Получить из матричной формы записи метода исключения Гаусса его поэлементную форму.
2. Определить число операций умножения и деления, необходимых для вычисления определителя порядка n методом исключения Гаусса. Сравнить это число с числом операций умножения при вычислении определителя с помощью разложения по строке.
3. Показать связь между определителем матрицы A и определителями треугольных матриц $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, ..., $L^{(n-1)}$ и $A^{(n-1)}$ из матричного представления метода Гаусса.
4. Выписать расчетную схему метода исключения Гаусса для вычисления определителя трехдиагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определить вычислительную трудоемкость схемы.
5. Найти выражение для ведущих элементов в основной схеме метода Гаусса через главные миноры исходной матрицы A порядка n.
6. Вычислить методом исключения Гаусса следующие определители:

$$1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 8 \\ 41 & 68 & 50 & 103 \end{vmatrix} \quad 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix} \quad 3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 21 & 34 & 47 & 62 \end{vmatrix} \quad 4.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 60 & 91 & 120 \end{vmatrix}$$

$$5.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 15 & 3 & 26 & 38 \end{vmatrix} \quad 6.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 15 & 14 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad 7.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -17 & -20 \\ 17 & 31 & 43 & 25 \end{vmatrix} \quad 8.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 6 \\ 7 & -1 & -1 & 0 \\ 11 & 21 & 33 & 41 \end{vmatrix}.$$

6. Вычислить методом исключения Гаусса значения следующих определителей (при x =1)

1. $\begin{pmatrix} 2-x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-x \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3-x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3-x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3-x \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5-x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5-x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5-x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5-x \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 6-x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6-x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6-x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6-x \end{pmatrix}$.

8. Найти методом Гаусса обратные и вычислить число обусловленности в равномерной норме $\|\cdot\|_\infty$ для следующих матриц:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1.1 & 0.1 & 3 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 1.3 \\ 0.8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 6 & 0.5 & 2 \\ 3 & 5 & 1.4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 6 & 0.7 & 1 \\ 1 & 7 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 3 & 0.4 & 1 \\ 0.4 & 2.5 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.7 & 5 & 2.1 \\ 3.5 & 1 & 2.5 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 5 & 0.8 & 2 \\ 6 & 7 & 0.7 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 5.1 & 3 & 1.2 \\ 0.5 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1 & 7.1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 4 & 1.2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0.3 & 2 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 25 & 4 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 14 & 9 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1.5 & 1.3 & 3 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 16 & 8 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 27 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} 18 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -5 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

9. Составить алгоритм обращения верхнетреугольной матрицы методом Гаусса. Определить вычислительную трудоемкость алгоритма.

10. Составить алгоритм обращения нижнетреугольной матрицы методом Гаусса. Определить вычислительную трудоемкость алгоритма.
11. Исходя из приведенного алгоритма на рисунке 2, видоизменить алгоритм для решения систем с произвольной размерностью.
12. Составить алгоритм метода исключения Гаусса для приведения матрицы $A_{m\,x\,n}$ к трапециевидной.
13. Видоизменить алгоритм на рисунке 2 так, чтобы обеспечивалось хране ние коэффициентов $d_{mk}^{(k)}$ на освободившихся местах в ходе исключения, матрица A и вектор b размещались в одном двумерном массиве.
14. Составить алгоритм для определения ранга матрицы $A_{m\,x\,n}$ методом Гаусса.
15. Пусть A_k, L_k, U_k матрицы главных миноров порядка k для матриц A, L, U в матричной записи метода Гаусса. Показать справедливость равенства $A_k = L_k U_k$ для всех k.
16. Найти решения для следующих систем (с близкими коэффициентами) методом Гаусса. Прокомментировать полученные результаты.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2.00001x_2 = 3.00001 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 1.99999x_2 = 3.00001 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5 \\ x_1 + 4.00001x_2 = 5.00001 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5 \\ x_1 + 3.99999x_2 = 5.00001 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3.00001x_2 = 5.00001 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2.99999x_2 = 5.00001 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4.00005x_2 = 7.00005 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 3x_1 + 3.99995x_2 = 7.00005 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + 3.00003x_2 = 4.00003 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + 2.99997x_2 = 4.00003 \end{cases}$

17. Составить алгоритм вычисления определителя трехдиагональной матрицы порядка n методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцам. Оценить трудоемкость алгоритма.

18. Найти решения для следующих уравнений методом Гаусса (основная схема) и с выбором по столбцам в арифметике с тремя десятичными цифрами. Прокомментировать полученные результаты.

1. $\begin{cases} 0.0003x_1 + 1.00x_2 = 1.00 \\ 4.00x_1 + 1.00x_2 = 5.00 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 0.0001x_1 + 3.00x_2 = 3.00 \\ 5.00x_1 + 1.00x_2 = 6.00 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0.0001x_1 + 1.00x_2 = 1.00 \\ 1.00x_1 + 1.00x_2 = 2.00 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 0.0004x_1 + 5.00x_2 = 5.00 \\ 6.00x_1 + 7.00x_2 = 13.00 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 0.0002x_1 + 2.00x_2 = 2.00 \\ 3.00x_1 + 1.00x_2 = 4.00 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 0.0001x_1 + 4.00x_2 = 4.00 \\ 1.00x_1 + 5.00x_2 = 6.00 \end{cases}$

19. Составить алгоритм вычисления определителя трехдиагональной матрицы порядка n методом Гаусса с выбором ведущего элемента по всей матрице.
20. Составить алгоритм метода Гаусса с выбором ведущего элемента по строкам**.**

2.5 Лабораторные задания

***Цель*:** практика программирования метода исключения Гаусса и его модификации в одной из имеющихся систем программирования, практика применения специализированных программных систем, предназначенных для решения математических задач.

Для выполнения лабораторной работы требуется выполнить одно из двух заданий.

***Задание* 1**. Составить алгоритм и программу для решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

с квадратными матрицами, применяя основную схему метода исключения Гаусса. В программе предусмотреть обращение исходной матрицы системы и вычисление ее определителя.

Выполнение задания 1 состоит из двух этапов: разработки алгоритма и программы и проведения сравнительного анализа.

1. Программа, реализующая вычисления по схеме метода Гаусса должна удовлетворять следующим требованиям:

функции ввода: ввод с клавиатуры

1. Ввод размерности n.
2. Ввод исходной матрицы системы A и вектора b.
3. Вывод на экран исходной матрицы и вектора b.
   (формат три цифры после запятой)
4. Вычисление $\|\cdot\|_\infty$ -нормы исходной матрицы.

цикл вычислений:
1. Реализация прямого хода метода (с проверкой ведущего элемента на нулевое значение в каждом цикле).
2. Вычисление определителя.
3. Вывод на экран верхнетреугольной матрицы - результат прямого хода.
4. Реализация обратного хода.

функция вывода:
1. Вывод полученного решения.
2. Вывод значения определителя.
3. Вычисление и вывод вектора - невязки $r = Ax - b$.
4. Вывод обратной матрицы
5. Вычисление и вывод вектора - невязки $r = E - A\,A^{-1}$.
6. Вычисление и вывод числа обусловленности $cond_\infty(A)$.

2. Составить набор линейных систем (до 10) разных порядков от 3 до 10 и провести сравнительный анализ решений, получаемых с помощью разработанной программы и одним из имеющихся специализированных пакетов: MathCad или MatLab.

***Задание* 2**. Составить алгоритм и программу для решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, n$$

с квадратными матрицами, применяя метод исключения Гаусса с частичным выбором по столбцам. В программе предусмотреть обращение матрицы исходной системы.

Выполнение задания 2 состоит из двух этапов: разработки алгоритма и программы и проведения сравнительного анализа.

1. Программа, реализующая вычисления по схеме метода Гаусса с частичным выбором должна удовлетворять следующим требованиям:

функции ввода: ввод с клавиатуры

1. Ввод размерности n.
2. Ввод исходной матрицы системы A и вектора b.
3. Вывод на экран исходной матрицы и вектора b.
   (формат три цифры после запятой)
4. Вычисление $\|\cdot\|_l$ -нормы исходной матрицы.

цикл
вычислений: 1. Реализация прямого хода метода (с проверкой ведущего элемента на нулевое значение в каждом цикле).
2. Реализация обратного хода.

функция вывода: 1. Вывод полученного решения.
2. Вычисление и вывод вектора - невязки $r = Ax - b$.
3. Вывод обратной матрицы.
4. Вычисление и вывод вектора - невязки $r = E - A\,A^{-1}$.
5. Вычисление и вывод числа обусловленности $cond_l(A)$.

2. Составить набор линейных систем до 8 порядков от 3 до 6 и провести сравнительный анализ решений, получаемых с помощью разработанной программы и одним из имеющихся специализированных пакетов: MathCad или MatLab.

Содержание отчета. В итоговый отчет должна входить следующая информация.

1. Формулировка задания.
2. Расчетные формулы метода.
3. Описание алгоритма вычислений по расчетным формулам.
4. Набор контрольных примеров и результаты сравнительного анализа.
5. Описание схемы программы.

Контрольные вопросы

1. Описать основную схему метода исключений Гаусса в поэлементной форме.
2. Выписать матричную форму записи метода исключений Гаусса.
3. Описать алгоритм исключения с частичным выбором по столбцам.
4. Описать алгоритм исключения с полным выбором.
5. Описать последовательность действий при оценке трудоемкости метода исключения Гаусса и выписать эту оценку.
6. Выписать формулу для вычисления определителя методом исключения.
7. Описать схему вычисления обратной матрицы методом исключения Гаусса.
8. Дать определение числа обусловленности.

3. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ЖОРДАНА -ГАУССА

Метод исключения Жордана -Гаусса или полного исключения для решения систем линейных алгебраических уравнений неизвестных сводится к преобразованию исходной системы к системе с единичной или диагональной матрицей.

3.1 Описание метода. Вычисление определителя. Обращение матрицы

Описание метода. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

где $A = (a_{ij})$ - неособенная размерности $n\times n$ матрица, $detA \neq 0$, $x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ и $b = (b_1, ..., b_n)^{\mathrm{T}}$ - векторы-столбцы.

Вычислительная схема метода состоит из n циклов, в каждом из которых последовательно с помощью k-ой строки исключаются элементы при x_k -ой неизвестной в каждой из n-1 -ой строки, кроме k -ой. Схема реализуется по следующим формулам:

деление k - ой строки на число a_{kk}

$$\begin{aligned} &d_p^{(k)} = a_{kp}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, p = k, ..., n, k = 1, 2, ..., n \\ &b_k^{(k)} = b_k^{(k)} / a_{kk}^{(k)}; \end{aligned} \tag{3.2}$$

вычитание k - ой строки из m - ой строки

$$a_{mp}^{(k+1)} = a_{mp}^{(k)} - d_p^{(k)} \cdot a_{mk}^{(k)}, \ p = k, ..., n; \ m > k \tag{3.3}$$

$$b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - a_{mk}^{(k)} \cdot b_k^{(k)}. \tag{3.4}$$

В результате n циклов получается система с единичной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \cdot \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

или

$$x_i = b_i^{(n)}, \ i = 1, 2, \dots, n \ .$$

Формулами (3.2) - (3.5) определяется поэлементная форма записи *основной вычислительной схемы метода исключения Жордана -Гаусса*.

Необходимым и достаточным условием применимости метода является неравенство нулю всех *ведущих элементов*, $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

Другая форма метода исключения Жордана-Гаусса, называемая *матрично-векторной*, получается из (3.2) - (3.5), если ввести набор матриц $L^{(k)}$ вида

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1,k}^{(k)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & d_{2,k}^{(k)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{k+1,k}^{(k)} & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{n,k}^{(k)} & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

с элементами $d_{ik}^{(k)} = -\ a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$, $i = 1, ..., n$; $k = 1, 2, ..., n$ в k-ом столбце. Эти матрицы отличаются от единичной лишь k-м столбцом. Процесс же преобразований сводится к вычислению последовательных произведений

$$A^{(k)} = L^{(k)} A^{(k-1)};\ \ b^{(k)} = L^{(k)} b^{(k-1)},\ \ k = 1, ..., n, \qquad (3.6)$$

и начинается с матрицы $A^{(0)}$ равной исходной матрице A, т.е. $A^{(0)} = A$, вектора $b^{(0)}$, $b^{(0)} = b$ и матрицы $L^{(1)}$ вида

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $d_{i1}^{(1)} = -\ a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$, $i = 2, ..., n$.

В результате n циклов получается система с единичной матрицей E и вектором $b^{(n)}$, именно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \cdot \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}, \text{ или } \ E\,x = b^{(n)}. \qquad (3.7)$$

На рисунке 5 представлен один из возможных алгоритмов, реализующий нахождение решения системы линейных алгебраических уравнений методом исключения Жордана -Гаусса (формулы (3.2) - (3.5)).

Алгоритм метода исключения Жордана -Гаусса

цикл по столбцам

Для $k=1$ **до** n **выполнять**

преобразование k-й строки

$d = a_{k,k}$; $a_{k,k}=1$

Для $p = k+1$ **до** n **выполнять**

$a_{k,p} = a_{k,p}/d$; $b_k = b_k/d$ *если матрица A и вектор b введены разными массивами*

конец по p

исключение элементов при k-ой неизвестной с помощью k-ой строки

цикл по строкам

Для $m = 1$ **до** n **выполнять**

если $m \neq k$ **выполнять**

$s = a_{m,k}$; $a_{m,k}=0$

цикл по элементам m -ой строки - формула 3.3

Для $p = k+1$ **до** n **выполнять**

$a_{m,p} = a_{m,p} - s \cdot a_{kp}$

конец цикла по p

$b_m = b_m - s \cdot b_k$ - *вычисление правой части - формула* 3.4

конец по если

конец цикла по m

конец цикла по k

вывод полученного решения

Рисунок 5- Алгоритм метода исключения Жордана -Гаусса

Комментарий к алгоритму. Алгоритм непосредственно реализует вычисления по формулам (3.2) - (3.5) в предположении, что матрица A и вектор b введены в разные массивы, ведущие элементы $a_{kk}^{(k)}$ не равны нулю, $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

Вычисление определителя матрицы. Для метода Жордана-Гаусса вычисление определителя сводится к вычислению произведения ведущих элементов $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{nn}^{(n)}$, т.е.

$$\det A = a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)} . \qquad (3.8)$$

Обращение матрицы. Для вычисления обратной матрицы совершают ся одинаковые преобразования Жордана-Гаусса в равенстве $AA^{-1} = E$ одновременно и над исходной матрицей A и над матрицей E до тех пор, пока A не превратится в единичную E, а единичная в обратную A^{-1}

При практических вычислениях к матрице A дописывается единичная матрица, затем проводятся преобразования исключения Жордана - Гаусса.

Рассмотрим примеры на нахождении решения системы линейных уравнений и обращение матрицы методом исключения Жордана-Гаусса.

Пример. Дана система третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Требуется:

а) найти решение данной систем методом исключения Жордана-Гаусса, получить обратную матрицу и вычислить определитель;

б) выписать метод исключения Жордана-Гаусса в матрично -векторной форме.

Решение. а) В данном случае количество циклов равно трем. Для получения обратной матрицы одновременно реализуем преобразования и над единичной матрицей. Введем для удобства верхние индексы.

Исключим коэффициенты при x_1 во второй и третьей строках, для этого вычислим коэффициенты

$$d_1^{(1)} = \frac{a_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 1,\ d_2^{(1)} = \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{2} = 1.5,\ d_3^{(1)} = \frac{a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -2, b_1^{(1)} = \frac{b_1^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{1}{4} = -0.25,$$

и вычтем первую строку, умноженную на $a_{21}^{(1)}$, из второй, получим

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - d_1^{(1)} \cdot a_{21}^{(1)} = 2 - 2 = 0,\ a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - d_2^{(1)} \cdot a_{21}^{(1)} = 2 - (1.5) \cdot 2 = -1,$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - d_3^{(1)} \cdot a_{21}^{(1)} = -5 - (-2) \cdot 2 = -1,$$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - b_1^{(1)} \cdot a_{21}^{(1)} = -2 - (-0.25) \cdot 2 = -1.5.$$

Аналогично для единичной матрицы:

$$z_1^{(1)} = \frac{e_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2} = 0.5,\ z_2^{(1)} = \frac{e_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0,\ z_3^{(1)} = \frac{e_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0,$$

вычитание первой строки, умноженной на $a_{21}^{(1)}$, из второй:

$$e_{21}^{(2)} = e_{21}^{(1)} - z_1^{(1)} \cdot a_{21}^{(1)} = 0 - 0.5 \cdot 2 = -1,\ e_{22}^{(2)} = e_{22}^{(1)} - z_2^{(1)} \cdot a_{21}^{(1)} = 1 - 0 \cdot 2 = 1,$$

$$e_{23}^{(2)} = e_{23}^{(1)} - z_3^{(1)} \cdot a_{21}^{(1)} = 0 - 0 \cdot 2 = 0,$$

вычитание первой строки, умноженной на $a_{31}^{(1)}$, из третьей:

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - d_1^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)} = 3 - 1 \cdot 3 = 0, \qquad a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - d_2^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)} = 2 - 1.5 \cdot 3 = -2.5,$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - d_3^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)} = 2 - (-2) \cdot 3 = 8,\ b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_1^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)} = 6 - (-0.25) \cdot 3 = 6.75.$$

Аналогично для третьей строки единичной матрицы:

$$e_{31}^{(2)} = e_{31}^{(1)} - z_1^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)} = 0 - 0.5 \cdot 3 = -1.5, \qquad e_{32}^{(2)} = e_{32}^{(1)} - z_2^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)} = 0 - 0 \cdot 3 = 0,$$

$e_{33}^{(2)} = e_{33}^{(1)} - z_3^{(1)} \cdot a_{31}^{(1)} = 1 - 0 \cdot 3 = 1.$

После первого цикла система и единичная матрица имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2.5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.5 \\ 6.75 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, исключим коэффициенты при x_2 в первой и третьей строках. Для этого вычислим коэффициенты

$$d_2^{(2)} = \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad d_3^{(2)} = \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \left(-\frac{3}{2}\right) / (-1) = \frac{3}{2} = 1.5,$$

и вычтем вторую строку, умноженную на $a_{12}^{(2)}$, из первой, получим

$$a_{12}^{(3)} = a_{12}^{(2)} - d_2^{(2)} \cdot a_{12}^{(2)} = \frac{3}{2} - 1 \cdot \frac{3}{2} = 0, \quad a_{13}^{(3)} = a_{13}^{(2)} - d_3^{(2)} \cdot a_{12}^{(2)} = (-2) - 1 \cdot \frac{3}{2} = -3.5,$$

$$b_1^{(3)} = b_1^{(2)} - b_2^{(2)} a_{12}^{(2)} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = -2.5,$$

и вторую строку, умноженную на $a_{32}^{(2)}$, из третьей

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - d_2^{(2)} \cdot a_{32}^{(2)} = -2.5 - 1 \cdot (-2.5) = 0, \quad a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - d_3^{(2)} \cdot a_{32}^{(2)} = 8 - 1 \cdot \left(-2.5\right) = 10.5,$$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - b_2^{(2)} a_{32}^{(2)} = 6.75 - \left(-2.5\right) \cdot 1.5 = 10.5.$$

Для единичной матрицы, имеем

$$z_1^{(2)} = \frac{e_{21}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-1}{-1} = 1, \; z_2^{(2)} = \frac{e_{22}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{1}{-1} = -1, z_3^{(2)} = \frac{e_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = 0.$$

Вычитание второй строки, умноженной на $a_{12}^{(2)}$, из первой

$e_{11}^{(3)} = e_{11}^{(2)} - z_1^{(2)} \cdot a_{12}^{(2)} = 0.5 - 1 \cdot 1.5 = -1, e_{12}^{(3)} = e_{12}^{(2)} - z_2^{(2)} \cdot a_{12}^{(2)} = 0 - (-1) \cdot 1.5 = 1.5,$

$e_{13}^{(3)} = e_{13}^{(2)} - z_3^{(2)} \cdot a_{12}^{(2)} = 0 - 0 \cdot 1.5 = 0,$

и второй строки, умноженной на $a_{32}^{(2)}$, из третьей

$e_{31}^{(3)} = e_{31}^{(2)} - z_1^{(2)} \cdot a_{32}^{(2)} = -1.5 - 1 \cdot \left(-2.5\right) = 1,$

$e_{32}^{(3)} = e_{32}^{(2)} - z_2^{(2)} \cdot a_{32}^{(2)} = 0 - (-1) \cdot \left(-2.5\right) = -2.5,$

$e_{33}^{(3)} = e_{33}^{(2)} - z_3^{(2)} \cdot a_{32}^{(2)} = 1 - 0 \cdot \left(-2.5\right) = 1.$

После второго цикла система и единичная матрица имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 10.5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Исключение коэффициентов при x_3 в первой и во второй строках:

$$d_3^{(3)} = \frac{a_{33}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = 10.5 / 10.5 = 1, \quad b_3^{(3)} = \frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = 10.5 / 10.5 = 1,$$

$$a_{13}^{(3)} = a_{13}^{(3)} - d_3^{(3)} \cdot a_{13}^{(3)} = 0, \quad b_1^{(3)} = b_1^{(3)} - b_3^{(3)} a_{13}^{(3)} = -2.5 - 1 \cdot (-3.5) = 1,$$

$$a_{23}^{(3)} = a_{23}^{(3)} - d_3^{(3)} \cdot a_{23}^{(3)} = 0, \quad b_2^{(3)} = b_2^{(3)} - b_3^{(3)} \cdot a_{23}^{(3)} = 1.5 - 1 = 0.5.$$

Для единичной матрицы, имеем:

$$z_1^{(3)} = \frac{e_{31}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{2}{21}, \; z_2^{(3)} = \frac{e_{32}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = -\frac{5}{21}, z_3^{(3)} = \frac{e_{33}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{2}{21}.$$

Вычитание третьей строки, умноженной на $a_{13}^{(3)}$, из первой:

$$e_{11}^{(4)} = e_{11}^{(3)} - z_1^{(3)} \cdot a_{13}^{(3)} = -1 - \frac{2}{21} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{2}{3}, \; e_{12}^{(4)} = e_{12}^{(3)} - z_2^{(3)} \cdot a_{13}^{(3)} = \frac{3}{2} - (-\frac{5}{21}) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{2}{3},$$

$$e_{13}^{(4)} = e_{13}^{(3)} - z_3^{(3)} \cdot a_{13}^{(3)} = 0 - \frac{2}{21} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{3},$$

и третьей строки, умноженной на $a_{23}^{(3)}$, из второй:

$$e_{21}^{(4)} = e_{21}^{(3)} - z_1^{(3)} \cdot a_{23}^{(3)} = 1 - \frac{2}{21} \cdot 1 = \frac{19}{21}, \; e_{22}^{(4)} = e_{22}^{(3)} - z_2^{(3)} \cdot a_{23}^{(3)} = (-1) - \left(-\frac{5}{21}\right) \cdot 1 = -\frac{16}{21},$$

$$e_{23}^{(4)} = e_{23}^{(3)} - z_3^{(3)} \cdot a_{23}^{(3)} = 0 - \frac{2}{21} \cdot 1 = -\frac{2}{21}.$$

В результате трех циклов получаем решение и обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{19}{21} & -\frac{16}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{2}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{2}{21} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления определителя матрицы применяем формулу (3.8), получим

$$\det A = a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot a_{33}^{(3)} = 2 \cdot (-1) \cdot \frac{21}{2} = -21 .$$

б)Для записи в матричной форме введем матрицы $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, $L^{(3)}$ вида

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_{21}^{(1)} & 1 & 0 \\ d_{31}^{(1)} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & d_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_{32}^{(2)} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2.5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_{13}^{(3)} \\ 0 & 1 & d_{23}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & -0.09 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

где $d_{21}^{(1)} = -\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $d_{31}^{(1)} = -\dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $d_{12}^{(2)} = -\dfrac{a_{12}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$, $d_{23}^{(2)} = -\dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$,

$d_{13}^{(3)} = -\dfrac{a_{13}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}, d_{23}^{(3)} = -\dfrac{a_{23}^{(2)}}{a_{33}^{(3)}}$.

$$A^{(1)} = L^{(1)} A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2.5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$b^{(1)} = L^{(1)} b^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 6.75 \end{pmatrix};$$

$$A^{(2)} = L^{(2)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2.5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10.5 \end{pmatrix},$$

$$b^{(2)} = L^{(2)} b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 6.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 10.5 \end{pmatrix};$$

$$A^{(3)} = L^{(3)} A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & -0.09 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10.5 \end{pmatrix},$$

$$b^{(3)} = L^{(3)} b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & -0.09 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2.5 \\ 1.5 \\ 10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 10.5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$A^{(3)}x = b^{(3)} \quad , \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 10.5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует вектор-решение : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3.2 Задачи

1. Получить из матричной формы записи метода исключения Жордана-Гаусса его поэлементную форму.
2. Оценить вычислительную трудоемкость метода исключения Жордана-Гаусса.
3. Составить алгоритм для решения систем методом Жордана-Гаусса с полным выбором ведущего элемента.
4. Выписать расчетные формулы метода Жордана-Гаусса для вычисления определителя трехдиагональной матрицы. Оценить вычислительную трудоемкость схемы.
5. Выписать расчетные формулы метода Жордана-Гаусса для вычисления определителя почти треугольной матрицы. Оценить вычислительную трудоемкость схемы.
6. Составить алгоритм обращения верхнетреугольной матрицы методом Жордана-Гаусса. Определить вычислительную трудоемкость алгоритма.
7. Составить алгоритм обращения нижнетреугольной матрицы методом Жордана-Гаусса. Определить вычислительную трудоемкость алгоритма.
8. Найти методом Жордана-Гаусса обратные матрицы и вычислить число обусловленности по l -норме $\|\cdot\|_l$ для следующих матриц:

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad 4. \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad 5. \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1.3 & 0.5 & 4 \end{pmatrix} \quad 7. \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1.7 \\ 0.9 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad 8. \begin{pmatrix} 9 & 0.6 & 7 \\ 3 & 6 & 1.8 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad 9. \begin{pmatrix} 7 & 0.9 & 2 \\ 2 & 9 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad 10. \begin{pmatrix} 3 & 0.3 & 1 \\ 0.1 & 3.5 & 1 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1.7 & 5 & 4.1 \\ 3.7 & 1 & 2.6 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0.9 & 5 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 6 & 0.4 & 1 \\ 5 & 7 & 0.7 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 7.2 & 3 & 1.5 \\ 0.6 & 2 & 1.6 \\ 2 & 1 & 9.1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 5 & 2.2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0.7 & 0.2 & 2 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

11. Исходя из приведенного алгоритма на рисунке 5, видоизменить алгоритм для решения систем с прямоугольными матрицами.
12. Видоизменить алгоритм на рисунке 5 для случая, когда матрица A и вектор b размещаются в одном двумерном массиве.

3.3 Лабораторные задания

***Цель*:** практика программирования схемы метода исключения Жордана - Гаусса в одной из имеющихся систем программирования, практика применения специализированных программных систем, предназначенных для решения математических задач.

Для выполнения лабораторной работы требуется выполнить одно из двух заданий. В каждом из заданий приводятся требования к функциям программы.

***Задание* 1**. Составить алгоритм и программу для решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, n$$

с помощью основной схемы метода Жордана-Гаусса. В программе предусмотреть обращение исходной матрицы системы и вычисление ее определителя.

Выполнение задания 1 состоит из двух этапов: разработки алгоритма и программы и проведения сравнительного анализа.

1. Программа, реализующая вычисления по схеме метода Жордана-Гаусса должна удовлетворять следующим требованиям:

функции ввода: <u>ввод с клавиатуры</u>

1.Ввод размерности n.
2.Ввод исходной матрицы системы A и вектора b.
3.Вывод на экран исходной матрицы и вектора b.
(формат: три цифры после запятой)
4. Вычисление $\|\cdot\|_\infty$ **-**нормы исходной матрицы.

цикл
вычислений: 1.Реализация алгоритма вычислительной схемы (с проверкой ведущего элемента на нулевое значение в каждом цикле).
2.Вычисление определителя.

функция вывода:1.Вывод полученного решения.
2. Вывод значения определителя.
3.Вычисление и вывод вектора - невязки $r = Ax - b$.
4.Вывод обратной матрицы
5.Вычисление и вывод вектора - невязки $r = E - A\,A^{-1}$.
6.Вычисление и вывод числа обусловленности $cond_\infty(A)$.

2. Составить набор линейных систем (до 10) порядков от 3 до 6 и провести сравнительный анализ решений, получаемых с помощью разработанной программы и одним из имеющихся специализированных пакетов: MathCad или MatLab.

***Задание* 2**. Составить алгоритм и программу для решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

с помощью метода исключения Жордана-Гаусса, применяя частичный выбор по столбцам. В программе предусмотреть обращение матрицы исходной системы.

Выполнение задания 2 состоит из двух этапов: разработки алгоритма и программы и проведения сравнительного анализа.

1. Программа, реализующая вычисления по схеме метода Жордана-Гаусса с частичным выбором, должна удовлетворять следующим требованиям:

функции ввода: <u>ввод с клавиатуры</u>
1.Ввод размерности n.
2.Ввод исходной матрицы системы A и вектора b.
3.Вывод на экран исходной матрицы и вектора b.
(формат: три цифры после запятой)
4. Вычисление $\|\cdot\|_l$-нормы исходной матрицы.

цикл
вычислений: Реализация алгоритма с частичным выбором (с проверкой ведущего элемента на нулевое значение в каждом цикле).

функция вывода:1.Вывод полученного решения.
2.Вычисление и вывод вектора - невязки $r = Ax - b$.
3.Вывод обратной матрицы.
4.Вычисление и вывод вектора - невязки $r = E - A\,A^{-1}$.

5.Вычисление и вывод числа обусловленности $cond_I(A)$.

2. Составить набор линейных систем (до 8) порядков от 3 до 7 и провести сравнительный анализ решений, получаемых с помощью разработанной программы и одним из имеющихся специализированных пакетов: MathCad или MatLab.

Содержание отчета. В итоговый отчет должна входить следующая информация.

1. Формулировка задания.
2. Расчетные формулы метода.
3. Описание алгоритма вычислений по расчетным формулам.
4. Набор контрольных примеров и результаты сравнительного анализа.
5. Описание схемы программы.

Контрольные вопросы

1. Описать вычислительную схему метода исключений Жордана-Гаусса в поэлементной форме.
2. Выписать матричную форму записи метода исключений Жордана-Гаусса.
3. Описать алгоритм исключения Жордана-Гаусса с частичным выбором по столбцам.
4. Описать алгоритм исключения Жордана-Гаусса с полным выбором.
5. Описать последовательность действий при оценке трудоемкости метода исключения Жордана-Гаусса и выписать эту оценку.
6. Выписать формулу для вычисления определителя методом исключения Жордана-Гаусса.
7. Описать схему вычисления обратной матрицы методом исключения Жордана- Гаусса.

5. МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Метод квадратных корней применяется для решения систем с симметрической положительно определенной матрицей и сводится к преобразованию исходной системы к равносильной системе с верхне-треугольной матрицей.

5.1 Вычислительная схема метода. Вычисление определителя

Теорема [4],[12]. *Пусть A симметричная положительно определенная матрица, тогда существует такая верхнетреугольная матрица U с положительными диагональными элементами, что A представляется в виде*

$$A = U^{\mathrm{T}}U.$$

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{5.1}$$

где $A = (a_{ij})$ - неособенная размерности $n\times n$ симметрическая матрица, т. е. $A = A^T = (a_{ji})$, $detA \neq 0$, $x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ *и* $b = (b_1, ..., b_n)^{\mathrm{T}}$ - векторы-столбцы.

Согласно теореме матрица системы (5.1) может быть представлена в виде прозведения двух транспонированных между собой треугольных матриц

$$A = U^{\mathrm{T}}U, \tag{5.2}$$

где U - верхнетреугольная матрица, U^{T} - нижнетреугольная матрица.

Представление (5.2) дает возможность записать систему (5.1) в виде двух систем уравнений, именно,

$$Ax = b \Rightarrow U^{\mathrm{T}}Ux=b \Rightarrow \begin{cases} U^{\mathrm{T}}z = b, \\ Ux = z, \end{cases} \tag{5.3}$$

тогда решение системы (5.1) сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами U^{T} и U.

Элементы u_{ij} матрицы U определяются из следующих уравнений

$$\left.\begin{aligned} &u_{1i}^2 + u_{2i}^2 + \ldots + u_{ii}^2 = a_{ii} \\ &u_{1i}u_{1j} + u_{2i}u_{2j} + \ldots + u_{ii}u_{ij} = a_{ij} \end{aligned}\right\} i < j,$$

которые получаются из перемножения матриц U^{T} и U в равенстве (5.2).

В поэлементной форме (5.3) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & \cdots & u_{n1} \\ 0 & u_{22} & u_{32} & \cdots & u_{n2} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Вычислительная схема метода состоит из двух этапов. На первом этапе, называемом *прямым ходом*, определяются элементы u_{ij} матрицы U и неизвестные z_1, z_2, ..., z_n. Второй этап, называемый *обратным ходом*, состоит в нахождении неизвестных x_n, x_{n-1}, ..., x_1.

Прямой ход реализуется по следующим формулам

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \ j = 2, 3, \ldots, n, \tag{5.4}$$

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} u_{pi}^2}, \ i = 2, 3, \ldots, n, \tag{5.5}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} u_{pi} u_{pj}}{u_{ii}}, \ j = 3, \ldots, n \, (i < j), \tag{5.6}$$

$$u_{ij} = 0, i > j.$$

Для вычисления $z_1, z_2, \ldots, z_n$ используются формулы

$$z_1 = \frac{b_1}{u_{11}}, \ z_i = \frac{b_i - \sum_{p=1}^{i-1} u_{pi} z_p}{u_{ii}}, i = 2, 3, \ldots, n. \tag{5.7}$$

Обратный ход аналогичен обратному ходу компактной схемы, т.е.

$$x_n = \frac{z_n}{u_{nn}}, \ x_i = \frac{z_i - \sum_{p=i+1}^{n} u_{ip} x_p}{u_{ii}}, i = n-1, \ldots, 1. \tag{5.8}$$

Формулами (5.4) - (5.8) определяется поэлементная форма записи *вычислительной схемы метода квадратных корней*. Условием применимости метода является неравенство нулю *элементов* u_{ii}, $u_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

<u>*Вычисление определителя.*</u> Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц, поэтому из равенства (5.2) следует, что определитель матрицы A равен произведению определителей матриц U^{T} и U,

$$\det A = \det U^T \cdot \det U = u_{11}^2 \cdot u_{22}^2 \cdot \ldots \cdot u_{nn}^2 = \prod_{k=1}^{n} u_{kk}^2 . \tag{5.9}$$

На рисунке 7 представлен один из возможных алгоритмов, реализующий нахождение решения системы линейных алгебраических уравнений методом квадратных корней.

Алгоритм метода квадратных корней

Прямой ход метода -формулы 5.4 - 5.7

вычисление элементов первой строки матрицы $U^{т}$ *- формула* 5.4

$u_{11} = \mathrm{sqrt}(a_{11})$

Для $j = 2$ **до** n **выполнять**

$u_{1,j} = a_{1,j} / u_{11}$

конец цикла по j

вычисление остальных элементов матрицы $U^{т}$ *- формулы* 5.4 - 5.6

Для $i = 2$ **до** n **выполнять**

цикл для вычисления внутренних слагаемых формулы 5.5

Для $k = 1$ **до** $i - 1$ **выполнять**

$s = s + u_{k,i} \cdot u_{k,i}$

конец цикла по k

проверка знака у разности $a_{ii} - s$

если $a_{ii} - s < 0$ *окончание вычислений, выход на конец*

$u_{ii} = \mathrm{sqrt}(a_{i,i} - s)$ *диагональный элемент матрицы* $U^{т}$

вычисление внедиагональных элементов

Для $j = i + 1$ **до** n **выполнять**

цикл для вычисления внутренних слагаемых формулы 5.6

Для $k = 1$ **до** $i - 1$ **выполнять**

$s = s + u_{k,i} \cdot u_{k,j}$

конец цикла по k

$u_{i,j} = (a_{i,j} - s) / u_{i,i}$

конец цикла по j

конец цикла по i

вычисление по формулам 5.7

$z_1 = b_1 / u_{11}$

Для $i = 2$ **до** n **выполнять**

цикл для вычисления внутренних слагаемых формулы 5.7

Для $k = 1$ **до** $i - 1$ **выполнять**

$s = s + u_{ki} \cdot z_k$

конец цикла по k

$z_i = (b_i - s) / u_{ii}$

конец цикла по i

Обратный ход метода - формулы 5.8

$x_n = z_n / u_{nn}$

Для $i = n - 1$ **до** 1 **выполнять**

цикл для вычисления внутренних слагаемых формулы 5.8

Для $k = i + 1$ **до** n **выполнять**

$s = s + u_{ik} \cdot x_k$

конец цикла по k

$x_i = (z_i - s) / u_{ii}$

конец цикла по i

Рисунок 7- Алгоритм метода квадратных корней

Комментарий к алгоритму. Алгоритм реализован в предположении, что для каждой *k*-ой строки $u_{kk}^2 > 0$. Матрица *U* не сохраняется.

Рассмотрим примеры на нахождении решения системы линейных уравнений и обращение матрицы.

Пример. Дана система третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти решение данной системы методом квадратных корней и вычислить определитель матрицы исходной системы.

Решение. Первый этап - нахождение элементов матрицы *U*, имеем:

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2; \quad u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = -\frac{1}{2}; \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = \frac{1}{2}.$$

Далее,

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = \sqrt{3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2\frac{3}{4}}; \quad u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12}u_{13}}{u_{22}} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\frac{3}{4}}} = \frac{5}{2\sqrt{11}};$$

$$u_{31} = u_{32} = 0\ ;$$

$$u_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{p=1}^{2} u_{pi}^2} = \sqrt{5 - u_{13}^2 - u_{23}^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2\sqrt{11}}\right)^2} = \sqrt{\frac{46}{11}}\quad .$$

Теперь выпишем систему для определения *z*, т.е. нахождение решения первого из уравнений (5.3), имеем (используем формулы (5.7))

$$z_1 = \frac{b_1}{u_{11}} = \frac{8}{2} = 4; \quad z_2 = \frac{b_2 - u_{12}z_1}{u_{22}} = \frac{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4}{\sqrt{2\frac{3}{4}}} = \frac{8}{\sqrt{11}};$$

$$z_3 = \frac{b_3 - u_{13}z_1 - u_{23}z_2}{u_{33}} = \frac{8 - \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{5}{2\sqrt{11}}\cdot\frac{8}{\sqrt{11}}}{\sqrt{\frac{46}{11}}} = \sqrt{\frac{46}{11}}.$$

Для нахождения решения, т.е. вычисление значений x_1, x_2, x_3 используем формулы (5.8) обратного хода, получим

$$x_3 = \frac{z_3}{u_{33}} = 1, \quad x_2 = \frac{z_2 - u_{23} x_3}{u_{22}} = \frac{\frac{8}{\sqrt{11}} - \frac{5}{2\sqrt{11}} \cdot 1}{\sqrt{2\frac{3}{4}}} = 1,$$

$$x_1 = \frac{z_1 - u_{12} x_2 - u_{13} x_3}{u_{11}} = \frac{4 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2} = 2\,.$$

Для вычисления определителя используем формулу (5.9), получим

$$\det A = u_{11}^1 \cdot u_{22}^2 \cdot u_{33}^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{2\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{46}{11}}\right)^2 = 46\ .$$

5.2 Задачи

1. Оценить вычислительную трудоемкость метода квадратных корней.
2. Исходя из представления $A = U^{\mathrm{T}} U$ получить уравнения для элементов u_{ij} матрицы U через элементы a_{ij} матрицы A.
3. Показать, что при реализации метода квадратных корней для положительно определенной матрицы не может быть увеличения максимального по модулю элемента.
4. Определить число операций умножения и деления, необходимых для вычисления определителя порядка n методом квадратных корней. Сравнить это число с числом операций умножения при вычислении определителя с помощью разложения по строке.
5. Выписать расчетные формулы метода квадратных корней для вычисления определителя трехдиагональной матрицы. Подсчитать число умножений и делений.
6. Видоизменить алгоритм на рисунке 7 для случая, когда матрица A и вектор b размещаются в одном двумерном массиве.
7. Выписать расчетные формулы метода квадратных корней для трехдиаго нальной симметрической матрицы. Оценить трудоемкость схемы.
8. Для следующих матриц выполнить разложение $A=U^{\mathrm{T}}U$:

1. $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 11 & -2 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 12 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 17 & 2 & 1 \\ 2 & 14 & -3 \\ 1 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 18 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 16 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 19 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0.1 \\ 1 & 0.1 & 14 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 3 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} 13 & 5 & 1 \\ 5 & 11 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 13 & 3 \\ 1 & 3 & 17 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 19 & 1 & 5 \\ 1 & 19 & 2 \\ 5 & 2 & 19 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 15 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \\ 3 & 1 & 17 \end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix} 18 & 4 & 1 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 12 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & 3 \\ 5 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 28 & 1 & 4 \\ 1 & 19 & 3 \\ 4 & 3 & 18 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 25 & 3 & 0 \\ 3 & 17 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 \\ 1 & 11 & 2 \\ 4 & 2 & 17 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 19 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & 15 \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} 15 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 3 \\ 6 & 3 & 14 \end{pmatrix}$.

12. Составить алгоритм метода квадратных корней исключения для случая, когда требуется хранение матрицы *U*.

5.3 Лабораторные задания

***Цель*:** практика программирования метода квадратных корней в одной из имеющихся систем программирования.

Для выполнения лабораторной работы требуется выполнить одно задание. В задании приводятся требования к функциям программы.

Задание. Составить алгоритм и программу для решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

с одной и той же симметричной положительно определенной матрицей, но разными правыми частями, применяя метод квадратных корней. В программе предусмотреть вычисление определителя матрицы системы, подсчет числа арифметических операций и сохранение матрицы *U*.

Выполнение задания состоит из двух этапов: разработки алгоритма и программы и проведения сравнительного анализа.

1. Программа, реализующая вычисления по схеме метода квадратных корней должна удовлетворять следующим требованиям:

функции ввода: ввод с клавиатуры
1.Ввод размерности n.
2.Ввод исходной матрицы системы A и проверка на симметричность.
3. Ввод набора векторов b.
4.Вывод на экран исходной матрицы и набора векторов b. (формат: три цифры после запятой)

цикл вычислений: 1.Реализация алгоритма прямого хода вычислительной схемы для первоначально введенной матрицы (с проверкой ведущего элемента на нулевое значение в каждом цикле).
2.Вычисление определителя.
3.Реализация обратного хода.
4.Подсчет числа арифметических операций.
5.Реализация второго этапа прямого хода, формула 5.7 для остальных векторов b.
6.Реализация обратного хода для остальных векторов b.

функция вывода: 1.Вывод полученного решения.
2. Вывод значения определителя.
3.Вычисление и вывод векторов - невязки $r = Ax - b$.
4.Вывод числа операций.

2. Составить набор правых частей (до 12) и провести сравнительный анализ получаемых решений.

Содержание отчета. В итоговый отчет должна входить следующая информация.
1. Формулировка задания.
2. Расчетные формулы метода квадратных корней.
3. Описание алгоритма вычислений по расчетным формулам.
4. Набор правых частей и результаты сравнительного анализа.
5. Описание схемы программы.

Контрольные вопросы

1. Описать метод квадратных корней в поэлементной форме.
2. Выписать матричные уравнения для метода квадратных корней.
3. Описать последовательность действий при оценке трудоемкости метода квадратных корней и выписать эту оценку.
4. Выписать формулу для вычисления определителя методом квадратных корней.
5. Сформулировать теорему о разложении $A = U^{\mathrm{T}}U$.

6. МЕТОД ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

Метод ортогонализации для решения систем линейных уравнений основан на процессе ортогонализации системы векторов.

6.1 Вычислительная схема метода. Геометрическая интерпретация. Матричная форма

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{6.1}$$

где $A = (a_{ij})$ - неособенная размерности $n{\times}n$ матрица, $detA \neq 0$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$ и $b = (b_1, ..., b_n)^T$ - векторы-столбцы.

Если присоединить столбец b к матрице A, то исходная система (6.1) запишется в виде

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n + & a_{1,n+1} = 0, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n + & a_{2,n+1} = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots & +a_{nn}x_n + & a_{n,n+1} = 0, \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} (a_1, z) = 0, \\ (a_2, z) = 0, \\ \dots \\ (a_n, z) = 0, \end{matrix} \tag{6.2}$$

где $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, a_{i,\,n+1})$ - вектор-строки, $a_{i,\,n+1} = - b_i$, $i = 1, 2, ..., n$; $z = (x_1, ..., x_n, 1)^T$ - вектор-столбец. Система векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ дополняется вектором $a_{n+1} = (0, 0, ..., 1)$. К полученной системе $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ применяется *процесс ортогонализации*, состоящий в построении ортонормированной системы $s_1, s_2, ..., s_{n+1}$, и который реализуется по следующим рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} & r_1 = a_1,\ s_1 = \frac{r_1}{\|r_1\|},\ \ r_2 = a_2 - (a_2, s_1)s_1,\ \ s_2 = \frac{r_2}{\|r_2\|}, \\ & \dots\dots, \\ & r_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1}(a_k, s_i)s_i,\ \ s_k = \frac{r_k}{\|r_k\|}, \\ & \dots\dots, \\ & r_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(a_k, s_i)s_i,\ \ s_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{\|r_{n+1}\|}, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

где $\|r_k\| = \sqrt{(r_k, r_k)}$ -евклидова норма вектора r_k.

Вектор s_{n+1} удовлетворяет уравнениям (6.2), а за искомое решение принимается вектор x с компонентами

$$x_i = \frac{r_{n+1,\,i}}{r_{n+1,\,n+1}}, i = 1, 2, \dots, n. \tag{6.4}$$

Формулами (6.3) - (6.4) определяется векторная форма записи вычислительной схемы *метода ортогонализации*.

В координатной форме схема метода ортогонализации записывается следующим образом:

$$r_{1j} = a_{1j}\,,\; s_{1j} = r_{1j} \Big/ \sqrt{\sum_{p=1}^{n+1} (r_{1p} \cdot r_{1p})}\,,\; j = 1, 2, \ldots, n+1; \tag{6.5}$$

$$r_{kj} = a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1}\left[\prod_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{p=1}^{n+1}(a_{kp} \cdot s_{ip}) s_{ij}\right)\right],\; k = 2, 3, \ldots, n+1;\; j = 1, 2, \ldots, n+1; \tag{6.6}$$

$$s_{kj} = r_{kj} \Big/ \sqrt{\sum_{p=1}^{n+1} (r_{kp} \cdot r_{kp})}\,,\; j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{6.7}$$

На рисунке 8 представлен один из возможных алгоритмов, реализующий решение системы линейных уравнений методом ортогонализации.

Алгоритм метода ортогонализации

$r_1 = a_1$; $s_1 = r_1$/ sqrt(r_1, r_1)
Для k =2 **до** n +1 **выполнять**
  Для i =1 **до** k - 1 **выполнять**
    $sp = (a_k, s_i)$ *вычисление скалярного произведения* (a_k, s_i)
      Для p =1 **до** n +1 **выполнять**
        $s_{i,p} = sp \cdot s_{i,p}$
      конец по p
  конец по i
  вычисление компонент вектора r_k
  Для j =1 **до** n +1 **выполнять**
    $ss = 0$
    Для i =1 **до** k - 1 **выполнять**
      $ss = ss + s_{i,j}$
    конец по i
    $r_{k,j} = a_{k,j} - ss$
  конец по j
  формирование вектора s_k
  $sp = (r_k, r_k)$ *вычисление скалярного произведения*
  Для p =1 **до** n + 1 **выполнять**
    $s_{k,p} = r_{k,p} / sp$
  конец по p
конец по k
  формирование и вывод решения
Для j =1 **до** n **выполнять**
  $x_j = r_{n+1,j} / r_{n+1,n+1}$
конец по j

Рисунок 8- Алгоритм метода ортогонализации

Комментарий к алгоритму. Алгоритм реализован непосредственно по формулам (6.5)- (6.7). Отсутствует промежуточный контроль по точности вычисления скалярных произведений.

Рассмотрим пример на нахождение решения системы линейных уравнений методом ортогонализации.

Пример. Дана система второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти решение данной системы методом ортогонализации.

Решение. Выпишем систему в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далее проводим вычисления по формулам (6.5) - (6.7), имеем

$$r_1 = a_1 = (1,2,1),\ s_1 = \frac{r_1}{\|r_1\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

$$(a_2, s_1) = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1}{\sqrt{6}} = \frac{13}{\sqrt{6}},$$

$$r_2 = a_2 - \frac{13}{\sqrt{6}} s_1 = (3,1,8) - \left(\frac{13}{6}, \frac{26}{6}, \frac{13}{6}\right) \approx (0.83, -3.3,\ 5.83)\ ;$$

$$s_2 = \frac{r_2}{\|r_2\|} = \frac{(0.83,\ -3.3,\ 5.83)}{\sqrt{(0.83)^2 + (-3.3)^2 + (5.83)^2}} \approx (0.123, -0.49, 0.864),$$

$$(a_3, s_1) = \frac{(0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$(a_3, s_2) = 0 \cdot 0.123 + 0 \cdot -0.49 + 1 \cdot 0.864 = 0.864,$$

$$r_3 = a_3 - \frac{1}{\sqrt{6}} s_1 - 0.864 \cdot s_2 = (0,0,1) - \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right) - 0.864 \cdot (0.123, -0.49, 0.864) \approx$$

$$\approx (-0.2663, 0.09336, -0.093504).$$

В результате получаем решение

$$x_1 = \frac{-0.2663}{-0.093504} \approx 2.958,\ x_2 = \frac{0.09336}{-0.093504} \approx -0.999\ .$$

Геометрическая интерпретация. Геометрически нахождение решения системы (6.1) методом ортогонализации состоит в том, что строится вектор z ортогональный системе векторов a_1, a_2, ..., a_n, что равносильно ортогональности z к линейному подпространству, натянутому на векторы a_1, a_2, ..., a_n, и, значит, к любому базису этого подпространства. Векторы s_1, s_2, ..., s_n образуют в линейном пространстве ортонормированный базис.

Присоединенный вектор $a_{n+1} = (0, 0, ..., 1)$ линейно не зависит от s_1, s_2, ..., s_n, а вектор r_{n+1} ортогонален системе a_1, a_2, ..., a_n, т.е.$(a_i, r_{n+1})=0$, $i =1, 2, ..., n$,

$$\begin{array}{lllll} a_{11}r_{n+1,1} + & a_{12}r_{n+1,2} + & \dots & +a_{1n}r_{n+1,n} + & a_{1,n+1}r_{n+1,n+1} = 0, \\ a_{21}r_{n+1,1} + & a_{22}r_{n+1,2} + & \dots & +a_{2n}r_{n+1,n} + & a_{2,n+1}r_{n+1,n+1} = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}r_{n+1,1} + & a_{n2}r_{n+1,2} + & \dots & +a_{nn}r_{n+1,n} + & a_{n,n+1}r_{n+1,n+1} = 0. \end{array} \tag{6.8}$$

Последняя компонента $r_{n+1,\ n+1}$ вектора r_{n+1} не равна 0, в противном случае, компоненты $r_{n+1,\ 1}$, $r_{n+1,\ 2}$, ..., $r_{n+1,\ n}$ были бы решением однородной системы с матрицей A исходной системы, но так как эта система может иметь только нулевое решение, то вектор r_{n+1} был бы равен нулю, а вектор a_{n+1} являлся бы линейной комбинацией векторов s_1, s_2, ..., s_n, но это противоречило бы выбору a_{n+1}.

Если уравнения системы (6.8) разделить на $r_{n+1,\ n+1}$, то вектор $z = (x_1, ..., x_n, 1)^{\mathrm{T}}$, у которого компоненты $x_i = \dfrac{r_{n+1,\,i}}{r_{n+1,\,n+1}}, i = 1,2,\dots,n$, будет решением системы (6.2), а вектор $x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ будет решением системы (6.1).

Матричная форма. Процесс ортогонализации (6.3) равносилен представлению матрицы A в виде

$$A = LU,$$

где L -нижнетреугольная матрица с единичной диагональю и U - матрица с ортогональными строками, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_{ik} = -(a_k, s_i) = -\dfrac{(a_k, r_i)}{\sqrt{(r_i, r_i)}}$.

Процесс ортогонализации можно проводить и по столбцам исходной матрицы A, тогда представление матрицы будет иметь вид

$$A = U\,L,$$

где U - матрица с ортогональными столбцами и L - верхнетреугольная матрица с единичной диагональю, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1n} \\ 0 & 1 & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \lambda_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right),$$

где $\lambda_{ik} = -(a_k, s_i) = -\dfrac{(a_k, r_i)}{\sqrt{(r_i, r_i)}}$.

6.2 Задачи

1. Оценить трудоемкость метода ортогонализации.
2. Выписать расчетные формулы схемы метода ортогонализации для трехдиагональной матрицы. Оценить трудоемкость схемы.
3. Показать, что если матрица Q ортогональная, то Q^{-1} и Q^{T} также ортогональны.
4. Выписать расчетные формулы схемы метода ортогонализации для почти треугольной матрицы. Оценить трудоемкость схемы.
5. Выполнить разложение $A=UL$, где U - ортогональная матрица по столбцам, L - верхнетреугольная с единицами на главной диагонали для следующих матриц:

$$1.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad 2.\begin{pmatrix} 13 & 4 & 2 \\ 9 & 11 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad 3.\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad 4.\begin{pmatrix} 11 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad 5.\begin{pmatrix} 15 & 8 & 2 \\ 6 & 13 & -5 \\ 1 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$6.\begin{pmatrix} 17 & 9 & 5 \\ 21 & 9 & -6 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad 7.\begin{pmatrix} 19 & 7 & 6 \\ 31 & 5 & 9 \\ 2 & -9 & 10 \end{pmatrix} \quad 8.\begin{pmatrix} -5 & 11 & 5 \\ 13 & 12 & -4 \\ 21 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad 9.\begin{pmatrix} 6 & -7 & 1 \\ 17 & 11 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad 10.\begin{pmatrix} 11 & 13 & 11 \\ 23 & 15 & 1 \\ 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$11.\begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & -11 & 1 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad 12.\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 16 & 5 \\ 3 & -5 & 12 \end{pmatrix} \quad 13.\begin{pmatrix} 18 & 7 & 1 \\ -7 & 11 & 2 \\ 5 & 3 & 13 \end{pmatrix} \quad 14.\begin{pmatrix} 21 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 11 \\ -1 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 15.\begin{pmatrix} 22 & -5 & 13 \\ 9 & 5 & 16 \\ -4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

6. Применить процесс ортогонализации для следующих систем векторов:

$$1.\begin{cases} a_1 = (1,-2,3) \\ a_2 = (2,1,1) \\ a_3 = (3,\ 5,-1) \end{cases} \quad 2.\begin{cases} a_1 = (3,-1,2) \\ a_2 = (1,\ 4,\ 1) \\ a_3 = (2,\ 1,-3) \end{cases} \quad 3.\begin{cases} a_1 = (4,\ 5,-1) \\ a_2 = (2,-3,0) \\ a_3 = (1,\ 2,\ -5) \end{cases} \quad 4.\begin{cases} a_1 = (5,-2,1) \\ a_2 = (1,-3,1) \\ a_3 = (1,2,-1) \end{cases}$$

$$5.\begin{cases} a_1 = (9,-1,\ 2) \\ a_2 = (4,1,-1) \\ a_3 = (2,3,-4) \end{cases} \quad 6.\begin{cases} a_1 = (7,-4,1) \\ a_2 = (3,\ 5,\ 4) \\ a_3 = (1,\ 2,-3) \end{cases} \quad 7.\begin{cases} a_1 = (6,-5,7) \\ a_2 = (5,2,-5) \\ a_3 = (1,7,-1) \end{cases} \quad 8.\begin{cases} a_1 = (8,\ 1,7) \\ a_2 = (6,\ 1,\ 8) \\ a_3 = (-1,\ 5,-1) \end{cases}$$

7. Показать, что для ортогональной по столбцам матрицы U справедливо равенство $U^{\mathrm{T}}U = G$, где G - диагональная матрица.
8. Проверить, что следующие системы векторов ортогональны и достроить систему до трех векторов.

$$1.\begin{cases} a_1 = (1,-2,3) \\ a_2 = (-2,1,0) \\ a_3 = (x_1,x_2,x_3) \end{cases} \quad 2.\begin{cases} a_1 = (3,-1,1) \\ a_2 = (x_1,\ x_2,\ x_3) \\ a_3 = (2,\ 3,-3) \end{cases} \quad 3.\begin{cases} a_1 = (x_1,\ x_2,x_3) \\ a_2 = (2,-1,3) \\ a_3 = (1,\ 5,\ 1) \end{cases} \quad 4.\begin{cases} a_1 = (5,-2,1) \\ a_2 = (x_1,x_2,x_3) \\ a_3 = (1,2,-1) \end{cases}$$

$$5.\begin{cases} a_1 = (4,-1,3) \\ a_2 = (1,1,-1) \\ a_3 = (x_1,x_2,x_3) \end{cases} \quad 6.\begin{cases} a_1 = (x_1,x_2,x_3) \\ a_2 = (3,\ 7,\ 5) \\ a_3 = (3,\ -2,1) \end{cases} \quad 7.\begin{cases} a_1 = (9,-5,-1) \\ a_2 = (x_1,x_2,x_3) \\ a_3 = (1,2,-1) \end{cases} \quad 8.\begin{cases} a_1 = (5,\ 7,2) \\ a_2 = (5,\ -3,\ -2) \\ a_3 = (x_1,x_2,x_3) \end{cases}$$

9. Показать, что в арифметике с тремя десятичными знаками следующие системы векторов ортогональны:

$$1.\begin{cases} a_1 = (0.0003, 1.00, -0.01) \\ a_2 = (4.00,\ -0.01,\ 1.000) \end{cases} \quad 2.\begin{cases} a_1 = (3.001, 1.501, 1.00) \\ a_2 = (1.001,\ -2.01, 0.02) \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} a_1 = (2.021, 1.01, -1.145) \\ a_2 = (0.032,\ 2.21, 2.00) \end{cases} \quad 4.\begin{cases} a_1 = (3.141, 0.0015, 2.00) \\ a_2 = (0.02,\ 1.231, -0.0351) \end{cases}$$

6.3 Лабораторные задания

***Цель*:** практика программирования метода ортогонализации в одной из имеющихся систем программирования.

Для выполнения лабораторной работы требуется выполнить одно из двух заданий. В каждом из заданий приводятся требования к функциям программы.

***Задание* 1**. Составить алгоритм и программу для решения систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

методом ортогонализации. В программе предусмотреть контроль точности вычисления скалярных произведений, подсчет количества арифметических операций.

Выполнение задания состоит из двух этапов: разработки алгоритма и программы и проведения сравнительного анализа.

1. Программа, реализующая вычисления по методу ортогонализации должна удовлетворять следующим требованиям:

функции ввода: ввод с клавиатуры
1.Ввод размерности n.
2.Ввод исходной матрицы системы A и вектора b.
3.Вывод на экран исходной матрицы и вектора b.
(формат: три цифры после запятой)

цикл вычислений: 1.Реализация алгоритма метода ортогонализации
2.Подсчет числа арифметических операций.

функция вывода: 1.Вывод полученного решения.
2. Вывод числа арифметических операций.
3.Вычисление и вывод вектора - невязки $r = Ax - b$.

2. С помощью разработанной программы решить одну из систем, приведенных в таблице 1.

3. Составить набор линейных систем (до 8) порядков от 4 до 7 и провести сравнительный анализ решений, получаемых с помощью разработанной программы и одним из имеющихся специализированных пакетов: MathCad или MatLab.

***Задание* 2**. Составить алгоритм и программу для решения систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

с трехдиагональными матрицами, применяя метод ортогонализации.

Выполнение задания 2 состоит из двух этапов: разработки алгоритма и программы и проведения сравнительного анализа.

1. Программа, реализующая вычисления по методу ортогонализации должна удовлетворять следующим требованиям:

функции ввода: ввод с клавиатуры
1.Ввод размерности n.
2.Ввод исходной матрицы системы A и вектора b.

3.Вывод на экран исходной матрицы и вектора b.
(формат: три цифры после запятой)

цикл
вычислений: 1.Реализация алгоритма метода ортогонализации
2.Подсчет числа арифметических операций.

функция вывода: 1.Вывод полученного решения.
2. Вывод числа арифметических операций.
3.Вычисление и вывод вектора - невязки $r = Ax - b$.

2. С помощью разработанной программы решить одну из систем, приведенных в таблице 2.

3. Составить набор линейных систем (до 10) порядков от 4 до 10 и провести сравнительный анализ решений, получаемых с помощью разработанной программы и одним из имеющихся специализированных пакетов: MathCad или MatLab.

Содержание отчета. В итоговый отчет должна входить следующая информация.

1. Формулировка задания.
2. Расчетные формулы метода ортогонализации.
3. Описание алгоритма вычислений по расчетным формулам.
4. Набор линейных систем и результаты сравнительного анализа.
5. Описание схемы программы.

Контрольные вопросы

1. Описать метод ортогонализации в поэлементной форме.
2. Выписать матричные уравнения для метода ортогонализации.
3. Описать последовательность действий при оценке трудоемкости метода ортогонализации и выписать эту оценку.
4. Выписать формулу для вычисления определителя методом ортогонализации.
5. Описать геометрическую интерпретацию метода ортогонализации.

***Исходные данные для выполнения пункта 2 задания* 1**

Таблица 1 - варианты для пункта 2 задания 1

n/n	A	b	n/n	A	b
1	12 1 0.5 0.2	15.5	7	11 0 0.4 1	12.4

	-3 7 9 1 5 -4 8 3 0.1 0.2 2 7	14 12 9.3		-2 6 9 -11 4 -3 7 2 0.9 0.8 1 6	11.9 10. 8.7
2	13 2 1.5 3 -4 8 10 3 6 -5 9 4 1.1 0.3 3 8	39 34 28 24.8	8	15 3 2.4 2 4 7 11 3 7 -4 10 3 2 1.3 4 9	44.8 50. 32. 32.6
3	9 1 0.2 1 2 7 -0.3 2 3 8 10 3 4 1 3 -9	22.4 21.7 48 -2	9	8.1 1 0.7 1 1 8 -0.5 3 4 7 9 2 3 1 2 -10	21.6 21. 44. -8
4	7 0.1 0.4 1 3 9.1 0.7 3 5 6 11 4 2 2.1 0.3 12	17. 31.6 52. 32.6	10	17 1 2 0.3 4 7 0.6 3 3 5 11 4 3 3.2 0.7 10	60.9 43.8 69. 50.7
5	18 5 7 1 7 11 0.2 3 9 13 21 4 11 12 -0.1 20	62. 42.4 94. 85.9	11	19 7 5 3 9 12 0.7 4 10 13 22 5 12 15 -0.3 25	68. 51.4 100. 103.7
6	19 4 -0.5 1 8 11 1 3 5 -3 10 2 4 1.3 5 9	47. 46. 28. 38.6	12	21 5 7 0.2 11 12 0.3 -1 9 -2 10 3 7 4 0.4 13	66.4 45.6 30. 48.8

.

Исходные данные для выполнения пункта 2 задания 2. Элементы трехдиагональной матрицы A исходной системы определяются следующим образом:

$$a_{i,\,i} = s_i,\ \mathrm{i} = 1, ..., 7; \quad a_{i,\,i+1} = a_{i+1,\,i} = -d_i,\ i = 1, ..., 6,$$

где коэффициенты s_i, d_i, b_i вычисляются по формулам, указанным в таблице 2 для каждого варианта отдельно.

Таблица 2 - варианты для пункта 2 задания 2

n/n	s_{i}	d_{i}	b_i	n/n	s_{i}	d_{i}	b_i
1	i+1	0.02i	5-0.01i	7	2i-1	i/10	20/i
2	$2i^2$-1	0.1	i -0.8	8	3i+1	i-2	10/i
3	4+0.1i	1.1i/14	1.5i/25	9	i+3	2-i	1-i/14
4	2(i+1)	0.1i	2i	10	2i(i+1)	0.9i	0.08i
5	3(i+2)	0.5+i	0.3i	11	i(2i-1)	0.3i	21/i
6	$(i-3)^2$/18	i-0.5	i -1.5	12	i+4	(0.2-i)/10	(i-0.2)/20

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в пособии конечные методы составляют основу двух групп конечных методов решения систем линейных алгебраических уравнений: методов исключения и методов, основанных на ортогонализации в некоторой метрике. Эти методы позволяют решать серьезные алгебраические задачи, к которым, в общем случае, сводится большое количество многочисленных приложений.

В пособии изложены вычислительные основы этих методов, а для более глубокого освоения методов и их алгоритмического анализа, конечно, данного пособия недостаточно. Необходимо изучение другой литературы, чтение статей, знакомство с алгоритмами и возможное участие в разработке и реализации систем, предназначенных для решения алгебраических задач или их приложений. Приведенный список литературы вполне достаточен для добротного освоения вычислительных основ линейной алгебры и возможного углубленного их изучения. Этот список содержит и интернет-адрес, по которому можно получить информацию по темам и разделам численного анализа.

Первые опыты разработки программных систем для решения алгебраических задач студенты специальности 220400 получают уже в ходе изучения ими курса “Вычислительная математика”, в частности, раздела “Вычислительные методы линейной алгебры”, выполняя курсовые задания, предусмотренные программой курса. Многие из упражнений и задач, приведенных в пособии, дают основу для постановок курсовых заданий.

При выполнении лабораторных работ можно не ограничиваться строго перечисленными пунктами заданий, а, например, провести сравнительный анализ на точность решений, получаемых различными методами, исследовать погрешность, вносимую вычислением скалярных произведений и др. Многообразие современных вычислительных систем и архитектур также дает возможность расширения круга вопросов для проведения студентами самостоятельных исследований. Подобного рода дополнительные исследования и задания, конечно, могут выдаваться преподавателем только для студентов, успешно освоившим основное содержание метода, его вычислительной схемы и возможного алгоритма реализации схемы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.- М.: Наука, 1975. - 400 с.
2. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры.- М.: Физматгиз, 1963.- 734 с.
3. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры.- Новосибирск: Научная книга, 1997. - 390 с.
4. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры.- М.: Наука, 1977. - 304 с.
5. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. - М.: Мир, 1999. - 548 с.
6. Безруких Н.С., Ващенко Г.В. Вычислительная математика. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.- Красноярск: СибГТУ, 2003. - 76 с.
7. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре.- М.: Наука, 1975. - 320 с.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Линейная алгебра.- М.: Физматлит, 2001. -368 с.
9. Каханер Д., Моулер К., Неш С. Численные методы и программное обеспечение.- М.: Мир, 1998. - 575 с.
10. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ.- М.: МЦНМО, 2001. - 960 с.
11. Ноден П., Китте Л. Алгебраическая алгоритмика.- М.: Мир, 1999.-720 с
12. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.- М.: Мир, 1969. - 166 с.
13. Сборник задач по методам вычислений / под ред. Монастырного П.И.- М.: Наука, 1994. – 247 с.
14. MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты.- М.: издательский дом “Филинъ”, 1997. - 712 с.
15. Численный анализ: ttp://www.szcc.msu.su/num_anal/url_tem/page_4u.htm

ПЕРЕЧЕНЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Векторы и матрицы

R^n - множество всех n-мерных вещественных векторов

x - вектор из R^n (вектор-столбец)

x^{T} -вектор, транспонированный по отношению к вектору x из R^n (вектор-строка)

$\|x\|$ - норма вектора x

$(x, y) = x^{\mathrm{T}} y$ - скалярное произведение векторов x и y из R^n

$\|x\|_\infty$, $\|x\|_m$ - равномерная норма или m -норма вектора x

$\|x\|_1$, $\|x\|_l$ - абсолютная норма или l- норма вектора x

$\|x\|_2$, $\|x\|_k$ - евклидова или k- норма вектора x

$r = Ax - b$ - вектор - невязки

$A = (a_{ij})$ - матрица из n строк и n столбцов; a_{ij} - элемент матрицы, стоящий в i-й строке и j-ом столбце

$A = (a_{ij})$ - матрица верхняя треугольная; элементы a_{ij} равны нулю для $i > j$

$A = (a_{ij})$ - матрица нижняя треугольная; элементы a_{ij} равны нулю для $i < j$

$A = A^{\mathrm{T}}$, т.е. если $(a_{ij}) = (a_{ji})$ - матрица A симметричная

A^{T} - матрица, транспонированная к матрице A

$AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$ -матрица A нормальная

$G = diag(a_{ii})$ -матрица диагональная; диагональные элементы a_{ii} ненулевые, остальные равны нулю

A^{-1} - матрица, обратная к матрице A

E - единичная матрица; диагональные элементы равны 1, остальные - нулю

$\|A\|$ - норма матрицы A

$\|A\|_\infty$ - равномерная норма или m -норма матрицы A

$\|A\|_l$ - абсолютная норма или l- норма матрицы A

$\|A\|_k$ - евклидова или k -норма матрицы A

AC - произведение матрицы A на матрицу C

$detA$, ΔA - детерминант (квадратной) матрицы A

$\delta = \dfrac{\|\psi\|}{\|x\|} = \dfrac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$ - относительная погрешность *(*ошибка*)* вектора $\tilde{x}$

$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ - число обусловленности

СОДЕРЖАНИЕ

ВАЩЕНКО ГЕННАДИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ОСНОВЫ КОНЕЧНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ответственный редактор д.т.н., проф. Г.А. Доррер
Редактор РИЦ С.Н. Цыбенко
Техн.редактор Т.П. Попова

Подписано к печати 7. 06. 05. Сдано в производство 17.06.05.
Формат 60x84 1/ 16.
Усл. печ. л. 5.0. Уч.- изд. л. 5.0. Тираж 250 экз.
Заказ № . Изд. № 243. Лицензия ИД № 06543 16.01.02г.

Редакционно-издательский центр СибГТУ,
660049, г. Красноярск, пр. Мира, 82, типография СибГТУ