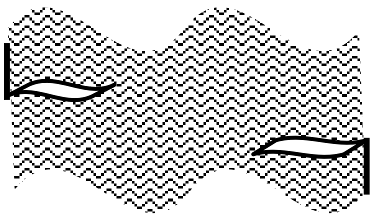
Г. В. ВАЩЕНКО

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ОСНОВЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ



$$L_n(x) = \sum c_k \varphi(x_k)$$

Красноярск 2008

Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО “СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

Г. В. ВАЩЕНКО

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ОСНОВЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Утверждено редакционно-издательским советом СибГТУ в качестве учебного пособия для студентов специальностей 230105 *Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем,* 230201 *Информационные технологии и системы, направления* 230100 *Информатика и вычислительная техника очной, очной сокращенной и заочной форм обучения*

Красноярск 2008

УДК 519.612.2
ББК 22.193

ВАЩЕНКО,Г.В. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА: ОСНОВЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ: учебное пособие для студентов специальности 230105, 230201 и направления 230100 очной, очной сокращенной и заочной форм обучения/ Г.В. Ващенко.– Красноярск: СибГТУ, 2008. - 64 с.

В учебном пособии приводятся алгебраические и тригонометрические способы интерполирования функций.

Пособие программно и методически ориентировано на студентов, изучающих курс “Вычислительная математика”.

Пособие может быть также полезно и преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу и программированию.

ISBN 978-5-8173-0372-8

Рецензенты:

канд.техн.наук, науч. сотр. С.А. Ковязин (ИВМ СО РАН);

ст. преподаватель Е.В. Касьянова (научно–методический совет СибГТУ)

Отв. редактор д-р.техн.наук, проф. Г.А. Доррер

Редактор РИЦ С.Н. Цыбенко

Сдано в производство 22.05.08.
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 4,0.
Изд. № 2-038. Заказ № 140 . Тираж 200 экз.

Редакционно-издательский центр СибГТУ
660049, г. Красноярск, пр. Мира, 82
факс (3912) 20-61-56
тел.(3912) 27-69-90

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие разработано на основе лекционного курса “Вычислительная математика” читаемого автором студентам специальностей 230105 “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем”, 230201 “Информационные технологии и системы” и направления 230100 “Информатика и вычислительная техника” факультета автоматизации и информационных технологий (ФАИТ) Сибирского государственного технологического университета.

В пособии излагаются алгебраические и тригонометрические способы интерполирования функций.

Содержание пособия состоит из пяти разделов и организовано таким образом, чтобы обеспечить наибольшую эффективность в усвоении того или иного метода интерполирования и его алгоритмических основ.

Первый раздел содержит необходимые сведения об интерполировании и задаче интерполирования, представление обобщенного интерполяционного многочлена и условия интерполяции.

Во втором разделе приводятся основные сведения об алгебраической интерполяции, формулируется теорема о существовании и единственности алгебраического интерполяционного многочлена. Рассматриваются примеры построения интерполяционного многочлена. Завершается раздел описанием задач, вычислительных упражнений и перечнем контрольных вопросов.

В третьем и четвертом разделах рассматриваются интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, соответственно. Приводятся примеры построения каждого из многочленов, возможный алгоритм реализации, описанный на псевдокоде, задачи и вычислительные упражнения, перечень контрольных вопросов.

Пятый раздел содержит основные сведения о тригонометрической интерполяции, примеры построения тригонометрических многочленов интерполяции, задачи и контрольные вопросы.

Приложения могут использоваться как справочные при решении задач и освоении каждого из способов интерполирования.

1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Приводятся сведения об интерполировании и задаче интерполирования.

1.1 *Интерполирование и задача интерполирования*

В общем случае под интерполированием понимается приближенное или точное нахождение какой–либо величины по известным отдельным значениям этой же или других величин, связанных с ней.

В практических вычислениях часто встречаются функции, значения которых заданы лишь в нескольких точках отрезка, именно, пусть функция $f(x)$ задана своими значениями или, говорят, таблицей своих значений для некоторого конечного множества значений x_i аргумента x:

$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$, или . $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

В ходе же вычислений требуется использовать значения этой функции $f(x)$ для значений x, отличных от заданных x_i. С этой целью строят функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ в заданных точках x_i, и применяют ее вместо $f(x)$ для значений x, отличных от заданных x_i Такой способ определения значений функции и называется *интерполированием*.

Задачей интерполирования называется способ построения или нахождения такой функции $g(x)$, с помощью которой можно с той или иной степенью точности проводить вычисления вместо заданной функции $f(x)$, или, говорят, восполнять значения функции $f(x)$. Схематично задача интерполирования может быть представлена в виде

$$f(x) \to \{f(x_i)\}_{i=0}^{n} \to g(x).$$

Интерполирование функций используется в следующих случаях:

- замена сложно вычисляемой функции другой, легко вычислимой;

- приближенное восстановление функции на всей области задания по значениям ее в отдельных точках или по другим известным величинам;
- получение сглаживающих функций;
- приближенного нахождения предельных значений функций;
- в задачах ускорения сходимости последовательностей и рядов и в других вопросах.

1.2 *Постановка задачи интерполирования. Обобщенные многочлены*

Постановка задачи интерполирования. Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ заданы $n + 1$ различных точек $x_0, x_1, ..., x_n$, $x_i \neq x_j$ и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках

$$f(x_0) = y_0,\ \ f(x_1) = y_1,\ \ ...,\ \ f(x_n) = y_n\ \text{, или}$$

$$f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Задача состоит в том, чтобы построить функцию $G(x)$ такую, что в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ она принимала те же значения, что и исходная $f(x)$, т.е.

$$G(x_0) = y_0,\ \ G(x_1) = y_1,\ \ ...,\ \ G(x_n) = y_n\ \text{, или}$$

$$G(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) называется *условием интерполяции*.

Точки $x_0, x_1, ..., x_n$ называются *узлами интерполяции*, а функция $G(x)$ – *интерполирующей* или *интерполянтом.* Узлы могут быть, как равноотстоящими, т.е. расстояние между узлами одинаково

$$x_1 - x_0 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h = const,$$

тогда $x_{i+1} = x_i + h = x_0 + (i + 1)h$, , $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, так и произвольно расположенными $x_1 - x_0 \neq \ldots \neq x_n - x_{n-1} \neq const$.

Геометрически решение задачи означает, что нужно найти кривую $y = G(x)$ некоторого определенного типа, проходящую через заданную систему точек (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \ldots, n$. При этом кривая, называется *интерполяционной кривой* (рисунок 1).

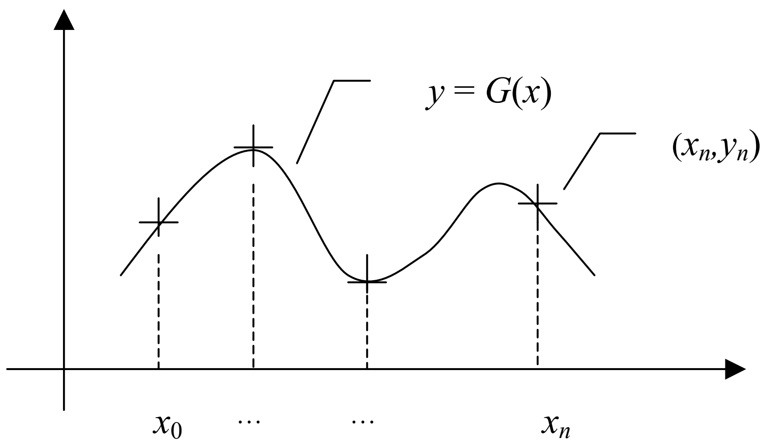


Рисунок 1 – *Интерполяционная кривая*

В такой общей постановке задача может не иметь решений или иметь бесчисленное множество решений.

Обобщенные многочлены. Для однозначной разрешимости задачи интерполирования (1.1) – (1.2) вместо произвольной функции $G(x)$ используются полиномиальные функции, или обобщенные многочлены

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \omega_i(x) = c_0\omega_0(x) + c_1\omega_1(x) + \ldots + c_n\omega_n(x),$$

где $\{\omega_i(x)\}$ – конечная линейно независимая на $[a, b]$ система функций.

При практических вычислениях чаще всего в качестве $\{\omega_i(x)\}$ принимается последовательность:

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,$$

или последовательность тригонометрических функций: 1, $\sin x$,$\cos x$,$\sin 2x$, $\cos 2x$, …, или последовательность показательных функций.

Для коэффициентов обобщенного многочлена, используя условия (1.2), получается система линейных уравнений:

$$
\begin{array}{cccc}
c_0 + & c_1\omega(x_0) + & \ldots + & c_m\omega(x_0) = f_0, \\
c_0 + & c_1\omega(x_1) + & \ldots + & c_n\omega(x_1) = f_1, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
c_0 + & c_1\omega(x_n) + & \ldots + & c_n\omega(x_n) = f_n,
\end{array}
\qquad (1.3)
$$

или в матричной форме

$$Ac = f.$$

1.3 *Заключение*

В общей постановке задача интерполирования может не иметь решений или иметь бесчисленное множество решений. Для однозначной разрешимости в качестве интерполирующей функции принимаются обобщенные многочлены.

В зависимости от принятой системы функций различают алгебраическое интерполирование, тригонометрическое и интерполирование показательными функциями.

Для нахождения коэффициентов многочлена и, тем самым, построения интерполяционного многочлена, используются условия интерполирования (1.2), приводящие к системе линейных алгебраических уравнений неизвестными в которой являются коэффициенты искомого многочлена.

Полученную интерполяционную формулу используют для приближенного вычисления значений данной функции $f(x)$, для значений аргумен та x, отличных от узлов интерполирования. Такая операция называется *интерполированием функции* $f(x)$.

Близость интерполяционного многочлена к заданной функции состоит в том, что их значения совпадают на заданной системе точек (узлов).

1.4 *Контрольные вопросы*

1. Что понимается под интерполянтом и узлами интерполяции ? Какие две основные системы узлов можно построить ?

2. В каких случаях может использоваться интерполирование функций ?

3. Выписать условие интерполирования для системы показательных функций.

4. Дать геометрическую интерпретацию задаче интерполирования и условию интерполяции.

5. Что понимается под интерполированием функции?

6. Выписать условия однозначной разрешимости системы (1.3).

7. При каком условии задача интерполирования однозначно разрешима ?

8. Сформулировать задачу интерполирования и условия интерполяции.

9. Выписать условия интерполяции для системы функций $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$.

10. Выписать условие интерполирования для системы тригонометрических функций.

11. Сформулировать определение линейной зависимости и линейной независимости системы элементов множества.

12. Перечислить условия получения обобщенного многочлена.

13. Выписать условие интерполирования для системы рациональных функ ций.

14. Выписать систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов обобщенного многочлена.

15. Сформулировать условия построения интерполяционного многочлена и перечислить основные способы интерполяции.

2 АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Алгебраическая интерполяция заключается в том, что в качестве интерполирующей функции принимается алгебраический многочлен степени на единицу меньшей количества узлов.

2.1 *Интерполирование алгебраическими многочленами*

Пусть заданы узлы x_i, $i = 0, 1,\ldots, n$, среди которых нет совпадающих, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, и заданы значения функции $f(x)$ в этих узлах:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n). \tag{2.1}$$

В качестве интерполирующей функции принимается алгебраический многочлен

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n, \tag{2.2}$$

называемый *интерполяционным многочленом*.

Для нахождения коэффициентов c_i многочлена используется условие (1.2), т.е.

$$P_n(x_i) = y_i = f(x_i) = f_i,\ i = 0, 1,\ldots, n. \tag{2.3}$$

Существование и единственность многочлена (2.2) определяется следующей теоремой.

***Теорема* 1.** Интерполяционный многочлен (2.2), удовлетворяющий условиям (2.3) по заданной функции (2.1), имеет степень не ниже n и является единственным.

Доказательство. Используя условие (2.3), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_i:

$$\begin{array}{ccccc} c_0 + & c_1 x_0 + & \ldots + & c_n x_0^n = f_0, \\ c_0 + & c_1 x_1 + & \ldots + & c_n x_1^n = f_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_0 + & c_1 x_n + & \ldots + & c_n x_n^n = f_n. \end{array} \tag{2.4}$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Полученная система уравнений однозначно разрешима (т.е. решение существует и единственно), так как по условию x_i, $i = 0, 1,\dots, n$ различны, а определитель матрицы системы является определителем Вандермонда, для которого выполняется равенство

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \ne 0.$$

Таким образом, коэффициенты c_0, c_1, …, c_n, получающиеся в результате решения системы (2.4), определяют единственный интерполяционный многочлен, построенный по (n +1) –й различной точке и имеющий степень не ниже n.

Рассмотрим пример на построение интерполяционного многочлена.

Пример. Пусть известны значения функции $f(x)$ в узлах x_0, x_1, т.е.

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1).$$

Построить интерполяционный многочлен $P_1(x) = c_0 + c_1 x$, совпадающий со значениями $f(x)$ в узлах x_0, x_1.

Решение. Запишем систему относительно c_0 и c_1

$$\begin{aligned} P_1(x_0) &= c_0 + c_1 x_0 = y_0, \\ P_1(x_1) &= c_0 + c_1 x_1 = y_1, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Решая ее (например методом исключения), находим:

$$c_0 = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}; \quad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Отсюда,

$$P_1(x) = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x.$$

2.2 *Заключение*

Алгебраическая интерполяция состоит в том, что в качестве интерполирующей функции принимается алгебраический многочлен степени на единицу меньшей количества узлов.

Решение задачи алгебраической интерполяции всегда существует и единственно. При большом числе узлов система (2.4) оказывается плохо обусловленной.

Для практического построения интерполяционных многочленов используются другие подходы.

2.3 *Задачи*

1. Выписать матрицу для определения коэффициентов многочлена вида $P_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$.

2. Известен набор узлов x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и значения функции $f(x)$ в этих узлах. Построить интерполяционный многочлен для узлов

а) x_3, x_4; б) x_1, x_2, x_3; в) x_3, x_4, x_5.

3. Построить интерполяционный кубический многочлен

$$P_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3,$$

для которого выполнено $P_3(2) = 1$, $P_3(3) = 2$, $P_3(4) = 2$, $c_2 = 2$.

4. Известны значения функции $f(x)$ в узлах x_1, x_2. Построить интерполяционный многочлен $P_1(x) = c_0 + c_1x$.

1.

x	1	3
$f(x)$	3	4

6.

x	2	3
$f(x)$	5	7

11.

x	1.2	2
$f(x)$	0.5	1

2.

x	3	4
$f(x)$	0.3	1

7.

x	2	2.5
$f(x)$	2	7

12.

x	1.5	2
$f(x)$	1.5	1

3.

x	0.5	1
$f(x)$	2.5	4

8.

x	1	2
$f(x)$	1	3

13.

x	0.2	1
$f(x)$	1.5	4

4.

x	1.1	1.8
$f(x)$	3.5	5

9.

x	1	2.2
$f(x)$	7	8

14.

x	1.2	2
$f(x)$	0.5	1

5.

x	3	5
$f(x)$	1	3

10.

x	5	6
$f(x)$	1	7

15.

x	1.8	2.1
$f(x)$	0.8	2

5. Известны значения функции $f(x)$ в узлах x_0, x_1, x_2. Построить интерполяционный многочлен $P_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Для решения системы использовать правило Крамера.

6. Пусть известны значения функции $f(x)$ в узлах x_1, x_2. Построить функцию $\varphi(x) = a / (x^2 + b)$.

7. Построить интерполяционный кубический многочлен $P_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$, для которого выполнено $P_3(1) = 1$, $P_3(2) = 2$, $P_3(3) = 2$, $c_3 = 1$.

8. Пусть известны значения функции $f(x)$ в узлах x_1, x_2. Построить функцию $\varphi(x) = (a - x) / (x + b)$.

9. Выписать матрицу для определения коэффициентов многочлена вида $P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$.

10. Определить и сравнить вычислительную сложность для вычисления интерполяционного многочлена, записанного в двух формах:

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$$

и по схеме Горнера

$$P_n(x) = c_0 + x\,(c_1 + x\,(c_2 + x\,(\ldots(c_{n-1} + c_nx)\ \ldots))).$$

11. Построить интерполяционный кубический многочлен $P_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$, для которого выполнено $P_3(4) = 2$, $P_3(5) = 3$, $P_3(6) = 3$, $c_1 = 3$.

12. Пусть известны значения функции $f(x)$ в узлах x_1, x_2, x_3. Построить функцию $\varphi(x) = (a + bx) / (x + c)$.

13. Сформулировать и доказать теорему для случая частичного отрезка интерполирования.

2.4 *Контрольные вопросы*

1. Что понимается под алгебраической интерполяцией ?

2. Сформулировать теорему о существовании и единственности алгебраического интерполяционного многочлена (2.2).

3. Выписать интерполяционный алгебраический многочлен первой, второй и третьей степени.

4. При каком условии задача алгебраической интерполяции однозначно разрешима?

5. Сформулировать теорему для случая частичного отрезка интерполирования.

6. Выписать условия однозначной разрешимости системы (2.4).

7. При каком условии задача интерполирования однозначно разрешима ?

8. Сформулировать задачу интерполирования алгебраическими многочленами и условия интерполяции.

9. Дать определение определителя Вандермонда. При каком условии он всегда невырожден?

10. Сформулировать задачу интерполирования алгебраическими многочленами.

11. Выписать алгебраический интерполяционный многочлен.

12. Перечислить условия получения алгебраического интерполяционного многочлена.

13. Выписать систему функций принимаемую для алгебраической интерполяции.

14. Выписать систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов алгебраического многочлена (2.3).

15. Сформулировать условия построения алебраического интерполяционного многочлена.

3 ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Многочлен Лагранжа используется для интерполяции как с произвольно заданными, так и равноотстоящими узлами.

Постановка задачи. Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ в неравноотстоящих $(n + 1)$-ом узлах интерполяции,

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n.$$

Требуется построить многочлен $L_n(x)$ степени не выше n, и принимающий в заданных узлах x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ значения, совпадающие со значениями функции $f(x)$,

$$L_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

3.1 *Интерполяционный многочлен Лагранжа для произвольно заданных узлов. Сокращенная форма записи многочлена. Погрешность и оценка погрешности многочлена*

***Теорема* 1.** Пусть заданы узлы x_i, $i = 0, 1,\ldots, n$, среди которых нет совпадающих, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, и заданы значения функции $f(x)$ в этих узлах $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$. Тогда существует, и притом единствен-ный, многочлен

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)} y_i \qquad (3.1)$$

степени не выше n, принимающий в заданных узлах x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ заданные значения y_i, $L_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1,\ldots, n$.

Многочлен (3.1) называется *интерполяционным многочленом Лагранжа* для неравноотстоящих узлов, а коэффициенты

$$\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}. \qquad (3.2)$$

при y_i называются *лагранжевыми коэффициентами.*

Сокращенная форма записи многочлена. Если ввести вспомогательный многочлен $w_{n+1}(x)$ степени $n+1$,

$$w_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)$$

и производную этого многочлена в точке $x = x_i$,

$$w'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n),$$

тогда многочлен Лагранжа запишется в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_i) w'_{n+1}(x_i)} y_i = w_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i) w'_{n+1}(x_i)}, \qquad (3.3)$$

называемом *сокращенной формой* записи многочлена Лагранжа**.**

Рассмотрим пример использования многочлена Лагранжа.

Пример 1. Для функции, заданной таблично, вычислить с помощью многочлена Лагранжа значение функции в заданной точке x^*, отличной от узловой.

$x_i, i = 0, 1, 2, 3$	2.10	2.67	3.01	3.82
$f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$	122.23	123.45	120.02	119.65

Решение. 1. Построим многочлен Лагранжа с учетом заданного числа узлов, $n = 3$, имеем

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \ .$$

2. Вычислим значение функции в заданной точке $x^* = 2.2$:

$$f(2.2) \approx L_3(2.2) = \frac{(2.2 - 2.67)(2.2 - 3.01)(2.2 - 3.82)}{(2.10 - 2.67)(2.10 - 3.01)(2.10 - 3.82)} \cdot 122.23 +$$

$$+ \frac{(2.2 - 2.10)(2.2 - 3.01)(2.2 - 3.82)}{(2.67 - 2.10)(2.67 - 3.01)(2.67 - 3.82)} \cdot 123.45 +$$

$$+ \frac{(2.2 - 2.10)(2.2 - 2.67)(2.2 - 3.82)}{(3.01 - 2.10)(3.01 - 2.67)(3.01 - 3.82)} \cdot 120.02 +$$

$$+\frac{(2.2-2.10)(2.2-2.67)(2.2-3.01)}{(3.82-2.10)(3.82-2.67)(3.82-3.01)}\cdot 119.65\approx 122.56.$$

Погрешность и оценка погрешности многочлена. При замене функции $f(x)$ многочленом $L_n(x)$ возникает *погрешность* $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$, называемая, также *остаточным членом интерполяционной формулы,* $f(x) = L_n(x) + R_n(x)$.

Теорема 2. Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа для произвольно заданных узлов определяется формулой

$$R_n(x)=\frac{w_{n+1}(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{3.4}$$

где $w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})...(x-x_n)$, а $\xi\in[a,b]$.

В силу неопределенности точки ξ определить точно $R_n(x)$ нельзя, поэтому при проведении вычислений находятся только приближенные оценки погрешностей интерполирования.

Оценка погрешности. Оценка погрешности (остаточного члена) интерполяции многочленом Лагранжа в некоторой произвольной фиксированной точке x^* из отрезка $[a, b]$, $x^*\in[a, b]$ определяется формулой

$$|R_n|=\left|f(x^*)-L_n(x^*)\right|\le\frac{C_{n+1}}{(n+1)!}\left|w_{n+1}(x^*)\right|, \tag{3.5}$$

где $C_{n+1}=max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ на $[a, b]$.

Оценка максимальной погрешности. Оценка максимальной погрешности интерполирования на всем отрезке $[a, b]$, т.е. в любой точке $x\in[a, b]$ имеет вид

$$|R_n|=|f(x)-L_n(x)|\le\frac{C_{n+1}}{(n+1)!}M_n, \tag{3.6}$$

где $M_n=max|\,w_{n+1}(x)\,|=max|(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})...(x-x_n)|$ на отрезке$[a, b]$.

Рассмотрим пример на использование оценок при интерполировании многочленом Лагранжа.

Пример 2. Пусть требуется определить с какой точностью можно вычислить значение функции $y=\sqrt{x}$ в точке x^*=112 с помощью интерполяционной формулы Лагранжа, если заданы узлы x_0=100, x_1=118, x_2 =138.

Решение. Поскольку требуется вычислить погрешность в одной точке x^*=112, то применяем формулу (3.5). Определим значение C_3:

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};\qquad y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}};\qquad y'''=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, \text{ тогда}$$

$$C_3 = max|\ y'''\,| = \cdot\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{100^5}}=\frac{3}{8}\cdot 10^{-5} \quad \text{при} \quad 100\le\ x\le 138.$$

Далее,

$$w_3(x) = \left|(112-100)(112-118)(112-138)\right|=\left|12\cdot(-6)\cdot(-26)\,\right|=117 \text{ и}$$

$$|\,R_2\,|\ \le\ \frac{3}{8}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{3!}\cdot 117\approx 1.17\cdot 10^{-3}.$$

3.2 *Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов. Погрешность и оценка погрешности*

***Теорема* 3**. Пусть заданы равноотстоящие узлы интерполирования $x_{i+1} - x_i = h \equiv const$, i = 0, 1,…, n - 1, и заданы значения $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, . . ., $y_n = f(x_n)$ функции $f(x)$ в этих узлах. Тогда существует

$$L_n(x)=L_n(x_0+mh)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{\prod\limits_{j\ne i}^{n}(m-j)}{i!(n-i)!}y_i, \tag{3.7}$$

или

$$L_n(x)=L_n(x_0+mh)=\frac{1}{n!}w_{n+1}(m)\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^i}{m-i}y_i \tag{3.8}$$

степени не выше n, принимающий в заданных узлах x_i, i = 0, 1,…, n заданные значения y_i, $L_n(x_i) = y_i$, i = 0, 1,…, n.

Доказательство. Поскольку по условию узлы равноотстоящие,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_{i+1} - x_i = \ldots = x_n - x_{n-1} = h, \text{ то}$$

$$x_{i+1} = x_i + h = x_0 + (i + 1)h,\ i = 0, 1,\ldots, n - 1.$$

Далее, введем обозначение $x - x_0 = mh$, тогда i – й лагранжевый коэффициент (3.2) запишется в виде

$$\frac{(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-i+1)\cdot(m-i-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{i\cdot(i-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-1)(n-i)}=\frac{\prod\limits_{j\neq i}^{n}(m-j)}{(-1)^{n-i}\,i!(n-i)!},$$

а многочлен Лагранжа примет вид (3.7):

$$L_n(x)=L_n(x_0+mh)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{\prod\limits_{j\neq i}^{n}(m-j)}{i!(n-i)!}y_i.$$

Для получения формулы (3.8) запишем многочлены $w_{n+1}(x)$ и его производную $w'_{n+1}(x_i)$ из формулы (3.3) через введенные обозначения:

$$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})...(x-x_n)=$$

$$=h^{n+1}m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)=w_{n+1}(m),$$

$$w'_{n+1}(x_i)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)=$$

$$=h^{n+1}i(i-1)(i-2)\ldots 1\cdot(-1)(-2)\ldots(-1)(n-i)=(-1)^{n-i}i!(n-i)!=w'_{n+1}(i),$$

тогда лагранжевый коэффициент (3.2) будет иметь вид

$$(-1)^{n-i}w_{n+1}(m)\frac{1}{(m-i)i!(n-i)!}=$$

$$=\frac{1}{n!}w_{n+1}(m)\frac{(-1)^{n-i}C_n^i}{m-i},\ i=0,1,\ldots,n,$$

где $C_n^i=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

Отсюда следует формула (3.8)

$$L_n(x)=L_n(x_0+mh)=\frac{1}{n!}w_{n+1}(m)\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{C_n^i}{m-i}y_i.$$

Рассмотрим пример применения многочлена Лагранжа для равноотстоящих значений аргумента x.

Пример 3. Для функции $f(x) = e^x$, заданной таблично, вычислить с помощью многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов значение функции в заданной точке $x^* = 0.022$.

$x_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04
$f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$	1.0000	1.0101	1.0202	1.0305	1.0408

Решение. 1. Найдем значение m, соответствующее $x^* = 0.022$. Узлы равноотстоящие с шагом $h = 0.01$. Сделаем линейную замену $x = x_0 + mh$, тогда x^* будет соответствовать значение $m = (x^* - x_0)/h = (0.022 - 0)/0.01 = 2.2$.

2. Выпишем многочлен Лагранжа по формуле (3.8) при найденном значении m:

$$L_4(2.2) = \frac{1}{4!} w_5(2.2) \sum_{i=0}^{4} (-1)^{4-i} \frac{C_4^i}{(2.2-i)} y_i = w_5(2.2) \sum_{i=0}^{4} (-1)^{4-i} \frac{1}{(2.2-i) \cdot i!(n-i)!}\,.$$

3. Вычисляем значения $w_5(2.2)$ и слагаемых, входящих в сумму, получим

$$w_5(2.2) = (2.2-0)\,(2.2-1)\,(2.2-2)\,(2.2-3)\,(2.2-4) \approx 0.76032;$$

$$\frac{1}{(2.2-0)\cdot 4!} \approx 0.01894; \quad \frac{1}{(2.2-1)\cdot 1\cdot 3!} \approx -0.13889; \quad \frac{1}{(2.2-2)\cdot 2!\cdot 2!} \approx 1.25;$$

$$\frac{1}{(2.2-3)\cdot 3!\cdot 1} \approx 0.20833; \quad \frac{1}{(2.2-4)\cdot 4!} \approx -0.02315.$$

Окончательно, имеем

$$f(2.2) = L_4(2.2) = 0.76032 \cdot (0.01894 \cdot 1.0000 - 0.13889 \cdot 1.0101 + 1.25 \cdot 1.0202 + $$
$$+ 0.20833 \cdot 1.0305 - 0.02315 \cdot 1.0408) \approx 1.0222.$$

Погрешность и оценка погрешности. Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов определяется формулой

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{w_{n+1}(m)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{3.9}$$

где $w_{n+1}(m) = m(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n)$, $\xi \in [a, b]$.

Оценка погрешности. Оценка погрешности (остаточного члена) интерполяции многочленом Лагранжа для равноотстоящих узлов в некоторой произвольной фиксированной точке x^* из отрезка $[a, b]$, $x^* \in [a, b]$ определяется формулой

$$|R_n| = \left|f(x^*) - L_n(x^*)\right| \le h^{n+1} \frac{C_{n+1}}{(n+1)!}\left|w_{n+1}(m)\right|, \qquad (3.10)$$

где $C_{n+1} = max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ на $[a, b]$.

Оценка максимальной погрешности. Оценка максимальной погрешности интерполирования на всем отрезке $[a, b]$, т.е. в любой точке $x \in [a, b]$ имеет вид

$$|R_n| = |f(x) - L_n(x)| \le h^{n+1} \frac{C_{n+1}}{(n+1)!} M_n, \qquad (3.11)$$

где $M_n = max|\, w_{n+1}(m)| = max|\, m(m - 1)\,(m - 2) \ldots (m - n)\,|$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание. Для многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов можно говорить о порядке сходимости погрешности к нулю при h стремящемся к нулю. Этот порядок равен степени многочлена $w_{n+1}(m)$ в остаточном члене (3.9), (3.10) и (3.11), то есть $n + 1$ поскольку в него будет входить множителем h^{n+1}.

3.3 *Алгоритм и вычислительная сложность*

На рисунке 2 представлен один из возможных алгоритмов, реализующий построение многочлена Лагранжа для произвольных узлов. Алгоритм реализует вычисления непосредственно по формуле (3.1) при заданном значении аргумента x таблично заданной функции $f(x)$.

Вычислительная сложность. Вычислительная сложность(трудоемкость) при вычислении значения функции $f(x)$ в одной точке определяется подсчетом количества операций сложения, операций умножения и операций деления. Для многочлена Лагранжа требуется $2n^2 + 3n$ операций сложения, $2n^2 + n - 1$ операций умножения и $n + 1$ операций деления. Таким образом, вычислительная трудоемкость составит

$$2n^2 + 3n + 2n^2 + n - 1 + n + 1 = 4n^2 + 5n.$$

Алгоритм построения многочлена Лагранжа
для произвольно заданных значений узлов

Ввод значения z и количество узлов n
Формирование массива x значений x_i и массива f значений функции $f(x_i)$
$s = 0$;
Для $k = 0$ **до** n **выполнять**
$c = 1$;
Для $j = 0$ **до** n **выполнять**
$h = x_k - x_j$; //вычисление шага
Если $k == j$, **то** $h = z - x_k$; **конец если**
Если $h \neq 0$, **то** $c = c \cdot (z - x[j])/h$; //вычисление k - го коэффициента
иначе
{ printf("s=%f\n",$f[k]$); } //введенное число совпадает с узлом
Конец цикла по j
$s = s + c \cdot f[k]$; //формирование результата
Конец цикла по k
Вывод результата

Рисунок 2 - *Алгоритм построения многочлена Лагранжа*

3.4 *Заключение*

Одним из способов решения задач приближения функций является способ Лагранжа. Основная идея метода Лагранжа состоит в построении такого многочлена, который принимает значение 1 в узлах и нуля во всех других точках.

При использовании интерполяционного многочлена Лагранжа точность решения для крайних отрезков падает.

Недостаток формулы Лагранжа состоит в том, что при введении дополнительных узлов интерполяции все лагранжевы коэффициенты требуется пересчитывать заново.

Вычислительная сложность при вычислении значения функции $f(x)$ в одной точке с помощью многочлена Лагранжа определяется подсчетом количества операций сложения, операций умножения и операций деления.

3.5 *Задачи*

1. Пусть дана таблица значений функции $f(x) = e^{-x}$

x_i	1.60	1.62	1.63	1.65	1.67
$f(x_i)$	0.2019	0.1979	0.1959	0.1920	0.1882

Требуется:

а) вычислить значение $f(1.61)$ с помощью линейной интерполяционной формулы Лагранжа, $L_1(1.61)$;

б) оценить погрешность;

в) выписать интерполяционную формулу Лагранжа второй степени для вычисления $f(1.61)$.

2. Пусть известна верхняя граница $C = \left| f^{(n+1)}(x) \right|$ для функции $f(x)$ на отрезке [0, 1], $x \in [0, 1]$. Оценить возможную и максимальную погрешности при интерполяции многочленом Лагранжа первой степени.

3. Показать, что для функции $f(x) = x^{n+1} + c_n x^n + \ldots + c_0$ в оценке погрешности (3.5) можно поставить знак равенства.

4. Определить какую точность можно гарантировать при линейной интерполяции функции $f(x) = xe^{-x}$ на отрезке [0, 1], считая узлами интерполирования его концы.

5. Функция $f(x)$ аппроксимируется мнгогочленом Лагранжа второй степени для системы равноотстоящих на отрезке узлов. Оценить погрешность интерполяции в точке x^*:

п/п	$f(x)$	x^*	$a \le x \le b$
1	e^{-2x}	0.2	$0 \le x \le 0.3$
2	$x\cos(x)$	$\pi/12$	$0 \le x \le \pi/4$
3	$3xe^{x}$	0.1	$0 \le x \le 1$
4	$\cos(2\pi x^2)$	1/4	$0 \le x \le 1/2$
5	$3xe^{-2x}$	0.2	$0 \le x \le 1$
6	$1/(x^2 + 2)$	1.1	$1 \le x \le 2$
7	$4x^2e^{x}$	0.3	$0 \le x \le 1$
8	$3x^2 - e^{x}$	1.2	$1 \le x \le 2$
9	$x\sin(x)$	$\pi/12$	$0 \le x \le \pi/4$

Окончание таблицы

1	2	3	4
10	$x(lnx+1)$	1.3	$1 \le x \le 2$
11	$x^2(2 + lnx)$	1.2	$1 \le x \le 2$
12	$x\sqrt{x+1}$	0.2	$0 \le x \le 1$
13	$lnx/(x^2 + 1)$	2.2	$2 \le x \le 3$
14	$(x + 1)e^x$	0.1	$0 \le x \le 1$
15	$(x^2 + 1)lnx$	2.4	$1 \le x \le 3$

6. Для функции заданной таблично вычислить с помощью многочлена Лагранжа значение функции в заданной точке (x^*, $f(x^*)$).

1.

x_i	1.62	1.64	1.65	1.67	1.68
$f(x_i)$	1.172	1.179	1.182	1.186	1.189

$f(x^*) = f(1.63)$

2.

x_i	1.84	1.85	1.87	1.89	1.91
$f(x_i)$	1.225	1.228	1.232	1.236	1.241

$f(x^*) = f(1.86)$

3.

x_i	2.23	2.26	2.27	2.29	2.32
$f(x_i)$	1.306	1.312	1.314	1.318	1.324

$f(x^*) = f(2.25)$

4.

x_i	1.60	1.62	1.63	1.65	1.67
$f(x_i)$	0.2019	0.1979	0.1959	0.1920	0.1882

$f(x^*) = f(1.64)$

5.

x_i	2.35	2.37	2.38	2.40	2.41
$f(x_i)$	2.864	2.872	2.876	2.884	2.888

$f(x^*) = f(2.39)$

6.

x_i	2.50	2.51	2.53	2.54	2.56
$f(x_i)$	5.000	5.010	5.030	5.040	5.060

$f(x^*) = f(2.52)$

7.

x_i	1.50	1.52	1.53	1.55	1.57
$f(x_i)$	3.873	3.899	3.912	3.937	3.962

$f(x^*) = f(1.51)$

8.

x_i	0.85	0.86	0.88	0.90	0.91
$f(x_i)$	0.4274	0.4232	0.4148	0.4066	0.4025

$f(x^*) = f(0.87)$

9.

x_i	0.40	0.43	0.45	0.46	0.49
$f(x_i)$	1.0811	1.0939	1.1039	1.1077	1.1174

$f(x^*) = f(0.42)$

10.

x_i	1.10	1.12	1.13	1.15	1.18
$f(x_i)$	0.7287	0.7373	0.7415	0.7499	0.7620

$f(x^*) = (1.14)$

11.

x_i	2.00	2.05	2.15	2.20	2.25
$f(x_i)$	0.9545	0.9596	0. 9684	0.9712	0.9756

$f(x^*) =f(2.10)$

12.

x_i	0.05	0.07	0.08	0.10	0.12
$f(x_i)$	0.0399	0.0558	0.0638	0.0797	0.0955

$f(x^*) = (0.09)$

13.

x_i	2.5	2.7	2.9	3.0	3.2
$f(x_i)$	0.9163	0.9933	1.0647	1.0986	1.1632

$f(x^*) = f(2.6)$

14.

x_i	6.9	7.1	7.2	7.4	7.5
$f(x_i)$	992.27	1212.0	1339.4	1636.0	1808.0

$f(x^*) = f(7.0)$

15.

x_i	1.39	1.41	1.42	1.45	1.47
$f(x_i)$	4.0149	4.0960	4.1371	4.2631	4.3492

$f(x^*) = f(1.40)$

7. Для каждой из функций заданных таблично вычислить с помощью многочленов Лагранжа для равноотстоящих узлов значение функции в заданной точке $(x^*,\ f(x^*))$.

1.

x_i	1.25	1.27	1.29	1.31	1.33
$f(x_i)$	3.4903	3.5609	3.6328	3.7062	3.7263

$f(x^*) = f(1.28)$

2.

x_i	1.40	1.42	1.44	1.46	1.48
$f(x_i)$	4.0552	4.1371	4.2207	4.3060	4.3929

$f(x^*) = f(1.41)$

3.

x_i	1.01	1.03	1.05	1.07	1.09
$f(x_i)$	2.7456	2.8011	2.8577	2.9154	2.9743

$f(x^*) = f(1.04)$

4.

x_i	1.15	1.17	1.19	1.21	1.23
$f(x_i)$	3.1582	3.2220	3.2871	3.3535	3.4272

$f(x^*) = f(1.16)$

5.

x_i	0.80	0.82	0.84	0.86	0.88
$f(x_i)$	2.2255	2.2705	2.3164	2.3632	2.4108

$f(x^*) = (0.81)$

6.

x_i	0.44	0.46	0.48	0.50	0.52
$f(x_i)$	0.6440	0.6313	0.6188	0.6065	0.5942

$f(x^*) = f(0.45)$

7.

x_i	0.11	0.13	0.15	0.17	0.19
$f(x_i)$	0.8958	0.8781	0.8607	0.8437	0.8270

$f(x^*) = f(0.12)$

8.

x_i	0.25	0.27	0.29	0.31	0.33
$f(x_i)$	0.7788	0.7634	0.7483	0.7334	0.7189

$f(x^*) = f(0.26)$

9.

x_i	9.60	9.62	9.64	9.66	9.68
$f(x_i)$	3.098	3.102	3.105	3.108	3.111

$f(x^*) = f(9.63)$

10.

x_i	7.80	7.82	7.84	7.86	7.88
$f(x_i)$	2.793	2.796	2.800	2.804	2.807

$f(x^*) = f(7.83)$

11.

x_i	2.00	2.05	2.10	2.15	2.20
$f(x_i)$	0.9545	0.9596	0. 9624	0. 9684	0.9716

$f(x^*) = (2.03)$

12.

x_i	8.09	8.11	8.13	8.15	8.17
$f(x_i)$	2.844	2.848	2.851	2.855	2.858

$f(x^*) = (8.10)$

13.

x_i	6.29	6.32	6.35	6.38	6.41
$f(x_i)$	2.508	2.514	2.520	2.526	2.532

$f(x^*) = (6.31)$

14.

x_i	3.25	3.28	3.31	3.34	3.37
$f(x_i)$	5.701	5.727	5.753	5.779	5.805

$f(x^*) = (3.27)$

15.

x_i	1.30	1.34	1.38	1.42	1.46
$f(x_i)$	3.606	3.661	3.715	3.768	3.821

$f(x^*) = f(1.32)$

16.

x_i	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28
$f(x_i)$	0.1585	0.1741	0.1889	0.2012	0.2224

$f(x^*) = f(0.23)$

17.

x_i	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59
$f(x_i)$	0.4177	0.4245	0.4316	0.4381	0.4423

$f(x^*) = f(0.552)$

8. Известен набор равноотстоящих узлов x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и значения функции $f(x)$ в этих узлах. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для узлов

а) x_1, x_2, x_3; б) x_3, x_4, x_5.

9. Известны значения функции $f(x)$ в узлах x_0, x_1, x_2. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_2(x)$ используя алгебраический подход.

10. Известен набор узлов x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и значения функции $f(x)$ в этих узлах. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для узлов

а) x_3, x_4; б) x_1, x_2, x_3; в) x_3, x_4, x_5.

11. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_2(x)$, для которого выполнено $L_2(2) = 1$, $L_2(3) = 2$, $L_2(4) = 3$.

3.6 *Контрольные вопросы*

1. Сформулировать задачу интерполирования многочленом Лагранжа.

2. Сформулировать теорему о существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа (3.1).

3. Выписать многочлен Лагранжа первой, второй и третьей степени для произвольных и равноотстоящих узлов.

4. Сформулировать задачу интерполирования многочленом Лагранжа с равноотстоящими узлами.

5. Выписать многочлен Лагранжа n-ой степени для произвольных узлов в сокращенной (компактной) форме.

6. Выписать оценку максимальной погрешности интерполирования многочленом Лагранжа для равноотстоящих узлов.

7. Выписать многочлен Лагранжа первой, второй и третьей степени для равноотстоящих узлов.

8. Выписать оценку максимальной погрешности интерполирования многочленом Лагранжа для произвольных узлов.

9. Каким образом определить вычислительную трудоемкость вычисления значения функции многочленом Лагранжа?

10. Выписать многочлен Лагранжа n-ой степени для равноотстоящих узлов в сокращенной (компактной) форме.

11. Выписать многочлен Лагранжа n-ой степени для произвольных узлов.

12. Какое значение примет многочлен Лагранжа, если значение аргумента совпадает с одним из узловых значений?

13. Сформулировать теорему о существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов (3.7).

14. Выписать оценку погрешности интерполирования многочленом Лагранжа для произвольных узлов.

15. Выписать многочлен Лагранжа n-ой степени для равноотстоящих узлов.

4 ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НЬЮТОНА

Для построения интерполяционных многочленов Ньютона используются понятия разделенных и конечных разностей.

4.1 ***Разделенные разности***. Пусть имеется набор x_0, x_1, …, x_n, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $x_i \in [a, b]$, на котором некоторая функция $f(x) \in R$ принимает значения $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

Определение. Отношения вида

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0;\ x_1); \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_1;\ x_2);\ \ldots$$

$$\ldots; \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1};\ x_n),$$

или

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i;\ x_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, n-1$$

называются *разделенными разностями первого порядка*, которые определятся для двух точек x_i, x_{i+1}.

Отношения

$$\frac{f(x_1;\ x_2) - f(x_0;\ x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0;\ x_1;\ x_2); \ \frac{f(x_2;\ x_3) - f(x_1;\ x_2)}{x_3 - x_1} = f(x_1;\ x_2;\ x_3);\ \ldots$$

$$\ldots; \frac{f(x_{n-1};\ x_n) - f(x_{n-2};\ x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} = f(x_{n-2};\ x_{n-1};\ x_n),$$

или

$$\frac{f(x_{i+1};\ x_{i+2}) - f(x_i;\ x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} = f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2}),\ i = 0, 1, \ldots, n-2$$

называются *разделенными разностями второго порядка* и определяются для трех точек x_i, x_{i+1}, x_{i+2}.

Разделенными разностями *k-го порядка* называются отношения

$$\frac{f(x_1;..;x_k)-f(x_0;..;x_{k-1})}{x_k-x_0}=f(x_0;..;x_k);$$

$$\frac{f(x_2;..;x_{1+k})-f(x_1;..;x_k)}{x_{1+k}-x_1}=f(x_1;..;x_{1+k});..$$

$$..;\frac{f(x_{n-k+1};..;x_n)-f(x_{n-k};..;x_{n-1})}{x_n-x_{n-k}}=f(x_{n-k};..;x_n),$$

или

$$\frac{f(x_{i+1};..;x_{i+k})-f(x_i;..;x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_i}=f(x_i;..;x_{i+k}), i=0,1,..,n-k \qquad (4.1)$$

и определяются для x_i, x_{i+1}, …, x_{i+k}..

Наконец, разделенной разностью n–го порядка называется отноше-ние

$$\frac{f(x_1;\ldots;x_n)-f(x_0;\ldots;x_{n-1})}{x_n-x_0}=f(x_0;\ldots;x_n).$$

и определяется для x_0, x_1, …, x_n.

Рассмотрим пример построения разделенных разностей.

Пример 1. Пусть заданы x_0, x_1, x_2, x_3 и известны значения функции $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$. Построить последовательность получения разделенных разностей.

Решение. В данном случае $n = 3$. Последовательно применяем формулу (4.1), получим:

- разделенные разности первого порядка

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=y_{10}, \quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=y_{21}, \quad \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=y_{32};$$

- разделенные разности второго порядка

$$\frac{y_{21}-y_{10}}{x_2-x_0}=y_{210}, \quad \frac{y_{32}-y_{21}}{x_3-x_1}=y_{321};$$

- разделенная разность третьего порядка

$$\frac{y_{321}-y_{210}}{x_3-x_0}=y_{3210}.$$

Для наглядности последовательность построения разделенных разностей для произвольной функции схематично показана на рисунке 3 и представлена таблице 1.

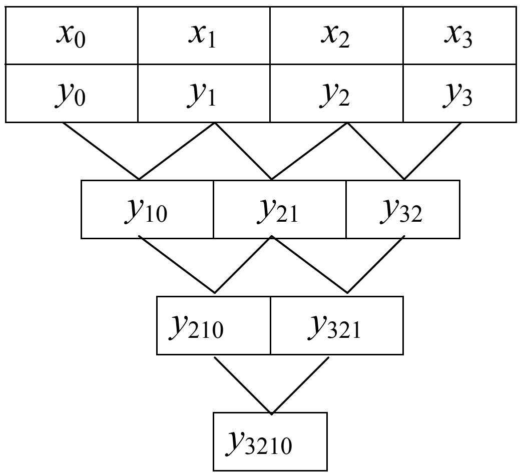


Рисунок 3 - *Схема построения разделенных разностей*

Таблица 1

x	y	1 пор.	2 пор.	3 пор.
x_0	y_0			
		y_{10}		
x_1	y_1		y_{210}	
		y_{21}		y_{3210}
x_2	y_2		y_{321}	
		y_{32}		
x_3	y_3			

Пример 2. Составить разделенные разности для функции $y = f(x)$, заданной таблицей

$x_0 = 1.00$	$x_1 = 1.02$	$x_2 = 1.03$	$x_3 = 1.06$	$x_4 = 1.08$
$y_0 = 3.162$	$y_1 = 3.194$	$y_2 = 3.209$	$y_3 = 3.256$	$y_4 = 3.286$

Решение. Используя схему построения и обозначения предыдущего примера, будем иметь:

- разделенные разности первого порядка

$$y_{10} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3.194 - 3.162}{1.02 - 1.00} = 1.6, \quad y_{21} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3.209 - 3.194}{1.03 - 1.02} = 1.5,$$

$$y_{32} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{3.256 - 3.209}{1.06 - 1.03} \approx 1.566, \quad y_{43} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{3.286 - 3.209}{1.08 - 1.06} = 3.85;$$

- разделенные разности второго порядка

$$y_{210} = \frac{y_{21} - y_{10}}{x_2 - x_0} = \frac{1.5 - 1.6}{1.03 - 1.00} \approx -3.333, \quad y_{321} = \frac{y_{32} - y_{21}}{x_3 - x_1} = \frac{1.566 - 1.5}{1.03 - 1.02} \approx 6.66,$$

$$y_{432} = \frac{y_{43} - y_{32}}{x_4 - x_2} = \frac{3.85 - 1.566}{1.08 - 1.03} \approx 45.68;$$

- разделенные разности третьего порядка

$$y_{3210} = \frac{y_{321} - y_{210}}{x_3 - x_0} = \frac{6.66 + 3.333}{1.06 - 1.00} \approx 166.55,$$

$$y_{4321} = \frac{y_{432} - y_{321}}{x_4 - x_1} = \frac{45.68 - 6.66}{1.08 - 1.02} \approx 650.333.$$

- разделенная разность четвертого порядка:

$$y_{43210} = \frac{y_{4321} - y_{3210}}{x_4 - x_0} = \frac{650.333 - 166.55}{1.08 - 1.00} \approx 6047.291.$$

Таблица 2

x	*y*	1 пор.	2 пор.	3 пор.	4 пор.
1.00	3.162				
		1.6			
1.02	3.194		-3.333		
		1.5		166.55	
1.03	3.209		6.66		6047.291
		1.566		650.33	
1.06	3.256		45.68		
		3.85			

1.08	3.286				

4.2 *Интерполяционный многочлен Ньютона для произвольно заданных узлов. Погрешность и оценка погрешности*

Постановка задачи. Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ в неравноотстоящих $(n + 1)$-ом узлах интерполяции,

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

Требуется построить многочлен $N_n(x)$ степени не выше n и принимающий в заданных узлах x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ значения, совпадающие со значениями y_i,

$$N_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\ .$$

***Теорема* 1**. Пусть заданы узлы x_i, $i= 0, 1,\ldots, n$, среди которых нет совпадающих, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, и заданы значения $y_0=f(x_0)$, $y_1= f(x_1), \ldots, y_n=f(x_n)$ функции $f(x)$ в этих узлах. Тогда существует многочлен

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \qquad (4.2)$$

степени не выше n, принимающий в заданных узлах x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ заданные значения y_i, $N_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1,\ldots, n$.

Многочлен (4.2) называется *интерполяционным многочленом Ньютона для неравноотстоящих узлов*.

Рассмотрим пример построения и применения многочлена Ньютона.

Пример 3. Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	1.00	1.03	1.05	1.09
y	1.00	1.015	1.034	1.044

Требуется построить многочлен Ньютона и с его помощью вычислить $f(1.08)$.

Решение. 1.Составим разделенные разности используя формулу (4.1), получим

$$y_{10} = 0.5,\ y_{21} = 0.5,\ y_{32} = 0.475;$$

$$y_{210} = 0,\ y_{321} \approx -0.416;$$

$$y_{3210} \approx -4.63.$$

2. Применяем формулу (4.2), находим:

$$y = y_0 + 0.5(x - 1.00) - 4.63(x - 1.00)(x - 1.03)(x - 1.05).$$

Далее,

$y = f(1.08) = y_0 + 0.5(x - 1.00) - 4.63(x - 1.00)(x - 1.03)(x - 1.05) =$
$=1.00 + 0.5(1.08 - 1.00) - 4.63(1.08- 1.00)(1.08 - 1.03)(1.08 - 1.05) \approx 1.039.$

Погрешность и оценка погрешности. Погрешность (остаточный член) интерполяции многочленом Ньютона определяется формулой

$$R_n(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(о), \tag{4.3}$$

где $w_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})...(x-x_n)$, а $\xi \in (a, b)$.

Оценка погрешности. Оценка погрешности интерполяции многочленом Ньютона в некоторой произвольной фиксированной точке x^* из отрезка $[a, b]$, $x^* \in [a, b]$ определяется формулой

$$|R_n| = \left|f(x^*) - L_n(x^*)\right| \le \frac{C_{n+1}}{(n+1)!}\left|w_{n+1}(x^*)\right|, \tag{4.4}$$

где $C_{n+1} = max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ на $[a, b]$.

Оценка максимальной погрешности. Оценка максимальной погрешности интерполирования на всем отрезке $[a, b]$, т.е. в любой точке $x \in [a, b]$ имеет вид

$$|R_n| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{C_{n+1}}{(n+1)!} M_n, \tag{4.5}$$

где $M_n = max|\, w_{n+1}(x)\,| = max|(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})...(x-x_n)|$ на отрезке $[a, b]$.

4.3 *Конечные разности*

Пусть имеется набор равноотстоящих точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_i \ne x_j$ при $i \ne j$, $x_i \in [a, b]$, $x_{i+1} - x_j = h = const$, на котором некоторая функция $f(x) \in R$ принимает значения $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

Определение. Выражения вида

$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$; $\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1)$; …; $\Delta f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_{n-1})$,

или

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i),\ i = 0, 1, 2, ..., n - 1$$

называются *конечной разностью первого порядка*.

Выражения

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta(\Delta f(x_0)) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0);$$

$$\Delta^2 f(x_1) = \Delta(\Delta f(x_1)) = \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1) = f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1);$$

$$\ldots.$$

$$\Delta^2 f(x_{n-2}) = \Delta(\Delta f(x_{n-2})) = \Delta f(x_{n-1}) - \Delta f(x_{n-2}) = f(x_n) - 2f(x_{n-1}) + f(x_{n-2}),$$

или

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta(\Delta f(x_i)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) - f(x_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$

называются *конечной разностью второго порядка*.

Вообще, *разностями k-го порядка* называются отношения

$$\Delta^k f(x_0) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x_0)) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f(x_j)$$

$$\Delta^k f(x_1) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x_1)) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f(x_{1+j})$$

$$\ldots.$$

$$\Delta^k f(x_{n-k}) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x_{n-k})) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f(x_{n-k+j}),$$

или

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x_i)) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f(x_{i+j}),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-k, \quad (4.6)$$

где $C_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Конечная разность n-го порядка определяется выражением

$$\Delta^n f(x_0) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x_0)) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f(x_0).$$

Разделенные и конечные разности. При постоянном шаге h разделенные и конечные разности связаны соотношениями

$$f(x_i; \ldots; x_{i+k}) = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k},\ i = 0, 1, \ldots, n-k. \quad (4.7)$$

Рассмотрим пример построения конечных разностей.

Пример 4. Пусть заданы равноотстоящие точки x_0, x_1, x_2, x_3, x_{i+1}- x_j = h = $const$ и известны значения функции $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ Построить последовательность получения конечных разностей.

Решение. В данном случае n = 3. Последовательно применяем формулу (4.6), получим:

- конечные разности первого порядка:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0; \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1; \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2;$$

- конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta\, y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0;$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1;$$

- конечная разность третьего порядка:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Для наглядности последовательность построения разделенных разностей для произвольной функции схематично показана на рисунке 4 и представлена таблицей 3.

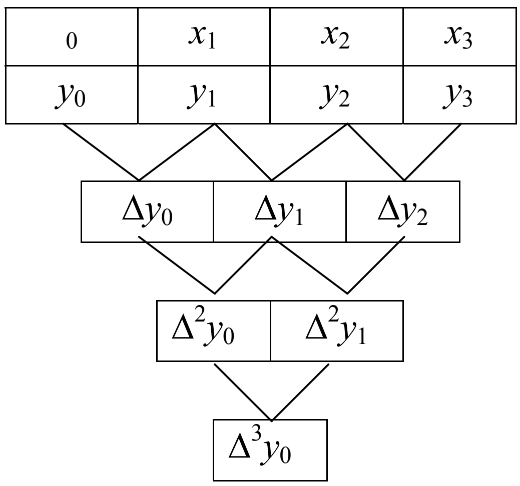


Рисунок 4 - *Схема построения конечных разностей*

Таблица 3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Пример 5. Составить конечные разности для функции $y = f(x)$, заданной таблицей

$x_0 = 1.10$	$x_1 = 1.11$	$x_2 = 1.12$	$x_3 = 1.13$	$x_4 = 1.14$
$y_0 = 1.049$	$y_1 = 1.054$	$y_2 = 1.058$	$y_3 = 1.063$	$y_4 = 1.068$

Решение. Здесь шаг $h = 0.01$. Используя схему построения и обозначения предыдущего примера, будем иметь:

- конечные разности первого порядка

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 1.054 - 1.049 = 0.005, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 1.058 - 1.054 = 0.004,$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 1.063 - 1.058 = 0.005, \quad \Delta y_3 = y_4 - y_3 = 1.068 - 1.063 = 0.005;$$

- конечные разности второго порядка

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 0.004 - 0.005 = -0.001,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 0.005 - 0.004 = 0.001,$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta(\Delta y_2) = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 0.005 - 0.005 = 0;$$

- конечные разности третьего порядка

$$\Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 0.001 + 0.001 = 0.002,$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta(\Delta^2 y_1) = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 0 - 0.001 = -0.001;$$

- конечная разность четвертого порядка

$$\Delta^4 y_0 = \Delta(\Delta^3 y_0) = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = -0.001 - 0.002 = -0.003.$$

Таблица 4

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.10	3.162				
		1.6			
1.11	3.194		-3.333		
		1.5		166.55	
1.12	3.209		6.66		6047.291
		1.566		650.33	
1.13	3.256		45.68		
		3.85			
1.14	3.286				

4.4 *Интерполяционные многочлены Ньютона для равноотстоящих узлов. Погрешность и оценка погрешности*

Постановка задачи. Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ в равноотстоящих $(n + 1)$ - ом узлах интерполяции,

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1, \ldots,\ f(x_n) = y_n.$$

Требуется построить многочлен $N_n(x)$ степени не выше n и принимающий в заданных узлах x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ значения, совпадающие со значениями y_i,

$$N_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Первый интерполяционный многочлен Ньютона. Первый интерполяционный многочлен Ньютона получается с помощью подстановки в многочлен (4.2) вместо разделенных разностей их выражения через конечные разности (4.7):

$$\begin{aligned} N_n(x) &= y_0 + d\Delta y_0 + \frac{d(d-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{d(d-1)(d-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots \\ &\ldots + \frac{d(d-1)\ldots(d-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $d = \dfrac{x - x_0}{h}$ - число шагов, требуемых для достижения точки x, исходя из x_0, называемой *фазой интерполяции*, определенной относительно точки x_0.

Погрешность первого интерполяционного многочлена Ньютона. Погрешность (остаточный член) интерполяции первым интерполяционным многочленом Ньютона определяется формулой

$$R_n(x) = h^{n+1}\,\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi), \qquad (4.9)$$

где $\xi \in (a, b)$.

Оценка погрешности. Оценка максимальной погрешности интерполирования на всем отрезке $[a, b]$, т.е. в любой точке $x \in [a, b]$ имеет вид

$$|R_n| = |f(x) - L_n(x)| \le h^{n+1}\,\frac{C_{n+1}}{(n+1)!}\,M_n\,, \qquad (4.10)$$

где $M_n = max|\, q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)\,|$ на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим пример использования первой формулы Ньютона.

Пример 6. Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	1.50	1.52	1.54	1.56	1.58
y	4.4817	4.5722	4.6646	4.7588	4.8550

Требуется построить первый многочлен Ньютона и с его помощью вычислить $f(x)$ при $x^* = 1.51$. Здесь шаг $h = 0.02$.

Решение. 1.Составим конечные разности, используя формулу (4.6), получим:

- конечные разности первого порядка

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 4.5722 - 4.4817 = 0.0905$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 4.6646 - 4.5722 = 0.0924$,
$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 4.7588 - 4.6646 = 0.0942$, $\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 4.8550 - 4.7588 = 0.0962$;

- конечные разности второго порядка

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 0.0924 - 0.0905 = 0.0019,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 0.0942 - 0.0924 = 0.0018,$$
$$\Delta^2 y_2 = \Delta(\Delta y_2) = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 0.0962 - 0.0942 = 0.0020;$$

- конечные разности третьего порядка

$$\Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 0.0018 - 0.0019 = -0.0007,$$
$$\Delta^3 y_1 = \Delta(\Delta^2 y_1) = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 0.0020 - 0.0018 = 0.0002;$$

- конечная разность четвертого порядка

$$\Delta^4 y_0 = \Delta(\Delta^3 y_0) = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 0.0002+ 0.0007= -0.0009.$$

2. Применяя формулу (4.8), находим:

$d = (x - x_0)/h = 50(x – 1.50)$,

$$y = y_0 + 4.47725(x – 1.50) + 0.044375(x – 1.50)^2 + 0.000415(x – 1.50)^3 –$$
$$-0.001875(x – 1.50)^4.$$

Далее,

$$y = f(x^*) = f(1.51) = 4.4817 + 4.47725\cdot 0.01+ 0.044375\cdot(0.01)^2 +$$
$$+ 0.000415\cdot(0.01)^3 - 0.001875\cdot(0.01)^4 \approx 4.5267.$$

Второй интерполяционный многочлен Ньютона. Получается аналогично первому и имеет вид

$$N_n(x) = y_n + d\Delta y_{n-1} + \frac{d(d+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{d(d+1)(d+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{d(d+1)\ldots(d+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \tag{4.11}$$

где $d = \dfrac{x - x_n}{h}$ - фаза интерполяции, определенная относительно точки x_n.

Погрешность и оценка погрешности второго интерполяционного многочлена Ньютона. Погрешность (остаточный член) интерполяции вторым интерполяционным многочленом Ньютона определяется формулой:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{d(d+1)\ldots(d+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\text{о}), \tag{4.12}$$

где $\xi \in (a, b)$.

Оценка погрешности. Оценка максимальной погрешности интерполирования на всем отрезке $[a, b]$, т.е. в любой точке $x \in [a, b]$ имеет вид:

$$|R_n| = |f(x) - L_n(x)| \le h^{n+1}\frac{C_{n+1}}{(n+1)!}M_n, \tag{4.13}$$

где $M_n = max| d(d + 1) (d + 2) \ldots (d + n) |$ на отрезке $[a, b]$.

4.5 *Алгоритм и вычислительная сложность*

Алгоритм. На рисунке 4 представлен один из возможных алгоритмов построения многочлена Ньютона для неравноотстоящих узлов и вычисление значения функции при заданном значении z. В алгоритме разделенные разности размещаются в массиве F, где первоначально располагались значения функции в узлах. Этот массив обновляется при вычислении разделенных разностей очередного порядка. Таким образом, после вычисления все коэффициенты многочлена Ньютона будут размещены последовательно в массиве F узловых значений функции $f(x)$.

Вычислительная сложность. Вычислительная сложность (трудоемкость)при вычислении значения функции $f(x)$ в одной точке x определяется подсчетом количества операций сложения, операций умножения и операций деления. Для многочлена Ньютона требуется $n^2 +2n$ операций сложения, $(n^2 + n)/ 2$ операций умножения и $n(n+1)/ 2$ операций деления. Таким образом, вычислительная трудоемкость составит

$$n^2 +2n + (n^2 + n)/ 2 + n(n+1)/ 2 = 2n^2 + 3n.$$

Алгоритм построения многочлена Ньютона для неравноотстоящих узлов и вычисление значения функции при заданном значении

Ввод значения z, количество узлов n

Формирование массива X значений x_i и массива F значений функции в узлах $f(x_i)$

Вычисление коэффициентов многочлена

Для $j = 1$ **до** n **выполнять**

$C = F[j-1]$; $D = X[j-1]$

Для $i = j$ **до** n **выполнять**

$F[i] = (F[i] - C)/ (X[i] - D)$

конец цикла по i

Конец цикла по j

Вычисление значения функции в заданной точке z по схеме Горнера

$S = 0$

Для $i = n$ **до** 1 **выполнять**

$S = (S + F[i])\cdot(z - X[i-1])$

Конец цикла по i

$S = S + F[0]$

Вывод: значение S и коэффициенты $F[i]$

Рисунок 3 - *Алгоритм построения многочлена Ньютона*

4.6 *Заключение*

Многочлены Ньютона используются для интерполяции как с неравноотстоящими узлами, так и равноотстоящими узлами.

Многочлены Ньютона удобнее использовать, так как степень этих многочленов можно последовательно повышать путем добавления очередных слагаемых, имеющих более высокую степень. При этом многочлен Ньютона используются при интерполировании одной и той же функции с постепенно увеличивающимся числом узлов.

Конечные разности являются средством вычисления функций заданных таблицей значений в равноотстоящих точках.

4.7 *Задачи*

1. Выписать интерполяционные многочлены Ньютона первой, второй и третьей степени.

2. Пусть дана таблица значений функции $f(x) = e^{-x}$

x_i	2.80	2.83	2.84	2.86	2.89
$f(x_i)$	0.06081	0.05901	0.05843	0.05727	0.05558

Требуется :

а) вычислить значение $f(2.81)$ с помощью линейной интерполяционной формулы Ньютона, $N_1(2.81)$;

б) оценить погрешность;

в) выписать интерполяционную формулу Ньютона второй степени для вычисления $f(2.81)$.

3. Функция $f(x)$ задана таблицей

x_i	1	3	5	7	8
$f(x_i)$	3	?	2	3	1

Требуется с помощью интерполяционной формулы Ньютона восстановить значение при $x = 3$.

4. Пусть известна верхняя граница $C = \left| f^{(n+1)}(x) \right|$ для функции $f(x)$ на отрезке [0, 1], $x \in [0, 1]$. Оценить возможную и максимальную погрешности при интерполяции многочленом Ньютона первой степени.

5. Построить интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x) = 2\left| x \right|$ по значениям -0.5, 0, 0.3.

6. Построить интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x) = x^2$ по значениям -1, -0.2, 0, 0.3, 0.8.

7. Оценить величину шага интерполяции h для обеспечения точности $\varepsilon \le 10^{-4}$ интерполяции функции $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1, 10^3]$ при линейной и квадратичной интерполяции.

8. Построить интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x) = 2|x|$ по значениям -1, 0, 1.

9. Построить интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x) = x^2$ по значениям -2, -1, 0, 1, 2.

10. Оценить погрешность интерполяции функции $f(x) = sin\ x$ на отрезке $[0, \pi/4]$ по трем равноотстоящим точкам.

11. Оценить погрешность интерполяции функции $f(x) = cos\ x$ на отрезке $[\pi/4, \pi/2]$ по трем равноотстоящим точкам.

12. Показать, что для функции $f(x) = x^{n+1}$ в оценке погрешности (4.4) можно поставить знак равенства.

13. Для функции заданной таблично вычислить с помощью многочлена Ньютона значение функции в заданной точке x^*, $f(x^*)$.

1.

x_i	7.75	7.77	7.79	7.80	7.82
$f(x_i)$	1.979	1.981	1.982	1.983	1.985

$f(x^*) = f(7.78)$

2.

x_i	8.00	8.02	8.04	8.07	8.08
$f(x_i)$	2.000	2.002	2.003	2.006	2.007

$f(x^*) = f(8.01)$

3.

x_i	7.64	7.66	7.67	7.69	7.71
$f(x_i)$	1.970	1.971	1.972	1.974	1.976

$f(x^*) = f(7.65)$

4.

x_i	5.96	5.98	6.00	6.03	6.04
$f(x_i)$	1.813	1.815	1.817	1.820	1.821

$f(x^*) = f(5.97)$

5.

x_i	5.63	5.65	5.66	5.68	5.69

$f(x_i)$	1.779	1.781	1.782	1.784	1.785

$f(x^*) = f(5.64)$

6.

x_i	6.92	6.93	6.95	6.98	6.99
$f(x_i)$	1.906	1.907	1.908	1.911	1.912

$f(x^*) = f(6.96)$

7.

x_i	5.62	5.64	5.65	5.67	5.68
$f(x_i)$	1.778	1.780	1.781	1.783	1.784

$f(x^*) = f(5.63)$

8.

x_i	6.21	6.22	6.24	6.26	6.29
$f(x_i)$	1.838	1.839	1.841	1.843	1.846

$f(x^*) = f(6.23)$

9.

x_i	5.14	5.16	5.17	5.19	5.22
$f(x_i)$	1.726	1.728	1.729	1.731	1.735

$f(x^*) = f(5.15)$

10.

x_i	4.61	4.63	4.66	4.67	4.69
$f(x_i)$	1.664	1.667	1.666	1.671	1.674

$f(x^*) = (4.62)$

11.

x_i	3.89	3.91	3.92	3.95	3.96
$f(x_i)$	1.573	1.575	1.577	1.581	1.582

$f(x^*) = (3.94)$

12.

x_i	4.05	4.07	4.08	4.10	4.12
$f(x_i)$	1.594	1.597	1.598	1.601	1.603

$f(x^*) = (4.06)$

13.

x_i	2.86	2.88	2.89	2.92	2.95
$f(x_i)$	1.419	1.423	1.424	1.429	1.434

$f(x^*) = (2.87)$

14.

x_i	3.01	3.02	3.05	3.07	3.08

$f(x_i)$	1.444	1.445	1.450	1.453	1.455

$f(x^*) = (3.03)$

15.

x_i	3.12	3.15	3.16	3.18	3.21
$f(x_i)$	1.461	1.466	1.467	1.471	1.475

$f(x^*) = (3.14)$

14. Для каждой из функций заданных таблично вычислить с помощью первого и второго многочленов Ньютона для равноотстоящих узлов значение функции в заданных точках x^*, $f(x^*)$ и x^{**}, $f(x^{**})$, соответственно.

1.

x_i	1.24	1.26	1.28	1.30	1.32
$f(x_i)$	3.4557	3.5254	3.5966	3.6693	3.7434

$f(x^*) = f(1.25)$ $f(x^{**}) = f(1.31)$

2.

x_i	1.39	1.41	1.43	1.45	1.47
$f(x_i)$	4.0149	4.0960	4.1787	4.2631	4.3492

$f(x^*) = f(1.40)$ $f(x^{**}) = f(1.44)$

3.

x_i	1.00	1.03	1.06	1.09	1.12
$f(x_i)$	2.7183	2.8011	2.8864	2.9743	3.0649

$f(x^*) = f(1.02)$ $f(x^{**}) = f(1.11)$

4.

x_i	1.14	1.17	1.20	1.23	1.26
$f(x_i)$	3.1582	3.2220	3.3201	3.4272	3.5254

$f(x^*) = f(1.16)$ $f(x^{**}) = f(1.21)$

5.

x_i	0.81	0.83	0.85	0.87	0.89
$f(x_i)$	2.2479	2.2933	2.3396	2.3869	2.4351

$f(x^*) = f(0.82)$ $f(x^{**}) = f(0.86)$

6.

x_i	1.38	1.42	1.46	1.50	1.54
$f(x_i)$	3.715	3.768	3.821	3.875	3.932

$f(x^*) = f(1.40)$ $f(x^*) = f(1.52)$

7.

x_i	0.11	0.13	0.15	0.17	0.19
$f(x_i)$	0.9048	0.8781	0.8607	0.8437	0.8270

$f(x^*) = f(0.12)$ $f(x^{**}) = f(0.18)$

8.

x_i	0.24	0.27	0.30	0.33	0.36
$f(x_i)$	0.7866	0.7634	0.7408	0.7189	0.6977

$f(x^*) = f(0.25)$ $f(x^{**}) = f(0.34)$

9.

x_i	9.60	9.63	9.66	9.69	9.72
$f(x_i)$	3.098	3.103	3.108	3.113	3.118

$f(x^*) = f(9.62)$ $f(x^{**}) = f(9.70)$

10.

x_i	7.79	7.82	7.85	7.88	7.91
$f(x_i)$	2.791	2.796	2.802	2.807	2.812

$f(x^*) = f(7.80)$ $f(x^{**}) = f(7.87)$

11.

x_i	6.35	6.38	6.41	6.44	6.47
$f(x_i)$	2.520	2.526	2.532	2.538	2.544

$f(x^*) = f(6.37)$ $f(x^{**}) = f(6.46)$

12.

x	8.11	8.13	8.15	8.17	8.19
$f(x_i)$	2.848	2.851	2.855	2.858	2.862

$f(x^*) = f(8.12)$ $f(x^{**}) = f(8.16)$

13.

x_i	2.00	2.05	2.10	2.15	2.20
$f(x_i)$	0.9545	0.9596	0. 9624	0. 9684	0.9716

$f(x^*) = f(2.04)$ $f(x^{**}) = f(2.18)$

14.

x_i	3.25	3.28	3.31	3.34	3.37
$f(x_i)$	5.701	5.727	5.753	5.779	5.805

$f(x^*) = f(3.27)$ $f(x^{**}) = f(3.35)$

15.

x_i	0.44	0.46	0.48	0.50	0.52
$f(x_i)$	0.6440	0.6313	0.6188	0.6065	0.5942

$f(x^*) = f(0.45)$ $f(x^{**}) = f(0.51)$

15. Показать справедливость соотношения (4.7)

$$f(x_i; \ldots; x_{i+k}) = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k}, \; i = 0, 1, \ldots, n-k.$$

4.8 *Контрольные вопросы*

1. Сформулировать задачу интерполирования многочленом Ньютона.

2. Сформулировать теорему о существовании и единственности интерполяционного многочлена Ньютона (4.2).

3. Выписать первый интерполяционный многочлен Ньютона первой и второй степени.

4. Сформулировать задачу интерполирования многочленом Ньютона с равноотстоящими узлами.

5. Составить схему построения разделенных разностей.

6. Выписать оценку максимальной погрешности интерполирования многочленом Ньютона для равноотстоящих узлов.

7. Каким образом определить вычислительная трудоемкость вычисления значения функции многочленом Ньютона?

8. Выписать оценку погрешности интерполирования многочленом Ньютона для произвольных узлов.

9. Каким образом определяется вычислительная трудоемкость вычисления значения функции многочленом Ньютона?

10. Выписать многочлен Ньютона первой, второй и третьей степени для равноотстоящих узлов.

11. Выписать многочлен Ньютона n-ой степени для произвольных узлов.

12. Дать определение разделенных и конечных разностей.

13. Выписать соотношение, связывающее разделенные и конечные разности

14. Выписать локальный интерполяционный многочлен Ньютона.

15. Составить схему построения конечных разностей.

5 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Тригонометрическая интерполяция состоит в том, что в качестве интерполирующей функции принимается тригонометрический многочлен вида [4], [5], [6], [7]

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k cos(wkx) + \sum_{k=1}^{n+1} b_k sin(wkx), \tag{5.1}$$

где n – натуральные числа, $w = 2\pi/T$ (T - положительное число), a_k, b_k – числовые коэффициенты, которые находятся при решении системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из условий интерполяции (1.2),

$$G_n(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, 2n + 1,\ x_{2n+1} - x_0 = T. \tag{5.2}$$

Пусть $y = f(x)$ - периодическая с периодом T функция:

$$f(x + T) = f(x)$$

и заданы значения $y_i = f(x_i)$ на системе узлов

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{5.3}$$

где $h = T/N$, $y_i = f(x_i + N)$.

5.1 *Интерполирование тригонометрическими многочленами*

Пусть $x_0 = T/2N$, $N = 2n + 1$, n – натуральное.

Теорема. При произвольном задании значений f_i периодической с периодом T функции в узлах сетки (5.3) существует и единственный интерполяционный тригонометрический многочлен

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k cos(wkx) + \sum_{k=1}^{n+1} b_k sin(wkx), \tag{5.4}$$

удовлетворящий условиям интерполяции (5.2)

$$G_n(x_i) = f(x_i) = f_i,\ i = 0, \pm1, \ldots,$$

коэффициенты многочлена (5.4) a_k , b_k определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i\ , \tag{5.5}$$

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i cos(kx_i),\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.6}$$

$$b_k = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i sin(kx_i)\ , k = 1, 2, \dots, n\ . \qquad (5.7)$$

Рассмотрим пример построения интерполяционного тригонометрического многочлена.

Пример. Пусть функция $y = f(x)$, описывающая некоторый колебательный процесс задана таблицей

x_i	0	π/3	2π/3	π	4π/3	5π/3	2π
$f(x_i)$	-2	-0.92	0.83	2	2.32	-1.11	-2

Требуется построить тригонометрический многочлен второй степени.

*Решение.*1) Для удобства запишем значения аргумента и в градусной мере   0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°.

Функция $f(x)$ определена на дискретном множестве равноотстоящих точек с шагом $h = \pi/3 = 60°$,

$$y_i = f(x_i),$$

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

2) Последовательно применяя формулы (5.5), (5.6), (5.7), выпишем выражения для коэффициентов a_0, a_1, a_2, b_1, b_2:

$7a_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$;

$7a_1 = 2(y_0 + y_1 cos x_1 + y_2 cos\ x_2 + y_3 cos\ x_3 + y_4 cos\ x_4 + y_5 cos\ x_5 + y_6\ cos\ x_6)$;

$7a_2 = 2(y_0 + y_1 cos2x_1 + y_2 cos2x_2 + y_3 cos2x_3 + y_4 cos2x_4 + y_5 cos2x_5 + y_6\ cos2x_6)$;

$7b_1 = 2(y_1 sin\ x_1 + y_2 sin\ x_2 + y_3 sin\ x_3 + y_4 sin\ x_4 + y_5 sin\ x_5 + y_6 sin\ x_6)$;

$7b_2 = 2(y_1 sin2x_1 + y_2 sin2x_2 + y_3 sin2x_3 + y_4 sin2x_4 + y_5 sin2x_5 + y_6 sin2x_6)$.

3) Вычислим значения коэффициентов, подставляя соответствующие значения аргумента и используя формулы приведения:

$$7a_0 = -2\ -0.92 + 0.83 + 2 + 2.32 - 1.11 - 2 = -0.88;$$

$$7a_1 = 2(y_0 + y_1 cos60° + y_2 cos120° + y_3 cos180° + y_4 cos240° + y_5 cos300° + y_6\ cos360°) =$$

$$= 2(-2 - 0.92\cdot 0.5 + 0.83\cdot(-0.5) + 2\cdot(-1) + 2.32\cdot(-0.5)\ - 1.11\cdot 0.5\ - 2\cdot 1) = -21.250;$$

$$7a_2 = 2(y_0 + y_1 cos120° + y_2 cos240° + y_3 cos360° + y_4 cos480° + y_5 cos600° + y_6\ cos720°) =$$

$$= 2(-2\ -0.92\cdot(-0.5)\ + 0.83\cdot(-0.5) + 2\cdot 1 + 2.32\cdot(-0.5)\ - 1.11\cdot(-0.5) - 2\cdot 1) = -0.76;$$

$$7b_1 = 2(y_1 sin60° + y_2 sin120° + y_3 sin180° + y_4 sin240° + y_5 sin300° + y_6 sin360°) =$$
$$= 2(0.92\cdot(\sqrt{3}/2) + 0.83\cdot(\sqrt{3}/2) + 2\cdot 0 + 2.32\cdot(-\sqrt{3}/2) - 1.11\cdot(-\sqrt{3}/2) - 2\cdot 0) \approx$$
$$\approx -2.252;$$
$$7b_2 = 2(y_1 sin120° + y_2 sin240° + y_3 sin360° + y_4 sin480° + y_5 sin600° + y_6 sin720°) =$$

$$= 2(-0.92\cdot(\sqrt{3}/2) + 0.83\cdot(-\sqrt{3}/2) + 2\cdot 0 + 2.32\cdot(\sqrt{3}/2) - 1.11\cdot(-\sqrt{3}/2) - 2\cdot 0) \approx$$
$$\approx 2.910$$

или

$7a_0 = -0.88$, $7a_1 = -21.250$, $7a_2 = -0.76$, $7b_1 = -2.252$, $7b_2 = 2.910$.

Таким образом, искомый многочлен будет иметь вид:

$G_2(x) = -0{,}12571 - 3.03571 cos\, x - 0.10857 sin\, x - 0.32171 cos 2x + 0.41571 sin 2x.$

5.2 *Погрешность и оценка погрешности*

Погрешность. Погрешность (остаточный член) интерполяции тригонометрическим многочленом (5.4) определяется формулой

$$R_n(x) = f(x) - G_n(x) \tag{5.8}$$

Оценка погрешности. Оценка погрешности интерполяции тригонометрическим многочленом определяется формулой

$$\left|R_n\right| \le \frac{C}{n^{r+1}} M \ , \tag{5.9}$$

где $M = max\left|f^{(r+1)}(x)\right|$, $C = C(T) = const.$

5.3 *Заключение*

Тригонометрическая интерполяция состоит в том, что в качестве интерполирующей функции принимается тригонометрический многочлен.

Для вычисления коэффициентов тригонометрического многочлена могут использоваться формулы приближенного интегрирования.

Погрешность тригонометрической интерполяции равномерно стремится к нулю при $N \to \infty$.

Чувствительность тригонометрического интерполяционного многочлена к погрешностям в задании значений в узлах с ростом числа узлов «почти» не возрастает.

5.4 ***Задачи***

1. Построить интерполяционный тригонометрический многочлен минимальной степени по заданным значениям $f(-\pi) = -1$, $f(-\pi/2) = 0$, $f(\pi/2) = 1$.

2. Построить интерполяционный тригонометрический многочлен на отрезке [0, 1] по заданным значениям $f(0)$, $f(x)$, $f(2x)$, $f(3x)$, $x = 0.25$.

3. Построить интерполяционный тригонометрический многочлен первой степени $G_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, удовлетворяющий условиям:

$$G_1(0) = 0,\ G_1(\pi/4) = 1,\ G_1(\pi/2) = 1.$$

4. Построить интерполяционный тригонометрический многочлен минимальной степени по заданным значениям $f(-\pi) = 0$, $f(-\pi/2) = 0$, $f(\pi/2) = 1$.

5. Показать, что для любых x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяющих условию $a \le x_0 < \ldots < x_n < a + \pi$, и для любых y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ существует единственный тригонометрический многочлен $T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx.$, такой, что $T(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

6. Построить интерполяционный тригонометрический многочлен Фурье второй степени для функции $f(x) = 2|x|$, $x \in [-\pi,\pi]$.

7. Построить интерполяционный тригонометрический многочлен Фурье третьей степени для функции $f(x) = x$, $x \in [-\pi,\pi]$.

8. Показать, что функция $F(x) = \prod_{k=1}^{4} \sin \frac{x - x_k}{2}$ есть тригонометрический многочлен вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ с действительными коэффициентами a_k, b_k для вещественных x_1, x_2, x_3, x_4.

9. Показать, что для любых x_0, x_1, …, x_{2n}, удовлетворяющих условию $a \le x_0 < \ldots < x_{2n} < a + 2\pi$, и для любых y_0, y_1, …, y_{2n} существует единственный тригонометрический многочлен

$T(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, удовлетворяющий условиям $T(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$.

10. Для функции заданной таблично построить интерполяционный многочлен Фурье третьей степени.

1.

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f(x_i)$	-2	-0.62	0.62	1

2.

x_i	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$
$f(x_i)$	0.88	1.12	2	2.85

3.

x_i	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$
$f(x_i)$	2.61	1	-1.12	-2.35

4.

x_i	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$f(x_i)$	0.9	0.78	1.02	1.9

5.

x_i	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$
$f(x_i)$	0.68	0.92	1.8	2.65

6.

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f(x_i)$	-1.7	-0.32	0.32	0.7

7.

x_i	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$
$f(x_i)$	1.51	-0.1	-0.02	-1.25

8.

x_i	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$f(x_i)$	0.8	0.68	0.92	1.8

9.

x_i	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$
$f(x_i)$	-0.65	-0.14	0.01	0.18

10.

x_i	0	0.2	0.4	0.6
$f(x_i)$	0.17	1.18	0.12	1.26

11.

x_i	0.1	0.3	0.5	0.7

$f(x_i)$	0.19	1.2	0.14	1.28

12.

x_i	1.1	1.2	1.3	1.5
$f(x_i)$	0.22	0.11	0.18	0.09

13.

x_i	2.1	2.2	2.4	2.7
$f(x_i)$	2.21	1.13	2.38	1.00

14.

x_i	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\pi/6$	π
$f(x_i)$	1.4	1.98	1.42	1.85

15.

x_i	0.12	0.15	0.16	0.18
$f(x_i)$	1.401	1.406	1.400	1.408

11. Построить интерполяционный тригонометрический многочлен второй степени $G_2(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$, удовлетворяющий условиям:

$$G_2(0) = 0,\ G_2(\pi/4) = 1,\ G_2(\pi/2) = 1,\ G_2(3\pi/4) = 1,\ G_2(\pi) = 1.$$

12. Составить алгоритм вычисления коэффициентов тригонометрического многочлена по формуле трапеций.

13. Составить алгоритм вычисления коэффициентов тригонометрического многочлена по методам прямоугольников и трапеций.

5.5 *Контрольные вопросы*

1. Сформулировать задачу интерполирования тригонометрическим многочленом.

2. Сформулировать теорему о существовании и единственности интерполяционного тригонометрического многочлена.

3. Выписать формулы для определения коэффициентов тригонометрического многочлена (5.4).

4. Выписать оценку погрешности иинтерполирования тригонометрическим многочленом.

5. Сформулировать теорему о существовании и единственности интерполяционного тригонометрического многочлена для нечетной интерполируемой функции.

6. Выписать систему линейных уравнения для построения тригонометрического многочлена третьей степени.

7. Каким образом определить вычислительную трудоемкость вычисления значения функции тригонометрическим многочленом ?

8. Сформулировать теорему о существовании и единственности интерполяционного тригонометрического многочлена для четной интерполируемой функции.

9. Выписать формулы для определения коэффициентов тригонометрического многочлена для интерполирования четной функции.

10. Выписать тригонометрический многочлен первой, второй и третьей степени.

11.Составить систему линейных уравнений для тригонометрической интерполяции.

12. Выписать систему функций для тригонометрической интерполяции.

13. Сформулировать условия ортогональности системы функций на заданном отрезке.

14. Выписать тригонометрический многочлен Фурье и формулы для нахождения его коэффициентов.

15. Выписать тригонометрический многочлен Фурье для четной и нечетной функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в пособии основные понятия и методы алгебраической и тригонометрической интерполяции и их алгоритмических основ позволят достаточно быстро научиться использовать интерполирование в конкретных областях с применением как существующих специализированных программных систем, так и разработкой программного обеспечения, учитывающего специфику решаемых задач, кроме этого, подготовят к изучению дальнейшего материала по приближенному представлению функций.

Методы, способы и схемы интерполирования составляют основу построения многих методов приближенного интегрирования (квадратурные и кубатурные формулы), формул численного дифференцирования, численного решения интегральных уравнений, построения численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных и др.

Поскольку учебное пособие ориентировано на студентов, специализирующихся в области информационных технологий, программного обеспечения и автоматизированных систем, то основной упор делался на алгоритмическую основу реализации вычислительной схемы построения интерполяционного многочлена, условиях применения и оценки погрешности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Березин, И.С.Методы вычислений.Т.1 [Текст]/И.С.Березин,Н.П. Жидков. - М.: Наука, 1966. – 632 с.
2 Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст]/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 632 с.
3 Ващенко, Г.В. Вычислительная математика. Сборник заданий [Текст]/ Г.В. Ващенко. – Красноярск: СибГТУ, 2007. – 56 с.
4 Вержбицкий, В.М. Численные методы [Текст]/ В. М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2005. – 866 с.
5 Лобанов, А.И. Лекции по вычислительной математике [Текст]/ А.И.Лобанов, И.В. Петров.–М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.–634 с.
6 Никольский, С.М. Курс математического анализа. Т.1 [Текст]/ С.М. Никольский. - М., Наука, 1990. - 528 с.
7 Калиткин, Н.Н. Численные методы [Текст]/ Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
8 Каханер, Д. Численные методы и программное обеспечение [Текст]/ Д. Каханер, К. Моулер, С.Неш. - М.: Мир, 1998. - 575 с.
9 Формалев, В.Ф. Численные методы [Текст]/ В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 487 с.
10 Численный анализ[Электронный ресурс]/ Режим доступа- http://www.szcc.msu.su/num_anal/url_tem/page_4u.htm

Приложение А

(справочное)

ПЕРЕЧЕНЬ КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ

Абсолютная огрешность	Тригонометрическая интерполяция
Интерполирование	Алгебраическая интерполяция
Остаточный член	Максимальная погрешность
Оценка погрешности	Узел
Сетка	Равномерная сетка
Неравномерная сетка	Непрерывность
Условие интерполяции	Функциональная зависимость
Дифференцирование	Тригонометрические соотношения
Условие сходимости	Сходимость
Полиномиальная функция	Линейные множества
Линейная зависимость	Линейная независимость
Производная произведения	Производная от сложной функции
Четная функция	Коэффициенты многочлена
Нечетная функция	Периодическая функция
Система элементов	Функция непрерывная
Система узлов	Система линейная
Интерполянт	Определитель

Приложение Б

(справочное)

ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖЕСТВА И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ

Множество E элементов x, y, z, … называется линейным, если в этом множестве определены операции сложения и умножения на числа (действительные или комплексные), не выводящие за пределы множества E *и* удовлетворяющие следующим условиям:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ – ассоциативность сложения.
2. $x + y = y + x$.
3. Для всякого x существует элемент $-x$, такой, что $x +(-x) = 0$.
4. При любом $x \in E$ существует элемент 0 такой, что $x + 0 = 0 + x$.
5. $\alpha(x + y) =\alpha y + \alpha x$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7. $\alpha (\beta)x = (\alpha\beta) x$
8. $1\cdot x = x$.

В линейном множестве вводится понятие линейной зависимости и линейной независимости элементов. Совокупность элементов x_1, x_2, …, x_n линейного множества E называется *линейно зависимым*, если найдется такая система чисел c_1, c_2, …, c_n, не равных одновременно нулю, что

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0.$$

Если таких чисел подобрать невозможно, то совокупность элементов x_i называется *линейно независимым*.

Приложение В

(справочное)

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОД НЫХ

1. Производная суммы двух функций равна сумме их производных

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x).$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной

$$[c\cdot f(x)]'=c\cdot f'(x).$$

3. Производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

4. Производная от дроби вычисляется по формуле

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

5. Производная от сложной функции. Если функцию $f(x)$ можно записать в виде $F(z)$, где $z = \varphi(x)$, то ее производная вычисляется следующим образом:

$$f'(x)=F'(z)z'=F'(z)\varphi'(x).$$

Пример. Найти производную от $y = cos(x^3)$.

Здесь $z = x^3$, $F(z) = cosz$.

$(cos(x^3))' =F'(z)(x^3)' = -3x^2 sin(z)$. Подставляем вместо z значение $z = x^3$, получаем $(cos(x^3))' =F'(z)(x^3)' = -3x^2\,sin(x^3)$.

6. Логарифмическое дифференцирование. Рассмотрим степенно–показательную функцию вида

$$y = g(x)^{u(x)},$$

где $g(x)$ и $u(x)$ – дифференцируемые функции.

Дифференцирование данной функции состоит из двух этапов.

1. Логарифмирование обеих частей функции:

$$ln\, y = ln\, g(x)^{u(x)} = u(x)\, ln\, g(x)\ .$$

2.Дифференцирование по x полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = u'(x)\cdot ln\,g(x) + \frac{u(x)\cdot g'(x)}{g(x)} \Rightarrow\ y' = y\cdot\left(u'(x)\cdot ln\,g(x) + \frac{u(x)\cdot g'(x)}{g(x)}\right) \Rightarrow$$

$$y' = u(x)\cdot g(x)^{u(x)-1}\cdot g'(x) + g(x)^{u(x)}\cdot u'(x)\cdot ln\,g(x)$$

Наиболее часто встречающиеся производные

Таблица 1

$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(r)}(x)$
C, C – *постоянная*	0	0
x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$n\, x^{n-1}$	$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\, x^{n-r}$
e^x	e^x	e^x
$ln\, x$	$\frac{1}{x}$	$(-1)^{r-1}(r-1)!\frac{1}{x^r}$
$a^x, a>0$	$a^x\, lna$	$a^x(\,lna)^r$
$x^\alpha,\ x>0$	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r+1)\, x^{\alpha-r}$
$sin\, x$	$cos\, x$	$sin(x + r\frac{\pi}{2})$
$cos\, x$	$-sin\, x$	$cos(x + r\frac{\pi}{2})$
$lg_a x$	$\frac{1}{xlna}$	$(-1)^{r-1}(r-1)!\frac{1}{x^r\, lna}$

Таблица 2

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$tg\ x$	$\frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$	$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$ctg\ x$	$-\frac{1}{sin^2 x} = -\ cosex^2 x$	$arcsin\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$sec\ x$	$\frac{sin\ x}{cos^2 x}$	$arccos\ x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$cosec\ x$	$-\frac{cos\ x}{sin^2 x}$	$arcctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Приложение Г

(справочное)

БИНОНОМ НЬЮТОНА. ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ И ИХ СВОЙСТВАХ

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-1}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + \ldots + nab^{n-1} + b^n,$$

или

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots + \\ + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Биномиальные коэффициенты

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},\ C_n^1 = n, C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ *непрерывна* на отрезке $[a, b]$, *дифференцируема* на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то *существует* хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что производная функции в этой точке равна нулю,т. е. $f'(\xi) = 0$.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ *непрерывны* на отрезке $[a, b]$, *дифференцируемы* на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$, то *найдется* такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой выполняется соотношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(o)}{g'(o)}.$$

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ *непрерывна* на отрезке $[a, b]$, *дифференцируема* на интервале (a, b), тогда *найдется* такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой выполняется соотношение

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Приложение Д

(справочное)

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно

$\rho = (\pi \cdot a°)/180°$, $a° = (\rho \cdot 180°)/\pi$, где ρ - радианная мера угла, a^{o} – градусная.

Формулы приведения

$sin(-\alpha) = - sin(\alpha)$, $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, $tg (-\alpha) = tg(\alpha)$, $ctg (-\alpha) = -ctg(\alpha)$.

$sin(\alpha + n\pi) = \pm sin(\alpha)$, $cos(\alpha + n\pi) = \pm cos(\alpha)$, $tg (\alpha + n\pi) = tg(\alpha)$,
где n – может быть любым целым числом, при этом верхний знак соответствует значению $n = 2k$, а нижний – значению $n = 2k +1$.

$sin(\alpha + n\frac{\pi}{2}) = \pm cos(\alpha)$, $cos(\alpha + n\frac{\pi}{2}) = \mp sin(\alpha)$, $tg (\alpha + n\frac{\pi}{2}) = - ctg(\alpha)$,

где n - может быть только нечетным числом, при этом верхний знак берется при $n = 4k +1$, верхний – при $n = 4k – 1$.

Формулы сложения

$$sin(\alpha \pm \beta) = sin(\alpha)\, cos(\beta) \pm cos(\alpha)sin(\beta),$$
$$cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) \mp sin(\alpha)sin(\beta),$$
$$tg(\alpha \pm \beta) = (tg(\alpha) \pm tg(\beta)) / (1 \mp tg(\alpha)tg(\beta)).$$

Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в суммы и разности

$$sin(m\alpha)\, cos(n\alpha) = 0.5[sin((m + n)\alpha) + sin((m - n)\alpha)],$$
$$sin(m\alpha)\, sin(n\alpha) = 0.5[cos((m - n)\alpha) - cos((m + n)\alpha)],$$
$$cos(m\alpha)\, cos(n\alpha) = 0.5[cos((m + n)\alpha) + cos((m - n)\alpha)].$$

Формулы преобразования сумм и разностей тригонометрических функций в произведения

$$sin(\alpha) \pm sin(\beta) = 2\, sin((\alpha \pm \beta)/2)cos((\alpha \mp \beta)/2),$$
$$cos(\alpha) + cos(\beta) = 2\, cos((\alpha + \beta)/2)cos(((\alpha - \beta)/2),$$
$$cos(\alpha) - cos(\beta) = -2\, sin\, ((\alpha + \beta)/2)\, sin(((\alpha - \beta)/2),$$
$$tg(\alpha) \pm tg(\beta) = sin(\alpha \pm \beta) / cos(\alpha)cos(\beta)$$

Формулы Эйлера

$$cos\, kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad sin\, kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

СОДЕРЖАНИЕ