

Е.В. ВОРОЖЦОВ

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ
РАЗНОСТНЫХ СХЕМ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**НОВОСИБИРСК
2000**

Министерство образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.В. ВОРОЖЦОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2000

УДК 539.3 (0.76)
В 751

Рецензенты: *В.В. Остапенко*, д-р физ.-мат. наук, проф.
А.Д. Рычков, д-р техн. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре аэрогидродинамики
для магистрантов ФЛА

Ворожцов Е.В.

В 751 Сборник задач по теории разностных схем: Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. — 41 с.

Учебное пособие разработано с учетом программы курса лекций, утвержденной кафедрой аэрогидродинамики НГТУ, и содержит решения разнообразных задач современной теории разностных методов механики сплошных сред.

УДК 539.3 (0.76)

© Новосибирский государственный
технический университет, 2000 г.

Предисловие

На протяжении ряда лет автор читает для магистрантов факультета летательных аппаратов НГТУ курс лекций “Разностные методы решения задач механики сплошных сред”. С целью более глубокого усвоения материалов данного курса автор предлагал магистрантам на экзаменах задачи по теории разностных методов. Эти задачи относительно просты и не требуют применения ЭВМ для их решения, а для некоторых из них даже не нужно брать в руки перо и бумагу. Тем не менее, как показала практика, решение многих задач вызывает трудности у магистрантов. Автор надеется, что данное пособие поможет магистрантам решать некоторые типичные задачи, возникающие при конструировании и исследовании разностных методов.

Решение всех типовых задач приводится в сборнике с максимальной полнотой со всеми промежуточными выкладками.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Задачи, содержащиеся в этой главе, посвящены понятиям аппроксимации и устойчивости разностных схем, рассматриваемым в лекциях 1 – 3 пособия [1]. Прежде, чем перейти к формулировке задач, напомним основные понятия. Рассмотрим задачу Коши вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A\mathbf{u}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.2)$$

где x – пространственная координата, t – время, A – линейный дифференциальный оператор, $\mathbf{u}_0(x)$ – заданная функция. Аппроксимируем задачу Коши (1.1), (1.2) следующей *разностной задачей Коши*:

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} = \Lambda_1 \mathbf{u}_j^{n+1} + \Lambda_2 \mathbf{u}_j^n, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}_j^0 = \mathbf{u}_0(x_j), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{u}_j^n = \mathbf{u}(x_j, t_n)$ – разностное решение, $x_j = jh$, $t_n = n\tau$, h – шаг сетки на оси x , τ – временной шаг, Λ_1, Λ_2 – некоторые разностные операторы. Определим некоторую норму $\|\cdot\|_{\tau, h}$ в пространстве сеточных функций $\{\mathbf{u}_j^n\}$. Пусть L – оператор исходного уравнения (1.1), то есть

$$L\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - A\mathbf{u}, \quad (1.5)$$

и пусть L_h – разностный оператор, определяемый в соответствии с (1.3) как

$$L_h u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \Lambda_1 u(x, t + \tau) - \Lambda_2 u(x, t). \quad (1.6)$$

Пусть $u(x, t)$ – достаточно гладкое решение задачи Коши (1.1), (1.2). Если

$$\|L_h u - Lu\| \leq C_1 h^{k_1} + C_2 \tau^{k_2}, \quad (1.7)$$

где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ и постоянные C_1 и C_2 не зависят от τ и h , то, по определению, разностная схема (1.3) аппроксимирует уравнение (1.1) и имеет порядок аппроксимации k_1 относительно h и порядок k_2 относительно τ .

Первым дифференциальным приближением (п.д.п.) разностной схемы (1.3) называют дифференциальное уравнение в частных производных, которое получается из (1.3), если подставить вместо сеточных функций их разложения в ряды Тейлора и удерживать только главный (или ведущий) член погрешности аппроксимации.

Различают гиперболическую и параболическую формы п.д.п. [2]. Для получения параболической формы п.д.п., или П-формы п.д.п., используют *дифференциальные следствия* исходного дифференциального уравнения $\partial u / \partial t = Lu$. Они получаются в результате дифференцирования обеих частей этого уравнения по независимым переменным.

Перепишем (1.3) в виде:

$$(I - \tau \Lambda_1) u_j^{n+1} = (I + \tau \Lambda_2) u_j^n, \quad (1.8)$$

где I – тождественный оператор, то есть $Iu_j^n \equiv u_j^n$. Предположим, что оператор $I - \tau \Lambda_1$ обратим. Тогда, разрешая уравнение (1.8) относительно u_j^{n+1} , получим:

$$u_j^{n+1} = S u_j^n, \quad (1.9)$$

где

$$S = (I - \tau \Lambda_1)^{-1} (I + \tau \Lambda_2). \quad (1.10)$$

Оператор S в (1.9) называется *оператором шага* разностной схемы.

Шаблон разностной схемы называется конечное множество узлов сетки, которое используется в схеме.

Для случая, когда шаблон разностной схемы содержит только один узел сетки на верхнем, $(n+1)$ -ом временном слое, имеет смысл ввести понятие *шаблона*

n -го слоя [3], так как он содержит на временном слое “ n ” основную часть точек шаблона.

Предположим, что в решаемой задаче аэрогидродинамики течение жидкости симметрично относительно оси x . Если шаблон разностной схемы несимметричен относительно линии, параллельной оси x , то легко показать, что получаемое разностное решение уже не будет обладать симметрией относительно оси x . Таким образом, в этом случае в численном решении будет присутствовать ошибка, называемая *ориентационной погрешностью разностной схемы* [4].

Разностная схема (1.9) называется *устойчивой*, если при любых начальных данных $u_j^0 = u_0(x_j)$ выполняется оценка

$$\|u^n\| \leq M \|u^0\|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где M – постоянная, не зависящая от τ , h и n . Поскольку оператор S предполагается не зависящим от n , то устойчивость эквивалентна равномерной ограниченности степеней оператора S :

$$\|S^n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

При исследовании устойчивости разностной схемы (1.9) по методу Фурье сначала подставляем в (1.9) решение вида

$$u^n(x) = \lambda^n U_0 e^{ikx}, \quad (1.12)$$

где λ – комплексное число, U_0 – постоянный вектор, k – вещественное волновое число, $i = \sqrt{-1}$. В результате подстановки (1.12) в (1.9) получим уравнение

$$(G - \lambda I)U_0 = 0. \quad (1.13)$$

Для существования нетривиального решения U_0 системы (1.13) необходимо, чтобы

$$\det(G - \lambda I) = 0. \quad (1.14)$$

Матрица G в (1.13), (1.14) называется *матрицей перехода разностной схемы*.

Уравнение (1.14) называется *характеристическим уравнением* разностной схемы. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($m \geq 1$) – корни уравнения (1.14); они являются собственными значениями матрицы перехода G .

Необходимое условие устойчивости фон Неймана имеет вид:

$$|\lambda_j| \leq 1 + O(\tau) \quad \text{для} \quad 0 < \tau < \Delta t, \quad j = 1, \dots, m, \quad -\infty < k < \infty. \quad (1.15)$$

Условие Неймана (1.15) является *достаточным* для устойчивости, если матрица перехода G – нормальная матрица [5].

Матрица G называется *нормальной*, если

$$G^* G = G G^*, \quad (1.16)$$

где G^* – комплексно сопряженная и транспонированная к G матрица; то есть, если $G = \| a_{jk} + i b_{jk} \|_1^m$, где a_{jk}, b_{jk} – вещественные числа, $i = \sqrt{-1}$, то тогда $G = \| a_{kj} - i b_{kj} \|_1^m$.

Задачи к главе 1

Задача 1. Рассмотрим задачу Коши вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.17)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.18)$$

где $a = \text{const} > 0$, $u_0(x)$ – заданная функция. Аппроксимируем задачу (1.17), (1.18) следующим образом:

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)/2}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0; \quad (1.19)$$

$$u_j^0 = u_0(jh), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Разностная схема (1.19) называется *схемой Лакса* [2]. Найти условие устойчивости этой схемы методом Фурье. Применима ли схема (1.19) при $a < 0$?

Решение. Подставим в (1.19) вместо u_j^m решение вида

$$u_j^m = \lambda^m e^{ijkh}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

В результате получаем из (1.19) уравнение:

$$\lambda^n e^{ijkh} \left[\frac{\lambda - (e^{-ikh} + e^{ikh})/2}{\tau} + a \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h} \right] = 0. \quad (1.20)$$

Так как мы ищем нетривиальное решение $\lambda \neq 0$, то из (1.20) получаем, разделив обе части (1.20) на $\lambda^n e^{ijkh}$:

$$\frac{\lambda - (e^{-ikh} + e^{ikh})/2}{\tau} + a \frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h} = 0. \quad (1.21)$$

Введем для краткости обозначение $\xi = kh$ и воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{\pm i\xi} = \cos \xi \pm i \sin \xi.$$

Введем еще обозначение $\kappa = a\tau/h$. Тогда из (1.21) получаем следующее выражение для *множителя перехода* λ схемы Лакса (1.19):

$$\lambda = \cos \xi - i\kappa \sin \xi. \quad (1.22)$$

В соответствии с условием устойчивости фон Неймана (1.15) нам надо получить из (1.22) выражение для $|\lambda|$. Из (1.22) видно, что величина λ является комплексным числом вида $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha = \cos \xi$, $\beta = -\kappa \sin \xi$. Как известно, модуль комплексного числа есть

$$|\lambda| = |\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (1.23)$$

Подставляя в (1.23) выражения для α и β , получаем:

$$|\lambda|^2 = \cos^2 \xi + \kappa^2 \sin^2 \xi = 1 - \sin^2 \xi + \kappa^2 \sin^2 \xi = 1 - \sin^2 \xi (1 - \kappa^2). \quad (1.24)$$

В соответствии с критерием Неймана (1.15) проверим теперь, при каких κ выполняется неравенство $|\lambda| \leq 1$:

$$1 - \sin^2 \xi (1 - \kappa^2) \leq 1; \quad -\sin^2 \xi (1 - \kappa^2) \leq 0; \quad \sin^2 \xi (1 - \kappa^2) \geq 0; \quad 1 - \kappa^2 \geq 0;$$

$$(1 - \kappa)(1 + \kappa) \geq 0. \quad (1.25)$$

Для того, чтобы выполнялось неравенство (1.25), число Куранта κ должно удовлетворять неравенствам $-1 \leq \kappa \leq 1$, или, в более краткой записи:

$$|\kappa| \leq 1. \quad (1.26)$$

Из (1.26) следует, что схема Лакса применима и при $a < 0$, так как можно при заданных a и h подобрать такое значение временного шага τ , что соответствующее значение $\kappa = a\tau/h$ попадет в область устойчивости (1.26) рассматриваемой схемы.

Задача 2. Из анализа устойчивости схемы Лакса (1.19) для уравнения переноса (1.17) следует, что для устойчивого счета по этой схеме можно брать значения временного шага τ как $\tau = O(h)$. Условие устойчивости схемы (1.19) тем более будет выполняться, если брать τ в виде $\tau = O(h^2)$. Будет ли схема Лакса (1.19) аппроксимировать уравнение (1.17) при законе предельного перехода

$$\tau = h^2 / \mu, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad (1.27)$$

когда $h \rightarrow 0$?

Решение. Найдем сначала вид ведущего члена погрешности аппроксимации схемы Лакса (1.19). Для этого подставим в (1.19) следующие разложения по формуле Тейлора относительно точки $(jh, n\tau)$:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + O(\tau^3); \quad u_{j\pm 1}^n = u_j^n \pm h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + O(h^3).$$

В результате получим из (1.19) первое дифференциальное приближение схемы Лакса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{2\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.28)$$

Подставляя формулу (1.27) для τ в (1.28), получаем уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.29)$$

Из (1.29) следует, что в пределе при $h \rightarrow 0$ схема Лакса аппроксимирует параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.30)$$

таким образом, при законе предельного перехода (1.27) схема Лакса (1.19) не аппроксимирует уравнение (1.17).

Схема Лакса является примером схемы с *условной аппроксимацией*.

Примечание. Более подробное обсуждение этого свойства схемы Лакса можно найти в [6, с. 367-368].

Задача 3. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu = \text{const} > 0. \quad (1.31)$$

Аппроксимируем уравнение (1.31) разностной схемой Дюфорты-Франкела [5]:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{h^2}. \quad (1.32)$$

Будет ли схема (1.32) аппроксимировать уравнение (1.31) при законе предельного перехода $\tau = \beta h$, $\beta = \text{const} > 0$, когда $h \rightarrow 0$?

Задача 4. Пусть вещественная функция $u(x)$ такова, что

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} u(x)^2 dx < \infty.$$

Пусть $h = \text{const} > 0$. Найти преобразование Фурье функции $u(x+h)$.

Решение. По определению, преобразование Фурье функции $u(x+h)$ есть выражение

$$F_k(u(x+h)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x+h) dx. \quad (1.33)$$

Заметим, что величина

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x) dx$$

является результатом преобразования Фурье функции $u(x)$. С целью установления связи между $F_k(u(x+h))$ и $\hat{u}(k)$ сделаем в (1.33) замену переменной $y = x + h$. Так как $dy = dx$, то можем переписать формулу (1.33) в виде:

$$F_k(u(x+h)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(y-h)} u(y) dy = e^{ikh} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} u(y) dy \right) = e^{ikh} \hat{u}(k).$$

Отсюда получаем ответ: $F_k(u(x+h)) = e^{ikh} \hat{u}(k)$.

Задача 5. Пусть вещественная функция $u(x, t)$ такова, что

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)^2 dx < \infty \quad \forall t \geq 0.$$

Пусть $\tau = \text{const} > 0$. Определим прямое преобразование Фурье по формуле

$$F_k(u(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x, t) dx,$$

где k – вещественное волновое число. Найти $F_k(u(x, t+\tau))$.

Задача 6. Аппроксимируем уравнение (1.17) пятистадийной схемой Рунге-Кутты:

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u^n; \\ u^{(1)} &= u^{(0)} - \gamma_5 \tau Pu^{(0)}; \\ u^{(2)} &= u^{(0)} - \gamma_4 \tau Pu^{(1)}; \\ &\dots\dots\dots \\ u^{(5)} &= u^{(0)} - \gamma_1 \tau Pu^{(4)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{8}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{6}, \quad \gamma_5 = \frac{1}{4}, \\ Pu &= -a \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \end{aligned}$$

Получить условие устойчивости схемы по методу Фурье.

Задача 7. Пусть дано нелинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.34}$$

(это уравнение называют уравнением Бюргерса без вязкости). Найти дифференциальное следствие вида

$$u_{tt} = f(u, u_x, u_{xx}).$$

Решение. Дифференцируя обе части уравнения (1.34) по t , находим:

$$u_{tt} = -u_t u_x - uu_{xt} = (uu_x)_x - u(u_t)_x = uu_x^2 - u(-uu_x)_x = uu_x^2 + u(u_x^2 + uu_{xx}).$$

Итак, искомое дифференциальное следствие имеет вид

$$u_{tt} = 2 uu_x^2 + u^2 u_{xx}.$$

Задача 8. Рассмотрим линейное уравнение переноса вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1.35)$$

где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, t – время, x , y – пространственные координаты. Найти дифференциальное следствие вида

$$u_{ttt} = g(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}).$$

Задача 9. Разностная схема Мак-Кормака [2-3, 6,7], аппроксимирующая двумерное уравнение переноса (1.35), может быть записана в виде:

$$\tilde{u}_{ij} = u_{ij}^n - \frac{\tau}{h_1} A(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - \frac{\tau}{h_2} B(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n); \quad (1.36)$$

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^n + \tilde{u}_{ij}) - \frac{1}{2} \frac{\tau}{h_1} A(\tilde{u}_{ij} - \tilde{u}_{i-1,j}) - \frac{1}{2} \frac{\tau}{h_2} B(\tilde{u}_{ij} - \tilde{u}_{i,j-1}), \quad (1.37)$$

где $u_{ij}^n = u(ih_1, jh_2, n\tau)$, h_1, h_2 – шаги равномерной прямоугольной сетки вдоль осей x, y , соответственно; τ – временной шаг.

Построить шаблон n -го слоя схемы (1.36) – (1.37). Будет ли этот шаблон симметричным относительно какой-либо из линий $x = x_i = ih_1, y = y_j = jh_2$?

Решение. Эту задачу можно решать двумя способами. Первый основан на применении геометрических построений. Опишем его применительно к рассматриваемой схеме (1.36). Шаблон n -го слоя уравнения (1.36) (это уравнение еще называют схемой “предиктор”) имеет, очевидно, вид, показанный на рис. 1, а. В уравнении (1.37) (его еще называют схемой “корректор”) значения сеточных величин с тильдой (\sim) используются в точках, показанных на рис. 1, б. Прикладывая теперь центральный узел (i, j) шаблона рис. 1, а ко всем точкам шаблона рис. 1, б, легко получаем шаблон n -го слоя схемы Мак-Кормака (1.36), (1.37), см. рис. 2. Из рис. 2 следует, что шаблон схемы Мак-Кормака (1.36), (1.37) не является симметричным ни относительно линии $x = x_i$, ни относительно линии $y = y_j$.

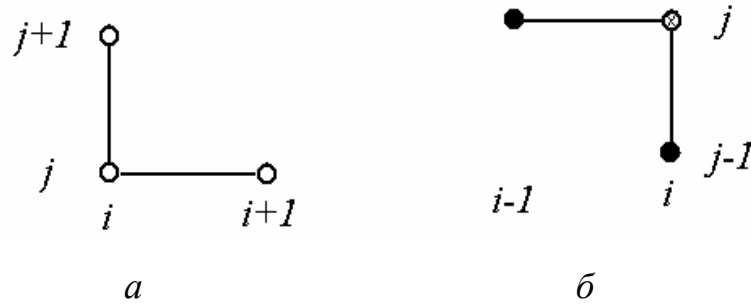


Рис. 1. Шаблоны n -го слоя: (а) шаблон n -го слоя схемы “предиктор” схемы Мак-Кормака (1.36); (б) шаблон n -го слоя схемы “корректор” схемы Мак-Кормака (1.37). Символ \otimes обозначает узел (i, j) сетки в плоскости (x, y) .

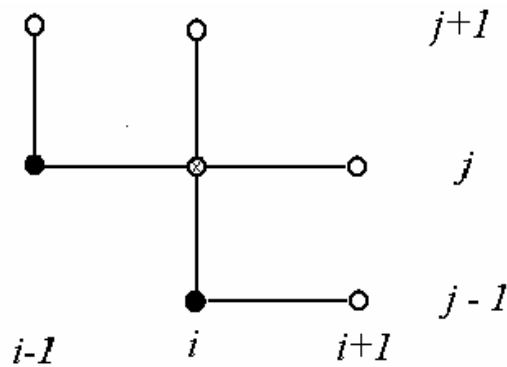


Рис. 2. Шаблон n -го слоя: схемы Мак-Кормака (1.36); (1.37).

Второй способ решения данной задачи основан на применении математической техники, описанной в [3]. Как нам представляется, этот способ предпочтительнее при получении шаблонов n -го слоя сложных разностных схем, аппроксимирующих уравнения с двумя или тремя пространственными переменными. Опишем этот способ получения шаблона.

Из уравнения (1.36) следует, что величина \tilde{u}_{ij} зависит от значений сеточного решения u^n в узлах (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j+1)$. Мы можем отразить математически этот факт, применяя следующую формулу:

$$\tilde{u}_{ij} = F_1((i, j), (i+1, j), (i, j+1)). \quad (1.38)$$

Тогда, например, значение решения $\tilde{u}_{i-1,j}$, входящее в уравнение (1.37), получается из (1.38) сдвигом индекса i на минус 1:

$$\tilde{u}_{i-1,j} = F_1((i-1, j), (i, j), (i-1, j+1)). \quad (1.39)$$

Аналогично,

$$\tilde{u}_{i,j-1} = F_1((i, j-1), (i+1, j-1), (i, j)). \quad (1.40)$$

Собирая все точки сетки, имеющиеся в правых частях выражений (1.38), (1.39), (1.40), мы получим шаблон St_{MC} схемы Мак-Кормака (1.36), (1.37):

$$St_{MC} = \{(i-1, j), (i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i-1, j+1), (i, j-1), (i+1, j-1)\}. \quad (1.41)$$

Из (1.41) следует, что шаблон n -го слоя схемы (1.36), (1.37) содержит 7 точек, см. также рис. 2.

Задача 10. Разностная схема Мак-Кормака [2-3, 6-8], аппроксимирующая двумерное уравнение переноса (1.35), может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ij} &= u_{ij}^n - \frac{\tau}{h_1} A(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) - \frac{\tau}{h_2} B(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n); \\ u_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{i,j}^n + \tilde{u}_{ij}) - \frac{1}{2} \frac{\tau}{h_1} A(\tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i,j}) - \frac{1}{2} \frac{\tau}{h_2} B(\tilde{u}_{ij} - \tilde{u}_{i,j-1}). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Построить шаблон n -го слоя схемы (1.42). Будет ли этот шаблон симметричным относительно какой-либо из линий $x = x_i = ih_1$, $y = y_j = jh_2$?

Задача 11. Рассмотрим трехмерное уравнение переноса вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \quad (1.43)$$

где A_1, A_2, A_3 – постоянные коэффициенты, t – время, x_1, x_2, x_3 – пространственные переменные. Аппроксимируем уравнение (1.43) следующей схемой Мак-Кормака:

$$\tilde{u}_{ijk} = u_{ijk}^n - \tau \sum_{m=1}^3 \Delta_{x_m}^+ F_m(u_{ijk}^n), \quad u_{ijk}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_{ijk}^n + \tilde{u}_{ijk} - \tau \sum_{m=1}^3 \Delta_{x_m}^- F_m(\tilde{u}_{ijk}) \right), \quad (1.44)$$

где $u_{ijk}^n = u(ih_1, jh_2, kh_3, n\tau)$, $F_m(u) = A_m u$, $m = 1, 2, 3$;

$$\Delta_{x_m}^+ u_{ijk} = \frac{u_{i+\delta_m^1, j+\delta_m^2, k+\delta_m^3} - u_{ijk}}{h_m}, \quad \Delta_{x_m}^- u_{ijk} = \frac{u_{ijk} - u_{i-\delta_m^1, j-\delta_m^2, k-\delta_m^3}}{h_m}, \quad \delta_m^l = \begin{cases} 1, & l = m \\ 0, & l \neq m \end{cases}, \quad l, m = 1, 2, 3.$$

Построить шаблон n -го слоя схемы (1.44). Будет ли этот шаблон симметричным относительно какой-либо из линий $x_1 = ih_1, x_2 = jh_2, x_3 = kh_3$?

Задача 12. Схема Мак-Кормака (1.44) использует три разности вперед $\Delta_{x_m}^+$ в уравнении для \tilde{u}_{ijk} и три разности назад $\Delta_{x_m}^-$ в уравнении корректора. В этой связи введем обозначение M_{---}^{+++} для схемы (1.44). Варьируя применение операторов $\Delta_{x_m}^+$ и $\Delta_{x_m}^-$ в схеме Мак-Кормака, получим семь остальных вариантов этой схемы:

$$M_{+++}^{---}, M_{--+}^{+++}, M_{+--}^{---}, M_{-+-}^{+++}, M_{-++}^{---}, M_{+-+}^{---}, M_{++-}^{---}. \quad (1.45)$$

Построить шаблон n -го слоя для какой-нибудь из схем (1.45). Будет ли этот шаблон симметричным относительно какой-либо из линий $x_1 = ih_1, x_2 = jh_2, x_3 = kh_3$?

Задача 13. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad a < 0, \quad 0 \leq x \leq b; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq b; \\ u(b, t) &= g(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Построить пример разностной начально-краевой задачи, аппроксимирующей задачу (1.46) в области $D = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$ с порядком точности $O(\tau) + O(h)$ и не требующую дополнительных разностных граничных условий.

Указание: использовать соображения, приведенные в п. 1.4 пособия [1].

Задача 14. Система уравнений

$$u_t + uu_x + vu_y = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y = 0, \quad (1.47)$$

где u, v – компоненты вектора скорости газа, описывает двумерное изобарическое течение газа, то есть течение, в котором давление газа $p(x, y, t) = \text{const} \quad \forall x, y, t$. Пусть в некоторой задаче $u \geq 0, v \geq 0$. Построить пример явной устойчивой схемы первого порядка точности для системы (1.47). Исследовать устойчивость этой схемы в норме пространства L_2 .

Задача 15. Рассмотрим следующую разностную задачу Коши:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0; \quad u_j^0 = u_0(jh), \quad a = \text{const} > 0, \quad (1.48)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Можно ли решать численно задачу (1.17), (1.18) с помощью (1.48) “из настоящего в прошлое”, то есть, используя начальное условие $u_j^0 = u_0(jh)$, искать $u_j^{-1}, u_j^{-2}, u_j^{-3}, \dots$, где $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$?

Задача 16. Рассмотрим одномерное уравнение конвекции-диффузии

$$u_t + au_x = \nu u_{xx}, \quad (1.49)$$

где $a = \text{const}, \nu = \text{const} > 0$. Аппроксимируем (1.49) оптимальной по устойчивости двухстадийной схемой Рунге-Кутты:

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u^n; \\ u^{(1)} &= u^{(0)} - \tau Pu^{(0)}; \\ u^{(2)} &= u^{(0)} - \tau Pu^{(1)}; \\ u^{n+1} &= u^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

где

$$Pu = -a \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \nu \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}, \quad (1.51)$$

h – шаг равномерной сетки на оси x , τ – временной шаг. Получить условие устойчивости схемы (1.50), (1.51) методом Фурье. Изобразить полученную область устойчивости в плоскости параметров

$$\kappa_1 = a \frac{\tau}{h}, \quad \kappa_2 = \nu \frac{\tau}{h^2}. \quad (1.52)$$

Задача 17. Аппроксимируем задачу Коши (1.17), (1.18) трехслойной разностной схемой вида

$$u_j^{n+2} = \Lambda_1 u_j^n + \Lambda_2 u_j^{n+1}, \quad u_j^0 = u_0(jh), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.53)$$

где Λ_1, Λ_2 – линейные разностные операторы, такие, что необходимое условие устойчивости фон Неймана имеет вид $|a| \tau / h \leq C$, где $0 < C < \infty$. Будет ли это условие также и достаточным для устойчивости схемы (1.53)?

У к а з а н и е. При решении задачи сначала привести схему (1.53) к системе из двух разностных уравнений по методике, описанной в главе 7 книги [5]. Затем проверить условие (1.16).

Задача 18. Уравнение (1.34) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (1.54)$$

где $f(u) = u^2/2$. Аппроксимируем (1.54) следующей явной разностной схемой:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{h} = 0. \quad (1.55)$$

Наряду со схемой (1.55) рассмотрим разностную схему, аппроксимирующую непосредственно уравнение (1.34):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0. \quad (1.56)$$

Осуществить линейризацию обеих разностных схем (1.55), (1.56). Будут ли линейризованные схемы совпадать? Сравнить главные члены погрешности обеих схем (1.55), (1.56). Какая из этих схем предпочтительнее?

У к а з а н и е. Обсуждение схем (1.55), (1.56) имеется в [7].

Задача 19. Рассмотрим для уравнения теплопроводности (1.31) следующую пятиточечную симметричную разностную схему [9]:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \frac{\nu}{h^2} \left(-\frac{1}{12} u_{j-2}^n + \frac{4}{3} u_{j-1}^n - \frac{5}{2} u_j^n + \frac{4}{3} u_{j+1}^n - \frac{1}{12} u_{j+2}^n \right), \quad j = 3, \dots, M-2; \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \frac{\nu}{h^2} \left(\frac{11}{12} u_{j-1}^n - \frac{5}{3} u_j^n + \frac{1}{2} u_{j+1}^n + \frac{1}{3} u_{j+2}^n - \frac{1}{12} u_{j+3}^n \right), \quad j = 2; \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$u_1^n = g_1(t_n); \quad u_M^n = g_2(t_n);$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{\nu}{h^2} (u_{j-2}^n - 2u_{j-1}^n + u_j^n), \quad j = M-1.$$

Здесь $u_j^n = u(a + (j-1)h, n\tau)$, $[a, b]$ – промежуток интегрирования на оси x , τ – временной шаг; $h = (b-a)/(M-1)$, $M > 1$.

Определить порядок аппроксимации схемы (1.57).

Задача 20. Рассмотрим для уравнения теплопроводности (1.31) следующую трехслойную схему [9]:

$$\frac{u_j^{n-1} - 4u_j^n + 3u_j^{n+1}}{2\tau} = \frac{\nu}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.58)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{\nu}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad n = 0.$$

С помощью анализа устойчивости по Нейману получить необходимое условие устойчивости схемы (1.58).

Задача 21. Определить порядок аппроксимации разностной схемы (1.58).

Задача 22. Схема Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности (1.31) имеет вид [5,10]

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{\nu}{2h^2} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2(u_j^{n+1} + u_j^n) + u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n), \quad (1.59)$$

где $u_j^n = u(jh, n\tau)$. Найти порядок аппроксимации этой схемы в точке $(jh, n\tau)$. Исследовать ее устойчивость методом Фурье.

Указание. См. стр. 70-71 книги [10].

Задача 23. Аппроксимируем систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const} > 0$$

схемой Лакса-Вендрофа [3, 5]:

$$w_j^{n+1} - w_j^n + \frac{\tau}{2h} A(w_{j+1}^n - w_{j-1}^n) - \frac{\tau^2}{2h^2} A^2(w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n) = 0, \quad (1.60)$$

где

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Получить методом Фурье необходимое условие устойчивости схемы (1.60). Будет ли оно достаточным для устойчивости данной схемы?

Решение. В соответствии с процедурой метода Фурье подставим в (1.60) решение $w_j^n = W_0 \lambda^n e^{ijkh}$, где $i = \sqrt{-1}$, k – вещественное волновое число, W_0 – постоянный вектор. Деля обе части полученного равенства на e^{ijkh} , получим для определения W_0 однородную систему $(G - \lambda I) W_0 = 0$, где G – матрица перехода схемы (1.60),

$$G = I - \left(\frac{\tau}{h} i \sin \xi \right) A + \frac{\tau^2}{h^2} (\cos \xi - 1) A^2, \quad (1.62)$$

где I – единичная матрица, $\xi = kh$. Из (1.62) видим, что матрица G является матричным многочленом от матрицы A (1.61). Поэтому собственные числа λ_1, λ_2 матрицы G находятся по формулам:

$$\lambda_k = 1 - \frac{\tau}{h} i \sin \xi \mu_k + \frac{\tau^2}{h^2} (\cos \xi - 1) \mu_k^2, \quad k = 1, 2, \quad (1.63)$$

где μ_1, μ_2 – собственные числа матрицы A . Они легко находятся из уравнения $\det(A - \mu I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\mu & c \\ c & -\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = c, \quad \mu_2 = -c.$$

Таким образом, корни μ_1, μ_2 в данном случае оказались вещественными. Поэтому

$$\begin{aligned} |\lambda_k|^2 &= \left(1 - \frac{\tau^2}{h^2} 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} \mu_k^2 \right)^2 + \left(\frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \xi \right) \mu_k^2 = 1 - 4 \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\xi}{2} \mu_k^2 + 4 \frac{\tau^4}{h^4} \sin^4 \frac{\xi}{2} \mu_k^4 \\ &+ \frac{\tau^2}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\xi}{2} \cos^2 \frac{\xi}{2} \mu_k^2 = 1 - 4 \frac{\tau^2}{h^2} \left(\sin^4 \frac{\xi}{2} \right) \mu_k^2 + 4 \frac{\tau^4}{h^4} \sin^4 \frac{\xi}{2} \mu_k^4 \\ &= 1 - 4 \frac{\tau^2}{h^2} \left(\sin^4 \frac{\xi}{2} \right) \mu_k^2 \left(1 - \frac{\tau^2}{h^2} \mu_k^2 \right). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Из (1.64) следует, что необходимое условие устойчивости фон Неймана (1.15) выполняется, если временной шаг τ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\tau}{h} c \leq 1. \quad (1.65)$$

Выясним теперь, будет ли условие устойчивости (1.65) достаточным для устойчивости схемы Лакса-Вендрофа (1.60). В соответствии с (1.16) мы должны проверить, является ли матрица G (1.62) нормальной. Это можно было бы сделать, вычисляя произведения G^*G и GG^* и сравнивая их затем между собой. Но на этом пути пришлось бы делать довольно громоздкие выкладки, в процессе которых трудно избежать ошибок.

Благодаря тому, что матрица A в (1.61) – вещественная симметрическая матрица, имеется другая возможность проверить, является ли матрица (1.62) нормальной. В теории матриц доказано, что если матрица G является матричным многочленом с действительными или комплексными коэффициентами от симметрической вещественной матрицы A , то матрица G является нормальной. У нас матрица A (1.61) как раз и является вещественной симметрической матрицей. Поэтому сразу заключаем, что матрица G (1.62) является нормальной. Следовательно, условие (1.65) является также достаточным для устойчивости схемы Лакса-Вендрофа (1.60).

Задача 24. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1.66)$$

где вектор w и матрица A даются формулами (1.61). В последние годы в аэродинамических расчетах получила относительно широкое распространение следующая конечно-разностная схема для системы (1.66) [11]:

$$\begin{aligned} w_j^{n+1/2} &= w_j^n - \frac{\tau}{6h} A(7w_j^n - 8w_{j-1}^n + w_{j-2}^n); \\ w_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[w_j^n + w_j^{n+1/2} + \frac{\tau}{6h} A(7w_j^{n+1/2} - 8w_{j+1}^{n+1/2} + w_{j+2}^{n+1/2}) \right]. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Получить методом Фурье необходимое условие устойчивости схемы (1.67). Будет ли оно достаточным для устойчивости данной схемы?

Задача 25. Предположим, в отличие от предыдущей задачи, что $w(x,t)$ в (1.66) – скалярная функция и что A – скалярная константа, $A \neq 0$. Исследовать порядок аппроксимации схемы (1.67).

Задача 26. Для уравнения $u_t = a(u,x)u_x$ получить дифференциальные следствия, в которых производные u_{tx} , u_{tb} , u_{txx} , u_{ttx} , u_{ttt} выражены через производные по x функции $u(x, t)$.

Примечание. Выражения для искомым следствий можно найти в [12].

Глава 2

НЕЯВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Разностная схема называется *неявной*, если её сеточный шаблон содержит на верхнем временном слое $n + 1$ более чем одну точку.

При исследовании аппроксимации и устойчивости неявных разностных схем применимы те же методы, что и при исследовании явных разностных схем.

Разностные схемы, устойчивые при любых значениях сеточных параметров, называются *абсолютно устойчивыми*.

Неявная разностная схема необязательно является абсолютно устойчивой.

Понятие неявной разностной схемы применимо также к аппроксимации систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих, например, химические реакции в потоке реагирующих газов:

$$\frac{d y}{d t} = f(y, t). \quad (2.1)$$

Пусть y_0 – некоторое решение системы (2.1), относительно которого мы хотим линеаризовать неявную разностную схему вида

$$H_1(y^{n+1}, y^n) = H_2(y^n). \quad (2.2)$$

При линеаризации заменяем y^{n+1} , y^n в (2.2) по формуле $y^m = y_0 + \delta y^m$, $m = n, n+1$. В результате из (2.2) получаем линеаризованную разностную схему:

$$y^{n+1} = S(y_0) y^n. \quad (2.3)$$

Обозначим через $\lambda_j \tau$ собственные числа матрицы $S(y_0)$, где τ – временной шаг схемы (2.2). Если для всех j $\operatorname{Re}(\lambda_j \tau) \leq 0$ во всей левой полуплоскости комплексной плоскости $\lambda \tau$, то численный метод решения системы (2.1) называется *A-устойчивым*.

В течение последних двадцати лет имело место бурное развитие *компактных* разностных схем для численного решения задач аэрогидродинамики и магнитной гидродинамики [13]. Ввиду того, что в настоящее время эти схемы все чаще применяются при решении прикладных задач, мы в данной главе формулируем ряд задач построения и исследования компактных разностных схем.

Для того, чтобы облегчить читателю решение этих задач, мы сейчас изложим основную идею, лежащую в основе построения компактных схем, и осуществим построение одной из известных компактных схем.

Рассмотрим задачу построения явной разностной схемы порядка аппроксимации $O(\tau) + O(h^k)$, $k \geq 1$, для уравнения (1.17). Можно показать с помощью метода неопределенных коэффициентов (см., например, [8]), что для построения аппроксимации порядка точности $O(h^k)$ производной $\partial u/\partial x$ необходимо использовать как минимум $k+1$ точек сетки вдоль оси x . При больших значениях k это приводит к необходимости применения многоточечных шаблонов. В случае явных многоточечных схем возникают проблемы устойчивости и схемной немонотонности.

Другой подход к построению схем высокого порядка точности состоит в использовании дифференциальных следствий исходных уравнений (см. [1], а также выше задачи 7,8,23,26). Этот подход, в принципе, позволяет строить схемы произвольного порядка аппроксимации. Однако с увеличением требуемого порядка аппроксимации в общем случае этот метод становится достаточно громоздким.

Альтернативный путь построения схем высокого порядка состоит в использовании так называемых *компактных* аппроксимаций. В этих аппроксимациях используются небольшие сеточные шаблоны вдоль оси x . За счет привлечения таких же небольших шаблонов вдоль оси x на верхнем, $(n+1)$ -ом слое по t возникают дополнительные неопределенные коэффициенты при построении аппроксимации производной $\partial u/\partial x$. Распоряжаясь этими дополнительными коэффициентами, можно повысить порядок аппроксимации схемы. Например, возможно построение схемы порядка аппроксимации $O(\tau^2) + O(h^3)$ на шаблоне, содержащем только по три точки вдоль оси x на n -ом и $(n+1)$ -ом временных слоях. Таким образом, шаблон вдоль оси x оказывается небольшим, или “компактным”. Отсюда и возник термин “компактные разностные схемы”.

Для примера осуществим построение компактной разностной аппроксимации порядка $O(h^3)$ производной du/dx . При этом предполагаем, что $u(x) \in C^4[a, b]$, где $[a, b]$ – промежуток на оси x , в котором задана функция $u(x)$. Пусть

$$f(x) = du/dx, \quad (2.4)$$

$$f_j = f(x_j), \quad x_j = a + (j-1)h, \quad h = (b-a)/(N-1), \quad N > 2.$$

Традиционное представление аппроксимации производной (2.4) имеет вид

$$f_j = \sum_{k=-q}^r \alpha_k u_{j+k}, \quad (2.5)$$

где $q \geq 0$, $r \geq 0$, а α_k – некоторые коэффициенты, зависящие от шага h . В отличие от (2.5), компактная аппроксимация соотношения (2.4) может быть записана следующим образом:

$$\alpha f_{j-1} + \beta f_j + \gamma f_{j+1} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}. \quad (2.6)$$

Подберем неопределенные коэффициенты в (2.6) так, чтобы выполнялось соотношение

$$|\alpha f_{j-1} + \beta f_j + \gamma f_{j+1} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h}| = O(h^3). \quad (2.7)$$

Для этого подставим в (2.6) разложения в ряды Тейлора функций $f(x)$ и $u(x)$ в точке $x = x_j$:

$$\begin{aligned} & \alpha(f_j - hf_x + \frac{h^2}{2}f_{xx} - \frac{h^3}{6}f_{xxx} + \frac{h^4}{24}f_x^{(4)}) + \beta f_j + \gamma(f_j + hf_x + \frac{h^2}{2}f_{xx} + \frac{h^3}{6}f_{xxx} + \frac{h^4}{24}f_x^{(4)}) = \\ & = \frac{1}{h} \left(u_j - u_j + hu_x - \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{h^3}{6}u_{xxx} - \frac{h^4}{24}u_x^{(4)} \right) + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь мы для краткости применили обозначения $f_x = df(x_j)/dx$, $f_{xxx} = d^3f(x_j)/dx^3$ и т.д. При приведении подобных членов в (2.8) учтем тот факт, что $f = du/dx$. В результате получим из (2.8) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta + \gamma - 1)f_j + h \left(\gamma - \alpha + \frac{1}{2} \right) f_x + h^2 \left[\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) - \frac{1}{6} \right] f_{xx} + \\ & + h^3 \left[\frac{1}{6}(\gamma - \alpha) - \frac{1}{24} \right] f_{xxx} = O(h^4). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для того, чтобы соотношение (2.9) выполнялось при любой функции $f(x) \in C^3[a, b]$ и, кроме того, выполнялось условие (2.7), потребуем, чтобы пока неопределенные коэффициенты α , β , γ удовлетворяли системе

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \gamma - \alpha + 1/2 = 0, \quad (\alpha + \gamma)/2 - (1/6) = 0.$$

Решая эту систему, получим:

$$\alpha = \frac{5}{12}, \quad \beta = \frac{8}{12}, \quad \gamma = -\frac{1}{12}. \quad (2.10)$$

Подставляя найденные значения (2.10) в (2.6), получим с учетом (2.9):

$$\frac{5}{12}f_{j-1} + \frac{8}{12}f_j - \frac{1}{12}f_{j+1} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} + \frac{h^3}{24}f_{xxx} + O(h^4). \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что если $u(x) \in C^4[a, b]$, то выполняется оценка (2.7).

Введем разностный оператор A по формуле:

$$Af_j = \frac{5}{12}f_{j-1} + \frac{8}{12}f_j - \frac{1}{12}f_{j+1}. \quad (2.12)$$

Тогда (2.11) можем переписать в виде:

$$Af_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}. \quad (2.13)$$

В (2.13) мы опустили члены высокого порядка малости $O(h^3) + O(h^4)$. Из (2.13) получаем следующую компактную аппроксимацию производной $f_j = du(x_j)/dx$ третьего порядка точности:

$$f_j = A^{-1} \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right). \quad (2.14)$$

Теперь на основе (2.14) построим простейшую двухслойную компактную разностную схему порядка аппроксимации $O(\tau) + O(h^3)$ для уравнения (1.17) при $a > 0$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + A^{-1}a \left[\sigma \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right] = 0. \quad (2.15)$$

Здесь σ – весовой множитель, $0 \leq \sigma \leq 1$. Подействуем на обе части (2.15) оператором A (2.12). В результате получим окончательный вид однопараметрического семейства компактных разностных схем:

$$A \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \left[\sigma \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right] = 0. \quad (2.16)$$

Схема (2.16) имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2) + O(h^3)$ при $\sigma = 0.5$ и порядок $O(\tau) + O(h^3)$ при $\sigma \neq 0.5$ и является абсолютно устойчивой при $\sigma \geq 0.5$ [13]. Легко видеть из (2.16) с учетом (2.12), что схема (2.16) является *неявной*. Разностное решение u^{n+1} эффективно вычисляется с помощью трехточечной прогонки.

Задачи к главе 2

Задача 27. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0, \quad (2.17)$$

где $\varphi'(u) > 0$, $\varphi''(u) \neq 0$. Аппроксимируем (2.17) разностной схемой

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \left\{ \alpha [\varphi(u_{j+1}^n) - \varphi(u_{j-1}^n)] + (1-\alpha) [\varphi(u_{j+1}^{n+1}) - \varphi(u_{j-1}^{n+1})] \right\} / (2h) = 0, \quad (2.18)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$, α – весовой множитель. Исследовать аппроксимацию схемы (2.18). При каком значении α схема (2.18) будет иметь второй порядок аппроксимации? Исследовать устойчивость схемы (2.18) по методу Фурье в приближении “замороженных” коэффициентов.

Задача 28. Аппроксимировать уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2.19)$$

где $\nu = \text{const} > 0$, схемой переменных направлений. Доказать, что эта схема имеет второй порядок аппроксимации в точке $(jh_1, kh_2, (n + \frac{1}{2})\tau)$, где h_1, h_2 – шаги равномерной сетки в направлении осей x, y , соответственно; τ – временной шаг.

У к а з а н и е. Использовать уравнение (5.13) пособия [1]. Осуществить в нем разложения сеточных функций в ряды тейлора относительно точки, указанной в условии задачи.

Задача 29. Рассмотрим схему Писмэна, Дугласа, Рэкфорда переменных направлений, аппроксимирующую уравнение теплопроводности (2.19). Множитель перехода ρ этой схемы имеет вид

$$\rho = \prod_{j=1}^2 \frac{\left(1 - \frac{1}{2} a_j\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} a_j\right)},$$

где

$$a_j = 4r_j \sin^2 \frac{m_j h_j}{2}, \quad r_j = \frac{\nu \tau}{h_j^2}, \quad j = 1, 2,$$

m_j – вещественное волновое число, ν – коэффициент в исходном уравнении (2.19), $\nu = \text{const} > 0$. Доказать абсолютную устойчивость схемы Писмэна, Дугласа, Рэкфорда.

Задача 30. Рассмотрим уравнение конвекции-диффузии

$$u_t + Au_x + Bu_y = \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad (2.20)$$

где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, $\nu = \text{const} > 0$. Пусть разностная схема

$$\tilde{u}^n = u^n, \quad \tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n = \tau \Lambda_1(\tilde{u}^n, \tilde{u}^{n+1}) \quad (2.21)$$

аппроксимирует уравнение конвекции

$$u_t + Au_x + Bu_y = 0. \quad (2.22)$$

Пусть разностная схема

$$u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1} = \tau \Lambda_2(\tilde{u}^{n+1}, u^{n+1}) \quad (2.23)$$

аппроксимирует уравнение теплопроводности

$$u_t = \nu(u_{xx} + u_{yy}). \quad (2.24)$$

Доказать, что построенная схема расщепления по физическим процессам (2.21), (2.23) аппроксимирует исходное уравнение (2.20) при $t = n\tau$, τ – временной шаг схемы.

Решение. Тот факт, что разностный оператор аппроксимирует некоторый оператор, будем обозначать символом \approx . Поделив обе части разностного уравнения (2.21) на τ , замечаем, что разделенная разность

$$(\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n) / \tau$$

аппроксимирует производную u_t . Следовательно,

$$\Lambda_1(\tilde{u}^n, \tilde{u}^{n+1}) \approx -(Au_x + Bu_y). \quad (2.25)$$

Из (2.21) находим:

$$\tilde{u}^{n+1} = u^n + \tau \Lambda_1(u^n, \tilde{u}^{n+1}). \quad (2.26)$$

Из (2.23) аналогично находим, что

$$\Lambda_2(\tilde{u}^{n+1}, u^{n+1}) \approx \nu(u_{xx} + u_{yy}). \quad (2.27)$$

Подставляя в (2.23) выражение (2.26), получим следующую разностную схему:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1(u^n, \tilde{u}^{n+1}) + \Lambda_2(\tilde{u}^{n+1}, u^{n+1}) \approx -(Au_x + Bu_y) + v(u_{xx} + u_{yy}). \quad (2.28)$$

Далее, легко видеть, что $(u^{n+1} - u^n)/\tau \approx u_t$. Поэтому из (2.28) получаем:

$$u_t \approx -(Au_x + Bu_y) + v(u_{xx} + u_{yy}),$$

т. е. разностная схема (2.21), (2.23) аппроксимирует исходное уравнение (2.20).

Задача 31. Предположим, что операторы Λ_1, Λ_2 в схеме (2.21), (2.23) имеют следующие локальные погрешности аппроксимации:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\tilde{u}^n, \tilde{u}^{n+1}) &= -(Au_x + Bu_y) + O(h_1^k) + O(h_2^k), \\ \Lambda_2(\tilde{u}^{n+1}, u^{n+1}) &= v(u_{xx} + u_{yy})|_{t=n\tau} + O(h_1^k) + O(h_2^k), \end{aligned}$$

где h_1, h_2 – шаги равномерной сетки в направлении осей x, y , соответственно; $k \geq 1$. Какой порядок аппроксимации при $t = n\tau$ имеет тогда схема расщепления по физическим процессам (2.21), (2.23)?

Задача 32. Пусть разностная схема

$$\tilde{u}^n = u^n, \quad \tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n = \tau \Lambda_1(\tilde{u}^n, \tilde{u}^{n+1}) \quad (2.29)$$

аппроксимирует уравнение теплопроводности (2.24). Пусть схема

$$u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1} = \tau \Lambda_2(\tilde{u}^{n+1}, u^{n+1}) \quad (2.30)$$

аппроксимирует уравнение конвекции (2.22). Доказать, что построенная схема расщепления по физическим процессам аппроксимирует исходное уравнение (2.20) при $t = n\tau$, τ – временной шаг схемы.

Задача 33. Дано уравнение $dy/dt = f(y, t)$. Аппроксимируем его схемой типа предиктор-корректор:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}^{n+1} - y^n}{\tau} &= f(\tilde{y}^{n+1}, t_n + \tau); \\ \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} &= f(y^{n+1}, t_n + \tau) \left[1 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial f(\tilde{y}^{n+1}, t_n + \tau)}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Доказать, что схема является А-устойчивой.

У к а з а н и е. Положить $f(y, t) = \lambda y$, где $\lambda = \text{const}$, и затем воспользоваться процедурой анализа устойчивости, изложенной в [1, с. 80].

Задача 34. При исследовании устойчивости разностных схем, аппроксимирующих уравнения химической кинетики (2.1), обычно вместо исходной системы (2.1) берут модельное скалярное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad (2.31)$$

где $\lambda = \text{const}$, и исследуют устойчивость конкретной разностной схемы применительно к скалярному линейному уравнению (2.31), а не к системе (2.1). Объяснить, почему эта процедура применима в линейном приближении.

У к а з а н и е. Это объяснение дается в п. 5.6.1 книги [3].

Задача 35. Доказать, что компактная разностная схема (2.16) имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2) + O(h^3)$ при $\sigma = 0.5$.

Задача 36. Построить компактную разностную схему порядка аппроксимации $O(\tau^2) + O(h^2)$ для уравнения (1.17) при $a > 0$ на шаблоне, содержащем две точки $(j-1, n)$, (j, n) на n -ом слое по t и две точки $(j-1, n+1)$, $(j, n+1)$ на $(n+1)$ -ом слое по t .

Задача 37. На том же шаблоне, что и в задаче 36, построить простейшую компактную схему вида

$$A_1 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (2.32)$$

где A_1 – оператор компактного разностного дифференцирования. Получить условие устойчивости схемы (2.32) методом Фурье.

Задача 38. Построить компактную разностную аппроксимацию порядка точности $O(h^3)$ для производной $f_j = du(x_j)/dx$, исходя из равенства

$$\alpha_1 f_{j-1} + \beta_1 f_j + \gamma_1 f_{j+1} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h}.$$

Выписать компактную разностную схему, аналогичную схеме (2.16), для уравнения (1.17) при $a < 0$.

Глава 3

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТКАХ

Во многих прикладных задачах аэрогидромеханики расчетная область в плоскости пространственных переменных x, y имеет криволинейные границы.

Одним из широко применяемых подходов к численному интегрированию уравнений движения жидкости в таких областях является отображение исходной пространственной области D плоскости (x, y) на прямоугольную область Ω в плоскости криволинейных координат ξ, η :

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad (3.1)$$

где функции $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ предполагаются однозначными функциями обеих переменных ξ, η . Затем в области Ω строится равномерная прямоугольная сетка. Отображение (3.1) переводит ее в *криволинейную сетку* из четырехсторонних ячеек в плоскости (x, y) . При этом прямые линии $\eta = \eta_j$ отображаются на кривые $x = x(\xi, \eta_j)$, $y = y(\xi, \eta_j)$. Линии $\xi = \xi_i$ отображаются на кривые $x = x(\xi_i, \eta)$, $y = y(\xi_i, \eta)$. Таким образом, в плоскости (x, y) получаются два семейства кривых. Вследствие взаимной однозначности отображения (3.1) линии одного семейства не пересекаются друг с другом, но пересекают линии второго семейства, так что в результате получается искомая криволинейная сетка.

Следует заметить, что и уравнения, описывающие течение жидкости, при этом также необходимо преобразовать к переменным ξ, η , используя (3.1). В результате вид этих уравнений существенно усложняется.

Другой подход к численному интегрированию уравнений аэрогидромеханики состоит в применении метода конечного объема. В этом методе нет необходимости преобразовывать уравнения движения жидкости к криволинейным координатам ξ, η . То есть численное интегрирование этих уравнений осуществляется непосредственно в плоскости (x, y) “физических” пространственных координат. Метод конечного объема (МКО) более гибкий, чем метод, основанный на разностной дискретизации уравнений аэрогидромеханики в криволинейных координатах, так как в МКО можно применять не только четырехсторонние, но и треугольные, пятиугольные и т. п. ячейки.

Идея дискретизации в МКО следующая. В окрестности текущего j -го узла сетки выделяется контрольный объем D_j , который может включать в себя несколько ячеек сетки, имеющих общую вершину в узле j . Пусть Γ_j – граница

контрольного объёма D_j , и пусть система уравнений движения жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}(\bar{u})}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Интегрируя уравнение (3.2) по контрольному объёму D_j и применяя затем формулу Грина, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{D_j} \bar{u} \, dx \, dy + \oint_{\Gamma_j} (\bar{F} \, dy - \bar{G} \, dx) = 0. \quad (3.3)$$

После этого контурный интеграл в (3.3) аппроксимируется с помощью той или иной формулы приближенного вычисления контурных интегралов.

Задачи к главе 3

Задача 39. Найти условие ортогональности линий криволинейной сетки, получаемой с помощью отображения (3.1), в каждой точке пересечения этих линий.

Указание. Сначала найти касательные векторы к каждой из двух линий сетки в точке пересечения этих линий, а затем приравнять к нулю скалярное произведение этих векторов.

Задача 40. Найти вид функций $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, входящих в преобразование координат (3.1), которые отображают пространственную область, определяемую неравенством

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad (3.4)$$

где R – заданная положительная величина, на прямоугольную область в плоскости (ξ, η) . Выяснить, будет ли отображение (3.1) взаимно-однозначным. Определить, будут ли семейства линий $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ образовывать ортогональную сетку в плоскости (x, y) .

Решение. Введем полярные координаты r, φ по формулам:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (3.5)$$

где

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3.6)$$

Из неравенств (3.6) следует, что преобразование (3.5) отображает внутренность круга (3.4) на прямоугольную сетку в плоскости (r, φ) . При этом линии $\varphi = \varphi_i = \text{const}$ – это лучи, выходящие из начала координат, а линии $r = r_j = \text{const}$ – концентрические окружности, так что криволинейная сетка в плоскости (x, y) имеет вид, изображенный на рис. 3.

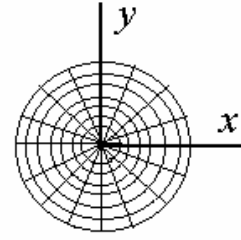


Рис. 3. Криволинейная сетка в плоскости (x, y) .

Условие ортогональности (см. задачу 39) имеет вид

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0. \quad (3.7)$$

Положим $\xi \equiv \varphi, \eta \equiv r$. Тогда имеем:

$$x_\xi = -r \sin \varphi, \quad x_\eta = \cos \varphi, \quad y_\xi = r \cos \varphi, \quad y_\eta = \sin \varphi, \quad (3.8)$$

так что условие (3.7) выполняется.

Для взаимной однозначности отображения (3.1) необходимо, чтобы якобиан $J \neq 0$, где

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi. \quad (3.9)$$

Подставляя производные (3.8) в (3.9), получаем:

$$J = -r \sin^2 \varphi - r \cos^2 \varphi = -r. \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что отображение (3.5) взаимно однозначно всюду в круге (3.4), кроме начала координат $r = 0$. Нарушение взаимной однозначности отображения (3.5) в начале координат $(0,0)$ в плоскости (x, y) естественно, так как в этой точке все линии $r = \text{const}$ имеют общую точку. Таким образом,

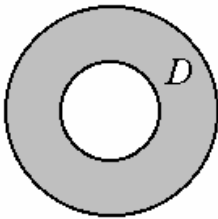


Рис. 4. Область интегрирования уравнения теплопроводности (2.6).

отображение (3.5) можно использовать, вообще говоря, только в кольце $\delta < r \leq R$, где $0 < \delta \ll R$, т. е. δ – малое положительное число.

Задача 41. Предположим, что нужно решить уравнение теплопроводности (2.6) в кольцевой области D , изображенной на рис. 4. Найти вид взаимно однозначного отображения (3.1), позволяющего отобразить область D на прямоугольник в плоскости (ξ, η) . Выразить T_{xx}, T_{yy} в (2.6) через $T_\xi, T_\eta, T_{\xi\xi}, T_{\xi\eta}, T_{\eta\eta}$.

У к а з а н и е. Применить формулы дифференцирования функции сложного аргумента (см. также п. 8.3 пособия [1]):

$$T_{\xi} = T_x x_{\xi} + T_y y_{\xi}, \quad T_{\eta} = T_x x_{\eta} + T_y y_{\eta} \quad \text{и т. д.}$$

Задача 42. Предположим, что нужно решить уравнение теплопроводности (2.6) в области D вида, изображенного на рис. 5, где область D ограничена полудугой эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b < a) \quad (3.11)$$

и линией $y = 0$. Найти вид взаимно однозначного отображения (3.1), позволяющего отобразить область D на прямоугольник в плоскости (ξ, η) .

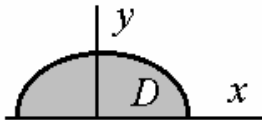


Рис. 5. Область интегрирования уравнения (2.6).

Р е ш е н и е. Введем полярные координаты r, φ по формулам (3.5). Найдем уравнение эллипса (3.11) в полярных координатах. Для этого подставим выражения (3.5) в (3.11):

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1; \quad r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}. \quad (3.12)$$

Из (3.12) получаем уравнение эллипса в полярных координатах:

$$x = R(\varphi) \cos \varphi, \quad y = R(\varphi) \sin \varphi, \quad (3.13)$$

где

$$R(\varphi) = \left(\frac{1}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3.14)$$

Из (3.13) следует, что в области D полярный радиус точки (x, y) меняется в пределах $0 \leq r \leq R(\varphi)$, таким образом, область в плоскости r, φ , на которую преобразование (3.5) отображает область D , не является прямоугольником. Для того, чтобы получить прямоугольную область в плоскости криволинейных координат, сделаем еще одно преобразование:

$$\xi = \varphi, \quad \eta = r \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}} = \frac{r}{R(\varphi)}.$$

Так как $0 \leq r \leq R(\varphi)$, то, деля эти неравенства на $R(\varphi)$, очевидно, получаем: $0 \leq \eta \leq 1$. Итак, преобразование

$$x = \frac{\eta \cos \xi}{\sqrt{\frac{\cos^2 \xi}{a^2} + \frac{\sin^2 \xi}{b^2}}}, \quad y = \frac{\eta \sin \xi}{\sqrt{\frac{\cos^2 \xi}{a^2} + \frac{\sin^2 \xi}{b^2}}} \quad (3.15)$$

отображает область D на прямоугольник $0 \leq \xi \leq 2\pi$, $0 \leq \eta \leq 1$ в плоскости (ξ, η) . Докажем, что знаменатель в формулах (3.15) отличен от нуля при $0 < b < a$, $0 \leq \xi \leq 2\pi$. Величина

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1 \quad (3.16)$$

называется эксцентриситетом эллипса. Далее, в силу (3.16) имеем:

$$\frac{\cos^2 \xi}{a^2} + \frac{\sin^2 \xi}{b^2} = \frac{1}{b^2} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \xi) > 0.$$

Для исследования вопроса о том, является ли отображение (3.15) взаимно однозначным, вычислим якобиан J по формуле (3.9):

$$J = a^2 b^2 \eta / (a^2 \sin^2 \xi + b^2 \cos^2 \xi). \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует, что отображение (3.15) взаимно однозначно всюду в области D , кроме начала координат $(0,0)$, где $\eta = 0$.

Задача 43. Дано несимметричное сопло в плоскости (x, y) , см. рис. 6. Пусть $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ – уравнения, соответственно, нижней и верхней стенок сопла, где $a \leq x \leq b$. Найти вид преобразования (3.1), при котором область течения внутри сопла отображается на прямоугольник в плоскости (ξ, η) . Вы-вести преобразованные уравнения Эйлера невязкого течения в переменных ξ, η, t .



Рис. 6. Сопло в плоскости (x, y) .

У к а з а н и е. Решение этой задачи имеется в [8].

Задача 44. В области, изображенной на рис. 6, построить криволинейную сетку с помощью простейшего алгебраического метода генерации криволинейных сеток из четырехсторонних ячеек, описанного в [1]. Для этого выписать в явном виде формулы для вычисления узлов (x_{jk}, y_{jk}) криволинейной сетки в плоскости (x, y) . Найти условие, при котором отображение $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$, где (ξ, η) – криволинейные координаты, будет взаимно однозначным.

Задача 45. Некоторая замкнутая кривая в плоскости (x, y) описывается уравнением

$$x^2 + 2y^2 - 2x + 12y + 15 = 0. \quad (3.18)$$

Найти вид взаимно однозначного отображения (3.1), позволяющего отобразить область, ограниченную кривой (3.18), на прямоугольник в плоскости (ξ, η) . Будет ли криволинейная сетка, полученная с помощью преобразования (3.1), ортогональной?

Указание. Решение этой задачи имеется в [8].

Задача 46. Построить аппроксимацию производной $\partial F(x, y) / \partial x$ в точке “ i ” (см. рис. 7) внутри шестиугольной ячейки с помощью централизованной схемы метода конечного объема. Шестиугольные ячейки не считать правильными шестиугольниками.

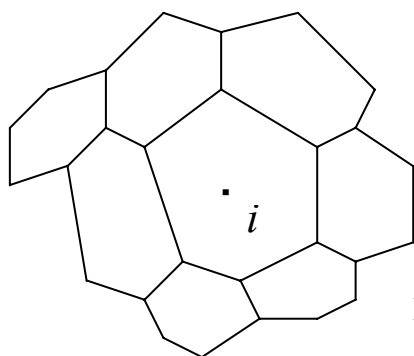


Рис. 7. Сетка из шестиугольных ячеек.

Задача 47. Предположим, что нужно решить уравнение теплопроводности (2.6) в области D вида, изображенного на рис. 5, где область D ограничена полудугой кривой

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1 \quad (0 < b < a)$$

и линией $y = 0$. Найти вид взаимно однозначного отображения (3.1), позволяющего отобразить область D на прямоугольник в плоскости (ξ, η) . Выразить T_{xx}, T_{yy} через $T_{\xi\xi}, T_{\eta\eta}, T_{\xi\eta}$.

Задача 48. При использовании эллиптического генератора криволинейной сетки необходимо аппроксимировать смешанную производную $\partial^2 x(\xi, \eta) / \partial \xi \partial \eta$, где ξ, η – криволинейные координаты, x – декартова координата точки в плоскости декартовых прямоугольных координат (x, y) . Предположим, что данная производная аппроксимируется с помощью следующей раз-деленной разности:

$$\partial^2 x(\xi, \eta) / \partial \xi \partial \eta = (1 / (4\Delta\xi \Delta\eta))(f_{i+1, j+1} - f_{i+1, j-1} - f_{i-1, j+1} + f_{i-1, j-1}), \quad (3.19)$$

где $\Delta\xi, \Delta\eta$ – шаги равномерной прямоугольной сетки вдоль осей ξ, η , соответственно; $f_{ij} = f(i\Delta\xi, j\Delta\eta)$. Найти погрешность аппроксимации формулы (3.19) в точке $(i\Delta\xi, j\Delta\eta)$, предполагая, что функция $x(\xi, \eta)$ имеет непрерывные производные по ξ, η до шестого порядка включительно.

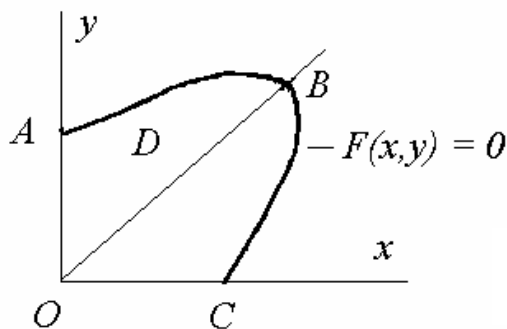


Рис. 8. Область D в плоскости (x, y) .

Задача 49. Пусть OB – биссектриса прямого угла AOC , см. рис. 8, и пусть ABC – парабола, уравнение которой есть $F(x, y) = 0$, причём, функция $F(x, y)$ неоднозначная, см. рис. 8. Построить такие функции $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$, которые осуществляют взаимно однозначное отображение области D , ограниченной контуром $AOCBA$, на некоторый прямоугольник в плоскости (ξ, η) .

Глава 4

ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Однородными разностными схемами называются разностные схемы, формулы которых однотипны, единообразны в точках сетки независимо от наличия и характера особенностей (разрывов) решения в окрестности точек сетки [6]. Ещё их называют *схемами сквозного счета*.

Существуют два общих подхода к построению однородных разностных схем:

- (а) аппроксимация интегральных законов сохранения;
- (б) введение *искусственной вязкости*, или *псевдовязкости*.

Разностная схема (1.9) называется *монотонной*, если оператор шага S переводит монотонную сеточную функцию u^n в монотонную сеточную функцию u^{n+1} с тем же направлением роста её значений.

Пусть дана линейная разностная схема

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=-p}^q \alpha_k u_{j+k}^n, \quad (4.1)$$

где $p \geq 0, q \geq 0, p + q > 0$.

Критерий монотонности С.К. Годунова: разностная схема (4.1) монотонна тогда и только тогда, когда все коэффициенты α_k неотрицательны.

Этот критерий монотонности легко обобщается на случай линейных явных двухслойных скалярных разностных схем вида

$$u_{jk}^{n+1} = \sum_{l=-p_1}^{q_1} \sum_{m=-p_2}^{q_2} \alpha_{lm} u_{j+l, k+m}^n, \quad (4.2)$$

где $p_1 \geq 0, q_1 \geq 0, p_1 + q_1 > 0, p_2 \geq 0, q_2 \geq 0, p_2 + q_2 > 0$, и формулируется так: разностная схема (4.2) монотонна в каждом из координатных направлений x, y тогда и только тогда, когда все коэффициенты α_{lm} неотрицательны.

Для того, чтобы при счёте по однородной разностной схеме правильно передавалось распространение ударной волны, необходимо, чтобы эта схема обеспечивала существование и единственность *центра конечно-разностной ударной волны* как точки в зоне “размазывания” ударной волны, в которой значение разностного решения не зависит от величин шагов сетки h, τ [14].

Задачи к главе 4

Задача 50. Рассмотрим задачу Коши (1.17), (1.18). Разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{a^2 \tau}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right) \quad (4.3)$$

называется *схемой Лакса-Вендрофа* [2,3,5–10,14]. Исследовать эту схему на монотонность. Объяснить полученный результат.

Задача 51. Аппроксимируем уравнение (1.49) следующей явной конечно-разностной схемой:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = v \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \quad (4.4)$$

Вывести условия монотонности схемы (4.4). Изобразить графически область в плоскости безразмерных переменных

$$\kappa_1 = \frac{a\tau}{h}, \quad \kappa_2 = \frac{v\tau}{h^2}, \quad (4.5)$$

в которой выполняются условия монотонности.

Задача 52. Предположим, что искусственная вязкость q вида

$$q = \begin{cases} -ahc\rho u_x \left(1 + \frac{hbc\rho u_x}{p_x} \right) & , \quad u_x < 0 \\ 0 & , \quad u_x \geq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

вводится аддитивно в давление, где a и b – безразмерные положительные постоянные, u – скорость газа, p – давление, c – скорость звука в газе, ρ – плотность газа, h – шаг равномерной сетки на оси x .

Будет ли в этом случае существовать центр конечно-разностной ударной волны в решении задачи (6.10), (6.11) из [1]?

Решение. Проверим, выполняются ли условия теоремы существования и единственности центра конечно-разностной ударной волны [1, 14] при использовании искусственной вязкости q . Для этого подставим в (4.6) вместо u , p , c , ρ выражения [1, 14]:

$$\begin{aligned}
u &= mV(x), \quad q = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{m^2}{V} (V_2 - V)(V - V_1), \\
p(V) &= (\gamma - 1) \frac{m^2}{2} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{V_1 V_2}{V} + V - \frac{\gamma + 1}{\gamma} (V_1 + V_2) \right], \\
c(V) &= \sqrt{\gamma p(V) V},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где $V(x)$ – удельный объём газа, $V=1/\rho$, $m = \text{const}$, γ – отношение удельных теплоёмкостей газа, $\gamma = \text{const} > 1$. Кроме того, используем равенство [1, 14]

$$q = \varphi(V) = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{m^2}{V} (V_2 - V)(V - V_1). \tag{4.8}$$

Подставляя выражения (4.7) в (4.6), а затем полученное выражение для q в левую часть (4.8), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $V(x)$:

$$-ahc(V)m \frac{dV}{dx} \left[V + \frac{hmbc(V)}{p'(V)} \right] = \varphi(V).$$

Разрешая это уравнение относительно dV/dx , получим:

$$h \frac{dV}{dx} = f(V, h) = - \frac{\varphi(V)p'(V)}{amc(V)[Vp'(V) + hbc(V)m]}. \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует, что условие 1 Теоремы из п. 6.3 пособия [1] не выполнено, так как функция в правой части уравнения (4.9) явно зависит от h . Таким образом, при использовании искусственной вязкости (4.6) не существует центр конечно-разностной ударной волны.

Заметим, что формула (4.6) неверна с точки зрения теории подобия и размерностей в механике. Действительно, в круглых скобках в (4.6) стоит сумма безразмерной величины 1 и размерной величины $hbc\rho_x/p_x$, имеющей размерность длины.

Задача 53. В [2] предлагалось использовать при численном решении задач газовой динамики с ударными волнами искусственную вязкость q вида

$$q = -\frac{h^2}{2\tau} \mu \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x}, \tag{4.10}$$

где

$$\mu = 2\mu_0 \frac{|u_x p_x|}{\delta + |u_x p_x|}, \quad \mu_0 = 0.5, \quad \delta = \text{const}. \quad (4.11)$$

Будет ли в этом случае существовать центр конечно-разностной ударной волны в решении задачи (6.10), (6.11) из [1]?

Задача 54. Для двумерного уравнения конвекции (1.29) рассмотрим схему Лакса [5,6]

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - \frac{1}{4}(u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n)}{\tau} + A \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n}{2h_1} + B \frac{u_{j,k+1}^n - u_{j,k-1}^n}{2h_2} = 0. \quad (4.12)$$

Определим числа Куранта κ_1, κ_2 по формулам:

$$\kappa_1 = A\tau/h_1, \quad \kappa_2 = B\tau/h_2. \quad (4.13)$$

Доказать, что схема (4.12) является монотонной в каждом из координатных направлений при выполнении некоторых ограничений на параметры (4.13). Найти вид этих ограничений.

Задача 55. Исследовать устойчивость схемы Лакса (4.12) методом Фурье.

Задача 56. Исследовать устойчивость схемы (4.3) методом Фурье.

Задача 57. Получить условия монотонности пятиточечной схемы из Задачи 19, разностное уравнение для $j = 3, \dots, M - 2$, как ограничения на безразмерный параметр $\kappa = \nu\tau/h^2$.

Задача 58. Имеет ли смысл проводить исследование монотонности схемы Мак-Кормака (1.42) как проверку неотрицательности коэффициентов в (4.2)?
Дать математически обоснованный ответ.

Список литературы

1. **Ворожцов Е.В.** Разностные методы решения задач механики сплошных сред: Учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 85 с.
2. **Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.** Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1985. – 364 с..
3. **Ganzha V.G., Vorozhtsov E.V.** Computer-Aided Analysis of Difference Schemes for Partial Differential Equations. – New York: Wiley-Interscience, 1996. – 458 p.
4. **Леви Б.И., Зайдель Я.М., Санкин В.М.** О методе снижения ориентационной погрешности при численном моделировании двухфазной фильтрации.// Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1978. – Т. 9. – № 6. – С. 105-114.
5. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. – М. – Мир, 1972. – 418 с.
6. **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
7. **LeVeque R.J.** Numerical Methods for Conservation Laws. – Basel: Birkhäuser Verlag, 1992.- 214 с.
8. **Ganzha V.G., Vorozhtsov E.V.** Numerical Solutions for Partial Differential Equations: Problem Solving Using *Mathematica*. – Boca Raton, New York: CRC Press, 1996. – 347 с.
9. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. В двух томах. – М.: Мир, 1991. Т. 1 – 502 с., Т. 2 – 552 с.
10. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В двух томах. – М.: Мир, 1990. – 726 с.
11. **Gottlieb D., Turkel E.** Dissipative two-four method for time dependent problems.// Mathematics of Computation. – 1976. – vol. 30. – No. 136. – P. 703-723.
12. **Förster K., Huangfu G.** A test case for nonlinear difference algorithms.// Computers & Fluids. – 1985. – vol. 13. – No. 4. – P. 485 – 505.
13. **Толстых А.И.** Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990. – 230 с.
14. **Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н.** Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики. – Новосибирск: Наука, 1985. – 224 с..

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ.....	4
Задачи к главе 1	7
Глава 2. НЕЯВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ	21
Задачи к главе 2	25
Глава 3. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТКАХ	29
Задачи к главе 3	30
Глава 4. ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ	36
Задачи к главе 4	37
Список литературы	40

Евгений Васильевич Ворожцов

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ**

Учебное пособие

Редактор *Н.Ф. Фабричная*
Технический редактор *Г.Е. Телятникова*

Лицензия № 021040 от 22.02.96. Подписано в печать 24.11.2000.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз. Уч.- изд. л. 2,6.
Печ. л. 2,75. Изд. № 1585. Заказ № 800. Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.