

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

53
В 751

Е.В. ВОРОЖЦОВ

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие для магистрантов ФЛА

Новосибирск

1998

ВОРОЖЦОВ Е. В. Разностные методы решения задач механики сплошных сред: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 86 с.

ISBN 5-7782-0217-2

Учебное пособие разработано в соответствии с программой курса лекций, утвержденной кафедрой аэрогидродинамики НГТУ, и содержит изложение основных современных разностных методов решения задач механики сплошных сред.

Ил. 26, список лит. 20 наим.

Р е ц е н з е н т ы: *В. В. Ларичкин*, канд. техн. наук,
А. Д. Рычков, д-р техн. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре аэрогидродинамики

ISBN 5-7782-0217-2

© Новосибирский государственный
технический университет, 1998 г.

Предисловие

В настоящем учебном пособии представлен курс из 10 лекций, которые автор читает для магистрантов факультета летательных аппаратов НГТУ, начиная с 1994 г. Пособие рассчитано на лиц, впервые приступающих к изучению численных методов решения задач аэрогидродинамики. Однако для его успешного усвоения необходимо знание основ высшей математики и теоретической гидромеханики в объеме первых четырех лет учебы в НГТУ.

Более подробное изложение материалов первых девяти лекций можно найти в учебнике [1], изданном автором в США в 1996 г. Лекция 10 базируется, в основном, на книгах [2] и [3].

Автор ограничился изложением некоторых употребительных конечно-разностных методов решения задач динамики сжимаемых жидкостей. Узкие рамки данного курса (всего 10 лекций) не позволили включить в пособие такие известные численные методы, как метод конечных элементов, коллокационные методы, компактные разностные схемы, метод маркеров и ячеек для расчета течений несжимаемых жидкостей и ряд других методов. В этой связи автор включил в список литературы ряд известных монографий, которые описывают все эти методы и, таким образом, восполняют указанный пробел.

Е. В. Ворожцов

Апрель 1997 г.

1. Понятие разностной схемы

1.1. Сеточные функции

Рассмотрим линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.1)$$

где x – пространственная координата, t – время, $a = \text{const}$. В литературе это уравнение называют по-разному: уравнение переноса, уравнение конвекции, уравнение адвекции.

Предположим, что нам надо решить уравнение (1.1). Для обеспечения единственности его решения мы должны задать функцию $u(x, t)$ в некоторый момент $t = t_0$. Обычно выбирается значение $t_0 = 0$. Итак, предположим, что при $t = 0$ задана функция

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.2)$$

Уравнение вида (1.2) называется *начальным условием* для уравнения (1.1). А математическая задача (1.1), (1.2) называется *задачей с начальными данными*, или *задачей Коши*.

Теперь рассмотрим вопрос о построении *конечно-разностной схемы* для численного решения задачи Коши (1.1), (1.2). В случае аналитического решения уравнения в частных производных его решение находится в области *непрерывного* изменения переменных x и t . В отличие от аналитического случая, приближенное решение уравнения в частных производных по методу конечных разностей определяется только в некоторых *дискретных* точках плоскости (x, t) . Введем на оси x бесконечное множество точек

$$\{0, \pm h, \pm 2h, \dots\}, \quad (1.3)$$

где h – некоторая заданная положительная величина. Это множество точек называется *расчетной сеткой* на оси x , или *пространственной сеткой* (потому что x – пространственная переменная). Точки $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ из множества (1.3) называются *узлами* пространственной сетки. Величина h называется *шагом* пространственной сетки.

Предположим, что численное решение уравнения (1.1) должно быть определено в конечном временном промежутке $0 \leq t \leq T$, где T – заданная величина, $0 < T < \infty$. Аналогично множеству (1.3) мы можем определить сетку на оси t :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T. \quad (1.4)$$

Сетки (1.3), (1.4) называются *равномерными*, если выполняются следующие условия:

$$x_j = jh, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad t_n = n\tau, \quad n = 0, \dots, N. \quad (1.5)$$

Величина $\tau = T/N$ называется *временным шагом*.

Введем теперь равномерную сетку G_h в плоскости (x, t) как множество точек пересечения прямых линий

$$x = \pm jh, \quad j = 0, 1, \dots; \quad t = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Функция $u_j^n = u(x_j, t_n)$, которая определена в узлах сетки G_h , называется *сеточной функцией*.

Когда мы решаем уравнение (1.1) методом конечных разностей, то должны найти таблицу

$$\{u_j^n \equiv u(x_j, t_n), x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N\}$$

значений решения $u(x, t)$ задачи (1.1)-(1.2) в узлах сетки G_h .

1.2. Разделенные разности

Теперь мы займемся вопросом о том, как с помощью метода конечных разностей можно вычислить элементы u_j^n указанной таблицы. Для этого мы построим конечно-разностную схему, которая в определенном смысле является приближением, или аппроксимацией, дифференциального уравнения (1.1). Основной техникой построения конечно-разностных аппроксимаций уравнений в частных производных является применение разложений в *ряды Тейлора*. Сначала напомним формулу Тейлора для функции $u(x)$:

$$\begin{aligned}
u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\xi_1), \\
u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(\xi_2),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_3).$$

Здесь $\xi_1 \in [x, x+h]$, $\xi_2 \in [x-h, x]$, $\xi_3 \in [x, x+h]$. Из формул (1.6) получаем:

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{12}[u'''(\xi_1) + u'''(\xi_2)], \tag{1.7}$$

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(\xi_3), \tag{1.8}$$

$$\frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2}u''(\xi_4), \tag{1.9}$$

где $\xi_4 \in [x-h, x]$. Выражения в левых частях равенств (1.7)-(1.9) называются *разделенными разностями*. При этом (1.7) называют *центральной* разностью, (1.8) – разностью *вперед*, (1.9) – разностью *назад*. Еще (1.8) и (1.9) называют *односторонними* разностями.

Заменяя в формулах (1.6) x на t , h на τ , можно выписать аналогичные формулы для разложения функций $u(t+\tau)$, $u(t-\tau)$ по формуле Тейлора.

1.3 Разностная задача Коши

Простейший способ построения конечно-разностных схем для уравнений в частных производных состоит в замене частных производных соответствующими разделенными разностями.

Заменяем, например, производную $\partial u / \partial t$ разностью вперед:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau}.$$

Теперь заменим в (1.1) $\partial u / \partial x$ разностью назад:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h}.$$

В узле (x_j, t_n) мы, в частности, можем записать:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=x_j, t=t_n} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_j, t=t_n} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}. \quad (1.10)$$

Подставляя выражения (1.10) в уравнение (1.1) вместо частных производных, мы получим уравнение

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad (1.11)$$

$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (1.12)$$

Уравнение (1.11) называется *конечно-разностным уравнением*, или *конечно-разностной схемой*, или *разностной схемой*. Разностная задача (1.11)-(1.12) называется *разностной задачей с начальными данными*, или *разностной задачей Коши*.

Напомним, что нашей целью является получение таблицы значений u_j^n для $j = 0, \pm 1, \dots, n = 0, 1, \dots, N$ из уравнения (1.11). Начальное условие (1.2) позволяет нам найти дискретные значения u_j^0 в соответствии с (1.12). Для того чтобы вычислить значения u_j^n для $n = 1, 2, \dots, N$, перепишем разностное уравнение (1.11) в виде:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \kappa(u_j^n - u_{j-1}^n), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.13)$$

где $\kappa = a\tau/h$. В частности, при $n = 0$ имеем из (1.13) разностное уравнение

$$u_j^1 = u_j^0 - \kappa(u_j^0 - u_{j-1}^0). \quad (1.14)$$

Поскольку значения u_j^0, u_{j-1}^0 в правой части (1.14) известны, мы можем найти u_j^1 для любого узла j . Таким путем мы можем вычислить последовательно $u_j^2, u_j^3, \dots, u_j^N$ с помощью явной формулы (1.13). По завершении этого вычислительного процесса мы получаем искомую таблицу значений u_j^n и, тем самым, приближенное решение задачи Коши (1.1)-(1.2).

Вернемся к разностной схеме (1.11). Она содержит значения сеточной функции только на двух временных слоях: $t = t_n$ и $t = t_{n+1}$. Такие разностные схемы называются *двухслойными*.

Рассмотрим теперь случай, когда производные $\partial u/\partial t$ и $\partial u/\partial x$ в (1.1) заменяются центральными разностями. Тогда получаем разностную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (1.15)$$

Разностная схема (1.15) включает в себя значения сеточной функции u^m на трех временных слоях: $t = t_{n-1}$, $t = t_n$ и $t = t_{n+1}$. Поэтому такую схему еще называют *трехслойной*.

1.4. Разностная начально-краевая задача

Рассмотрим теперь пример *разностной начально-краевой задачи*. Легко видеть, что вдоль линий

$$dx/dt = a \tag{1.16}$$

уравнение (1.1) принимает вид:

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = 0, \tag{1.17}$$

где $\tilde{u}(t) = u(x(t), t)$, $x(t) = at + \text{const}$. Уравнение (1.17) означает, что $\tilde{u}(t) = \text{const}$ вдоль линии (1.16). Рассмотрим теперь линию

$$x = at + C, \tag{1.18}$$

получаемую в результате интегрирования уравнения (1.16). Теперь возьмем конкретную точку (x, t) и введем обозначение $x_0 = x - at$. Тогда $C = x_0$ в (1.18), и постоянная $\tilde{u}(x_0)$ является решением. Но эта постоянная известна при $t = 0$ из начального условия (1.2), так что мы можем написать:

$$\tilde{u}(x_0) = u_0(x_0).$$

Поскольку $x_0 = x - at$, $\tilde{u}(t) = u(x, t)$, мы получаем точное решение задачи (1.1)-(1.2):

$$u(x, t) = u_0(x - at). \tag{1.19}$$

Однопараметрическое семейство линий (1.18), где C - единственный параметр, называется *характеристиками* гиперболического уравнения (1.1).

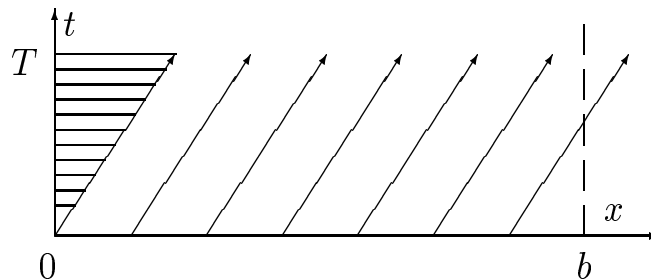


Рис. 1. Характеристики в задаче (1.1), (1.2)

Рассмотрим случай, когда $a > 0$ в (1.1). Пусть мы ищем решение уравнения (1.1) при заданном начальном условии на отрезке $0 \leq x \leq b$. Из рис. 1 следует, что в области, заштрихованной горизонтальными линиями, решение при $t > 0$ не определено. Чтобы обеспечить единственность решения в этой области, мы должны, очевидно, задать на левой границе $x = 0$ граничное условие

$$u(0, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.20)$$

где $g(t)$ – заданная функция.

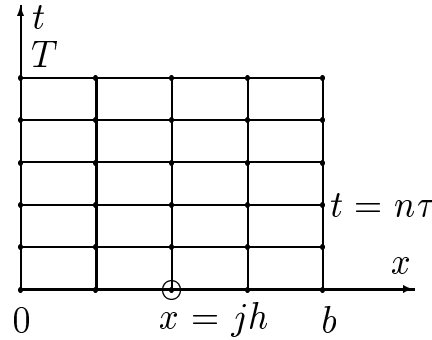


Рис. 2. Равномерная сетка G_h
в плоскости (x, t)

Теперь построим разностную аппроксимацию начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.20). Сначала введем по аналогии со случаем разностной задачи Коши равномерную сетку G_h в прямоугольной области

$$D = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T\}. \quad (1.21)$$

Тогда сетка G_h – следующее конечное множество точек (см. рис. 2):

$$G_h = \{(x_j, t_n) \mid x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, M; \quad t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N\},$$

где $h = b/M$, $\tau = T/N$. Используя разностную схему (1.11), мы можем теперь сформулировать следующую *разностную начально-краевую задачу*:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, M; \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \\ u_j^0 &= u_0(jh), \quad j = 1, \dots, M; \\ u_0^n &= g(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Формулы (1.22) позволяют вычислить приближенное решение начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.20) на конечном отрезке $0 \leq x \leq b$.

2. Аппроксимация и устойчивость

Как уже отмечалось в предыдущей лекции, конечно-разностные методы позволяют получать лишь приближенные решения задач Коши или начально-краевых задач для уравнений в частных производных. Точность численного решения может быть проверена путем сравнения с некоторым точным аналитическим решением. Однако при исследовании сложных задач математической физики часто бывает невозможно найти в замкнутом виде аналитические решения даже при некоторых упрощающих предположениях. Как в этих случаях ответить на вопрос: будет ли построенная разностная схема давать приближенное решение исходной задачи для уравнения в частных производных? Для этой цели в теории разностных схем было введено понятие *аппроксимации*.

Рассмотрим разностную задачу (1.11), (1.12), (1.20). Исследование аппроксимации всегда проводится с использованием некоторой *сеточной нормы*. В случае задачи (1.11), (1.12) удобно ввести норму в виде [4]

$$\|u\|_h = \max_{j,n} |u_j^n| + \max_j |u_0(x_j)|. \quad (2.1)$$

Предположим, что решение задачи (1.1), (1.2), (1.20) имеет ограниченные вторые производные в области D (1.21). Тогда в соответствии с формулой Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} \frac{u(x_j, t_n) - u(x_j - h, t_n)}{h} &= \frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_j - \xi, t_n)}{\partial x^2}, \\ \frac{u(x_j, t_n + \tau) - u(x_j, t_n)}{\tau} &= \frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, t_n + \eta)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ξ и η – некоторые величины, зависящие от j , n , τ и h и удовлетворяющие неравенствам $0 < \xi < h$, $0 < \eta < \tau$. С помощью формул (2.2) левую часть уравнения (1.11) можно переписать в виде:

$$L_h u = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_j, t_n} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, t_n + \eta)}{\partial t^2} - a \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_j - \xi, t_n)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.3)$$

Введем оператор L по формуле $Lu = \partial u / \partial t + a \partial u / \partial x$. Тогда из (2.3) имеем с учетом (2.1):

$$\|L_h u - Lu\|_h \leq \max_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \cdot \frac{\tau}{2} + \max_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \cdot \frac{h}{2}, \quad (2.4)$$

где $u(x, t)$ – решение задачи (1.1), (1.2), (1.20). Шаги h и τ входят в формулу (2.4) в виде степеней h^1 , τ^1 . В этом случае говорят, что разностная схема

(1.11) имеет первый порядок аппроксимации по τ и h на решении $u(x, t)$, обладающем ограниченными вторыми производными.

Мы видим из (2.4), что

$$\lim_{h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \|L_h u - Lu\| = 0. \quad (2.5)$$

Если свойство (2.5) имеет место, то, по определению, разностная задача *аппроксимирует* исходную "дифференциальную" задачу.

Если, кроме того,

$$\|L_h u - Lu\|_h \leq C_1 h^{k_1} + C_2 \tau^{k_2}, \quad (2.6)$$

где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ и постоянные C_1 и C_2 не зависят от τ и h , то, по определению, аппроксимация имеет порядок k_1 относительно h и порядок k_2 относительно τ . В этом случае кратко пишут, что разностная схема имеет *порядок аппроксимации* $O(h^{k_1}) + O(\tau^{k_2})$.

Выше мы уже фактически описали, как можно на практике исследовать аппроксимацию конкретной разностной схемы. Для этого надо выполнить следующую последовательность операций:

1. Задать точку (x^*, t^*) , относительно которой будут выполняться разложения в ряды Тейлора. В примере со схемой (1.11) это была точка $\{x^* = x_j, t^* = t_n\}$.

2. Осуществить в разностной схеме разложения всех входящих в нее величин в ряды Тейлора относительно точки (x^*, t^*) . Пусть в результате получится некоторое уравнение вида

$$L_1 u = 0, \quad (2.7)$$

где L_1 – некоторый дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят от τ и h .

3. Записать исходное уравнение в частных производных в виде $Lu = 0$.

4. Вычислить разность $Ru = L_1 u - Lu$. Если $\|Ru\|_h = O(h^{k_1}) + O(\tau^{k_2})$, где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, то это и означает, что аппроксимация имеет место, причем, с порядком $O(h^{k_1})$ по пространственной переменной и с порядком $O(\tau^{k_2})$ во времени.

2.1. Первое дифференциальное приближение

Рассмотрим теперь кратко понятие *первого дифференциального приближения* разностной схемы. Вернемся к уравнению (2.7). Это есть некоторое уравнение в частных производных, порядок которого выше порядка исходно-

го дифференциального уравнения в частных производных. Например, в случае схемы (1.11) мы получаем с помощью разложений Тейлора до членов $O(h^2)$ и $O(\tau^2)$ включительно (см. также (2.3)), что

$$L_1 u = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(h^2) + O(\tau^2) = 0. \quad (2.8)$$

Считая, что коэффициенты при h^2 и τ^2 в (2.8) ограничены, мы пренебрежем величинами порядка малости $O(h^2)$ и $O(\tau^2)$. Теперь перепишем полученное таким образом из (2.8) дифференциальное уравнение в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Это уравнение, как видим, включает в себя *вторую производную по t* . В этой связи Ю. И. Шокин и Н. Н. Яненко в своей книге [5] дали дифференциальному приближению (2.9) наименование "Г-форма первого дифференциального приближения". Буква Γ здесь есть первая буква слова *Гиперболический*, поскольку, как легко видеть, (2.9) – уравнение гиперболического типа.

Если аккуратно вписать в (2.8) явный вид членов второго порядка малости по τ и h , то можно получить так называемое *второе дифференциальное приближение* разностной схемы. Аналогичным образом можно получить *третье* и т. д. дифференциальные приближения.

Первое дифференциальное приближение (п. д. п.) содержит в себе главный, или ведущий член аппроксимационной погрешности. Поэтому в теории дифференциальных приближений разностных схем [5] основное внимание сосредоточено на изучении п. д. п. В западной литературе метод дифференциального приближения имеет наименование "the method of modified equation", то есть п. д. п. = modified equation.

Наряду с Г-формой п. д. п. можно ввести понятие П-формы п. д. п., или *параболической* формы п. д. п. Эта форма п. д. п. более удобна при изучении свойств разностной схемы. Покажем, как ее можно получить, исходя из Г-формы п. д. п. Для этого возьмем, в качестве примера, Г-форму п. д. п. (2.9). Выразим производную u_{tt} через производные по x с помощью исходного уравнения (1.1). Из (1.1) имеем:

$$u_t = -au_x. \quad (2.10)$$

Продифференцируем обе части (2.10) по t :

$$u_{tt} = -au_{xt} = -au_{tx} = -a(-au_x)_x = a^2 u_{xx}.$$

Уравнения $u_{tt} = -au_{xt}$, $u_{tt} = a^2u_{xx}$ называются *дифференциальными следствиями* уравнения в частных производных. Заменяя в (2.9) производную u_{tt} с помощью дифференциального следствия по формуле $u_{tt} = a^2u_{xx}$, получим из (2.9) *П-форму п. д. п.*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h}{2} a (1 - \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.11)$$

где $\kappa = a\tau/h$. Введем обозначение

$$\nu = a \frac{h}{2} (1 - \kappa) \quad (2.12)$$

и перепишем уравнение (2.11) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.13)$$

Нетрудно доказать, что коэффициент численной диффузии ν в (2.13) должен быть положительным для обеспечения ограниченности решения разностной задачи Коши (1.11), (1.12). Для этого, при произвольной функции $u_0(x) = u(x, 0)$, можно применить метод разделения переменных. А можно это сделать и несколько иначе. Введем новые переменные $X = x - at$, $t' = t$. Пусть $\tilde{u}(X, t') = u(x, t)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'} - a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X}. \quad (2.14)$$

Подставляя выражения (2.14) в п. д. п. (2.13), мы получаем *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2}. \quad (2.15)$$

Точное решение задачи Коши (2.15), (1.2) известно, оно выражается интегралом Пуассона:

$$\tilde{u}(X, t') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu t'}} \exp\left(-\frac{(X - \xi)^2}{4\nu t'}\right) u_0(\xi) d\xi.$$

Поэтому

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \exp\left(-\frac{(x - at - \xi)^2}{4\nu t}\right) u_0(\xi) d\xi. \quad (2.16)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} e^{-\frac{(x-at-\xi)^2}{4\nu t}} = +\infty \quad (2.17)$$

при фиксированных x и $t > 0$ и отрицательных ν . Если убывание функции $u_0(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ не очень быстрое, так что

$$e^{-\frac{(x-at-\xi)^2}{4\nu t}} u_0(\xi) \geq C > 0 \quad \forall \xi,$$

то, очевидно, решение $u(x, t)$ будет неограниченным при $\nu < 0$.

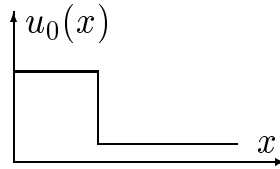


Рис. 3. График функции $u_0(x)$ в (1.2) для задачи о распространении ступеньки

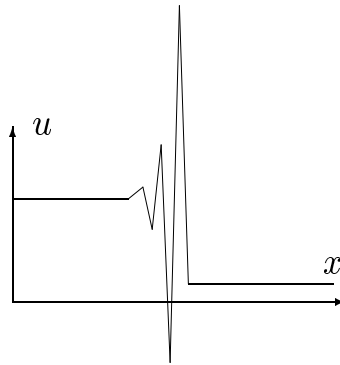


Рис. 4. $\kappa = 1.02$

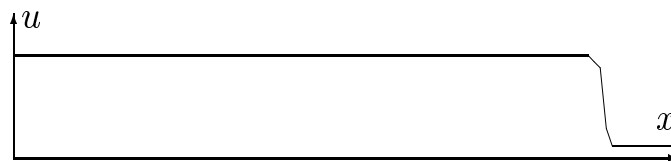


Рис. 5. $\kappa = 0.995$

Посмотрим, что в действительности произойдет с разностным решением, если взять $\nu < 0$. Вернемся к формуле (2.12). Из нее следует, что $\kappa > 1$ при $\nu < 0$. Возьмем в (1.2) начальную функцию $u_0(x)$ вида "ступеньки" (см. рис. 3). При $a > 0$ ступенька в решении задачи (1.1), (1.2) должна распространяться в положительном направлении оси x без изменения формы. Возьмем для определенности $\kappa = 1.02$. Через 20-30 шагов по t относительная ошибка

разностного решения превысит 300 % (см. рис. 4). Амплитуда численного решения быстро растет с ростом t , и происходит авост по переполнению. Такой режим счета называется *неустойчивым*. Возьмем теперь значение $\kappa = 0.995$. Тогда можно по схеме (1.11) считать сколь угодно большое число шагов по t (см. рис. 5). Таким образом, в этом случае счет по схеме (1.11) *устойчив*. Условие устойчивости схемы (1.11)

$$0 \leq \kappa \leq 1 \quad (2.18)$$

называется *условием устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви*.

Как можно исследовать устойчивость разностной схемы? В настоящее время известно порядка 10 различных способов исследования устойчивости разностных схем [6]. Один из них, основанный на п. д. п., мы уже, по существу, рассмотрели выше.

Наиболее распространенным является способ исследования устойчивости разностных схем по *методу Фурье*. Рассмотрим несколько подробнее этот метод.

2.2. Устойчивость в норме пространства L_2 и метод Фурье

Пусть разностная схема

$$\mathbf{u}^{n+1} = S\mathbf{u}^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.19)$$

аппроксимирует некоторую систему уравнений в частных производных, зависящих от m искомым функций $u^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, u^{(m)}(\mathbf{x})$, $m \geq 1$, \mathbf{x} – радиус-вектор точки в L -мерном евклидовом пространстве R_L , $L \geq 1$, переменных x_1, \dots, x_L , то есть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_L)$. Введем множество функций $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \{v^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, v^{(m)}(\mathbf{x})\}$, которые достаточно быстро убывают при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, так что величина

$$\|\mathbf{v}\| = \left(\int_{R_L} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \quad (2.20)$$

конечна. Здесь

$$|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 = \sum_{j=1}^m |v^{(j)}(\mathbf{x})|^2, \quad d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_L.$$

Величина (2.20) называется *квадратичной нормой*. В дальнейшем можем, таким образом, рассматривать пространство L_2 функций $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Прямое и обратное преобразование Фурье даются формулами

$$F_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) = (2\pi)^{-L/2} \int_{R_L} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-L/2} \int_{R_L} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} F_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) d\mathbf{k}, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{k}\mathbf{x} = k_1x_1 + \dots + k_Lx_L$. Предположим теперь, что функция $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ такова, что она удовлетворяет равенству Парсеваля

$$\int_{R_L(\mathbf{x})} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{R_L(\mathbf{k})} |\mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v})|^2 d\mathbf{k}. \quad (2.22)$$

Это равенство означает, что преобразование Фурье *сохраняет норму*. Вернемся к нашей разностной схеме (2.19). Подставим в нее решение вида:

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) = \lambda^n \mathbf{U}_0 \exp\{i(k_1x_1 + \dots + k_Lx_L)\},$$

где k_1, \dots, k_L – вещественные волновые числа, \mathbf{U}_0 – постоянный вектор, и λ – комплексное число. Тогда мы получим уравнение:

$$\lambda \mathbf{U}_0 \exp\{i(k_1x_1 + \dots + k_Lx_L)\} = G \mathbf{U}_0 \exp\{i(k_1x_1 + \dots + k_Lx_L)\}. \quad (2.23)$$

Разделив обе части (2.23) на $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$, получим уравнение

$$(G - \lambda I) \mathbf{U}_0 = 0. \quad (2.24)$$

Матрица G в (2.23), (2.24) называется *матрицей перехода разностной схемы*.

Из равенства Парсеваля следует, что $\|S\| = \|G\|$. Теперь определим устойчивость схемы (2.19) в норме пространства L_2 .

Определение 2.1. Схема (2.19) называется *устойчивой*, если при любых начальных данных $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ выполняется оценка

$$\|\mathbf{u}^n\| \leq M \|\mathbf{u}^0\|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где M – постоянная, не зависящая от τ , \mathbf{h} и n . Поскольку оператор S предполагается не зависящим от n , то устойчивость эквивалентна равномерной ограниченности степеней оператора S :

$$\|S^n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Это условие эквивалентно условию

$$\|G^n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Для того чтобы система (2.24) имела нетривиальное решение \mathbf{U}_0 , то есть $|\mathbf{U}_0| \neq 0$, необходимо условие:

$$\det(G - \lambda I) = 0, \quad (2.27)$$

где I – единичная матрица. Уравнение (2.27) называется *характеристическим уравнением* разностной схемы. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – корни уравнения (2.27); они являются собственными значениями матрицы перехода G . Пусть

$$R = \max_{1 \leq l \leq m} |\lambda_l(G)|, \quad (2.28)$$

где $\lambda_l(G)$ – l -е собственное значение матрицы G , $1 \leq l \leq m$. Величина (2.28) называется *спектральным радиусом* матрицы G . В общем случае

$$R^n \leq \|G^n\| \leq \|G\|^n. \quad (2.29)$$

С учетом (2.26) получаем из (2.29) следующее *необходимое* условие устойчивости:

$$R^n \leq M \quad \forall \mathbf{k}. \quad (2.30)$$

Отсюда

$$R \leq M^{1/n}, \quad 0 < n \leq T/\tau.$$

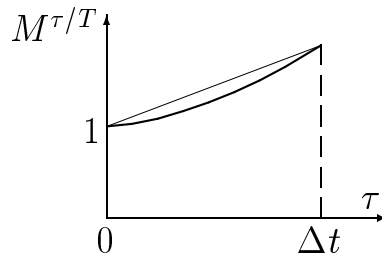


Рис. 6. Прямая $y = 1 + C_2\tau$ и кривая $y = M^{\tau/T}$

Существует некоторое значение $\Delta t > 0$, такое, что при $0 < \tau < \Delta t$ величина $M^{\tau/T}$ ограничена линейным выражением вида $1 + C_2\tau$ (см. рис. 6). Так что $R \leq 1 + C_2\tau$ для $0 < \tau < \Delta t$. По определению спектрального радиуса получаем условие

$$|\lambda_i| \leq 1 + O(\tau) \quad \text{для } 0 < t < \Delta t, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \forall \mathbf{k} \in R_L(\mathbf{k}), \quad (2.31)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – собственные значения матрицы G . Условие (2.31) называется *необходимым условием устойчивости фон Неймана*.

Известно, что $\|G\| = R$ для нормальных матриц G . Матрица G называется *нормальной*, если

$$G^*G = GG^*,$$

где G^* – комплексно-сопряженная и транспонированная к G матрица. Пусть, для определенности, $G = \|a_{jk} + ib_{jk}\|_1^m$, где a_{jk}, b_{jk} – вещественные числа,

$i = \sqrt{-1}$. Тогда $G^* = \| a_{kj} - ib_{kj} \|_1^m$. Так что при выполнении (2.31) для нормальных матриц G имеем оценку

$$\| G^n \| = \| G \|^n = R^n \leq (1 + C_2\tau)^{\frac{T}{\tau}} \leq e^{C_2T}.$$

В соответствии с определением устойчивости (2.26) приходим, таким образом, к выводу, что для нормальных матриц перехода условие устойчивости (2.31) является не только необходимым, но и *достаточным*.

Пример. Рассмотрим схему (1.11). Подставим в нее решение вида $u_j^n = \lambda^n e^{ijk_1h}$. Получаем характеристическое уравнение вида:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{a}{h}(1 - e^{-ik_1h}) = 0. \quad (2.32)$$

Пусть $\xi = k_1h$, $\kappa = a\tau/h$. Тогда из (2.32) легко найти, что

$$\begin{aligned} G = \lambda &= 1 - \kappa(1 - e^{-i\xi}) = 1 - \kappa(1 - \cos \xi + i \sin \xi) \\ &= 1 - \kappa \cdot 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} - \kappa i \sin \xi. \\ |\lambda|^2 &= 1 - 4\kappa \sin^2 \frac{\xi}{2} + 4\kappa^2 \sin^4 \frac{\xi}{2} + \kappa^2 \sin^2 \xi \leq 1. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства получаем, что

$$4\kappa(\kappa - 1) \sin^2 \frac{\xi}{2} \leq 0,$$

откуда выводим известное условие устойчивости схемы (1.11):

$$0 \leq \kappa \leq 1. \quad (2.33)$$

Так как (1.11) – скалярное двухслойное разностное уравнение, то для него, очевидно, $G^*G = GG^*$. Поэтому в случаях скалярных *двухслойных* разностных схем необходимое условие устойчивости является также и достаточным. Таким образом, неравенства (2.33) дают необходимое и достаточное условие устойчивости разностной задачи (1.11), (1.12).

3. Исследование устойчивости нелинейных разностных схем

3.1. Прием “замораживания” коэффициентов

подавляющее большинство прикладных задач математической физики описывается нелинейными уравнениями в частных производных или интег-

родифференциальными уравнениями. Нелинейность существенно усложняет характер развития вычислительной неустойчивости. Поэтому для исследования устойчивости нелинейных разностных схем нужны соответствующие методы.

Ниже мы рассмотрим два метода исследования устойчивости нелинейных разностных схем. Первый из них основан на гипотезе о том, что неустойчивость начинается как малое локальное возмущение [7]. Поэтому в качестве начального приближения при исследовании нелинейных разностных схем можно исследовать устойчивость *линеаризованных* разностных уравнений по методу Фурье.

Рассмотрим процедуру линеаризации разностных уравнений на примере конечно-разностной аппроксимации гиперболической системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

где \mathbf{u} – вектор-функция зависимых переменных, $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ – заданный вектор. Предположим, что система (3.1) аппроксимируется нелинейной разностной схемой вида:

$$\mathbf{u}^{n+1} = S(\mathbf{u}^n, T_0 \mathbf{u}^n, T_{\pm 1} \mathbf{u}^n, h, \tau), \quad (3.2)$$

где T_0 и $T_{\pm 1}$ – операторы сдвига, по определению,

$$\begin{aligned} T_0 \mathbf{u}(x, t_n) &= \mathbf{u}(x, t_n + \tau); & T_1 \mathbf{u}(x, t_n) &= \mathbf{u}(x + h, t_n); \\ T_{-1} \mathbf{u}(x, t_n) &= \mathbf{u}(x - h, t_n); \\ T_{\pm 1}^m \mathbf{u}(x, t_n) &= \mathbf{u}(x \pm mh, t_n), & m &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Теперь при исследовании устойчивости разностной схемы в точке (x_i, t_n) предположим, что

$$\mathbf{u}_j^n = \bar{u}_i + \delta \mathbf{u}_j^n, \quad (3.4)$$

где величина \bar{u}_i представляет собой, вообще говоря, точное значение решения при $x = x_i$, $t = t_n$; на практике обычно берут в качестве \bar{u}_i разностное решение на n -м слое в точке (x_i, t_n) , то есть полагают $\bar{u}_i = \mathbf{u}_i^n$. Индекс j в (3.4) принимает все те значения, которые имеются в исходной нелинейной разностной схеме (3.2). Пусть, например, в (3.2) есть разделенная разность вида:

$$\Delta_i \mathbf{F}^n = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1}^n)}{2h}. \quad (3.5)$$

Тогда линеаризуем разность (3.5) следующим образом:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_j^n) \approx \mathbf{F}(\bar{u}_i) + A(\bar{u}_i) \cdot \delta \mathbf{u}_j^n. \quad (3.6)$$

Дальнейшие члены разложения в ряд Тейлора мы отбросили в формуле (3.6), предполагая, что величины $|\delta \mathbf{u}_j^n|$ малы. Далее,

$$A(\bar{u}_i) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \quad (3.7)$$

то есть $A(\bar{u}_i)$ – матрица Якоби. Пусть

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \{F_1(\mathbf{u}), \dots, F_m(\mathbf{u})\}, \quad \mathbf{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(m)}), \quad A(\bar{u}_i) = \|a_{ij}\|_1^m.$$

Тогда, по определению,

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i(\mathbf{u})}{\partial u^{(j)}}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (3.8)$$

Вид элементов (3.8) для случая одномерной системы уравнений Эйлера невязкой сжимаемой жидкости, которая имеет вид (3.1), дан, например, в [5, 8].

Подставляя приближенные представления вида (3.6) в (3.5), получим следующий линейный разностный оператор:

$$\Delta_i \mathbf{F}^n = A(\bar{u}_i) \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_{i+1}^n - \delta \mathbf{u}_{i-1}^n}{2h}.$$

Проделав подобные операции линеаризации со всеми разностными операторами, входящими в схему (3.2), получим следующую *линейную* разностную схему:

$$H_0(\bar{u}_i, T_{\pm 1}, h, \tau) \delta \mathbf{u}^{n+1} = H_1(\bar{u}_i, T_{\pm 1}, h, \tau) \delta \mathbf{u}^n, \quad (3.9)$$

где H_0 и H_1 – некоторые матричные разностные операторы. Предположим, что оператор H_0 обратим в узле x_i . Тогда мы можем разрешить уравнение (3.9) относительно $\delta \mathbf{u}^{n+1}$:

$$\delta \mathbf{u}^{n+1} = \bar{S}(\bar{u}_i, T_{\pm 1}, h, \tau) \delta \mathbf{u}^n, \quad (3.10)$$

где

$$\bar{S}(\bar{u}_i, T_{\pm 1}, h, \tau) = H_0^{-1} \cdot H_1.$$

Теперь “заморозим” коэффициенты оператора шага \bar{S} , считая их постоянными. Тогда приходим к случаю разностной схемы с постоянными коэффициентами, который мы рассматривали в предыдущей лекции.

Предположим, что в результате исследования устойчивости схемы (3.10) по методу Фурье мы получили локальный критерий устойчивости вида:

$$\tau \leq \frac{h}{\varphi(\bar{u}_i)}, \quad (3.11)$$

где $\varphi(\bar{u}_i)$ – некоторая известная функция. В случае уравнений Эйлера, например, функция φ может иметь вид:

$$\varphi(\bar{u}_i) = |u_i| + c_i, \quad (3.12)$$

где u_i – скорость газа в узле x_i , c_i – местная скорость звука в узле x_i . Так как условие устойчивости (3.11) является лишь необходимым условием устойчивости, то на практике используют условие устойчивости вида:

$$\tau \leq \frac{\Theta h}{\varphi(\bar{u}_i)}, \quad (3.13)$$

где коэффициент Θ называется “множителем надежности”; $0 < \Theta \leq 1$, например, $\Theta = 0.95$.

Поскольку условие (3.13) должно выполняться в каждом узле x_i , то величину шага τ_{n+1} , необходимую для получения решения \mathbf{u}^{n+1} по схеме (3.2), задают в виде:

$$\tau_{n+1} = \min_i \frac{\Theta h}{\varphi(\mathbf{u}_i^n)}. \quad (3.14)$$

Таким образом, значение τ_{n+1} временного шага, вообще говоря, меняется при переходе с одного временного слоя на следующий слой.

Хотя формула (3.14) получена из линейного анализа устойчивости, надо отметить, что и на практике она неплохо работает. Дополнительную гибкость этой формуле придает наличие множителя Θ , конкретное значение которого подбирается эмпирическим путем.

3.2. Использование дискретных аналогов норм пространств C и L_p

Выше при анализе устойчивости мы применяли только норму пространства L_2 . Напомним вид этой нормы в случае одной пространственной переменной x :

$$\| u(x, t) \|_{L_2} = \left(\int_a^b |u(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $[a, b]$ – промежуток на оси x , в котором ищется решение задачи. Однако эта норма не реагирует на локальные выбросы решения на множествах меры ноль, то есть в отдельных точках или вдоль линий на плоскости.

Известна еще другая норма – это норма пространства C . В одномерном случае она имеет вид

$$\| u(x, t) \|_C = \max_{x \in [a, b]} |u(x, t)|.$$

Если теперь вместо $u(x, t)$ возьмем сеточную функцию u_j^n , то дискретный аналог нормы пространства C имеет вид

$$\| u^n \|_C = \max_j |u_j^n|.$$

В [7] отмечалось, что использование нормы пространства C является очень привлекательным для вычислительных работ. Эта норма позволяет учитывать локальные выбросы решения и, таким образом, она должна быть предпочтительной при исследовании тех задач, где важно обеспечить хорошее качество численного решения в малых локальных подобластях. Однако оказалось, что в норме пространства C любая устойчивая схема в гиперболическом случае должна иметь *нечетный* порядок аппроксимации.

Поскольку схемы нечетных порядков аппроксимации, особенно первого и третьего, широко применяются в прикладных расчетах, то имеет смысл изложить методику [9], которая позволяет проводить анализ устойчивости как линейных, так и нелинейных разностных схем в норме пространства C .

Пусть у нас разностное решение зависит от L пространственных переменных x_1, \dots, x_L ($L \geq 1$) и времени t . Рассмотрим разностную задачу Коши

$$\mathbf{u}^{n+1} = S\mathbf{u}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.15)$$

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (3.16)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_L)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ – заданная вектор-функция.

Определение 3.1. Назовем сеточной нормой пространства C норму

$$\| u^n \|_C = \max_J |u_J^n|, \quad (3.17)$$

где J – мультииндекс, $J = (j_1, \dots, j_L)$.

Определение 3.2. Будем говорить, что разностная схема устойчива в норме пространства C , если выполняется условие:

$$\| u^{n+1} \|_C \leq (1 + K\tau) \| u^n \|_C, \quad (3.18)$$

где τ – временной шаг, а постоянная K не зависит от τ и от шагов сетки h_1, \dots, h_L по пространственным переменным.

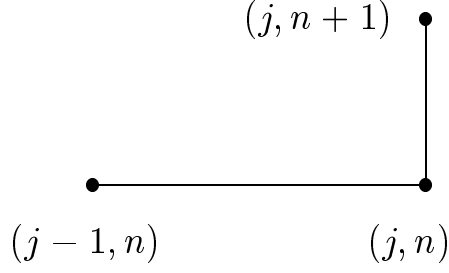


Рис. 7. Шаблон схемы (1.11)

Обычно разностная схема использует некоторое конечное множество точек сетки. Это множество называется *шаблоном* разностной схемы. Например, схема (1.11) имеет шаблон, показанный на рис. 7. Обозначим через \tilde{u} сеточную функцию, определенную на шаблоне разностной схемы и имеющую вид:

$$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{k_0}),$$

где

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{\|u^n\|} u_{J_0 + I_k}, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad (3.19)$$

и k_0 – число точек шаблона разностной схемы, I_k – мультииндекс, соответствующий узловой точке, в которой вычисляется вектор разностного решения по схеме (3.15), $J_0 + I_k$ – мультииндекс, соответствующий k -й точке шаблона. Тогда условие устойчивости (3.18) можно переписать в виде:

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} |S(\|u^n\| \tilde{u})| \leq (1 + K\tau) \|u^n\|, \quad (3.20)$$

где

$$\|\tilde{u}\| = \max_k |\tilde{u}_k|.$$

Очевидно, в линейном случае мы можем поделить обе части неравенства (3.20) на $\|u^n\|$:

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} |S(\tilde{u})| \leq (1 + K\tau). \quad (3.21)$$

Таким образом, задача исследования устойчивости разностной схемы сводится к определению условного максимума, стоящего в левой части неравенства (3.20). В случае разностных схем с небольшой размерностью шаблона k_0 эта задача может быть решена с помощью известных численных алгоритмов нахождения условного экстремума, а для простых схем с $k_0 = 2, 3, 4$ удается получить даже аналитические решения.

Пример. Рассмотрим одномерное уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.22)$$

где $a = \text{const.}$, $\nu = \text{const} > 0$. Аппроксимируем (3.22) следующей разностной схемой [8]:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \quad (3.23)$$

Перепишем уравнение (3.23) в виде:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}\kappa_1(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \kappa_2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad (3.24)$$

где

$$\kappa_1 = a\tau/h, \quad \kappa_2 = \nu\tau/(h^2). \quad (3.25)$$

Схема (3.24) имеет порядок аппроксимации $O(\tau) + O(h^2)$. Оператор S в условии (3.21) имеет вид:

$$S\tilde{u} = \alpha\tilde{u}_1 + \beta\tilde{u}_2 + \gamma\tilde{u}_3, \quad (3.26)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\kappa_1 + \kappa_2, \quad \beta = 1 - 2\kappa_2, \quad \gamma = \kappa_2 - \frac{1}{2}\kappa_1.$$

Неравенство (3.21) должно выполняться при конечных неотрицательных значениях постоянной K . Если взять значение $K = 0$, то при других K , именно, при $K > 0$, неравенство (3.20) будет заведомо выполнено. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что $K = 0$ в (3.20).

Итак, нам нужно проверить выполнение неравенства

$$\max |S\tilde{u}| \leq 1, \quad -1 \leq \tilde{u}_k \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.27)$$

при каждом из следующих условий:

$$|\tilde{u}_1| = 1. \quad (3.28)$$

$$|\tilde{u}_2| = 1. \quad (3.29)$$

$$|\tilde{u}_3| = 1. \quad (3.30)$$

Рассмотрим условный максимум (3.27), (3.28). Подставим (3.28) в (3.27) и получим, что нам нужно найти максимум модуля линейной функции

$$(S\tilde{u}) = \pm\left(\frac{1}{2}\kappa_1 + \kappa_2\right) + \beta\tilde{u}_2 + \gamma\tilde{u}_3. \quad (3.31)$$

Из (3.21) при $K = 0$ получаем, что схема устойчива, если выполняются неравенства

$$-1 \leq \max_{-1 \leq \tilde{u}_2, \tilde{u}_3 \leq 1} \left[\pm\left(\frac{1}{2}\kappa_1 + \kappa_2\right) + \beta\tilde{u}_2 + \gamma\tilde{u}_3 \right] \leq 1.$$

Поскольку функция (3.31) линейная, она принимает экстремальные значения на границе области определения при $\tilde{u}_2 = \pm 1$, $\tilde{u}_3 = \pm 1$. Следовательно, для проверки условия (3.27), (3.28) нам надо перебрать все возможные сочетания граничных значений переменных $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$.

$$1. \tilde{u}_1 = 1, \tilde{u}_2 = 1, \tilde{u}_3 = 1.$$

Из (3.26) следует, что $S\tilde{u} = 1$.

$$2. \tilde{u}_1 = 1, \tilde{u}_2 = 1, \tilde{u}_3 = -1.$$

В этом случае

$$S\tilde{u} = 1 + \kappa_1 - 2\kappa_2,$$

и условие устойчивости имеет вид

$$-1 \leq 1 + \kappa_1 - 2\kappa_2 \leq 1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq 1 + \frac{1}{2}\kappa_1. \quad (3.32)$$

$$3. \tilde{u}_1 = -1, \tilde{u}_2 = 1, \tilde{u}_3 = 1.$$

Теперь

$$S\tilde{u} = 1 - \kappa_1 - 2\kappa_2,$$

и ограничения на κ_1, κ_2 имеют вид

$$-\frac{1}{2}\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq 1 - \frac{1}{2}\kappa_1. \quad (3.33)$$

$$4. \tilde{u}_1 = -1, \tilde{u}_2 = 1, \tilde{u}_3 = -1.$$

Ограничение на область значений параметров имеет вид:

$$0 \leq \kappa_2 \leq \frac{1}{2}. \quad (3.34)$$

Легко показать, что остальные сочетания граничных значений переменных $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ получаются заменой знаков на противоположные в рассмотренных четырех случаях и, следовательно, не дают дополнительных ограничений на

параметры κ_1 и κ_2 . Таким образом, область устойчивости схемы (3.23) в плоскости (κ_1, κ_2) ограничена прямыми (см. рис. 8):

$$\kappa_2 = \frac{1}{2}\kappa_1; \quad \kappa_2 = -\frac{1}{2}\kappa_1; \quad \kappa_2 = \frac{1}{2}. \quad (3.35)$$

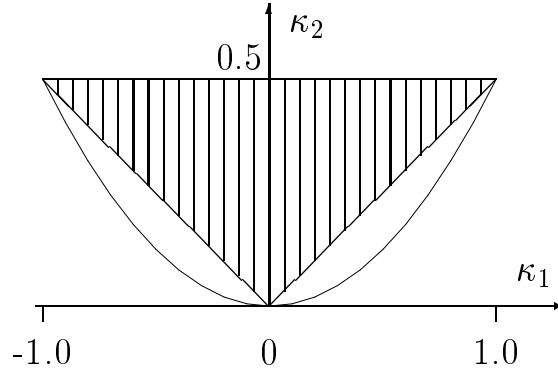


Рис. 8. Область устойчивости заштрихована

Заметим, что метод Фурье дает следующее условие устойчивости схемы (3.23):

$$\frac{1}{2}\kappa_1^2 \leq \kappa_2 \leq 0.5.$$

То есть область устойчивости в норме пространства L_2 получается несколько большей, чем в норме пространства C (см. рис. 8). Объяснение этому дается в [9].

Аналогично может быть исследована в норме пространства C устойчивость нелинейных разностных задач Коши, а также разностных начально-краевых задач. Заметим, что получаемые при этом условия устойчивости являются не только необходимыми, но и достаточными, поскольку проверяются непосредственно неравенства (3.20) или (3.21), то есть определения устойчивости.

Остановимся вкратце на определении устойчивости в норме пространств L_p , $1 \leq p < \infty$. Введем пространство сеточных функций $L_{p,h}$, элементами которого являются все те сеточные функции (u_0^n, \dots, u_M^n) , для которых является конечной сумма

$$\sum_{i=0}^M |u_i^n|^p h, \quad 1 \leq p < \infty.$$

После введения нормы

$$\| \mathbf{u}^n \|_{L_{p,h}} = \left\{ \sum_{i=0}^M |u_i^n|^p h \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (3.36)$$

$L_{p,h}$ становится линейным нормированным пространством.

Определим устойчивость разностной схемы (3.15) следующим образом:

$$\| u^{n+1} \|_{L_{p,h}} \leq \| u^n \|_{L_{p,h}}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (3.37)$$

С учетом (3.15) можем переписать (3.37) в виде:

$$\| Su^n \|_{L_{p,h}} \leq \| u^n \|_{L_{p,h}}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (3.38)$$

Подставляя в (3.38) выражение (3.36), получаем неравенство:

$$\sum_{i=0}^M |Su_i^n|^p h \leq \sum_{i=0}^M |u_i^n|^p h. \quad (3.39)$$

Сделаем, по аналогии с (3.19), замену

$$\tilde{u}_j = h^{\frac{1}{p}} u_j^n / \| u^n \|_{L_{p,h}}, \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (3.40)$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\sum_{i=0}^M |\tilde{u}_i|^p = 1. \quad (3.41)$$

Из (3.40) имеем, что

$$u_j^n = h^{-\frac{1}{p}} \| u^n \|_{L_{p,h}} \tilde{u}_j.$$

Тогда неравенство (3.39) можно переписать с учетом (3.41) в виде:

$$\sum_{i=0}^M \left| \frac{1}{\| u^n \|_{L_{p,h}}} S(h^{-\frac{1}{p}} \tilde{u}_i) \right|^p h \leq 1. \quad (3.42)$$

Если оператор S линейный, то можем переписать (3.42) в виде:

$$\sum_{i=0}^M |S\tilde{u}_i|^p \leq 1, \quad -1 \leq \tilde{u}_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, M. \quad (3.43)$$

При $p = 2$, то есть в частном случае нормы пространства L_2 , из определения устойчивости (3.43) в случае скалярных двухслойных схем с постоянными коэффициентами получаются условия устойчивости, совпадающие с получаемыми по методу Фурье. Достоинство определения устойчивости (3.42) состоит в том, что оно может применяться и к нелинейным разностным начально-краевым задачам. Заметим, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \| \mathbf{u}^n \|_{L_{p,h}} = \| \mathbf{u}^n \|_C.$$

Теперь обсудим понятие *сходимости* разностного решения. Это свойство означает, что решение конечно-разностного уравнения сходится к решению уравнения в частных производных при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. Для исследования вопроса о сходимости обычно используются методы функционального анализа. Мы здесь не будем приводить соответствующее точное изложение доказательств, а ограничимся лишь формулировкой основного результата этих исследований.

Теорема эквивалентности Лакса [7]. Пусть задача с начальными данными для уравнения с частными производными поставлена корректно и пусть разностная задача с начальными данными аппроксимирует задачу с начальными данными для уравнения с частными производными. Тогда устойчивость решения разностной задачи с начальными данными необходима и достаточна для сходимости разностного решения к решению задачи с начальными данными для данного уравнения с частными производными.

3.3. Применение средств компьютерной алгебры

Исследование устойчивости сложных разностных схем по методу Фурье часто оказывается практически невозможным из-за громоздкости выкладок. Например, часто не удается вычислить коэффициенты характеристического уравнения разностной схемы [6]. Во всех этих случаях весьма полезным оказывается применение символьных преобразований на ЭВМ, или средств *компьютерной алгебры*. В настоящее время получили наибольшее распространение следующие системы компьютерной алгебры: (1) Maple V (Канада); (2) Mathematica 3.0 (США); (3) Reduce 3.4, 3.5, 3.6 (США).

В различных системах компьютерной алгебры реализованы различные способы обработки символьных выражений. Общим является то, что каждому символу, например, букве A , сопоставляется свой цифровой код. На персональных ЭВМ применяется таблица кодирования ASCII.

Рассмотрим процесс обработки алгебраических выражений на примере вычисления выражения $(X + A) * (X - A)$ в системе REDUCE [10]. Эта система написана на языке LISP. На вход системы подается последовательность символов в том виде, как она записана выше. Это обычная алгебраическая запись, к которой мы привыкли. В выражении используются так называемые *инфиксные операторы* $+$, $-$, $*$, то есть операторы, которые стоят между сво-

ими операндами. Оказывается, что удобнее работать с выражениями, содержащими только *префиксные* операторы, то есть операторы, которые стоят всегда перед своими операндами.

Поэтому на первом этапе наше выражение переводится в префиксную форму:

$$(TIMES(PLUS X A)(PLUS X (MINUS A)))$$

Полученное выражение передается алгебраическому процессору. В его задачу входит раскрытие скобок и приведение подобных членов. Раскрытие скобок можно осуществить, применив дважды свойство дистрибутивности умножения:

$$C * (A + B) = C * A + C * B; \quad (A + B) * C = A * C + B * C.$$

В LISP-обозначении это показывает, что списки

$$(TIMES C (PLUS A B)), \quad (TIMES (PLUS A B) C)$$

мы должны заменить на

$$(PLUS (TIMES C A) (TIMES C B)) \\ (PLUS (TIMES A C) (TIMES B C))$$

На языке LISP такие замены легко могут быть запрограммированы. Приведение подобных членов снова реализуется в LISP как обработка списков по некоторому правилу. В итоге умножения и приведения подобных ответ в REDUCE получается в привычной форме

$$(X + A) * (X - A) = X^2 - A^2$$

Подчеркнем, что пользователю системы REDUCE не нужно знать язык LISP. Многочисленные операторы и функции системы REDUCE удобны в пользовании, так как имеют запись, близкую к обычной записи формул или операций в математике.

Системы Maple и Mathematica реализованы на языке Си.

4. Явные и неявные схемы

4.1. Основные определения

Рассмотрим снова схему (1.11). Мы можем переписать уравнение (1.11) в виде (1.13). Значения u_j^n , u_{j-1}^n в правой части этого уравнения известны как

результат вычисления на предыдущем временном слое $t = t_n = n\tau$. Таким образом, уравнение (1.11) дает *явную* формулу для вычисления сеточных значений решения на следующем слое $t = t_{n+1} = (n + 1)\tau$. Такие схемы называются *явными* разностными схемами.

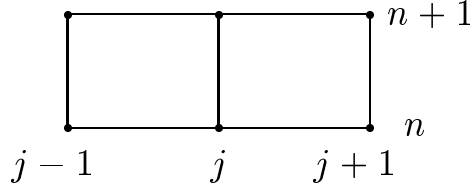


Рис. 9. Шаблон схемы (4.1)

Теперь рассмотрим следующую конечно-разностную схему для уравнения переноса (1.1):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} = 0, \quad j = 0, \dots, M; \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

Это разностное уравнение не может быть разрешено в явном виде в терминах известных значений u_j^n , $u_{j\pm 1}^n$, так как оно содержит не только неизвестное значение u_j^{n+1} , но и неизвестные величины u_{j+1}^{n+1} и u_{j-1}^{n+1} . Поэтому определение решения уравнения (4.1) является не таким легким делом, как в случае явных разностных схем. Разностные схемы, содержащие более чем одно значение сеточного решения на слое $n + 1$, называются *неявными* разностными схемами. Шаблон схемы (4.1) содержит шесть точек (см. рис. 9). Рассмотренная выше схема (4.1) называется схемой *Кранка–Николсона* [7, 8]. Можно показать, что п. д. п. этой схемы имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a}{12}(a^2\tau^2 + 2h^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, что схема (4.1) имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2) + O(h^2)$ в точке $(jh, n\tau)$.

Исследуем теперь устойчивость схемы (4.1) с помощью метода Фурье. Для этого подставим в (4.1) решение вида

$$u_j^n = \lambda^n e^{ijkh}, \quad i = \sqrt{-1},$$

Получаем характеристическое уравнение вида

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{a}{4h} [\lambda(e^{ikh} - e^{-ikh}) + (e^{ikh} - e^{-ikh})] = 0. \quad (4.3)$$

Используя формулу $e^{\pm iah} = \cos ah \pm i \sin ah$, преобразуем (4.3):

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{a}{4h}(2\lambda i \sin \xi + 2i \sin \xi) = 0, \quad (4.4)$$

где $\xi = kh$. Отсюда находим следующее выражение для множителя перехода λ :

$$\lambda = (1 - ib)/(1 + ib), \quad (4.5)$$

где $b = (\kappa/2) \sin \xi$, $\kappa = a\tau/h$. Нетрудно вычислить, что $|\lambda| = 1$ при любых значениях κ и ξ . Это означает, что разностная схема (4.1) остается устойчивой при любых значениях шагов сетки τ и h .

Разностные схемы, устойчивые при любых значениях сеточных параметров, называются *абсолютно устойчивыми* разностными схемами. Схема Кранка–Николсона – пример абсолютно устойчивой разностной схемы.

4.2. Метод прогонки

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти значения $u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, \dots, u_M^{n+1}$ разностного решения в узлах сетки на оси x . Для этого перепишем разностное уравнение (4.1) в виде

$$a_j u_{j-1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j+1}^{n+1} = f_j^n, \quad 0 < j < M, \quad (4.6)$$

где

$$a_j = -\kappa/4, \quad b_j = 1, \quad c_j = \kappa/4, \quad f_j = u_j^n - (\kappa/4)(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (4.7)$$

При $j = 0$ используем заданное граничное условие:

$$u_0^{n+1} = g(t_{n+1}). \quad (4.8)$$

На правом конце уравнение (1.1) при $a > 0$ не требует задания граничного условия. Однако для того, чтобы можно было получить единственное решение уравнения (4.1), необходимо задать граничное условие также на правом конце $j = M$. Такие граничные условия называются *дополнительными* граничными условиями, их обзор можно найти в [5]. Зададим при $j = M$ такое граничное условие:

$$u_{M-1}^{n+1} = u_M^{n+1}. \quad (4.9)$$

Это условие можно интерпретировать как аппроксимацию условия

$$(\partial u / \partial x)_{x=x_j} = 0.$$

Выпишем теперь полный набор уравнений (4.6), (4.8), (4.9) при $j = 0, j = 1, \dots, j = M$:

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = g(t_{n+1}); \\ a_1 u_0^{n+1} + b_1 u_1^{n+1} + c_1 u_2^{n+1} = f_1^n; \\ a_2 u_1^{n+1} + b_2 u_2^{n+1} + c_2 u_3^{n+1} = f_2^n; \\ \dots\dots\dots \\ a_{M-1} u_{M-2}^{n+1} + b_{M-1} u_{M-1}^{n+1} + c_{M-1} u_M^{n+1} = f_{M-1}^n; \\ u_{M-1}^{n+1} - u_M^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Пусть

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_M^{n+1} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} g(t_{n+1}) \\ f_1^n \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{M-1}^n \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{m-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

то есть A – матрица размерности $(M+1) \times (M+1)$. Тогда мы можем записать систему (4.10) в векторно-матричной форме:

$$A\mathbf{U} = \mathbf{b}, \quad (4.11)$$

где A – трехдиагональная система. Решим эту систему. Предположим, что значение u_j^{n+1} может быть выражено в виде

$$u_j^{n+1} = X_j u_{j+1}^{n+1} + Y_j, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (4.12)$$

Тогда левое граничное условие (4.8) реализуется следующим образом: положим в (4.12) $j = 0$, $X_0 = 0$, $Y_0 = g(t_{n+1})$. Подставляя выражение (4.12) в (4.6), получим:

$$a_j (X_{j-1} u_j^{n+1} + Y_{j-1}) + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j+1}^{n+1} = f_j^n.$$

Отсюда имеем:

$$u_j^{n+1} (a_j X_{j-1} + b_j) = -c_j u_{j+1}^{n+1} + (f_j^n - a_j Y_{j-1}).$$

Поделив обе части этого равенства на $(a_j X_{j-1} + b_j)$, получим равенство:

$$u_j^{n+1} = \frac{-c_j}{b_j + a_j X_{j-1}} u_{j+1}^{n+1} + \frac{f_j^n - a_j Y_{j-1}}{b_j + a_j X_{j-1}}. \quad (4.13)$$

Сравнивая (4.12) с (4.13), получаем, что обе эти формулы совпадут, если мы положим

$$X_j = \frac{-c_j}{b_j + a_j X_{j-1}}, \quad Y_j = \frac{f_j^n - a_j Y_{j-1}}{b_j + a_j X_{j-1}}. \quad (4.14)$$

Так как X_0 и Y_0 мы знаем, то по формулам (4.14) мы можем вычислить последовательно при $j = 1$ X_1 и Y_1 , затем при $j = 2$ X_2 и Y_2 и т.д., до $j = M - 1$ включительно.

Рассмотрим реализацию правого граничного условия (4.10) в методе прогонки. Выпишем уравнение (4.12) при $j = M - 1$:

$$u_{M-1}^{n+1} = X_{M-1} u_M^{n+1} + Y_{M-1}. \quad (4.15)$$

Вместе с уравнением (4.9) уравнение (4.15) образует линейную алгебраическую систему для определения u_{M-1}^{n+1} и u_M^{n+1} . Решая ее, находим:

$$u_{M-1}^{n+1} = Y_{M-1} / (1 - X_{M-1}).$$

После этого определяем счетом "справа налево", то есть в сторону убывания индекса j в (4.12), величины u_{M-2}^{n+1} , u_{M-3}^{n+1} , \dots , u_1^{n+1} .

Алгебраическая система (4.11) называется *хорошо обусловленной*, если малые возмущения коэффициентов и правых частей этой системы приводят к малому возмущению решения \mathbf{U} ; в противном случае система называется *плохо обусловленной*.

Система с трехдиагональной матрицей является хорошо обусловленной, если выполняется условие *диагонального преобладания* [4]:

$$|b_j| \geq |a_j| + |c_j| + \delta \quad (4.16)$$

где δ – малая положительная величина.

Проверим, когда выполняется условие (4.16) в случае схемы Кранка-Николсона (4.1). Подставим в (4.16) выражения (4.7) для a_j , b_j , c_j :

$$1 \geq |-\kappa/4| + |\kappa/4| + \delta,$$

или $|\kappa/2| + \delta \leq 1$. Таким образом, если κ удовлетворяет неравенству $|\kappa| \leq 2 - 2\delta$, то условие (4.16) будет выполнено при любом малом $\delta > 0$.

Итак, мы выяснили, что условие диагонального преобладания в случае неявных разностных аппроксимаций гиперболических уравнений налагает существенное ограничение на число Куранта κ . Это может свести на нет преимущество неявных схем, связанное с их абсолютной устойчивостью.

Рассмотрим теперь уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu = \text{const} > 0. \quad (4.17)$$

Аппроксимируем его следующим однопараметрическим семейством разностных схем:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \nu \frac{\Theta(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (1 - \Theta)(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}{h^2}, \quad (4.18)$$

где Θ – безразмерный весовой параметр, $0 \leq \Theta \leq 1$. Используя метод Фурье, нетрудно показать, что условие устойчивости этой схемы имеет вид:

$$\frac{2\nu\tau}{h^2} \begin{cases} \leq \frac{1}{1-2\Theta}, & 0 < \Theta \leq \frac{1}{2} \\ \text{нет ограничений,} & 1/2 \leq \Theta \leq 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

Поскольку (4.18) – скалярная двухслойная схема с постоянными коэффициентами, условие (4.19) является и необходимым, и достаточным условием устойчивости.

Рассмотрим теперь вопрос о том, выполняется ли условие диагонального преобладания в алгебраической системе вида (4.6), которая может быть получена из (4.18). Из (4.18) имеем:

$$a_j = \frac{\nu\Theta\tau}{h^2}, \quad b_j = -1 - \frac{2\nu\Theta\tau}{h^2}, \quad c_j = \frac{\nu\Theta\tau}{h^2}.$$

Отсюда видно, что при $\nu > 0$, $\Theta > 0$ условие диагонального преобладания выполняется при любых временных шагах τ . В этом состоит отличие неявных аппроксимаций параболических уравнений от неявных аппроксимаций гиперболических уравнений.

5. Методы расщепления

5.1. Трудности реализации неявных схем в случаях двух и трех пространственных переменных

Рассмотрим уравнение теплопроводности в случае двух пространственных переменных x, y :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (5.1)$$

где $T(x, y, t)$ – температура среды, $\nu = \text{const} > 0$ – коэффициент теплопроводности. Предположим, что нам надо найти распределение температуры T в прямоугольной области D плоскости (x, y) (см. рис. 10).

Будем решать уравнение (5.1) при заданном начальном условии

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y) \quad (5.2)$$

и граничных условиях

$$T(x, y, t) = \varphi(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in [0, t_{max}], \quad (5.3)$$

где $[0, t_{max}]$ – заданный промежуток на оси t , $0 < t_{max} < \infty$.

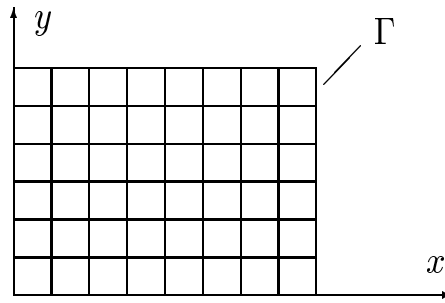


Рис. 10. Прямоугольная равномерная сетка

Покроем прямоугольник D равномерной сеткой G_h с шагами h_1 по оси x и h_2 по оси y , так что координатные линии сетки даются уравнениями (см. рис. 10):

$$x = x_j = jh_1, \quad j = 0, 1, \dots, M_1; \quad y = y_k = kh_2, \quad k = 0, 1, \dots, M_2.$$

Аппроксимируем уравнение (5.1) следующей неявной разностной схемой:

$$\frac{T_{jk}^{n+1} - T_{jk}^n}{\tau} = \nu \left[\frac{T_{j+1,k}^{n+1} - 2T_{jk}^{n+1} + T_{j-1,k}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{T_{j,k+1}^{n+1} - 2T_{jk}^{n+1} + T_{j,k-1}^{n+1}}{h_2^2} \right], \quad (5.4)$$

$$j = 1, \dots, M_1 - 1; \quad k = 1, \dots, M_2 - 1.$$

Шаблон схемы имеет вид, изображенный на рис. 11. Видим, что на $(n + 1)$ -м временном слое в схему (5.4) входят пять неизвестных сеточных значений u^{n+1} .

Для численного решения системы (5.4) может быть применен метод *матричной прогонки* [11], являющийся обобщением обычной прогонки на случай системы векторных уравнений. Действительно, введем для $j = 1, 2, \dots, M_1 - 1$ векторы

$$\mathbf{u}_j = (T_{j1}^{n+1}, T_{j2}^{n+1}, \dots, T_{j,M_2-1}^{n+1})^T, \quad \mathbf{f}_j = (-T_{j1}^n, -T_{j2}^n, \dots, -T_{j,M_2-1}^n)^T.$$

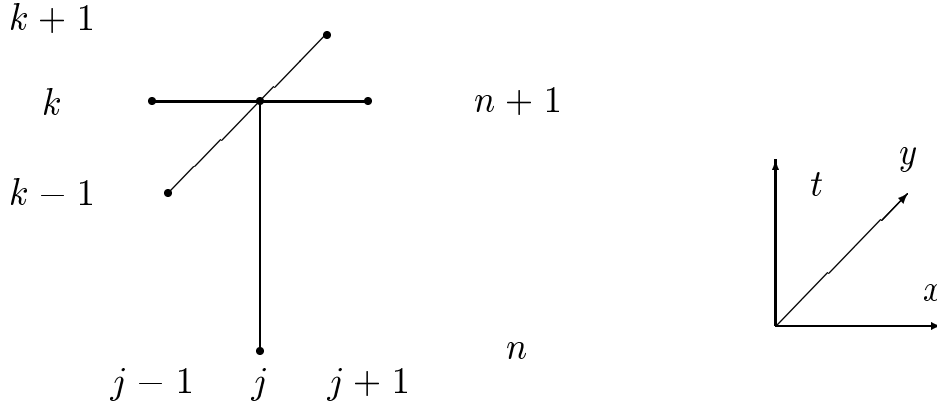


Рис. 11. Шаблон схемы (5.4)

Тогда систему (5.4) можно записать в следующем векторно-матричном виде:

$$A_j \mathbf{y}_{j-1} + B_j \mathbf{y}_j + C_j \mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{f}_j, \quad j = 1, 2, \dots, M_1 - 1, \quad (5.5)$$

где A_j , B_j и C_j - некоторые матрицы размерности $(M_2 - 1) \times (M_2 - 1)$. Затем ищем решение системы (5.5) в виде:

$$\mathbf{y}_j = \alpha_{j+1} \mathbf{y}_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, M_1 - 1. \quad (5.6)$$

При реализации метода матричной прогонки приходится запоминать все матрицы α_{j+1} , β_{j+1} в (5.6), $j = 0, 1, \dots, M_1 - 1$, что ведет в случае матриц больших размеров к необходимости использования внешней памяти ЭВМ и тем самым к увеличению времени счета.

Кроме того, расчет по формулам матричной прогонки сам по себе требует большого числа действий. В каждой точке j приходится один раз обращаться матрицу и делать два умножения матриц размерности $(M_2 - 1) \times (M_2 - 1)$, что требует $O(M_2^3)$ арифметических действий. Следовательно, для вычисления всех коэффициентов α_j и β_j в (5.6) требуется $O(2M_2^3 M_1)$ действий. Для модельной задачи, когда $M_1 = M_2 = \frac{1}{h_1}$, число действий становится величиной порядка $O(h_1^{-4})$. Таким образом, хотя схема (5.4) и является абсолютно устойчивой, ее реализация связана со значительными вычислительными затратами.

5.2. Схема переменных направлений

Существенным продвижением на пути разработки экономичных разностных схем явилась *схема переменных направлений*. Ее еще называют схемой

чередующихся направлений, а также схемой продольно-поперечной прогонки. Эта схема была предложена в 1955 г. одновременно Писмэном, Рэкфордом и Дугласом [12].

Для того, чтобы в более компактном виде представить эту схему, введем разностные операторы

$$\begin{aligned}\Lambda_1 T &= \nu(T_{j+1,k} - 2T_{j,k} + T_{j-1,k})/(h_1^2), \\ \Lambda_2 T &= \nu(T_{j,k+1} - 2T_{j,k} + T_{j,k-1})/(h_2^2).\end{aligned}$$

Тогда схему переменных направлений можно записать так:

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\tau/2} = \Lambda_1 T^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 T^n; \quad (5.7)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \Lambda_1 T^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 T^{n+1}. \quad (5.8)$$

На первом полушаге длины $\frac{\tau}{2}$ оператор $L_1 = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ аппроксимируется неявно, $L_2 = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – явно; на втором полушаге, наоборот, оператор L_1 аппроксимируется явно, а оператор L_2 – неявно.

Покажем, что схема (5.7), (5.8) имеет второй порядок аппроксимации по независимым переменным. Для этого запишем схему (5.7), (5.8) в виде:

$$A_1 T^{n+\frac{1}{2}} - B_1 T^n = 0, \quad (5.9)$$

$$A_2 T^{n+1} - B_2 T^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (5.10)$$

$$A_1 = I - \frac{\tau}{2}\Lambda_1, \quad A_2 = I - \frac{\tau}{2}\Lambda_2, \quad B_1 = I + \frac{\tau}{2}\Lambda_2, \quad B_2 = I + \frac{\tau}{2}\Lambda_1, \quad (5.11)$$

I – тождественный оператор, то есть $IT^n = T^n$. Умножим уравнение (5.9) слева на оператор B_2 , уравнение (5.10) на A_1 и сложим. В результате получим

$$A_1 A_2 T^{n+1} - B_2 B_1 T^n + (B_2 A_1 - A_1 B_2) T^{n+\frac{1}{2}} = 0.$$

Предполагая коммутативность операторов Λ_1, Λ_2 , приходим к схеме:

$$A_1 A_2 T^{n+1} - B_1 B_2 T^n = 0. \quad (5.12)$$

Подставляя (5.11) в (5.12), после несложных преобразований получаем следующую схему “в целых шагах”:

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2}(T^n + T^{n+1}) - \frac{1}{4}\tau\Lambda_1\Lambda_2(T^{n+1} - T^n). \quad (5.13)$$

Легко показать, что (5.13) аппроксимирует исходное уравнение теплопроводности со вторым порядком аппроксимации в точке $(jh_1, kh_2, (n + \frac{1}{2})\tau)$.

Докажем безусловную устойчивость схемы (5.13) или, что то же, схемы (5.7), (5.8). Положим

$$T_{jk}^n = \eta_n e^{i(jm_1 h_1 + km_2 h_2)}, \quad T_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \eta_{n+\frac{1}{2}} e^{i(jm_1 h_1 + km_2 h_2)}, \quad (5.14)$$

где m_1, m_2 – вещественные волновые числа. Подставляя (5.14) в (5.7), (5.8), получим:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\eta_{n+\frac{1}{2}}}{\eta_n} = \frac{1 - \frac{1}{2}a_2}{1 + \frac{1}{2}a_1}, & \rho_2 &= \frac{\eta_{n+1}}{\eta_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1 - \frac{1}{2}a_1}{1 + \frac{1}{2}a_2}, \\ \rho &= \frac{(1 - \frac{1}{2}a_1) \cdot (1 - \frac{1}{2}a_2)}{(1 + \frac{1}{2}a_1)(1 + \frac{1}{2}a_2)} = \rho_1 \rho_2, \end{aligned} \quad (5.15)$$

ρ – множитель перехода схемы (5.7), (5.8),

$$a_s = 4r_s \sin^2 \frac{m_s h_s}{2}, \quad r_s = \frac{\nu \tau}{h_s^2}, \quad s = 1, 2. \quad (5.16)$$

Из (5.15), (5.16) следует, что $|\rho| \leq 1$ при любом τ .

Проведем теперь оценку вычислительной сложности реализации схемы чередующихся направлений (5.7), (5.8). Легко видеть, что решение системы разностных уравнений (5.7) находится скалярной прогонкой вдоль каждой линии $y = y_k = kh_1$, $k = 1, \dots, M_2 - 1$. Легко показать, что скалярная прогонка вдоль M_1 узлов сетки требует $O(M_1)$ арифметических операций. Таким образом, для решения всех трехдиагональных систем (5.7) вдоль $M_2 - 1$ линий сетки $y = kh_1$ потребуется $O(M_1 M_2)$ операций.

Система разностных уравнений (5.8) решается с помощью скалярных прогонок вдоль линий $x = x_j = jh_1$, $j = 1, \dots, M_1 - 1$. Поэтому для ее реализации требуется $O(M_1 M_2)$ операций. Таким образом, схема (5.7), (5.8) для своей реализации требует $O(M_1 M_2)$ операций. Если, в частности, $M_1 = M_2 = M$, то получаем оценку сложности вида $O(M^2)$. А матричная прогонка, как мы видели выше, требует $O(M^4)$ операций. То есть в случае применения схемы (5.7), (5.8) получаем выигрыш в два порядка величины M по сравнению с неявной схемой (5.4).

5.3. Схемы расщепления по пространственным переменным

Нетрудно убедиться в том, что каждое из разностных уравнений (5.7), (5.8) аппроксимирует исходное уравнение (5.1). Н.Н. Яненко [12] предложил отказаться от требования, что на промежуточных шагах схемы должны ап-

проксимировать исходное уравнение в частных производных. В результате возникло новое направление в теории разностных схем, а получаемые в рамках этого направления схемы называют в настоящее время *схемами расщепления*, или *схемами дробных шагов*. Можно отметить следующие основные идеи метода расщепления:

- а) расщепление по пространственным переменным;
- б) расщепление по физическим процессам;
- в) схемы типа предиктор-корректор.

Ниже мы рассмотрим последовательно эти идеи и ряд соответствующих разностных схем.

Расщепление по пространственным переменным. Снова рассмотрим уравнение теплопроводности (5.1). Аппроксимируем его следующей разностной схемой расщепления [12]:

$$\frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\tau} = \Lambda_1 T^{n+\frac{1}{2}}; \quad \frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 T^{n+1}. \quad (5.17)$$

Перепишем (5.17) в виде

$$A_s T^{n+\frac{s}{2}} - B_s T^{n+\frac{s-1}{2}} = 0, \quad A_s = I - \tau \Lambda_s, \quad B_s = I, \quad s = 1, 2.$$

Исключая $T^{n+\frac{1}{2}}$, приходим к эквивалентной схеме в целых шагах

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2) T^{n+1} - \tau \Lambda_1 \Lambda_2 T^{n+1}. \quad (5.18)$$

Из (5.18) следует аппроксимация. С помощью метода Фурье нетрудно доказать, что схема дробных шагов (5.17) абсолютно устойчива.

Легко видеть, что первое уравнение схемы (5.17) аппроксимирует уравнение в частных производных

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 2\nu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5.19)$$

Соответственно, второе уравнение схемы (5.17) есть аппроксимация уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 2\nu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (5.20)$$

То есть оператор пространственного дифференцирования

$$(L_1 + L_2)T = \nu \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

расщеплен в схеме (5.17) на два оператора: дифференцирование по пространственной переменной x и дифференцирование по пространственной переменной y . Отметим, что каждое из уравнений (5.19), (5.20), взятое по отдельности, лишено физического смысла. Однако результат последовательного решения этих уравнений с помощью схемы (5.17) обеспечивает, как мы видели выше, аппроксимацию исходного уравнения теплопроводности (5.1).

Приведем теперь схему расщепления по пространственным переменным для уравнения теплопроводности в случае трех пространственных переменных

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (5.21)$$

Схема имеет вид [12]

$$\begin{aligned} \frac{T^{n+\frac{1}{3}} - T^n}{\tau} &= \Lambda_1 T^{n+\frac{1}{3}}; \\ \frac{T^{n+\frac{2}{3}} - T^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \Lambda_2 T^{n+\frac{2}{3}}; \\ \frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \Lambda_3 T^{n+1} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Аналогично случаю двух пространственных переменных нетрудно доказать, что схема (5.22) аппроксимирует исходное уравнение (5.21) с порядком точности $O(\tau) + O(h_1^2) + O(h_2^2) + O(h_3^2)$ и абсолютно устойчива.

Построение устойчивых схем расщепления по пространственным переменным для гиперболических уравнений связано с некоторыми трудностями. Перечислим их:

1. В неявных уравнениях на дробных (промежуточных) шагах часто не удается обеспечить условие диагонального преобладания.
2. Схемы расщепления, абсолютно устойчивые в случае двух пространственных переменных, могут оказаться неустойчивыми при переходе к случаю трех пространственных переменных.
3. Существует проблема граничных условий для величин на промежуточных (дробных) шагах, то есть для $T^{n+\frac{1}{3}}, T^{n+\frac{2}{3}}$, поскольку эти величины не имеют четкого физического смысла.

5.4. Схемы расщепления по физическим процессам

Приведем два примера построения разностных схем, в которых применяется расщепление по физическим процессам. Рассмотрим уравнение конвекции-

диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5.23)$$

где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, $\nu = \text{const} > 0$. Пусть схема

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_1(u^n, u^{n+\frac{1}{2}}) \quad (5.24)$$

аппроксимирует уравнение конвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Аналогично, потребуем, чтобы схема

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \Lambda_2(u^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+1}) \quad (5.25)$$

аппроксимировала уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Тогда нетрудно показать, что схема расщепления по физическим процессам (5.24), (5.25) аппроксимирует исходное уравнение (5.23). То есть на первом дробном шаге в этой схеме учитываются процессы конвективного переноса, а на втором - процессы диффузии.

Второй пример схемы с расщеплением по физическим процессам – это схема "частиц в ячейках" Харлоу [13]. Рассмотрим одномерную систему уравнений Эйлера невязкого сжимаемого газа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u + \rho u E)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Здесь ρ – плотность газа, u – скорость, p – давление, $E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}$, ε – удельная внутренняя энергия. Систему (5.26) можно преобразовать к недивергентному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

На первом промежуточном шаге в методе Харлоу учитывается работа сил давления и аппроксимируется система:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

А на втором промежуточном шаге с помощью конечного числа лагранжевых частиц массы рассчитывается конвективный перенос, так что аппроксимируется система:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

В итоге обеспечивается первый порядок аппроксимации системы (5.26) по x и по t . Такое же расщепление по физическим процессам реализовано в методе "крупных частиц" Белоцерковского–Давыдова [14].

5.5. Схемы типа предиктор-корректор

Поясним идею этих схем на примере систем (5.26) и (5.27). Систему (5.27) можем записать в векторно-матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (5.28)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad A(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ F_\rho & u & F_\varepsilon \\ 0 & \frac{p}{\rho} & u \end{pmatrix},$$

здесь F_ρ , F_ε – частные производные функции $F(\rho, \varepsilon)$, входящей в уравнение состояния $p = F(\rho, \varepsilon)$. Аппроксимируем систему (5.28) неявной схемой

$$\frac{\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^n}{\tau^*} + A(\mathbf{U}^n) \Lambda \mathbf{U}^* = 0, \quad (5.29)$$

где $\frac{1}{2} \leq \tau_* \leq \tau$, а разностный оператор Λ аппроксимирует оператор $\partial/\partial x$.

Систему уравнений Эйлера в дивергентной форме (5.26) запишем в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad (5.30)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u E \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Аппроксимируем систему (5.30) с помощью консервативной разностной схемы

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{\varphi(\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^*) - \varphi(\mathbf{u}_{j-\frac{1}{2}}^*)}{h} = 0. \quad (5.32)$$

Здесь \mathbf{u}^* – результат расчета, полученный на первом промежуточном шаге из схемы (5.29). В итоге при $\tau_* \geq \frac{1}{2}\tau$ получается абсолютно устойчивая разностная схема. Заметим, что схема "предиктор" (5.29) неконсервативная. Но схема "корректор" (5.32) консервативная, то есть обеспечивает выполнение тех же законов сохранения, что и исходная система уравнений Эйлера (5.26).

6. Методы расчета течений невязкого газа при наличии разрывов

6.1. Условия Рэнкина–Гюгонио

Как известно, система уравнений Эйлера (5.26) описывает течения невязкого сжимаемого нетеплопроводного газа. Решения этой системы допускают как слабые, так и сильные разрывы. Векторно-матричная форма записи этой системы имеет вид (5.30), где векторы \mathbf{u} и $\varphi(\mathbf{u})$ даются формулами (5.31). Пусть Ω – любая подобласть с границей Γ в плоскости (x, t) , лежащая в области определения решения системы (5.26). Применяя формулу Грина, можем записать, что

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{u} dx - \varphi(\mathbf{u}) dt = 0. \quad (6.1)$$

В отличие от (5.30), соотношения (6.1) сохраняют смысл также для разрывных решений. Выведем теперь условия на линии разрыва решений уравнений газовой динамики как следствия интегральных законов сохранения. Пусть $x = x_s(t)$ – уравнение линии разрыва и $dx_s/dt = D$ – скорость распространения разрыва. Рассмотрим в плоскости (x, t) такой контур, что его две линии близко примыкают к линии разрыва $x = x_s(t)$ (см. рис. 12). Пусть

$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)$ – величина скачка функции \mathbf{u} при переходе через разрыв. Тогда вдоль линии разрыва из (6.1) получаем, что

$$\int ([\mathbf{u}]D - [\varphi(\mathbf{u})]) dt = 0.$$

Так как область интегрирования произвольная, в каждой точке разрыва выполнены соотношения [15]:

$$[\mathbf{u}]D = [\varphi(\mathbf{u})]. \quad (6.2)$$

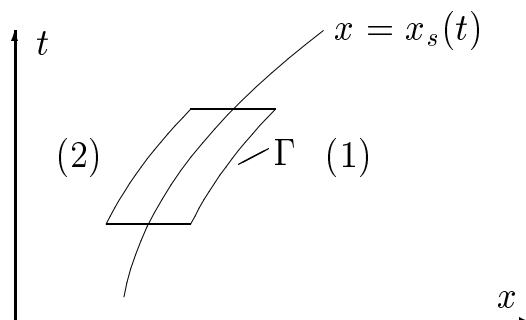


Рис. 12. К выводу соотношений Рэнкина–Гюгонио

В случае системы уравнений Эйлера равенства (6.2) можно записать в виде трех алгебраических соотношений

$$\begin{aligned} D[\rho] &= [\rho u], \\ D[\rho u] &= [p + \rho u^2], \\ D[\rho(\varepsilon + \frac{u^2}{2})] &= [\rho u(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2})] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Соотношения (6.3) называют *условиями Рэнкина–Гюгонио*.

6.2. Однородные разностные схемы

Наличие ударных волн и контактных разрывов характерно для многих задач газовой динамики. Поскольку производной решения в точке разрыва не существует, то возникала проблема построения таких разностных схем для численного решения уравнений Эйлера, которые были бы пригодны и при наличии разрывов в решении. Эта проблема решалась в нескольких направлениях:

- а) метод характеристик;
- б) схема "распад разрыва" С.К. Годунова;

- в) однородные разностные схемы;
- г) гибридные разностные схемы.

Метод характеристик позволяет аккуратно проводить численное решение системы уравнений Эйлера с учетом разрывов. В этом методе используются как уравнения для характеристик

$$\frac{dx}{dt} = u - c, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dx}{dt} = u + c,$$

(c – скорость звука), так и соотношения вдоль характеристик. Этот метод трудно реализовать в случае двумерных и трехмерных течений газа.

Несколько подробнее рассмотрим конструкцию *однородных* разностных схем. Это такие схемы, формулы которых однотипны, единообразны в точках сетки независимо от наличия и характера особенностей решения в окрестности точек сетки. Эти схемы еще называют *схемами сквозного счета* [15], так как расчет по однородным схемам проводится сквозь разрывы по однотипным формулам. Простота реализации таких схем обусловила их широкое распространение при расчетах течений газа с разрывами.

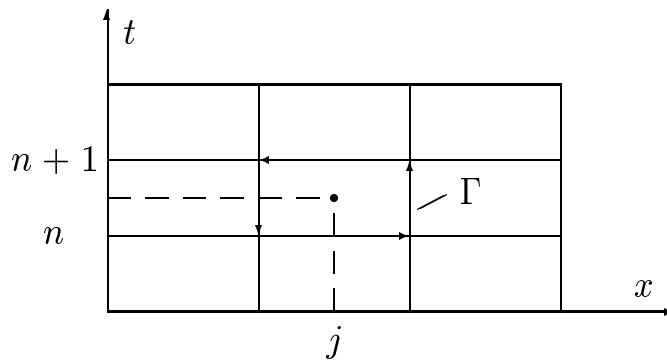


Рис. 13. Контур Γ в плоскости (x, t)

Существуют два общих подхода к построению однородных разностных схем для расчета разрывных решений. Первый из них основан на аппроксимации интегральных законов сохранения (6.1). Рассмотрим некоторую окрестность точки (j, n) (см. рис. 13).

Пусть индекс j относится к центру ячейки сетки. Тогда индексы $j-1/2$, $j+1/2$ относятся к границам ячейки. Выберем в (6.1) в качестве контура Γ границу j -й ячейки в плоскости (x, t) . Аппроксимируем теперь контурные интегралы в (6.1) по следующим простейшим формулам:

$$\mathbf{u}_j^n h - \mathbf{u}_j^{n+1} h - (\varphi(\mathbf{u}_{j+1/2}^*) - \varphi(\mathbf{u}_{j-1/2}^*))\tau = 0. \quad (6.4)$$

Здесь индекс * относится к моменту времени $t = t_* = t_n + \tau_*$, $\frac{1}{2}\tau \leq \tau_* \leq \tau$. Поделим обе части (6.4) на τh :

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{\varphi(\mathbf{u}_{j+1/2}^*) - \varphi(\mathbf{u}_{j-1/2}^*)}{h} = 0.$$

Мы получили однородную разностную схему, совпадающую со схемой (5.32).

Известно, что на ударной волне энтропия S должна возрастать. Пусть скачок

$$[S] = S_1 - S_2,$$

где нижний индекс "1" относится к состоянию за фронтом ударной волны, а "2" – к состоянию перед фронтом ударной волны. Тогда должно выполняться неравенство

$$S_1 - S_2 > 0. \quad (6.5)$$

Конечно, и в численном решении задачи с ударной волной также должно выполняться неравенство (6.5). Однако при построении разностных аппроксимаций интегральных законов сохранения (6.1), к сожалению, не всегда автоматически выполняется неравенство (6.5). Это связано с тем, что в численных решениях, получаемых по схемам сквозного счета, разрывы "размазываются" на нескольких ячейках пространственной сетки (см. рис. 14).

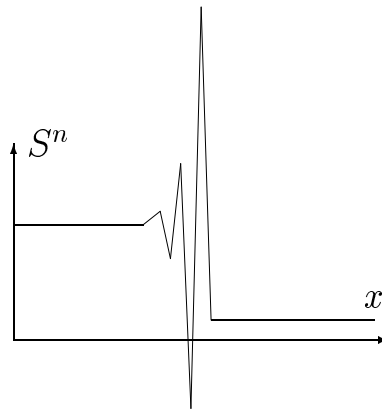


Рис. 14. Энтропия S^n , вычисленная из разностного решения

При "плохой" аппроксимации законов (6.1) вносится отрицательная вязкость в разностную схему, которая может дестабилизировать численное решение, и в этом случае может локально нарушиться энтропийное условие (см. рис. 14). Схема С.К. Годунова "распад разрыва" является примером устойчи-

вой разностной схемы, аппроксимирующей интегральные законы сохранения (6.1). Мы рассмотрим подробнее эту схему в лекции 9.

Рассмотрим теперь второй общий подход к построению однородных разностных схем. Этот подход можно назвать *методом искусственной вязкости*, или *псевдовязкости*. Этот метод был предложен в 1950 г. Нейманом и Рихтмайером. Введение в уравнения газовой динамики псевдовязкости позволяет приближенно описать ударные волны как плавный ударный переход (см. рис. 15). Нейман и Рихтмайер вводили искусственную вязкость q аддитивно в давление: $p = p + q$. В более поздних исследованиях другими авторами предложены более сложные псевдовязкости, имеющие векторно-матричный вид и вводимые во все уравнения системы (5.30). В частности, вводимая псевдовязкость может иметь такой вид, что вместо системы (5.30) аппроксимируется система

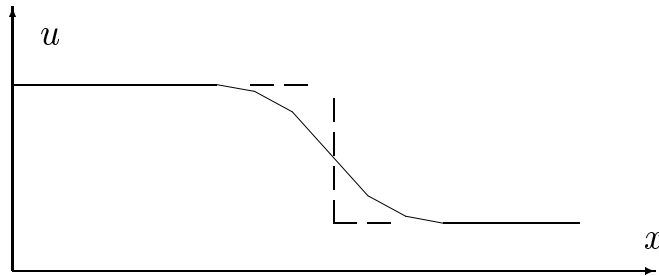


Рис. 15. Аппроксимация ударного фронта
плавным переходом

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\mathbf{u}_\mu)}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(B(\mathbf{u}_\mu, x, t) \frac{\partial \mathbf{u}_\mu}{\partial x} \right). \quad (6.6)$$

В частности, если $B(\mathbf{u}_\mu, x, t) = I$ (единичная матрица), есть теорема (Foу L.R., 1964 г.) о том, что при $\mu \rightarrow 0$ решение системы с вязкостью (6.6) сходится к решению системы уравнений (5.30). Отметим, что сходимость

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \| u_\mu - u \| = 0$$

имеет место не при всякой матрице $B(\cdot)$ в (6.6). То есть одно из требований к матрице B состоит в том, чтобы вносилась некоторая положительная искусственная вязкость в исходную систему.

Теория метода псевдовязкости далеко не завершена. Главная причина этого – сложный нелинейный характер системы уравнений Эйлера.

6.3. Дифференциальный анализатор ударных волн

Выше мы уже упоминали, что в численных решениях, получаемых с помощью схем сквозного счета, сильные разрывы "размазываются" на нескольких интервалах сетки. В хороших схемах ширина зоны "размазывания" разрыва составляет $3-4h$. Толщина зоны размазывания контактных разрывов обычно больше, чем в случае ударных волн, и может превышать $10h$.

Таким образом, возникает проблема интерпретации результатов газодинамических расчетов по однородным разностным схемам. Что взять в качестве критерия для определения положения, или локализации, фронта ударной волны в пределах зоны "размазывания"? Н. Н. Яненко предложил понятие "дифференциального анализатора" как алгоритма локализации фронта ударной волны на основе результатов сквозного счета задач газовой динамики. В [16] была предложена теория, позволяющая обосновывать алгоритмы локализации ударных волн в сквозных численных решениях.

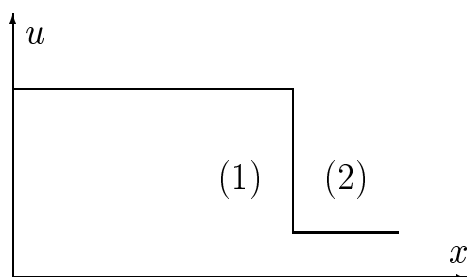


Рис. 16. Стационарная ударная волна

Основным понятием этой теории является понятие *центра конечно-разностной ударной волны*. Изложим кратко некоторые основные элементы этой теории. Рассмотрим задачу о движении стационарной ударной волны, то есть волны, движущейся с постоянной скоростью D (см. рис. 16). При этом величины ρ, u, p, ε предполагаются постоянными как в области "1" за фронтом, так и в области "2" перед фронтом волны. В системе координат $\{x' = x - Dt, t' = t\}$, очевидно, волна будет неподвижной. Следуя методу псевдовязкости Неймана-Рихтмайера, заменим в системе уравнений Эйлера (5.30), (5.31) давление p на сумму $p + q$, где q – псевдовязкость. Затем предположим, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x - Dt)$; такие решения называются решениями типа бегущей волны. Пусть $x' = x - Dt$. Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -D \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dx'}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{d\mathbf{u}}{dx'}$$

Благодаря этому удается легко проинтегрировать систему (5.30), (5.31) один раз. В результате получается система

$$\begin{aligned} \rho u' &= C_1 = m, \\ p + q + m u' &= C_2, \\ m \left[\frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{u'^2}{2} \right] + (p + q) u' &= C_3, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где мы ввели обозначение $u' = u - D$, а C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования. Предположим, что искусственная вязкость q , входящая в уравнения (6.7), имеет вид

$$q = \begin{cases} F(hdu/dx, hdp/dx, hd\rho/dx, p, \rho), & du/dx < 0 \\ 0, & du/dx \geq 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Здесь и ниже штрих при x и u мы опустили для краткости.

Рассматривая систему уравнений (6.7) как систему трех уравнений относительно четырех функций ρ, u, p, q , найдем u, p, q как функции удельного объема $V = 1/\rho$:

$$\begin{aligned} u &= mV, \quad q = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{m^2}{V} (V_2 - V)(V - V_1), \\ p(V) &= (\gamma - 1) \frac{m^2}{2} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{V_1 V_2}{V} + V - \frac{\gamma + 1}{\gamma} (V_1 + V_2) \right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Подставляя в (6.8) выражения (6.9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $V(x)$:

$$\tilde{F}(V(x), h dV/dx) = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{m^2}{V} (V_2 - V)(V - V_1), \quad (6.10)$$

где

$$\tilde{F}(V(x), h \frac{dV}{dx}) = F(hm \frac{dV}{dx}, h(\gamma - 1) \frac{m^2}{2} (1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{V_1 V_2}{V^2}) \frac{dV}{dx}, -\frac{1}{V^2} h \frac{dV}{dx}, p(V), \frac{1}{V}).$$

Уравнение (6.10) рассматриваем при краевых условиях

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = V_1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = V_2. \quad (6.11)$$

Теорема. Если выполнены условия:

1) уравнение (6.10) имеет единственный положительный корень $hdV/dx = f(V)$, причем,

- 2) $f(V) > 0$ при $V_1 < V < V_2$, $f(V_1) = f(V_2) = 0$;
 3) $f(V) \in C^1[V_1, V_2]$,

то существует единственный центр "размазанной" ударной волны в решении задачи (6.10), (6.11).

Здесь под *центром* "размазанной" ударной волны в решении $V(x)$ задачи (6.10), (6.11) понимается точка в зоне "размазывания" ударной волны, в которой значение решения $V(x)$ не зависит от величины шага сетки h . Геометрическая интерпретация этого понятия очень простая (см. рис. 17). Поскольку положение данной точки – центра волны – не зависит от h , то при любом h эта точка движется с точной скоростью ударной волны D . Поэтому определение координат этой точки можно взять за основу при определении положения фронта ударной волны по результатам сквозного счета.

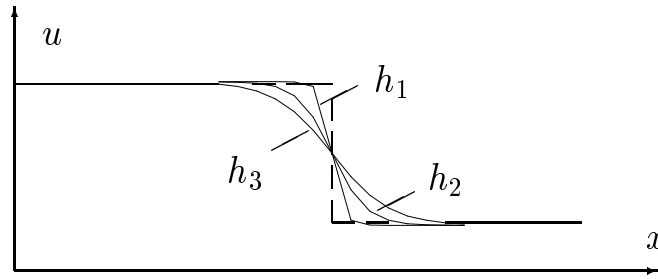


Рис. 17. К понятию центра "размазанной" ударной волны. $0 < h_1 < h_2 < h_3$

Оказалось, что точка максимума искусственной вязкости q , вообще говоря, не совпадает с положением центра волны. Пример – квадратичная вязкость Неймана – Рихтмайера

$$q = \begin{cases} ah^2\rho(\partial u/\partial x)^2, & \partial u/\partial x < 0 \\ 0, & \partial u/\partial x \geq 0. \end{cases}$$

В этом частном случае уравнение (6.10) принимает вид:

$$h \frac{dV}{dx} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2a}} \sqrt{(V_2 - V)(V - V_1)}.$$

Интегрирование этого уравнения дает решение:

$$V(x - x_0) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2a}} \frac{x - x_0}{h}\right),$$

где x_0 - постоянная интегрирования.

В случае разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений Эйлера (5.26), исследование существования и единственности центра "размазанной" ударной волны проводилось в [16] на решениях типа бегущей волны уравнений первого дифференциального приближения разностных схем. Оказалось, что для существования указанного центра волны необходимо выполнение условия $\tau/h = \text{const}$. В [16] также изложена теория дифференциальных анализаторов *контактных разрывов* в одно- и двумерных течениях невязкого газа. Из этой теории следует существование и единственность (при определенных условиях) центра "размазанного" *контактного разрыва*, по своему геометрическому смыслу аналогичного понятию центра "размазанной" ударной волны.

7. Методы решения стационарных задач

7.1. Стационарные задачи и метод установления

Задачи математической физики можно подразделить на стационарные и нестационарные. Стационарная задача - это задача, решение которой, \mathbf{u} , не зависит от времени t , то есть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$. Рассмотрим систему уравнений в частных производных, которая описывает некий физический процесс:

$$\mathbf{L}(D_x \mathbf{u}, D_y \mathbf{u}, D_z \mathbf{u}) = \mathbf{f}(x, y, z, \mathbf{u}), \quad (7.1)$$

где \mathbf{L} и \mathbf{f} – заданные вектор-функции,

$$D_x \mathbf{u} = \partial \mathbf{u} / \partial x, \quad D_y \mathbf{u} = \partial \mathbf{u} / \partial y, \quad D_z \mathbf{u} = \partial \mathbf{u} / \partial z, \quad D_x^2 \mathbf{u} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial x^2 \quad \text{и т. д.}$$

Пусть нам надо найти решение системы (7.1) в некоторой области Ω евклидова пространства E^3 точек (x, y, z) , и пусть Γ – граница области Ω . Предположим, что задание краевых условий на всей границе Γ или на некоторой ее части обеспечивает существование и единственность решения соответствующей краевой задачи. Для упрощения записи будем краевое условие записывать в виде

$$\alpha(x, y, z) \mathbf{u} + \beta(x, y, z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \gamma(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad (7.2)$$

где α , β , γ – заданные функции, $\partial/\partial n$ – оператор дифференцирования по нормали к границе Γ .

В методе установления решение краевой задачи (7.1), (7.2) ищется как предел при $t \rightarrow \infty$ решения некоторой нестационарной системы

$$N\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u} = \mathbf{L}(D_x\mathbf{u}, D_y\mathbf{u}, D_z\mathbf{u}) - \mathbf{f}(x, y, z, \mathbf{u}), \quad (7.3)$$

где $N(\partial/\partial t)$ – некоторый оператор, подбираемый так, чтобы обеспечить наиболее быструю сходимость численного решения к стационарному пределу при фиксированных во времени краевых условиях (7.2). Простейший пример задания $N(\cdot)$: $N(\partial/\partial t)\mathbf{u} = \partial\mathbf{u}/\partial t$. Другой способ задания N :

$$N\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + b^2\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2},$$

где $b = \text{const}$. Заметим, что нестационарное уравнение (7.3) необязательно должно описывать какой-то реальный физический процесс. Можно провести аналогию между решением задачи (7.3) с помощью явных или неявных разностных схем и итерационными методами решения алгебраических систем. Тогда шаг τ оказывается одним из итерационных параметров.

7.2. Метод конечного объема

7.2.1. Четырехсторонние ячейки

Многие задачи математической физики решаются в пространственных областях с криволинейными границами. Примеры:

1°. Обтекание самолетного крылового профиля (см. рис. 18).

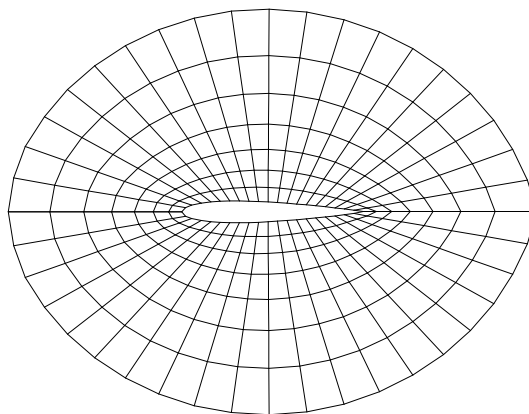


Рис. 18. Криволинейная сетка типа О около крылового профиля NASA-0012

2°. Течение газа в сопле Лавалья (см. рис. 19).

В таких случаях удобно применять пространственную сетку, согласованную с геометрической формой криволинейных границ. Такие сетки называют *криволинейными*.

Метод конечного объема позволяет осуществлять дискретизацию уравнений в частных производных на криволинейных сетках. Проиллюстрируем этот метод на примере уравнения:

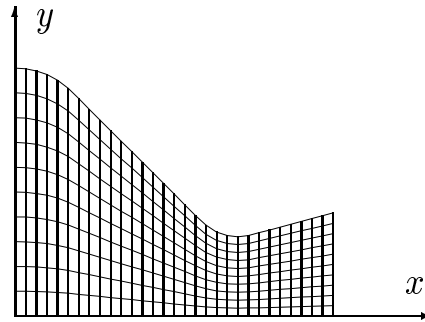


Рис. 19. Криволинейная сетка
в верхней половине сопла Лавалья

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{\partial G(u)}{\partial y} = 0, \quad (7.4)$$

где F и G – заданные функции. Существуют два способа дискретизации операторов пространственного дифференцирования в рамках метода конечного объема:

- а) центрированная схема;
- б) узловая схема.

В центрированной схеме (см. рис. 20, а) значения решения подсчитываются в центрах ячеек, а потоки $F(u)$, $G(u)$ – на границах ячеек. Применим формулу Грина к уравнению (7.4):

$$\begin{aligned} & \iint_{V_{i,j}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{\partial G(u)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_{V_{i,j}} u dx dy + \oint_{ABCD} (F dy - G dx) = 0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $V_{i,j}$ – область, ограниченная контуром $ABCD$. Пусть A_{ij} – площадь ячейки (i, j) . По теореме о среднем можем записать, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{V_{i,j}} u dx dy \approx A_{ij} \cdot \frac{\partial u_{ij}}{\partial t}, \quad (7.6)$$

где A_{ij} – площадь четырехугольника $ABCD$. Аппроксимируем теперь интеграл по контуру $ABCD$:

$$\oint_{ABCD} (F dy - G dx) = \sum_{ABCD} (F \Delta y - G \Delta x), \quad (7.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta x_{AB} &= x_B - x_A, & \Delta y_{AB} &= y_B - y_A, \\ F_{AB} &= \frac{1}{2}(F_{i,j} + F_{i,j-1}), & G_{AB} &= \frac{1}{2}(G_{i,j-1} + G_{i,j}), \end{aligned} \quad (7.8)$$

и т.д. Подставляя аппроксимации (7.6)-(7.8) в формулу (7.5), получим следующее разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение (7.4):

$$\begin{aligned} A_{ij} \frac{du_{ij}}{dt} &+ \frac{1}{2}(F_{i,j-1} + F_{i,j})\Delta y_{AB} - \frac{1}{2}(G_{i,j-1} + G_{i,j})\Delta x_{AB} \\ &+ \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{i+1,j})\Delta y_{BC} - \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{i+1,j})\Delta x_{BC} \\ &+ \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{i,j+1})\Delta y_{CD} - \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{i,j+1})\Delta x_{CD} \\ &+ \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{i-1,j})\Delta y_{DA} - \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{i-1,j})\Delta x_{DA} = 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

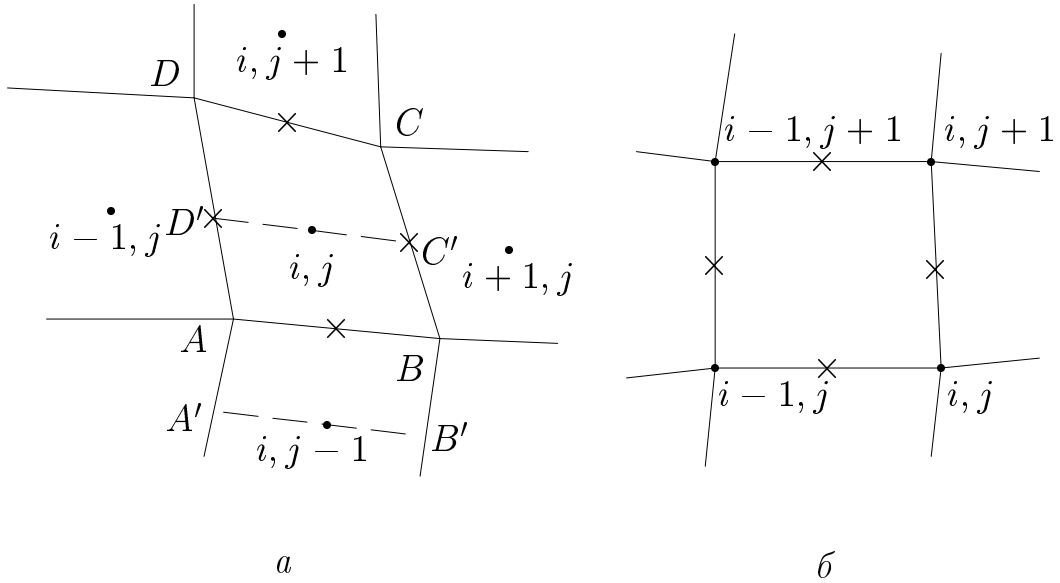


Рис. 20. Схемы: (а) центрированная; (б) узловая;

• переменная u , \times потоки $F(u)$, $G(u)$

Можно показать, что в частном случае прямоугольной равномерной сетки в плоскости (x, y) схема (7.9) имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным. В общем случае криволинейной сетки порядок аппроксимации по x, y первый [1].

7.2.2. Треугольные ячейки

В случае треугольных сеток также можно рассматривать центрированную и узловую схемы аппроксимации операторов пространственного дифференцирования, см. рис. 21, а, б. Рассмотрим подробнее узловую схему (рис. 21, б).

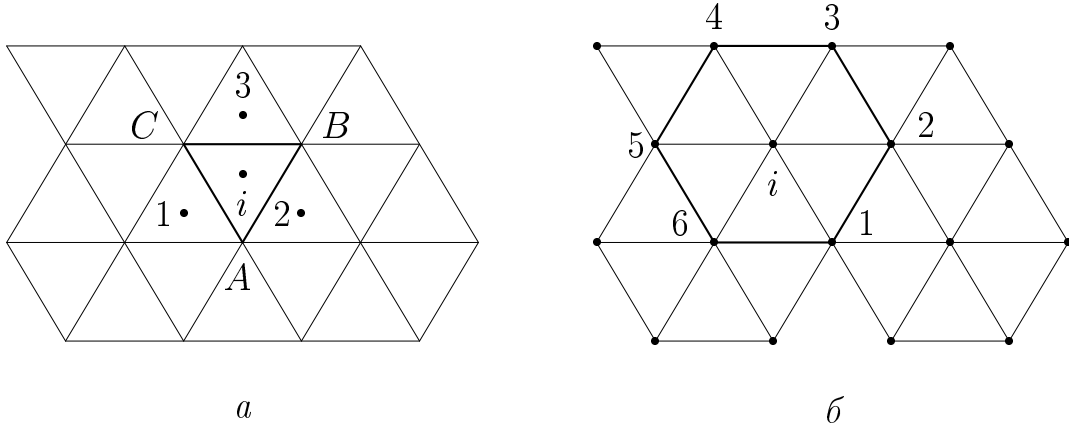


Рис. 21. Схемы: (а) – центрированная; (б) – узловая

Пусть Γ_i – контур "1234561", и Ω_i – область, ограниченная контуром Γ_i . Тогда

$$\oint_{\Gamma_i} (F dy - G dx) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 [(F_k + F_{k+1}) \Delta y_{k,k+1} - (G_k + G_{k+1}) \Delta x_{k,k+1}],$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega_i} u dx dy \approx A_i \frac{du_i}{dt}, \quad A_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 (x_k + x_{k+1}) \Delta y_{k,k+1},$$

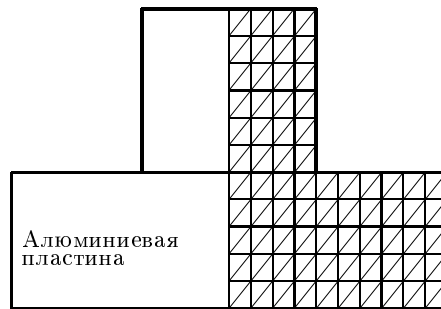


Рис. 22. Равномерная треугольная сетка

где

$$\Delta x_{k,k+1} = x_{k+1} - x_k, \quad \Delta y_{k,k+1} = y_{k+1} - y_k, \quad k = 1, \dots, 6,$$

$$x_7 \equiv x_1, \quad y_7 \equiv y_1, \quad F_7 \equiv F_1, \quad G_7 \equiv G_1.$$

Можно показать, что построенная аппроксимация имеет порядок точности $O(h)$ на сетке из равносторонних треугольников, где h – длина стороны элементарного треугольника. На Рис. 22 показан пример построения треугольной сетки для задачи высокоскоростного соударения твердых тел.

7.3. Схемы типа Рунге-Кутты

Как было показано на предыдущих лекциях, простейшие явные схемы накладывают существенное ограничение на временной шаг τ . Джеймсон в 1981 г. предложил семейства явных схем с расширенными интервалами устойчивости [1,6,17]. Поясним идею его схем на примере аппроксимации уравнения (1.1). Заменяем в (1.1) оператор пространственного дифференцирования $a\partial u/\partial x$ разностным оператором, аппроксимирующим оператор $a\partial u/\partial x$. Для этой цели можно, например, использовать центральную разность:

$$Pu(t) = a[u(x+h, t) - u(x-h, t)]/(2h). \quad (7.10)$$

После этого вместо исходного дифференциального уравнения в частных производных (1.1) рассматривают обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$\frac{du}{dt} + Pu = 0, \quad (7.11)$$

где величины $x+h$, $x-h$ и h – параметры. Этот прием известен также как *метод прямых* решения уравнений в частных производных.

Для численного интегрирования ОДУ (7.11) А. Джеймсон предложил использовать методы Рунге – Кутты. Простейшая одностадийная схема

$$u^{n+1} = u^n - \tau Pu^n$$

для уравнения (1.1), как нетрудно показать, является неустойчивой. Рассмотрим теперь такую двухстадийную схему Рунге – Кутты для уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u^n; \\ u^{(1)} &= u^{(0)} - \alpha\tau Pu^{(0)}; \\ u^{(2)} &= u^{(0)} - \tau Pu^{(1)}; \\ u^{n+1} &= u^{(2)}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

где α – пока не определенный параметр. Подберем этот параметр из двух требований: (а) аппроксимации исходного уравнения (1.1); (б) максимального возможного интервала устойчивости. Для этой цели сначала исключим из (7.12) промежуточное значение $u^{(1)}$:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n - \tau P u^{(1)} = u^n - \tau P(u^n - \alpha \tau P u^n) \\ &= [I - \tau P + \alpha(\tau P)^2] u^n. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Пусть $z = \mathcal{F}(-\tau P)$ – результат преобразования Фурье оператора $-\tau P$. Легко найти, что $z = -i\kappa \sin \xi$, $\kappa = a\tau/h$, $\xi = kh$, k – волновое число. Тогда из (7.13) получаем, что множитель перехода g схемы (7.12) имеет вид:

$$g = 1 + z + \alpha z^2 = 1 - i\kappa \sin \xi - \alpha \kappa^2 \sin^2 \xi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |g|^2 &= 1 + \kappa^2 \sin^2 \xi (1 - 2\alpha) + \alpha^2 \kappa^4 \sin^4 \xi \\ &= 1 - \kappa^2 \sin^2 \xi [(2\alpha - 1) - \alpha^2 \kappa^2 \sin^2 \xi]. \end{aligned}$$

Если мы хотим, чтобы $|g| \leq 1$ для малых значений ξ , то нужно потребовать, чтобы $\alpha \geq 1/2$. Минимум выражения в квадратных скобках будет при $\sin^2 \xi = 1$. Поэтому для обеспечения неравенства $|g|^2 \leq 1$ должно выполняться неравенство

$$2\alpha - 1 - \alpha^2 \kappa^2 \geq 0,$$

откуда

$$\kappa^2 \leq \frac{2\alpha - 1}{\alpha^2}. \quad (7.14)$$

Максимум правой части достигается при $\alpha = 1$, тогда $\kappa^2 \leq 1$.

Таким образом, для получения максимально устойчивой двухстадийной схемы (7.13) нужно положить $\alpha = 1$. Обобщение этой процедуры на случай более высоких степеней z в выражении для множителя перехода $g(\kappa, \xi)$ приводит к многочлену

$$Q(z) = 1 + z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_m z^m.$$

Требуемые многочлены можно также записать в виде

$$Q(z) = 1 + \gamma_1 z [1 + \gamma_2 z (1 + \gamma_3 z (1 + \gamma_4 z (1 + \dots + \gamma_m z)))]]. \quad (7.15)$$

В частности, для обеспечения аппроксимации исходного уравнения в частных производных всегда берем $\gamma_1 = 1$. Приведем теперь значения коэффициентов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, соответствующие оптимальным по устойчивости схемам Джеймсона, при $m = 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned}
 m = 2 : \quad & \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1 \\
 m = 3 : \quad & \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2} \\
 m = 4 : \quad & \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{5}{9}, \quad \gamma_3 = \frac{4}{15}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{3} \\
 m = 5 : \quad & \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{8}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{6}, \quad \gamma_5 = \frac{1}{4}.
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Разностную схему, ведущую к многочлену (7.15), можно реализовать как следующий m -стадийный процесс:

$$\begin{aligned}
 u^{(0)} &= u^n; \\
 u^{(1)} &= u^{(0)} - \gamma_m \tau P u^{(0)}; \\
 u^{(2)} &= u^{(0)} - \gamma_{m-1} \tau P u^{(1)}; \\
 &\quad \cdot \quad \cdot \quad \dots \\
 u^{(m)} &= u^{(0)} - \gamma_1 \tau P u^{(m-1)}; \\
 u^{n+1} &= u^{(m)}.
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

В частности, если m -стадийная схема (7.17) с оптимальными значениями коэффициентов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ применяется для аппроксимации уравнения (1.1), то получаются следующие условия устойчивости при различных m :

$$\begin{aligned}
 m = 2 : \quad & |\kappa| \leq 1 \\
 m = 3 : \quad & |\kappa| \leq 2 \\
 m = 4 : \quad & |\kappa| \leq 3 \\
 m = 5 : \quad & |\kappa| \leq 4.
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Таким образом, наибольший интервал устойчивости получается в случае пятистадийной схемы Джеймсона. Однако следует отметить, что пятистадийная схема требует вычисления пяти значений оператора Pu в каждом узле, на что тратится основное машинное время. Для количественной оценки эффективности реализации схем типа Рунге–Кутты (7.17) можно ввести следующий параметр:

$$ef = C/N, \tag{7.19}$$

где C – максимальное число Куранта, допускаемое устойчивостью схемы; N – число требуемых вычислений значений оператора Pu . Тогда с учетом (7.19) можем получить следующую таблицу:

$$\begin{aligned} m = 2 \quad ef &= \frac{1}{2} = 0.500 \\ m = 3 \quad ef &= \frac{2}{3} \approx 0.666 \\ m = 4 \quad ef &= \frac{3}{4} = 0.750 \\ m = 5 \quad ef &= \frac{4}{5} = 0.800. \end{aligned}$$

Таким образом, пятистадийная схема обладает наиболее высокой эффективностью. Возьмем, для сравнения, известную схему Мак-Кормака 1969 г. [8,15]:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_j - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} &= 0; \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \frac{a\tau}{2h}(\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j-1}). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Видим, что схема Мак-Кормака требует двух вычислений оператора Pu . В то же время легко показать, что условие устойчивости этой схемы имеет вид $|\kappa| \leq 1$. Таким образом, $ef = 1/2 = 0.500$ для схемы Мак-Кормака.

Рассмотрим теперь двумерное уравнение конвекции-диффузии (5.23). В этом случае оператор Pu в уравнении (7.11) можно взять в виде

$$\begin{aligned} Pu_{j,k}^n &= A \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n}{2h_1} + B \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n}{2h_2} \\ &- \nu \left[\frac{u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n}{h_1^2} + \frac{u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{h_2^2} \right], \end{aligned}$$

и затем применить какую-нибудь из многостадийных схем типа Рунге–Кутты (7.17).

Обобщение схем типа Рунге–Кутты (7.17) на случай систем уравнений в частных производных проводится достаточно просто: нужно везде в (7.11), (7.17) заменить скалярную функцию u на вектор-функцию \mathbf{u} .

8. Методы построения криволинейных сеток

8.1. Алгебраический метод построения криволинейной сетки

Снова рассмотрим задачу о течении газа в сопле Лавалья (см. рис. 23). Предположим, что существует взаимно однозначное отображение

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad (8.1)$$

которое переводит область D в плоскости физических координат (x, y) в некоторую прямоугольную область D_ξ в плоскости криволинейных координат (ξ, η) . При этом линии криволинейной сетки в области D переходят в линии равномерной прямоугольной сетки в области D_ξ .

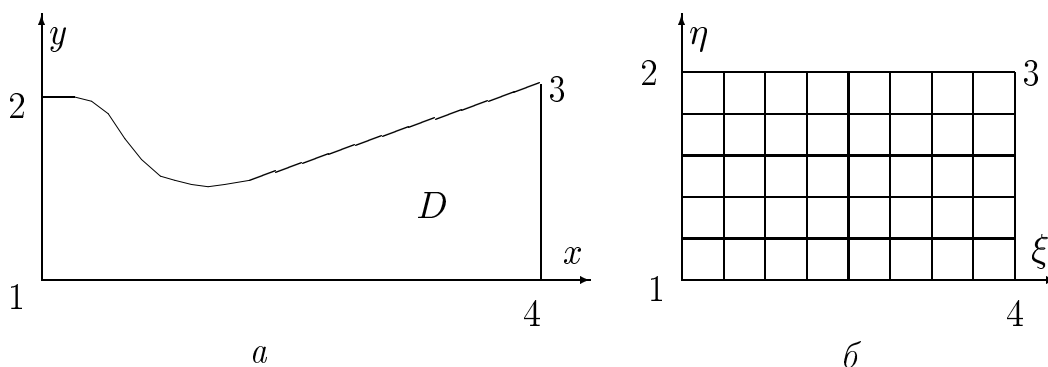


Рис. 23. Течение газа в сопле Лавалья: (а) область D в физическом пространстве; (б) преобразованная область в плоскости (ξ, η)

Обычно криволинейную сетку в плоскости (x, y) строят с помощью численной генерации отображения (8.1). Методы генерации сеток можно разбить на два больших класса:

- а) алгебраические методы;
- б) методы, основанные на численном решении некоторых уравнений в частных производных.

Мы рассмотрим сейчас один простой алгебраический метод генерации криволинейной пространственной сетки в сопле Лавалья. Алгебраические методы используют те или иные интерполяционные формулы для вычисления координат узлов сетки внутри пространственной области с заданными границами.

Пусть $y = f(x)$ - уравнение стенки сопла. Введем новые координаты ξ, η по формулам:

$$\xi = (i_x - 1)(x/x_{nz}), \quad \eta = (j_y - 1)[y/f_w(x)], \quad (8.2)$$

где i_x и j_y представляют собой количества узлов сетки в направлении, соответственно, осей ξ и η ; x_{nz} - абсцисса выходного сечения сопла.

Мы можем, в принципе, взять любые шаги сетки $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ в плоскости (ξ, η) . Простейший выбор - это $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. Тогда мы можем задать прямые линии сетки в прямоугольнике плоскости (ξ, η) по формулам:

$$\xi_i = i - 1, \quad i = 1, \dots, i_x; \quad \eta_j = j - 1, \quad j = 1, \dots, j_y. \quad (8.3)$$

Теперь легко совершить переход от узлов сетки (ξ_i, η_j) к их образам в плоскости (x, y) . Для этого разрешим уравнения (8.2) относительно x, y :

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i \cdot x_{nz} / (i_x - 1), \quad i = 1, \dots, i_x; \\ y_{ij} &= f_w(x_i) \eta_j / (j_y - 1), \quad j = 1, \dots, j_y. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Линии сетки $x_i = \text{const}$ - отрезки прямых линий, параллельных оси y . Линии $\eta_j = \text{const}$ имеют форму, аналогичную форме стенки сопла (см. рис. 19).

8.2. Эллиптический генератор криволинейной сетки

Теперь рассмотрим один метод генерации криволинейных сеток, основанный на численном решении некоторых уравнений в частных производных эллиптического типа. Этот метод применим в случае полностью заданной границы расчетной области в плоскости (x, y) . Решения некоторых эллиптических систем удовлетворяют принципу максимума, то есть экстремум решения не может находиться внутри области. Это свойство гарантирует взаимно однозначное отображение вида (8.1). Так как экстремума координат $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ не может быть внутри расчетной области, то не будет происходить и перекрещивание различных линий полученной криволинейной сетки.

Простейшая система уравнений эллиптического типа, решения которой удовлетворяют принципу максимума, это система уравнений Лапласа

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0; \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0. \quad (8.6)$$

Эти уравнения могут быть получены из уравнений Эйлера-Лагранжа для минимизации интегралов

$$I_1 = \iint_D [(\partial\xi/\partial x)^2 + (\partial\xi/\partial y)^2] dx dy, \quad (8.7)$$

$$I_2 = \iint_D [(\partial\eta/\partial x)^2 + (\partial\eta/\partial y)^2] dx dy. \quad (8.8)$$

Поскольку в плоскости (ξ, η) линии сетки расположены на одинаковых расстояниях $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ друг от друга, величина

$$|\nabla\xi|^2 = (\partial\xi/\partial x)^2 + (\partial\xi/\partial y)^2$$

может рассматриваться в качестве меры плотности точек сетки вдоль координатной линии, на которой ξ меняется, то есть величина ξ должна меняться быстро в физическом пространстве, где точки сетки сгущаются. Минимизация функционала (8.7) ведет, таким образом, к наиболее гладкому распределению линий в области в плоскости координат (x, y) .

Поскольку криволинейная сетка генерируется в плоскости (x, y) , желательно поменять ролями переменные ξ, η и x, y в уравнениях (8.5) и (8.6), сделав ξ, η независимыми переменными, а x, y – функциями. Для этого осуществим преобразование уравнений (8.5), (8.6) и получим уравнения в частных производных для $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$. Рассмотрим тождество

$$x(\xi(x, y), \eta(x, y)) \equiv x. \quad (8.9)$$

Продифференцируем обе части (8.9) по x :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1. \quad (8.10)$$

Теперь продифференцируем обе части (8.9) по y :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (8.11)$$

Аналогично, из тождества

$$y(\xi(x, y), \eta(x, y)) \equiv y$$

можем получить дифференцированием уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1. \quad (8.13)$$

Теперь рассмотрим уравнения (8.10) и (8.12) для ξ_x и η_x . Определителем этой системы является якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (8.14)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $J \neq 0$. Тогда из системы (8.10), (8.12) находим, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (8.15)$$

Теперь возьмем уравнения (8.11) и (8.13). Решая эту систему относительно ξ_y, η_y , находим, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi}. \quad (8.16)$$

Теперь найдем выражение для лапласиана $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\xi(x, y)$ в терминах производных

$$\begin{aligned} \partial x/\partial \xi, \dots, \partial y/\partial \eta, \partial^2 x/\partial \xi^2, \partial^2 x/\partial \xi \partial \eta, \partial^2 x/\partial \eta^2, \partial^2 y/\partial \xi^2, \\ \partial^2 y/\partial \xi \partial \eta, \partial^2 y/\partial \eta^2. \end{aligned}$$

Для этого продифференцируем обе части равенства (8.10) по x :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = - \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (8.17)$$

Теперь продифференцируем обе части (8.12) по x :

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = - \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (8.18)$$

Решая систему уравнений (8.17), (8.18) относительно $\partial^2 \xi/\partial x^2$ и $\partial^2 \eta/\partial x^2$, получим выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right]; \quad (8.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right]. \quad (8.20) \end{aligned}$$

Продифференцируем теперь по y обе части равенства (8.11):

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = - \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (8.21)$$

Продифференцируем по y обе части равенства (8.13):

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = - \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (8.22)$$

Разрешая систему уравнений (8.21), (8.22) относительно ξ_{yy} и η_{yy} , получим выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right]; \quad (8.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right]. \quad (8.24) \end{aligned}$$

Используя формулы (8.19), (8.23), получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial x}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \left[\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right] \right\}. \quad (8.25) \end{aligned}$$

Видим, что сюда входит производная $y_{\xi\eta}$. Покажем, что ее можно исключить. Продифференцируем обе части (8.13) по y :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (8.26)$$

Теперь продифференцируем обе части (8.12) по x :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (8.27)$$

Складывая обе части равенств (8.26) и (8.27), получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ & = - \frac{\partial y}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial y}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (8.28)$$

так как справедливы уравнения (8.5) и (8.6). Таким образом, получаем из (8.25) следующее уравнение с учетом (8.28):

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \\ & \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Подставим теперь выражения (8.15), (8.16) в (8.29):

$$(x_\eta^2 + y_\eta^2) x_{\xi\xi} - 2(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) x_{\xi\eta} + (x_\xi^2 + y_\xi^2) x_{\eta\eta} = 0, \quad (8.30)$$

Уравнение (8.28) для $y(\xi, \eta)$ можно преобразовать аналогичным образом с помощью формул (8.15) и (8.16):

$$(x_\eta^2 + y_\eta^2) y_{\xi\xi} - 2(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) y_{\xi\eta} + (x_\xi^2 + y_\xi^2) y_{\eta\eta} = 0. \quad (8.31)$$

Рассмотрим вопрос о численном решении уравнений (8.30), (8.31). Для решения этих уравнений можно применить метод установления. Пусть $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ – шаги сетки в плоскости (ξ, η) . Вычисляем координаты ξ_i и η_j узлов сетки вдоль осей ξ и η , соответственно, по формулам

$$\xi_i = (i - 1)\Delta\xi, \quad i = 1, \dots, I; \quad \eta_j = (j - 1)\Delta\eta, \quad j = 1, \dots, J. \quad (8.32)$$

Так как в случае задачи о течении газа в сопле граница Γ области в плоскости (x, y) задана, то для $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ можем сформулировать граничные условия Дирихле. Например,

$$\begin{aligned} x_{1,j} &\equiv x(\xi_1, \eta_j) = 0; \quad x_{I,j} = x_{ex.}, \quad j = 1, \dots, J; \\ x_{i,1} &= X_{i,1}, \quad x_{i,J} = X_{i,J}, \quad i = 1, \dots, I. \\ y_{1,j} &\equiv y(\xi_1, \eta_j) = Y_{1,j}; \quad y_{I,j} = Y_{I,j}, \quad j = 1, \dots, J; \\ y_{i,1} &= 0, \quad y_{i,J} = f(X_{i,J}), \quad i = 1, \dots, I. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Значения $X_{i,1}$ и $X_{i,J}$ должны быть заданы так, чтобы величины

$$X_{1,1}, X_{2,1}, \dots, X_{I,1} \text{ и } X_{1,J}, X_{2,J}, \dots, X_{I,J}$$

образовывали монотонные последовательности.

Ординаты $Y_{1,j}$ и $Y_{I,j}$ задаются так, чтобы

$$\begin{aligned} 0 &= Y_{1,1} < Y_{1,2} < \dots < Y_{1,J} = f(0); \\ 0 &= Y_{I,1} < Y_{I,2} < \dots < Y_{I,J} = f(x_{ex}), \end{aligned}$$

где x_{ex} – абсцисса выходного сечения сопла. Пусть $f(\xi, \eta)$ – любая из функций $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$. Возьмем $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$. Тогда мы можем аппроксимировать производные f_ξ , f_η с помощью центральных разностей:

$$(f_\xi)_{ij} = \frac{1}{2}(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}), \quad (f_\eta)_{ij} = \frac{1}{2}(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}).$$

Далее,

$$\begin{aligned} (f_{\xi\xi})_{ij} &= f_{i+1,j} - 2f_{ij} + f_{i-1,j}, \quad (f_{\eta\eta})_{ij} = f_{i,j+1} - 2f_{ij} + f_{i,j-1}, \\ (f_{\xi\eta})_{ij} &= \frac{1}{4}(f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}). \end{aligned}$$

Для численного решения уравнений (8.30), (8.31) по методу установления при стационарных граничных условиях (8.33) можно применить неявную схему переменных направлений.

8.3. Вид уравнений Эйлера в криволинейных координатах

В системе декартовых координат x, y система уравнений Эйлера, описывающих двумерное нестационарное течение сжимаемого невязкого нетеплопроводного газа, может быть записана в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial y} = 0, \quad (8.34)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho u E + pu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ \rho v E + pv \end{pmatrix}$$

Пусть

$$f(\xi, \eta) = \mathbf{F}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t).$$

Тогда можем записать, что

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Решая эту систему относительно $\partial \mathbf{F} / \partial x$, $\partial \mathbf{F} / \partial y$, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right), \quad (8.35)$$

где J – якобиан (8.14).

Возьмем теперь функцию

$$g(\xi, \eta) = \mathbf{G}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t).$$

Тогда аналогично (8.35) можем записать, что

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right).$$

Поэтому

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]. \quad (8.36)$$

Формула (8.36) имеет недостаток – она имеет недивергентный вид. Докажем справедливость следующей формулы:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial y}{\partial \eta} - g \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(g \frac{\partial x}{\partial \xi} - f \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]. \quad (8.37)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (f y_\eta - g x_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (g x_\xi - f y_\xi) &= (f_\xi y_\eta - f_\eta y_\xi) + (g_\eta x_\xi - g_\xi x_\eta) \\ &\quad + f (y_{\eta\xi} - y_{\xi\eta}) + g (x_{\xi\eta} - x_{\eta\xi}). \end{aligned}$$

Функции $y(\xi, \eta)$, $x(\xi, \eta)$ предполагаются достаточно гладкими, поэтому $y_{\xi\eta} = y_{\eta\xi}$, $x_{\xi\eta} = x_{\eta\xi}$.

Таким образом, мы можем записать преобразованную систему уравнений Эйлера (8.34) в дивергентном виде следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}J}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mathbf{F} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \mathbf{G} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mathbf{G} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \mathbf{F} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (8.38)$$

Используя формулы (8.15) и (8.16), можем переписать систему (8.38) также

в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}J}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (J\xi_x \mathbf{F} + J\xi_y \mathbf{G}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J\eta_x \mathbf{F} + J\eta_y \mathbf{G}) = 0. \quad (8.39)$$

Введем для краткости обозначений следующие векторы-столбцы:

$$\tilde{\mathbf{F}} = J\xi_x \mathbf{F} + J\xi_y \mathbf{G}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = J\eta_x \mathbf{F} + J\eta_y \mathbf{G}.$$

Тогда можем переписать систему (8.39) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}J}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}}{\partial \eta} = 0. \quad (8.40)$$

9. Монотонные разностные схемы

9.1. Понятие монотонности

Как мы уже убедились на предыдущих лекциях, многие разностные схемы дают осциллирующие решения даже в тех случаях, когда осцилляций в решении быть не должно. Поэтому такие осцилляции численных решений еще называют ложными или паразитическими. Возьмем для уравнения (1.1) монотонную начальную функцию $u(x, 0) = u_0(x)$. Тогда после выполнения первого шага по t разностное решение, полученное по осциллирующей схеме, будет содержать осцилляции. Запишем разностную схему в виде:

$$u^{n+1} = Su^n, \quad (9.1)$$

где S – оператор шага. Оператор S осциллирующей схемы переводит, таким образом, монотонную последовательность сеточных значений $u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n$ в немонотонную. Точное решение задачи Коши (1.1), (1.2) имеет вид

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad (9.2)$$

откуда следует, что если начальная функция $u_0(x)$ монотонная, то и решение $u(x, t)$ при любом $t > 0$ будет также монотонной функцией. В этой связи разумно потребовать, чтобы и разностное решение u^n обладало аналогичным свойством.

Определение 9.1. Конечно-разностная схема (9.1) называется *монотонной*, если оператор шага S переводит монотонную сеточную функцию u^n

в монотонную сеточную функцию u^{n+1} с тем же направлением роста ее значений (см. рис. 24).

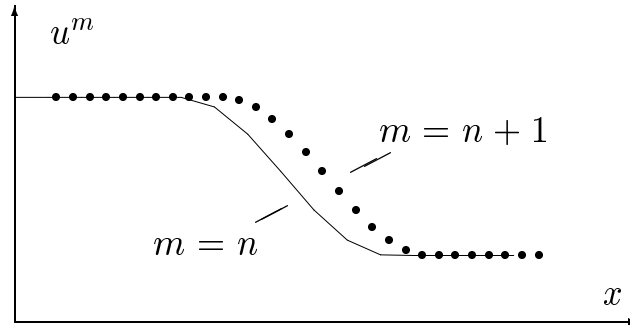


Рис. 24. К иллюстрации понятия монотонной разностной схемы

Пусть дана линейная разностная схема

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=-p}^q \alpha_k u_{j+k}^n, \quad (9.3)$$

где $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q > 0$.

Теорема 9.1 (С.К. Годунов, 1959). Разностная схема (9.3) монотонна тогда и только тогда, когда все коэффициенты α_k неотрицательны.

Мы опускаем доказательство этой теоремы (его можно найти, например, в [1]). Можно привести ряд известных схем первого порядка точности, которые при определенных ограничениях на число Куранта являются монотонными. Сложнее дело обстоит в случае разностных схем второго и более высоких порядков аппроксимации. С.К. Годуновым была доказана следующая

Теорема 9.2. Среди линейных схем второго порядка точности для уравнения (1.1) нет схемы, удовлетворяющей условию монотонности.

Таким образом, в классах линейных схем высоких порядков аппроксимации на фиксированном шаблоне невозможно построить монотонную схему.

Тем не менее, схемы высоких порядков аппроксимации имеют преимущество по точности по сравнению со схемами первого порядка точности, что позволяет в случае гладких решений получать гораздо более точные результаты на грубых пространственных сетках. В этой связи был предложен ряд приемов *монотонизации* разностных схем высоких порядков аппроксимации:

1°. Введение членов искусственной вязкости.

2°. Применение различных операторов сглаживания или осреднения.

Следует отметить, что эти приемы не обеспечивают наличие монотонности в строгом смысле, а лишь уменьшают амплитуду паразитических осцилляций.

9.2. Схема TVD Хартена

В поисках путей создания монотонных схем высокого порядка точности А. Хартен [18] предложил интересную гибридную разностную схему, которую он назвал TVD-схемой, уменьшающей полную вариацию разностного решения. Кратко опишем эту схему.

Снова рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2). Возьмем гладкую функцию $u_0(x)$ с ограниченной *полной вариацией*:

$$TV[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} |\partial u_0(x)/\partial x| dx \leq C < \infty.$$

Тогда с учетом (9.3) легко видеть, что при любом $t = t^* > 0$

$$TV[u(x, t^*)] = TV[u_0(x)].$$

Построим явную, в общем случае нелинейную разностную схему, аппроксимирующую уравнение (1.1) на равномерной сетке:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - H(u_{j-p}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+q}^n). \quad (9.4)$$

Потребуем, чтобы $H(u, \dots, u, \dots, u) = 0$. Это обеспечивает, что в случае постоянной начальной функции $u_0(x)$ разностное решение u^{n+1} также будет постоянной функцией.

Определение 9.2. Назовем схему (9.1) TVD-схемой, если

$$TV^h(Su^n) \leq TV^h(u^n),$$

где

$$TV^h(u^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta_{j+1/2} u^n|, \quad \Delta_{j+1/2} u^n = u_{j+1}^n - u_j^n.$$

Следующая теорема устанавливает связь между TVD-схемами и монотонными схемами (Хартен [18]).

Теорема 9.3.

1. TVD-схема сохраняет монотонность;
2. Монотонная схема удовлетворяет TVD-условию.

Мы не будем приводить здесь доказательство теоремы, оно имеется в [18]. Перейдем к построению конкретной TVD-схемы для уравнения (1.1). Запишем схему (9.4) в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^n \Delta_{j+1/2} u^n, \quad a < 0, \quad (9.5)$$

а при $a > 0$ – в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n - D_{j-1/2}^n \Delta_{j-1/2} u^n. \quad (9.6)$$

Здесь

$$C_{j+1/2}^n = C_{j+1/2}^n(u_{j-p}^n, \dots, u_{j+1}^n), \quad D_{j-1/2}^n = D_{j-1/2}^n(u_{j-p}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+q}^n),$$

и

$$C_{j+1/2}^n \geq 0, \quad D_{j-1/2}^n \geq 0, \quad (9.7)$$

$$C_{j+1/2}^n \leq 1, \quad D_{j-1/2}^n \leq 1. \quad (9.8)$$

Тогда можно показать, что схема (9.5)-(9.8) будет TVD-схемой. Это доказательство тоже опускаем.

В качестве примера рассмотрим схему второго порядка точности Чакраварти–Ошера [19]:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{\tilde{u}_{j+1/2}^n - \tilde{u}_{j-1/2}^n}{h} = 0, \quad (9.9)$$

где

$$\tilde{u}_{j+1/2}^n = u_j^n + \frac{1 + \beta}{4} \overline{\Delta_{j+1/2} u^n} + \frac{1 - \beta}{4} \overline{\overline{\Delta_{j-1/2} u^n}} \quad (9.10)$$

при $a > 0$ и

$$\tilde{u}_{j+1/2}^n = u_{j+1}^n - \frac{1 + \beta}{4} \overline{\Delta_{j+1/2} u^n} - \frac{1 - \beta}{4} \overline{\overline{\Delta_{j+3/2} u^n}} \quad (9.11)$$

при $a < 0$. Здесь

$$\begin{aligned} \overline{\Delta_{j+1/2} u^n} &= \minmod[\Delta_{j+1/2} u^n, b\Delta_{j-1/2} u^n], \\ \overline{\overline{\Delta_{j-1/2} u^n}} &= \minmod[\Delta_{j-1/2} u^n, b\Delta_{j+1/2} u^n]. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Функция \minmod определяется так:

$$\minmod[r, m] = \text{sign}(r) \max\{0, \min[|r|, m \text{sign}(r)]\}. \quad (9.13)$$

Весовой параметр β в (9.10)-(9.11) выбирается в промежутке $-1 \leq \beta \leq 1$. Если черточки над $\Delta_{j+1/2}u^n$, $\Delta_{j-1/2}u^n$, $\Delta_{j+3/2}u^n$ в (9.10) и (9.11) отсутствуют, то схема (9.9)-(9.11) аппроксимирует уравнение (1.1) с точностью $O(\tau) + O(h^3)$ при $\beta = 1/3$ и с точностью $O(\tau) + O(h^2)$ при $\beta \neq 1/3$. Используя свойства функции *minmod*, нетрудно доказать, что построенная схема (9.9)-(9.13) является TVD-схемой при выполнении условий

$$\kappa = a\tau/h \leq \frac{4}{5 - \beta + b(1 + \beta)}, \quad 1 \leq b \leq \frac{3 - \beta}{1 - \beta}.$$

9.3. Схема С.К. Годунова “распад разрыва”

Эта схема была предложена в 1959 г. С.К. Годуновым для расчета течений невязкого сжимаемого газа. Это схема первого порядка аппроксимации. Хотя монотонность этой схемы строго не доказана, по ней получаются монотонные профили численного решения. Приведем формулы этой схемы для одномерного случая. Воспользуемся дивергентной формой системы уравнений Эйлера (5.30). Идея схемы Годунова состоит в следующем. Величины ρ_i^n, u_i^n, p_i^n вычисляются в центрах ячеек сетки на оси x и полагается, что $\rho = \rho_i^n, u = u_i^n, p = p_i^n$ в пределах каждой ячейки (см. рис. 25). Тогда значения решения \mathbf{u}_i^{n+1} на следующем слое “n+1” находятся из решения задач о распаде разрыва на границах $i - 1/2$ и $i + 1/2$ ячейки “i”. В случае, если перепады $|u_i^n - u_{i+1}^n|, |\rho_i^n - \rho_{i+1}^n|, |p_i^n - p_{i+1}^n|$ невелики, для вычисления значений $U_{i+1/2}, R_{i+1/2}, P_{i+1/2}$ скорости, плотности и давления из решения задачи о распаде разрыва можно воспользоваться акустическим приближением этого решения [15].

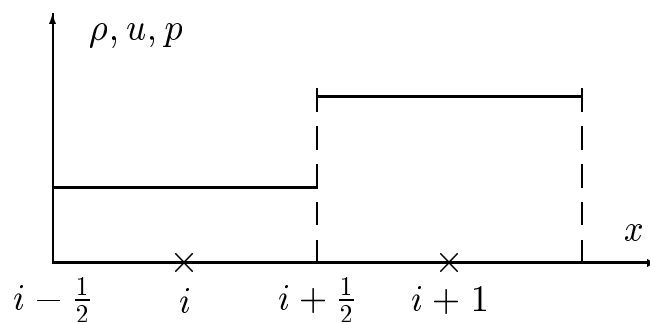


Рис. 25. К расчету распада разрыва

Рассмотрим сначала случай сверхзвукового течения, причем, $u > c > 0$. Введем обозначение

$$a_{i+1/2} = \sqrt{\gamma p_{i+1/2}^n \rho_{i+1/2}^n},$$

где

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_i^n + f_{i+1}^n),$$

f – любая из функций ρ, u, p . Тогда, если $\rho_{i+1/2}^n u_{i+1/2}^n > a_{i+1/2}$, то

$$R_{i+1/2} = \rho_i^n, \quad P_{i+1/2} = p_i^n, \quad U_{i+1/2} = u_i^n,$$

и решение на следующем слое $n + 1$ находится с помощью схемы

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\tau} + \frac{\varphi(R_{i+1/2}, U_{i+1/2}, P_{i+1/2}) - \varphi(R_{i-1/2}, U_{i-1/2}, P_{i-1/2})}{h} = 0. \quad (9.14)$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$0 < \rho_{i+1/2}^n u_{i+1/2}^n < a_{i+1/2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(p_i^n + p_{i+1}^n + a_{i+1/2} \cdot (u_i^n - u_{i+1}^n)), \\ R_{i+1/2} &= \frac{(\gamma + 1)P_{i+1/2} + (\gamma - 1)p_i^n}{(\gamma - 1)P_{i+1/2} + (\gamma + 1)p_i^n} \rho_i^n, \\ U_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n + \frac{p_i^n - p_{i+1}^n}{a_{i+1/2}}), \end{aligned}$$

и расчет \mathbf{u}^{n+1} производится по схеме (9.14).

Рассмотренная схема С.К. Годунова имеет первый порядок аппроксимации как по пространственной переменной, так и по t . К настоящему времени предложены различные модификации этой схемы, которые обладают более высокими порядками аппроксимации (вторым и третьим).

10. Расчет неравновесных течений газа

10.1. Уравнения химической кинетики

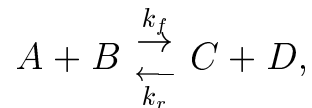
Во многих прикладных задачах приходится учитывать химические реакции, которые могут происходить в течениях жидкостей и газов. Такими задачами являются, например, следующие:

- 1) распространение газофазной детонации;
- 2) газофазное пламя;
- 3) многофазные течения реагирующих смесей в ракетных соплах;
- 4) процессы горения топливных смесей на тепловых электростанциях.

Ниже мы рассмотрим только гомогенные газовые смеси, которыми обычно являются продукты сгорания топлив, применяемых в газовых турбинах, реактивных и ракетных двигателях и которые не содержат в своем составе металлов или их соединений. Если же, например, в реагирующей смеси имеются, кроме газов, частицы металла или другие твердые частицы, то такие смеси называются *гетерогенными*.

Любой физико-химический процесс будет существенно воздействовать на картину течения, если изменение энергии, связанное с этим процессом, соизмеримо с полным изменением энергии и характерное время протекания этого процесса сравнимо с характерным газодинамическим временем.

Для описания неравновесных химических реакций используются уравнения *химической кинетики*. В химической кинетике принято записывать реакции в следующем виде:



где k_f и k_r – константы скоростей прямой и обратной реакций; A, B, C, D – исходные вещества и продукты реакции.

Концентрацию i -го вещества можно выражать числом его частиц в единице объема n_i , например $[1/\text{см}^3]$. Мольно-объемная концентрация X_i определяется числом молей вещества в единице объема $[\text{моль}/\text{см}^3]$:

$$X_i = \frac{n_i}{N_0},$$

где $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ – число Авогадро. Скорость химической реакции – это производная dX_i/dt . Она определяет, на сколько изменяется концентрация i -го вещества в единицу времени. Наиболее просто скорость реакции выражается через мольно-объемные концентрации. Для компонент X_k в прямой реакции уравнения химической кинетики имеют вид [20]

$$\frac{dX_k}{dt} = k_f (b_k - a_k) \prod_{j=1}^n X_j^{a_j} \quad (10.1)$$

и соответственно для обратной реакции

$$\frac{dX_k}{dt} = k_r (a_k - b_k) \prod_{j=1}^n X_j^{b_j},$$

где a_k, b_k – стехиометрические коэффициенты реакции, n – общее число исходных веществ и продуктов реакции. Очевидно, что полное изменение ко-

личества вещества в реакции определяется как прямой, так и обратной реакциями:

$$\frac{dX_k}{dt} = k_f(b_k - a_k) \prod_{j=1}^n X_j^{a_j} + k_r(a_k - b_k) \prod_{j=1}^n X_j^{b_j}. \quad (10.2)$$

На начальных стадиях, когда в системе присутствуют лишь исходные вещества, реакция идет в основном в прямом направлении. С накоплением конечных продуктов скорость реакции замедляется, и в состоянии равновесия скорость прямой реакции равна скорости обратной реакции (для любого k):

$$\frac{dX_k}{dt} = 0. \quad (10.3)$$

Из соотношений (10.2) и (10.3) получаем формулу

$$K(T) = \frac{k_f}{k_r} = \frac{\prod_{j=1}^n X_j^{b_j}}{\prod_{j=1}^n X_j^{a_j}}, \quad (10.4)$$

где величина $K(T)$ называется константой равновесия, T – температура. Формулы (10.4) – это алгебраические соотношения. Таким образом, использование допущения о равновесности химических реакций позволяет упростить их учет при математическом моделировании равновесных течений.

Поскольку скорости протекания различных химических реакций могут различаться между собой на несколько порядков величины, то более адекватным является использование математических моделей неравновесных течений.

Прежде чем выписать дифференциальные уравнения такой модели, рассмотрим вопрос об уравнении состояния гомогенной реагирующей смеси. Пусть смесь состоит из N компонент, и пусть μ_i – молекулярный вес i -го газа, $i = 1, \dots, N$. *Моль*, или грамм-молекула – это такое количество химически однородного вещества, масса которого, выраженная в граммах, численно равна его молекулярному весу.

Пусть M_i – масса i -го газа в смеси, и пусть V и T – объем и температура смеси.

Парциальным давлением p_i i -го газа в смеси называется давление, под которым находился бы этот газ, если бы из смеси были удалены все остальные газы, а объем и температура сохранились прежними:

$$p_i = \frac{M_i RT}{\mu_i V},$$

где R – универсальная газовая постоянная, $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{град}}$.

Закон Дальтона [20]: давление смеси идеальных газов равно сумме их парциальных давлений, т.е.

$$p = \sum_{i=1}^N p_i = \frac{RT}{V} \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\mu_i}. \quad (10.5)$$

Пусть $\rho = M/V$, где M – масса смеси, то есть

$$M = \sum_{i=1}^N M_i.$$

Тогда $V = M/\rho$, и можем переписать формулу (10.5) в виде

$$p = R\rho T \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad (10.6)$$

где мы ввели обозначение

$$\alpha_i = \frac{M_i}{M\mu_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10.7)$$

Величина α_i называется мольно-массовой концентрацией i -ой компоненты смеси.

10.2. Неравновесное течение в осесимметричном сопле

Рассмотрим неравновесное течение реагирующей смеси газов в осесимметричном сопле Лавалля (см. рис. 19). Наиболее простой вид уравнения химической кинетики для случая течения продуктов сгорания имеют при применении мольно-массовых концентраций. Часть уравнений химической кинетики целесообразно заменить соотношениями материального баланса [2]:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^l (\nu_{ik}^- - \nu_{ik}^+) [K_i^+ \prod_{j=1}^N (\rho\alpha_j)^{\nu_{ij}^+} - K_i^- \prod_{j=1}^N (\rho\alpha_j)^{\nu_{ij}^-}], \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\alpha_k + \sum_{i=1}^m B_{ki} \alpha_i = A_k, \quad k = m+1, \dots, N, \quad (10.8)$$

где A_k – число молей k -го химического элемента в единице массы смеси; B_{ki} – число атомов k -го химического элемента в i -ой компоненте, K_i^+ , K_i^- – константы скоростей прямой и обратной реакций, N – число компонентов

в смеси, $N - m$ – число химических элементов. Первые m уравнений (10.8) являются уравнениями химической кинетики, остальные $N - m$ уравнений – уравнениями материального баланса.

Запишем теперь нестационарную систему, описывающую двумерные течения смеси в осесимметричном сопле [2]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}y\rho + \frac{\partial}{\partial x}y\rho u + \frac{\partial}{\partial y}y\rho v &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}y\rho u + \frac{\partial}{\partial x}y(p + \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}y\rho uv &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}y\rho v + \frac{\partial}{\partial x}y\rho uv + \frac{\partial}{\partial y}y(p + \rho v^2) - p &= 0, \\
\frac{dH_0}{dx} = 0, \quad H_0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k h_k + q^2/2, &
\end{aligned} \tag{10.9}$$

где $h_k(T)$ – мольная энтальпия k -го компонента, $q^2 = u^2 + v^2$, u , v – компоненты вектора скорости смеси вдоль осей x , y , соответственно. Для вычисления энтальпий h_k используются аппроксимирующие полиномы

$$h_k = \sum_{m=0}^7 A_{km} x^m, \quad x = T \cdot 10^{-3}.$$

Опишем этапы численного решения системы (10.8)-(10.9).

1-й этап. По известным значениям ρ^n, u^n, v^n, T^n на n -ом слое по t решаем систему уравнений химической кинетики (10.8) и в результате находим значения концентраций α_i , $i = 1, \dots, N$, при $t = t^{n+1}$.

2-й этап. Полученные значения величин α_i^{n+1} подставляем в разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения (10.9). В результате находим ρ^{n+1} , u^{n+1} , v^{n+1} , T^{n+1} . Затем процедура повторяется на $(n + 1)$ -ом временном слое, и т. д.

Численное решение системы уравнений химической кинетики (10.8) связано с определенными трудностями. Введем векторы

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = (f_1(\mathbf{y}, t), \dots, f_m(\mathbf{y}, t)), \\
f_k(\mathbf{y}, t) &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^l (\nu_{ik}^- - \nu_{ik}^+) [K_i^+ \prod_{j=1}^N (\rho \alpha_j)^{\nu_{ij}^+} - \\
&\quad - K_i^- \prod_{j=1}^N (\rho \alpha_j)^{\nu_{ij}^-}], \quad k = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{10.10}$$

Тогда m уравнений химической кинетики (10.8) можно записать в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t). \quad (10.11)$$

Если рассматривать задачи горения топлив в реактивных и ракетных двигателях, то химические вещества состоят, в основном, из соединений, образованных атомами H, O, C, N. Выбор системы определяющих реакций и величин их констант скоростей достаточно сложен и является объектом самостоятельных исследований. Общее количество учитываемых химических реакций может превышать 100. Следует отметить, что скорости протекания различных химических реакций могут сильно различаться по своей величине. Соответственно, сильно будут различаться константы K_i^+ и K_i^- химических скоростей прямой и обратной реакции.

Предположим, что на интервале $[t_0, t_0 + \tau]$, где τ – малая положительная величина, мы хотим линеаризовать систему (10.11) для того, чтобы в дальнейшем изучать устойчивость разностных методов решения системы (10.11). Тогда, в соответствии с обычной процедурой линеаризации, имеем:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \approx \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, t) \delta \mathbf{y},$$

где $\delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ и мы считаем величину $|\delta \mathbf{y}|$ малой; $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$. Введем обозначение:

$$J(\mathbf{y}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, t), \quad (10.12)$$

то есть J – матрица Якоби. У нас m компонент реагирующей смеси, поэтому J – матрица размерности $m \times m$. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ собственные значения матрицы J . Тогда, вследствие большого разброса значений скоростей химических реакций, одни собственные числа будут очень малы по модулю, а другие очень велики. Такие системы обыкновенных дифференциальных уравнений называются *жесткими*.

10.3. Численное решение жестких систем

В литературе по численному решению обыкновенных жестких дифференциальных уравнений имеется ряд математических определений жесткой системы (10.11). Их обзор можно найти в книге [3]. Мы приведем следующее определение жесткой системы, которое является весьма употребительным.

Определение 10.1. Система уравнений вида

$$\frac{dy}{dt} = J(y_0, t) \cdot y \quad (10.13)$$

называется *жесткой*, если

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad \frac{\max |\operatorname{Re}(\lambda_j)|}{\min |\operatorname{Re}(\lambda_j)|} \gg 1,$$

где $\operatorname{Re}(\lambda_j)$ – действительная часть собственного значения λ_j .

В качестве примера приведем такую систему [3]:

$$\frac{dy}{dt} = Jy, \quad (10.14)$$

где J – матрица второго порядка,

$$J = \begin{pmatrix} -1000 & 999 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (10.15)$$

$$\lambda_1 = -1001, \quad \lambda_2 = -1.$$

Решение $y = (n_1, n_2)$ системы (10.14), (10.15) записывается в виде:

$$\begin{aligned} n_1(t) &= 0.999(n_1(0) - n_2(0))e^{-1001t} + (0.001n_1(0) + 0.999n_2(0))e^{-t}, \\ n_2(t) &= -0.001(n_1(0) - n_2(0))e^{-1001t} \\ &\quad + (0.001n_1(0) + 0.999n_2(0))e^{-t}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Разделив первое уравнение системы (10.14), (10.15) на 10^3 , получим:

$$10^{-3} \frac{dn_1}{dt} = -n_1 + 0.999n_2, \quad (10.17)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = n_1 - 2n_2. \quad (10.18)$$

Уравнение (10.17) содержит малый параметр $\varepsilon = 10^{-3}$. Соответствующее уравнению (10.17) вырожденное уравнение получается в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$-n_1 + 0.999n_2 = 0. \quad (10.19)$$

Из (10.19) имеем:

$$n_1 = 0.999n_2. \quad (10.20)$$

Подставляя это значение в (10.18), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dn_2}{dt} = -1.001n_2. \quad (10.21)$$

Очевидно, $\lambda_1 = -1.001 < 0$. Условие $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ является достаточным для устойчивости решения вырожденной системы. Для достаточно малого параметра ε касательные к интегральным кривым почти параллельны оси n_1 . То есть наклон $|dn_1/dt|$ велик. У интегральной кривой $n_1 = n_1(t)$ имеются два участка различного поведения. Первый участок с быстрым изменением искомой функции отражает стремление интегральной кривой к графику функции $\bar{n}_1 = \bar{n}_1(t)$, полученному из решения вырожденной системы (10.20), (10.21). Этот участок называется *пограничным слоем*.

На втором участке производные решения значительно меньше, а интегральная кривая практически совпадает с графиком $\bar{n}_1(t)$.

Вернемся к решению (10.16). Внутри пограничного слоя переменная n_1 ведет себя заметно активнее, чем n_2 . Поэтому иногда $n_1(t)$ называют быстрой компонентой, а $n_2(t)$ – медленной. После прохождения пограничного слоя производные вектора решения невелики и определяются экспонентой с показателем λ_2 .

Рассмотрим улучшенный метод Эйлера для решения уравнения

$$\dot{y} = \lambda y,$$

где $\lambda = \text{const}$. Пусть $f(y, t) = \lambda y$.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n, t_n) \\ k_2 &= f(y_n + \tau k_1, t_n + \tau) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}\tau(k_1 + k_2). \end{aligned} \tag{10.22}$$

Проанализируем *устойчивость* схемы (10.22). Имеем:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\tau\lambda y_n + \frac{1}{2}\tau\lambda y_n + \frac{1}{2}\tau\lambda\lambda\tau y_n = y_n\left(1 + z + \frac{1}{2}z^2\right),$$

где $z = \lambda\tau$. Соответственно, для ошибки решения δy_n получаем уравнение

$$\delta y_{n+1} = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2\right)\delta y_n. \tag{10.23}$$

Для того чтобы ошибки не накапливались, потребуем, чтобы $|\delta y_{n+1}| \leq |\delta y_n|$. Тогда отсюда и из (10.23) получаем условие устойчивости в виде:

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2}\right| \leq 1. \tag{10.24}$$

В частности, на вещественной оси $\operatorname{Re} \lambda\tau$ получаем из (10.24) условие устойчивости вида:

$$-2 \leq \operatorname{Re}(\lambda\tau) \leq 0, \tag{10.25}$$

τ – временной шаг схемы. Из (10.25) видно, что если $|\operatorname{Re}(\lambda)|$ велико, то возникает сильное ограничение на шаг τ .

В этой связи было разработано большое количество разностных методов специально для численного интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, получили распространение так называемые А-устойчивые методы.

Определение 10.2. Численный метод решения системы (10.11) называется А-устойчивым, если он устойчив во всей левой полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda\tau) \leq 0$ комплексной плоскости $\lambda\tau$ (см. рис. 26).

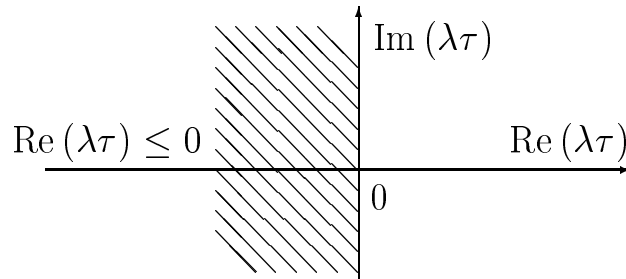


Рис. 26. К понятию А-устойчивости

Пример А-устойчивой схемы: это схема типа предиктор-корректор [2]

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{y}}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} &= \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{y}}^{n+1}, t_n + \tau) \\ \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}^{n+1/2}, t_n + \tau). \end{aligned} \quad (10.26)$$

Значения $\mathbf{f}(\mathbf{y}^{n+1/2}, t_n + \tau)$ получим из разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{y}^{n+1/2}) &= \mathbf{f}(\mathbf{y}^{n+1}) - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{n+1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt} \right)^{n+1} \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{y}^{n+1}) \cdot \left[I - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Так что уравнение корректора запишется в виде

$$\frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{y}^{n+1}, t_n + \tau) \cdot \left[I - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{n+1} \right], \quad (10.27)$$

то есть матрицу Якоби $(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y})^{n+1}$ определяем из этапа предиктора.

Обе схемы (10.26), (10.27) нелинейные. Для их решения обычно применяются итерации по Ньютону.

Литература

1. **Ganzha V.G., Vorozhtsov E.V.** Numerical Solutions for Partial Differential Equations: Problem Solving Using *Mathematica*. – Boca Raton, New York: CRC Press, 1996. – 347 с.
2. **Рычков А.Д.** Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – 224 с.
3. **Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.** Численные методы решения жестких систем. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
4. **Годунов С.К., Рябенский В.С.** Разностные схемы. Введение в теорию. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
5. **Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.** Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. – 364 с.
6. **Ganzha V.G., Vorozhtsov E.V.** Computer-Aided Analysis of Difference Schemes for Partial Differential Equations. – New York: Wiley-Interscience, 1996. – 458 с.
7. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
8. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
9. **Ворожцов Е.В., Скобелев Б.Ю.** Об устойчивости разностных схем в различных банаховых пространствах. Препринт № 10-94, Ин-т теоретической и прикладной механики Сиб. отд-ния РАН. – Новосибирск, 1994. – 52 с.
10. **Еднерал В.Ф., Крюков А.П., Родионов А.Я.** Язык аналитических вычислений REDUCE. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 177 с.
11. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
12. **Яненко Н.Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1967. – 195 с.
13. **Харлоу Ф.Х.** Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики// Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967, с. 317-342.
14. **Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1982. – 391 с.

15. **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
16. **Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н.** Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985. – 224 с.
17. **Jameson A., Schmidt W., Turkel E.** Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes// AIAA Paperю – 1981ю – No. 1259.
18. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws// J. Comput. Phys. – 1983. – Vol. 49. – No. 3. – P. 357-393.
19. **Chakravarthy S.R., Osher S.** A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws// AIAA Paperю – 1985. – No. 85-0363.
20. **Агафонов В.П., Вертушкин В.К., Гладков А.А., Полянский О.Ю.** Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. – М.: Машиностроение, 1972. – 344 с.

Содержание

1	Понятие разностной схемы	4
1.1.	Сеточные функции	4
1.2.	Разделенные разности	5
1.3.	Разностная задача Коши	6
1.4.	Разностная начально-краевая задача	8
2	Аппроксимация и устойчивость	10
2.1.	Первое дифференциальное приближение	11
2.2.	Устойчивость в норме пространства L_2 и метод Фурье	15
3	Исследование устойчивости нелинейных разностных схем	18
3.1.	Прием “замораживания” коэффициентов	18
3.2.	Использование дискретных аналогов норм пространств C и L_p	21
3.3.	Применение средств компьютерной алгебры	28
4	Явные и неявные схемы	29
4.1.	Основные определения	29
4.2.	Метод прогонки	31
5	Методы расщепления	34
5.1.	Трудности реализации неявных схем в случаях двух и трех пространственных переменных	34
5.2.	Схема переменных направлений	36
5.3.	Схемы расщепления по пространственным переменным	38
5.4.	Схемы расщепления по физическим процессам	40
5.5.	Схемы типа предиктор-корректор	42
6	Методы расчета течений вязкого газа при наличии разрывов	43
6.1.	Условия Рэнкина–Гюгонно	43
6.2.	Однородные разностные схемы	44
6.3.	Дифференциальный анализатор ударных волн	48
7	Методы решения стационарных задач	51
7.1.	Стационарные задачи и метод установления	51
7.2.	Метод конечного объема	52
7.2.1.	<i>Четырехсторонние ячейки</i>	52
7.2.2.	<i>Треугольные ячейки</i>	55
7.3.	Схемы типа Рунге–Кутты	56
8	Методы построения криволинейных сеток	60
8.1.	Алгебраический метод построения криволинейной сетки	60
8.2.	Эллиптический генератор криволинейной сетки	61
8.3.	Вид уравнений Эйлера в криволинейных координатах	66

9. Монотонные разностные схемы	68
9.1. Понятие монотонности	68
9.2. Схема TVD Хартена	70
9.3. Схема С.К. Годунова “распад разрыва”	72
10. Расчет неравновесных течений газа	73
10.1. Уравнения химической кинетики	73
10.2. Неравновесное течение в осесимметричном сопле	76
10.3. Численное решение жестких систем	78
Литература	82

Евгений Васильевич Ворожцов

**РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**
Учебное пособие

Редактор *Н.В. Городник*

Технический редактор *Г.Е. Телятникова*

Лицензия № 021040 от 22.02.96. Подписано в печать 06.04.98.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз. Уч.- изд. л. 5,1.
Печ. л. 5,5. Изд. № 767. Заказ № 225 Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.