Из книги В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина «Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка» — М.: Физматлит, 2003.

14. Нелинейные уравнения с двумя независимыми переменными общего вида

14.1. Предварительные замечания

14.1.1. Методы решения

14.1.1-1. Полный, общий и особый интеграл.

Общее нелинейное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$F(x,y,w,p,q)=0, \qquad \text{где} \quad p=\frac{\partial w}{\partial x},\ q=\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1}$$

Такие уравнения часто встречаются в аналитической механике, вариационном исчислении, теории оптимального управления, дифференциальных играх, динамическом программировании, геометрической оптике, дифференциальной геометрии и других областях.

В этом разделе будем рассматривать гладкие решения $w=w(x,y)$ уравнения (1), имеющие непрерывные производные по обоим аргументам (в разд. 14.1.3 будут рассмотрены негладкие решения).

1°. Пусть известно частное решение уравнения (1):

$$w=\Xi(x,y,C_1,C_2), \tag{2}$$

зависящее от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Двухпараметрическое семейство решений (2) называется полным интегралом уравнения (1), если в рассматриваемой области ранг матрицы

$$M=\begin{pmatrix} \Xi_1 & \Xi_{x1} & \Xi_{y1} \\ \Xi_2 & \Xi_{x2} & \Xi_{y2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

равен двум [это справедливо, например, при $\Xi_{x1}\Xi_{y2}-\Xi_{x2}\Xi_{y1}\neq 0$]. В матрице (3) Ξ_n обозначает частную производную по C_n $(n=1,\ 2)$, Ξ_{xn} — вторую частную производную по аргументам x и C_n, Ξ_{yn} — вторую частную производную по аргументам y и C_n.

В ряде случаев полный интеграл удается найти методом неопределенных коэффициентов, задав подходящим образом структуру частного решения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial x}=a\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^n+b.$$

Частное решение ищем в виде суммы $w=C_1y+C_2+C_3x$. Подставив это выражение в уравнение, находим связь между коэффициентами C_1 и C_3: $C_3=aC_1^n+b$. Отсюда получим полный интеграл: $w=C_1y+(aC_1^n+b)x+C_2$.

Полный интеграл уравнения (1) часто записывается в неявном виде*

$$\Xi(x,y,w,C_1,C_2)=0. \tag{4}$$

2°. Общий интеграл уравнения (1) можно представить в параметрическом виде с помощью полного интеграла (2) [или (4)] и двух уравнений

$$\begin{aligned} &C_2=f(C_1),\\ &\frac{\partial \Xi}{\partial C_1}+\frac{\partial \Xi}{\partial C_2}f'(C_1)=0, \end{aligned} \tag{5}$$

* В формулах (2) и (4) символом Ξ обозначены разные функции.

где f — произвольная функция, а штрих обозначает производную. Общий интеграл в определенном смысле роль общего решения, зависящего от произвольной функции (вопрос о том, все ли решения он описывает, требует дополнительного анализа).

Пример 2. Для уравнения, рассмотренного в первом примере, общий интеграл можно представить в параметрическом виде с помощью соотношений

$$w = C_1 y + (aC_1^n + b)x + C_2, \qquad C_2 = f(C_1), \qquad y + anC_1^{n-1}x + f'(C_1) = 0.$$

Исключая отсюда C_2 и переобозначая параметр C_1 через C, удобно представить общий интеграл в более наглядной форме

$$w = Cy + (aC^n + b)x + f(C),$$
$$y = -anC^{n-1}x + f'(C).$$

3°. Особый интеграл уравнения (1) находится без использования полного интеграла путем исключения p и q из системы трех уравнений

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0,$$

где первое уравнение совпадает с (1).

14.1.1-2. Метод Лагранжа—Шарпи.

Пусть найден один первый интеграл

$$\Phi(x, y, w, p, q) = C_1 \tag{6}$$

характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dw}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_w} = -\frac{dq}{F_y + qF_w}, \tag{7}$$

где

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \;\; F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \;\; F_w = \frac{\partial F}{\partial w}, \;\; F_p = \frac{\partial F}{\partial p}, \;\; F_q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Считаем, что интеграл (6) вместе с уравнением (1) можно разрешить относительно производных p, q:

$$p = \varphi_1(x, y, w, C_1), \quad q = \varphi_2(x, y, w, C_1). \tag{8}$$

Первое уравнение этой системы можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с независимой переменной x и параметром y. Получив общее решение этого уравнения, зависящее от произвольной функции $\psi(y)$, подставляют его во второе уравнение. В итоге приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению для ψ. Определив функцию $\psi(y)$ и подставив ее в общее решение первого уравнения (8), находим полный интеграл уравнения (1). Аналогичным образом решение системы (8) можно начинать со второго уравнения, рассматривая его как обыкновенное дифференциальное уравнение с независимой переменной y и параметром x.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$ywp^2 - q = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x}, \; q = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Характеристическая система (7) в данном случае имеет вид

$$\frac{dx}{2ywp} = -\frac{dy}{1} = \frac{dw}{2ywp^2 - q} = -\frac{dp}{yp^3} = -\frac{dq}{wp^2 + yp^2 q}.$$

Воспользовавшись исходным уравнением, упрощаем знаменатель третьего отношения и получаем интегрируемую комбинацию: $dw/(ywp^2) = -dp/(yp^3)$. Отсюда находим первый интеграл $p = C_1/w$. Разрешая его вместе с исходным уравнением относительно p и q, получим систему

$$p = \frac{C_1}{w}, \quad q = \frac{C_1^2 y}{w}.$$

Общее решение первого уравнения имеет вид $w^2 = 2C_1 x + \psi(y)$, где $\psi(y)$ — произвольная функция. Подставляя это решение во второго уравнение системы, имеем $\psi'(y) = 2C_1^2 y$. Поэтому $\psi(y) = C_1^2 y^2 + C_2$. В итоге получим полный интеграл в виде

$$w^2 = 2C_1 x + C_1^2 y^2 + C_2.$$

Отметим, что полный интеграл уравнения (1) является общим решением вполне интегрируемого уравнения Пфаффа

$$dw = \varphi_1(x, y, w, C_1)\,dx + \varphi_2(x, y, w, C_1)\,dy, \tag{9}$$

в котором стоят функции φ_1 и φ_2 из системы (8).

Замечание 1. Очевидным первым интегралом характеристической системы (7) является равенство $F(x, y, w, p, q) = C$, поэтому функция Φ, определяющая интеграл (6), должна быть отлична от F. Однако использование очевидного первого интеграла позволяет понизить порядок системы (7) на единицу.

14.1.1-3. Построение полного интеграла с помощью двух первых интегралов.

Пусть найдены два независимых первых интеграла

$$\Phi(x, y, w, p, q) = C_1, \qquad \Psi(x, y, w, p, q) = C_2 \tag{10}$$

характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7). Считаем, что функции F, Φ, Ψ, определяющие уравнение (1) и интегралы (10), удовлетворяют следующим двум условиям:

$$1)\quad J \equiv \frac{\partial(F, \Phi, \Psi)}{\partial(w, p, q)} \not\equiv 0, \qquad 2)\quad [\Phi, \Psi] \equiv \begin{vmatrix} \Phi_p & \Phi_x + p\Phi_w \\ \Psi_p & \Psi_x + p\Psi_w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_q & \Phi_y + q\Phi_w \\ \Psi_q & \Psi_y + q\Psi_w \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{11}$$

где J — якобиан функций F, Φ, Ψ по переменным w, p, q, а $[\Phi, \Psi]$ — скобка Якоби. В этом случае равенства (1) и (10) представляют собой параметрическую форму представления полного интеграла уравнения (1) (p и q рассматриваются как параметры). Исключив p и q из (1) и (10), а затем разрешив полученное выражение относительно w, можно получить полный интеграл в явном виде $w = w(x, y, C_1, C_2)$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$pq - aw = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Характеристическая система (7) в данном случае имеет вид

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dw}{2pq} = \frac{dp}{ap} = \frac{dq}{aq}.$$

Приравнивая сначала первое и пятое отношение, а затем второе и четвертое, находим первые интегралы

$$q - ax = C_1, \qquad p - ay = C_2.$$

Имеем $F = pq - aw$, $\Phi = q - ax$, $\Psi = p - ax$. Эти функции удовлетворяют условиям (11). Разрешая уравнение и первые интегралы относительно w, получим полный интеграл в виде

$$w = \frac{1}{a}(ax + C_1)(ay + C_2).$$

14.1.1-4. Случай, когда уравнение не зависит явно от w.

Пусть исходное уравнение не содержит явно искомой функции, т. е. имеет вид

$$F(x, y, p, q) = 0. \tag{12}$$

1°. Если получено однопараметрическое семейство решений $w = \Xi(x, y, C_1)$, удовлетворяющее условию $\Xi'_1 \not\equiv \text{const}$, полный интеграл дается выражением $w = \Xi(x, y, C_1) + C_2$.

2°. Первый интеграл (6) можно искать в форме $\Phi(x, y, p, q) = C_1$, аналогичной уравнению (12). В этом случае характеристическая система (7) записывается так:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x} = -\frac{dq}{F_y}.$$

Соответствующее уравнение Пфаффа (9) принимает вид

$$dw = \varphi_1(x, y, C_1)\,dx + \varphi_2(x, y, C_1)\,dy$$

и может быть проинтегрировано в квадратурах. В результате имеем следующее выражение для полного интеграла:

$$w = \int_{x_0}^{x} \varphi_1(t, y, C_1)\,dt + \int_{y_0}^{y} \varphi_2(x_0, s, C_1)\,ds + C_2, \tag{13}$$

где константы x_0 и y_0 можно выбрать любыми.

3°. Пусть уравнение (12) удается разрешить относительно p или q, например

$$p = -\mathcal{H}(x, y, q).$$

Тогда дифференцируя обе части по y, можно получить квазилинейное уравнение относительно производной q:

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}(x, y, q) = 0, \qquad q = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Это уравнение проще исходного, его качественные особенности и методы решения описаны в разд. 12.1.1–12.1.4.

14.1.1-5. Уравнение Гамильтона — Якоби.

Уравнение (1), разрешенное относительно одной из производных

$$p + \mathcal{H}(x, y, w, q) = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{14}$$

принято называть уравнением Гамильтона — Якоби, а функцию $\mathcal{H}$ — гамильтонианом. Уравнения вида (14) часто встречаются в различных разделах механики, теории управления и дифференциальных играх, где переменная x обычно играет роль времени, а переменная y — роль пространственной координаты. Уравнению Гамильтона — Якоби (14) соответствует функция $F(x, y, w, p, q) = p + \mathcal{H}(x, y, w, q)$ в уравнении (1).

Характеристическая система (7) для уравнения (14) с учетом равенства $p = -\mathcal{H}$ сводится к более простой системе, состоящей из трех дифференциальных уравнений

$$y'_x = \mathcal{H}_q, \quad w'_x = q\mathcal{H}_q - \mathcal{H}, \quad q'_x = -q\mathcal{H}_w - \mathcal{H}_y, \tag{15}$$

которые не зависят от p (в левой части уравнений стоят производные по переменной x).

14.1.1-6. Преобразования Лежандра и Эйлера.

Будем считать, что функция $w(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в рассматриваемой области.

1°. Преобразование Лежандра вводится так:

$$x = W_X, \quad y = W_Y, \quad w = XW_X + YW_Y - W, \qquad \text{где} \ W = W(X, Y). \tag{16}$$

Обратное преобразование Лежандра имеет аналогичный вид

$$X = w_x, \quad Y = w_y, \quad W = xw_x + yw_y - w, \qquad \text{где} \ w = w(x, y). \tag{17}$$

Переходя в уравнении (1) к новым переменным (16), получим

$$F(W_X,\, W_Y,\, XW_X + YW_Y - W,\, X,\, Y) = 0. \tag{18}$$

Это уравнение иногда проще исходного уравнения (1). Если $W = W(X, Y)$ — интеграл уравнения (18), то соотношения (16) дают параметрическое представление соответствующего интеграла $w = w(x, y)$ уравнения (1).

Замечание 2. При использовании преобразования Лежандра отдельные интегралы могут пропадать, если в некоторой подобласти якобиан $\dfrac{\partial(w_x, w_y)}{\partial(x, y)}$ тождественно равен нулю.

2°. Прямое и обратное преобразование Эйлера имеют вид

$$x = W_X, \quad y = Y, \quad w = XW_X - W, \qquad \text{где} \quad W = W(X, Y); \tag{19}$$

$$X = w_x, \quad Y = y, \quad W = xw_x - w, \qquad \text{где} \quad w = w(x, y). \tag{20}$$

Переходя в (1) к новым переменным (19), получим следующее уравнение:

$$F(W_X,\, Y,\, XW_X - W,\, X,\, -W_Y) = 0, \tag{21}$$

которое иногда проще исходного. Если $W = W(X, Y)$ — интеграл уравнения (21), то соотношения (19) дают параметрическое представление соответствующего интеграла $w = w(x, y)$ уравнения (1).

Замечание 3. При использовании преобразования Эйлера отдельные интегралы могут пропадать, если в некоторой подобласти вторая производная w_{xx} (или w_{yy}) тождественно равна нулю.

⊙ *Литература к разделу* 14.1.1: В. В. Степанов (1958), Р. Беллман (1960), Р. Курант (1964), Э. Камке (1966), Л. Э. Эльсгольц (1969), И. Г. Петровский (1970), В. И. Арнольд (1974), E. Zauderer (1983), J. Lewin (1994), D. Zwillinger (1998).

14.1.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности

14.1.2-1. Постановка задачи и процедура построения решения.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$x = h_1(\xi), \quad y = h_2(\xi), \quad w = h_3(\xi), \tag{22}$$

где ξ — параметр ($\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$), а $h_k(\xi)$ — заданные функции.

Решение этой задачи осуществляется в несколько этапов:

1°. Сначала определяются дополнительные начальные условия для производных:

$$p = p_0(\xi), \quad q = q_0(\xi). \tag{23}$$

Для этого решают алгебраическую (или трансцендентную) систему уравнений

$$F(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi), p_0, q_0) = 0, \tag{24}$$

$$p_0 h_1'(\xi) + q_0 h_2'(\xi) - h_3'(\xi) = 0 \tag{25}$$

относительно p_0 и q_0. Уравнение (24) получено в результате подстановки начальных данных (22) в исходное уравнение (1). Уравнение (25) является следствием зависимости $w = w(x, y)$ и формулы для дифференциала $dw = p\,dx + q\,dy$, где dx, dy, dw вычисляются по начальным данным (22).

2°. Решается автономная система уравнений

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dw}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_w} = -\frac{dq}{F_y + qF_w} = d\tau, \tag{26}$$

которая получена из (7) путем введения дополнительной переменной τ (играющей роль времени).

3°. Постоянные интегрирования определяются из начальных условий:

$$x = h_1(\xi), \quad y = h_2(\xi), \quad w = h_3(\xi), \quad p = p_0(\xi), \quad q = q_0(\xi) \quad \text{при } \tau = 0, \tag{27}$$

которые получены объединением условий (22) и (23). В результате находим три функции

$$x = x(\tau, \xi), \quad y = y(\tau, \xi), \quad w = w(\tau, \xi), \tag{28}$$

которые дают решение рассматриваемой задачи Коши в параметрическом виде (τ, ξ — параметры).

14.1.2-2. Теорема существования и единственности.

Пусть функция $F = F(x, y, w, p, q)$, с помощью которой задается уравнение (1), дважды непрерывно дифференцируема по всем пяти аргументам (в рассматриваемой области), причем $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$. Пусть функции $h_1(\xi)$, $h_2(\xi)$, $h_3(\xi)$, определяющие начальные данные (22), дважды непрерывно дифференцируемы по ξ, причем $(h_1')^2 + (h_2')^2 \neq 0$. Считаем, что функции $p_0(\xi)$ и $q_0(\xi)$, задающие дополнительные начальные условия (23), удовлетворяют системе (24)–(25). Кроме того, считаем, что выполнено условие

$$\Delta \equiv F_p h_2' - F_q h_1' \neq 0,$$

в котором фигурируют функции из (22), (23) и штрихом обозначены производные по ξ. При выполнении сделанных предположений, существует единственное дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (22), (23).

Замечание 1. Эта теорема носит локальный характер: существование единственного гладкого решения задачи Коши гарантируется лишь в некоторой окрестности линии, задаваемой начальными данными (22) вместе с дополнительными условиями (23).

Замечание 2. Алгебраическая (или трансцендентная) система (24), (25) может иметь несколько решений (см. пример 3 в конце этого раздела), что приводит к различным дополнительным начальным условиям для производных (23). Каждое из этих дополнительных условий будет порождать свое собственное решение задачи Коши (1), (22).

Замечание 3. Для нелинейных уравнений глобальное решение задачи Коши (1), (22) может оказаться многозначным также из-за пересечения характеристик в плоскости x, y (см. пример 1 в разд. 14.1.3). Подобная ситуация подробно обсуждалась в разд. 12.1.3–12.1.4, где рассматривались квазилинейные уравнения.

14.1.2-3. Задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби.

Начальное условие для уравнения Гамильтона–Якоби (14) обычно формулируется в виде

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = L. \tag{29}$$

В данном случае решение задачи Коши сводится к решению характеристической системы (15) с начальным условием

$$y = \xi, \quad w = \varphi(\xi), \quad q = \varphi'(\xi) \quad \text{при} \quad x = L, \tag{30}$$

где штрих означает производную по параметру ξ.

14.1.2-4. Примеры решения задачи Коши.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Требуется найти решение уравнения

$$aw = pq, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{31}$$

проходящее через прямую

$$x = 1, \quad by = w. \tag{32}$$

Запишем уравнение прямой (32) в параметрической форме

$$x = 1, \quad y = \xi, \quad w = b\xi. \tag{33}$$

Определим $p_0(\xi)$ и $q_0(\xi)$ из системы (24), (25), которая в данном случае имеет вид:

$$ab\xi = p_0 q_0, \qquad q_0 - b = 0.$$

Отсюда получим

$$p_0 = a\xi, \quad q_0 = b. \tag{34}$$

Система (26) при $F = pq - aw$ записывается так:

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dw}{2pq} = \frac{dp}{ap} = \frac{dq}{aq} = d\tau. \tag{35}$$

Ее решение дается формулами (сначала интегрируются два последних уравнения):

$$p = C_1 e^{a\tau}, \quad q = C_2 e^{a\tau}, \quad x = \frac{C_2}{a} e^{a\tau} + C_3, \quad y = \frac{C_1}{a} e^{a\tau} + C_4, \quad w = \frac{C_1 C_2}{a} e^{2a\tau} + C_5. \tag{36}$$

Используя начальные условия [полученные из (33) и (34)]

$$x = 1, \quad y = \xi, \quad w = b\xi, \quad p_0 = a\xi, \quad q_0 = b \quad \text{при } \tau = 0, \tag{37}$$

определим постоянные интегрирования в (36):

$$C_1 = a\xi, \quad C_2 = b, \quad C_3 = 1 - \frac{b}{a}, \quad C_4 = C_5 = 0.$$

Подставляя эти значения в (36), находим решение задачи Коши (31), (32) в параметрическом виде

$$x = \frac{b}{a} e^{a\tau} + 1 - \frac{b}{a}, \quad y = \xi e^{a\tau}, \quad w = b\xi e^{2a\tau}.$$

Исключая параметры ξ и τ, получим решение в явном виде: $w = (ax + b - a)y$.

Пример 2. Получим теперь решение уравнения (31), удовлетворяющее начальному условию $w = f(y)$ при $x = 0$.

Запишем начальное условие в параметрической форме

$$x = 0, \quad y = \xi, \quad w = f(\xi). \tag{38}$$

Система (24), (25) для определения $p_0(\xi)$ и $q_0(\xi)$ имеет вид: $af(\xi) = p_0 q_0$, $q_0 - f'(\xi) = 0$. Отсюда имеем

$$p_0 = a\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad q_0 = f'(\xi). \tag{39}$$

Общее решение характеристической системы (35) описывается формулами (36). Используя начальные условия (38), (39), которые должны быть выполнены при $\tau = 0$, находим постоянные интегрирования

$$C_1 = a\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad C_2 = f'(\xi), \quad C_3 = -\frac{f'(\xi)}{a}, \quad C_4 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad C_5 = 0.$$

Подставляя эти значения в (36), получим решение задачи Коши (31), (38) в параметрическом виде

$$x = \frac{1}{a} f'(\xi)\bigl(e^{a\tau} - 1\bigr), \quad y = \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}\bigl(e^{a\tau} - 1\bigr) + \xi, \quad w = f(\xi)e^{2a\tau}.$$

Пример 3. Требуется найти решение уравнения

$$\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2 = a^2, \tag{40}$$

проходящее через окружность

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad w = 0. \tag{41}$$

Введя параметр ξ, запишем уравнение окружности так:

$$x = b\sin\xi, \quad y = b\cos\xi, \quad w = 0. \tag{42}$$

Уравнения для определения дополнительных начальных условий (24), (25) в данном случае имеют вид

$$p_0^2 + q_0^2 = a^2, \quad p_0\cos\xi - \sin\xi q_0 = 0.$$

Отсюда получим

$$p_0 = \varepsilon a\sin\xi, \quad q_0 = \varepsilon a\cos\xi, \qquad \text{где } \varepsilon = \pm 1. \tag{43}$$

Система (31) при $F = p^2 + q^2 - a^2$ записывается так:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dw}{2(p^2 + q^2)} = -\frac{dp}{0} = -\frac{dq}{0} = d\tau, \tag{44}$$

Ее решение дается формулами (сначала интегрируются два последних уравнения):

$$p = C_1, \quad q = C_2, \quad x = 2C_1\tau + C_3, \quad y = 2C_2\tau + C_4, \quad w = 2(C_1^2 + C_2^2)\tau + C_5. \tag{45}$$

Используя начальные условия (42), (43), которые должны быть выполнены при $\tau = 0$, находим постоянные интегрирования

$$C_1 = \varepsilon a\sin\xi, \quad C_2 = \varepsilon a\cos\xi, \quad C_3 = b\sin\xi, \quad C_4 = b\cos\xi, \quad C_5 = 0, \qquad \text{где } \varepsilon = \pm 1.$$

Подставляя эти значения в (45), находим решение задачи Коши (40), (41) в параметрическом виде

$$x = (2\varepsilon a\tau + b)\sin\xi, \quad y = (2\varepsilon a\tau + b)\cos\xi, \quad w = 2a^2\tau.$$

Исключая параметры ξ и τ, запишем решение в более наглядном виде:

$$a^2(x^2 + y^2) = (ab \pm w)^2. \tag{46}$$

Геометрическая интерпретация: формула (46) описывает два круглых конуса в пространстве (x, y, w), у которых в основании лежит окружность (41) и общая ось совпадает с ось w. Координаты вершин конусов: $w = \pm ab$.

Важно отметить, что решение (46) является многозначной функцией.

⊙ *Литература к разделу* 14.1.2: В. В. Степанов (1958), Р. Курант (1964), Э. Камке (1966), И. Г. Петровский (1970).

14.1.3. Обобщенные вязкие решения и их приложения

14.1.3-1. Предварительные замечания.

В разд. 14.1.1–14.1.2 изучались классические гладкие решения $w = w(x, y)$, имеющие непрерывные производные по обоим аргументам. В теории оптимального управления, дифференциальных играх и некоторых других приложениях однако часто возникают задачи, решением которых являются непрерывные, но негладкие функции, см., например, А. И. Субботин (1991), W. H. Fleming, H. M. Soner (1993), A. I. Subbotin (1995), А. А. Меликян (1996), A. A. Melikyan (1998), M. Bardi, I. C. Dolcetta (1998). Для описания и построения обобщенных решений такого рода требуются другие подходы. Важно отметить, что для определения обобщенных решений нелинейных уравнений общего вида (1) и (14) не удается эффективно использовать наглядные конструкции типа интегральных равенств и законов сохранения, которые часто встречаются в теории квазилинейных уравнений (см. разд. 12.1.3–12.1.4).

Отметим, что негладкость решения может быть обусловлена различными причинами: 1) пересечением характеристик в плоскости x, y (см. далее пример 1), 2) негладкостью начального условия, 3) негладкостью функций F и $\mathcal{H}$, определяющих уравнения (1) и (14).

14.1.3-2. Вязкие решения, основанные на использовании параболического уравнения.

Решение задачи Коши для уравнения (14) с начальным условием

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{47}$$

можно аппроксимировать решением дифференциального уравнения с частными производными второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{H}\Bigl(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\Bigr) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{48}$$

с тем же самым начальным условием (47). Известно, что для достаточно широкого класса функций $\mathcal{H}$ и φ задача Коши для уравнения (48) имеет единственное решение. В теории уравнений Гамильтона — Якоби этот факт был использован для определения решения задачи Коши (14), (47) как предела решения задачи (48), (47): $w(x,y) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u(x,y)$ [см., например, С. Н. Кружков (1966, 1975), M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983)]. Эту конструкцию, основанную на предельном переходе при $\varepsilon \to 0$, как и в теории квазилинейных уравнений (см. разд. 12.1.3), называют методом исчезающей вязкости, а предельную функцию — вязким решением уравнения Гамильтона — Якоби.

Метод исчезающей вязкости можно, например, реализовать путем численного решения задачи (48), (47) при достаточно малых ε [в этом случае нет необходимости искать особые точки, в которых нарушается гладкость решения]. Однако этот метод очень трудно использовать для построения аналитических решений, так как приходится рассматривать более сложное уравнение с частными производными второго порядка.

14.1.3-3. Обобщенные решения, основанные на пробных функциях и неравенствах.

M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983), M. G. Crandall, L. C. Evans, P. L. Lions (1984) предложили обобщенные вязкие решения вводить с помощью интегральных неравенств. Этот подход не связан с рассмотрением уравнений более высокого порядка и позволяет в некоторых случаях получать обобщенное вязкое решение в аналитическом виде.

Определение. Непрерывная функция $w = w(x,y)$ называется вязким решением задачи с начальными данными (1), (47) в слое $0 \leqslant x \leqslant L$, если выполнены следующие условия [см., например, P. L. Lions, P. E. Souganidis (1985), A. A. Melikyan (1998)]:

1°. Функция $w = w(x,y)$ удовлетворяет начальному условию (47).

2°. Пусть $\psi(x,y)$ — любая пробная непрерывно дифференцируемая функция. Если (x°, y°) — точка локального экстремума разности функций

$$w(x,y) - \psi(x,y), \tag{49}$$

то в этой точке должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} &F\bigl(x^\circ, y^\circ, w^\circ, \psi^\circ_x, \psi^\circ_y\bigr) \geqslant 0, \qquad \text{если } (x^\circ, y^\circ) \text{ — точка локального минимума,}\\ &F\bigl(x^\circ, y^\circ, w^\circ, \psi^\circ_x, \psi^\circ_y\bigr) \leqslant 0, \qquad \text{если } (x^\circ, y^\circ) \text{ — точка локального максимума.} \end{aligned} \tag{50}$$

Проверке подлежат только те точки локального экстремума, которые находятся внутри рассматриваемого слоя ($0 < x^\circ < L$).

Отметим, что необязательно должна существовать пробная функция $\psi(x,y)$, для которой разность (49) имеет локальный экстремум. Однако, если такая функция существует, то должно выполняться условие (50).

Если задача Коши имеет гладкое классическое решение, то оно совпадает с вязким обобщенным решением.

В теории оптимального управления и дифференциальных играх помимо задач с начальными данными встречаются также задачи с конечными данными, в которых решение уравнений (1) и (14) ищется в слое $0 \leqslant x \leqslant L$, а искомая величина w задается на правом конце слоя при $x = L$. Для этих задач в определении вязкого решения неравенства в (50) следует изменить на противоположные. Задачи с конечными данными сводятся к задачам с начальными данными путем введения вместо x новой независимой переменной $z = L - x$.

Отметим, что эквивалентные, но более сложные определения вязких минимаксных решений, использовались в работах А. И. Субботина (1991), A. I. Subbotin (1995).

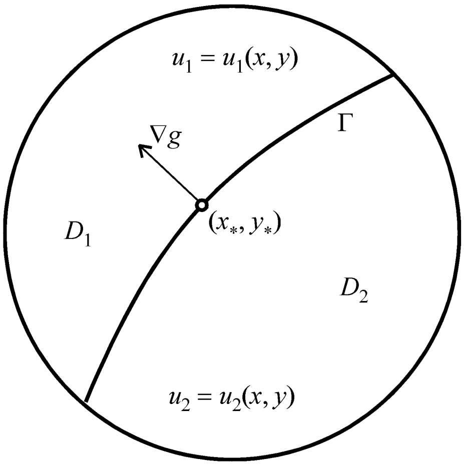

Рис. 11

14.1.3-4. Локальная структура обобщенных вязких решений.

Обобщенное решение $w(x, y)$ состоит из регулярных и сингулярных точек. В некоторой окрестности регулярных точек функция $w(x, y)$ является решением в классическом смысле (такие дважды непрерывно дифференцируемые решения обсуждаются в теореме существования и единственности из разд. 14.1.2). Все нерегулярные точки относятся к сингулярным.

Пусть D — некоторая достаточно малая окрестность сингулярной точки (x_*, y_*). Обычно встречаются ситуации, когда сингулярные точки образуют некоторую гладкую кривую Γ, которая проходит через (x_*, y_*) и разбивает область D на две подобласти D_1 и D_2 (рис. 11). По обе стороны от Γ обобщенное решение w задается разными классическими решениями u_1 и u_2:

$$w(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & \text{если } x, y \in D_1, \\ u_2(x, y), & \text{если } x, y \in D_2, \end{cases} \tag{51}$$

которые непрерывно, но негладко, сопрягаются вдоль общей границы. При переходе через Γ производные обобщенного решения $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ терпят разрыв. Будем считать, что гладкие составляющие обобщенного решения u_1 и u_2 гладко доопределены во всей рассматриваемой области D. Тогда уравнение кривой Γ, образованной сингулярными точками, можно записать в виде равенства

$$g(x, y) = 0, \qquad \text{где } g(x, y) = u_2(x, y) - u_1(x, y). \tag{52}$$

Градиент функции g, направленный по нормали к кривой Γ, находится по формуле

$$\nabla g = (p_2 - p_1)\mathbf{e}_x + (q_2 - q_1)\mathbf{e}_y, \qquad p_n = \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad q_n = \frac{\partial u_n}{\partial y},$$

где $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ — направляющие векторы вдоль осей x и y. Возможны две ситуации.

1°. Вектор ∇g направлен из D_2 в D_1. В этом случае справедливы следующие утверждения, см. A. A. Melikyan (1998):

A) Обобщенное решение в области D может быть записано в виде $w = \min[u_1, u_2]$, см. рис. 12.

B) Не существует гладкой пробной функции $\psi(x, y)$ такой, что локальный минимум разности функций (49) достигается в сингулярных точках, образующих Γ.

C) Для однопараметрического семейства пробных функций

$$\psi(x, y) = \lambda u_2(x, y) + (1 - \lambda)u_1(x, y), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{53}$$

максимум разности

$$\max_{x,y \in D} \bigl[w(x, y) - \psi(x, y)\bigr] \tag{54}$$

достигается в точках $x, y \in \Gamma$.

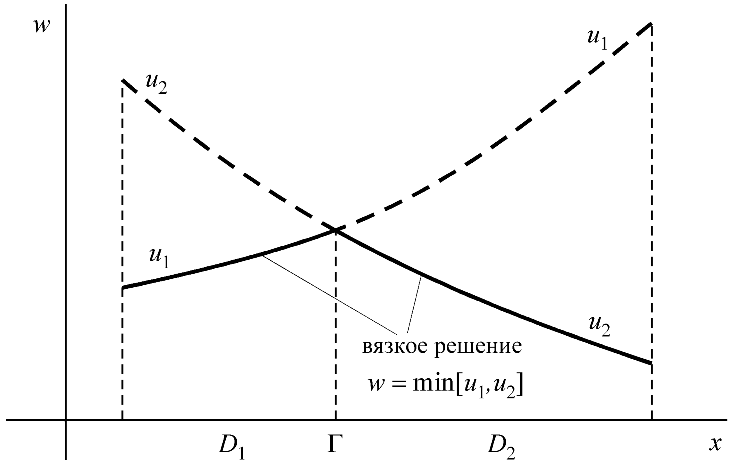

Рис. 12

Замечание. Для обобщенного решения типа $w = \min[u_1,\ u_2]$ нет необходимости проверять первое неравенство (50); второе неравенство (50) достаточно проверить только на однопараметрическом семействе пробных функций (53).

2°. Вектор ∇g направлен из D_1 в D_2. В этом случае обобщенное решение можно представить в виде $w = \max[u_1,\ u_2]$ и надо проверять лишь первое неравенство (50) на однопараметрическом семействе пробных функций (53).

14.1.3-5. Обобщение классического метода характеристик.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\begin{gathered} \frac{\partial w}{\partial x} + \mathcal{H}\Big(x, y, \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = 0, \\ w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = L. \end{gathered} \tag{55}$$

Считаем, что функция $\mathcal{H}(x,y,q)$ является выпуклой по аргументу q для всех $x \in (0, L]$, $y \in R$, а функция $\mathcal{H}(x,y,q)$ непрерывно дифференцируема по x, y, q, и существуют вторые производные $\mathcal{H}_{xy}$, $\mathcal{H}_{xq}$.

Пусть решение характеристической системы (15), удовлетворяющее условию (30), имеет вид

$$y = Y(x,\xi), \quad w = W(x,\xi), \quad q = Q(x,\xi) \tag{56}$$

Обозначим через $\{\xi_n = \xi_n(x,y)\}$ множество функций, полученных путем разрешения первого равенства $y = Y(x,\xi)$ из (56) относительно параметра ξ. Индекс n указывает на число таких функций.

Классический метод характеристик может быть использован для построения обобщенного вязкого решения с помощью формулы

$$w(x,y) = \max_{\xi \in \{\xi_n\}} W(x,\xi) \tag{57}$$

для всех $x \in (0, L]$, $y \in R$. Значению $n = 1$ соответствует классическое гладкое решение. Формула (57) была получена S. Miricu (1985) и Н. Н. Субботиной (1991).

14.1.3-6. Примеры вязких (негладких) решений.

Ниже рассмотрены две задачи, которые встречается в теории игр, см. А. И. Субботин (1991), A. I. Subbotin (1995).

Пример 1. Рассмотрим задачу с конечными данными для уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2} = 0 \tag{58}$$

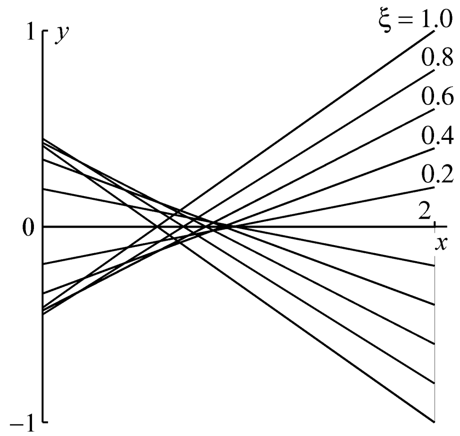

Рис. 13

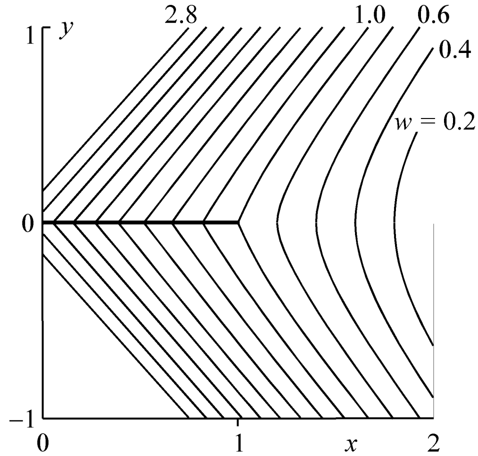

Рис. 14

с начальным условием

$$w = \tfrac{1}{2}y^2 \quad \text{при} \quad x = L. \tag{59}$$

Решение ищем в области $0 \leqslant x \leqslant L$.

Характеристическая система (15) для уравнения (58) с гамильтонианом $\mathcal{H}(x, y, w, q) = \sqrt{1+q^2}$ имеет вид

$$y'_x = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}, \quad w'_x = -\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}, \quad q'_x = 0. \tag{60}$$

Начальные условия получим из (30) при $\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2$:

$$y = \xi, \quad w = \tfrac{1}{2}\xi^2, \quad q = \xi \quad \text{при} \quad x = L. \tag{61}$$

Интегрируя уравнения (60) с условиями (61), находим решение задачи Коши (58)–(59):

$$y = \frac{\xi(x-L)}{\sqrt{1+\xi^2}} + \xi, \quad w = \frac{L-x}{\sqrt{1+\xi^2}} + \tfrac{1}{2}\xi^2. \tag{62}$$

На рис. 13 в плоскости x, y изображены характеристики $y(x, \xi)$ при $L = 2$ для значений параметра $\xi = 0, \pm 0.2, \pm 0.4, \ldots, \pm 1.0$. Видно, что характеристики пересекаются. В данном примере можно построить локальное классическое решение задачи (58), (59). Однако его нельзя продолжить на весь рассматриваемый слой $0 \leqslant x \leqslant L$ (т. е. не существует глобального классического решения). Обратим внимание на то, что гамильтониан $\mathcal{H} = \sqrt{1+q^2}$ уравнения (58) и функция, задающая начальное условие (59), являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Вязкое решение задачи Коши (58), (59) имеет вид

$$w(x, y) = \max_{q \in R}\bigl[qy + (L-x)\sqrt{1+q^2} - \tfrac{1}{2}q^2\bigr], \tag{63}$$

где $0 \leqslant x \leqslant L$, y — любое. Линии уровня этой функции изображены на рис. 14. Жирной линией показано множество сингулярных точек, в которых решение недифференцируемо.

Пример 2. Рассмотрим задачу с конечными данными для более общего уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \mathcal{H}\Bigl(\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant L) \tag{64}$$

с начальным условием общего вида

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = L. \tag{65}$$

Справедливы следующие два утверждения:

1°. Пусть гамильтониан удовлетворяет условию Липшица

$$|\mathcal{H}(q_2) - \mathcal{H}(q_1)| \leqslant \beta|q_2 - q_1| \qquad \text{для любых } q_1, q_2 \in R, \tag{66}$$

а $\varphi(y)$ — выпуклая функция. Тогда вязкое решение задачи (64), (65) имеет вид

$$w(x, y) = \sup_{q \in R}\bigl[qy + (L-x)\mathcal{H}(q) - \varphi^*(q)\bigr], \tag{67}$$

Здесь φ^* — функция, сопряженная функции φ, т. е.

$$\varphi^*(q) = \sup_{x \in R} \bigl[qx - \varphi(x)\bigr].$$

2°. Пусть гамильтониан $\mathcal{H}(q)$ является выпуклым и удовлетворяет условию Липшица (66), а функция $\varphi(y)$ — непрерывна. Тогда функция

$$w(x,y) = \sup_{t \in R} \bigl[\varphi(y + (L-x)t) - (L-x)\mathcal{H}^*(t)\bigr] \tag{68}$$

является вязким решением задачи (64), (65). Здесь функция

$$\mathcal{H}^*(t) = \sup_{q \in R} \bigl[qt - \mathcal{H}(q)\bigr]$$

является сопряженной функцией к гамильтониану $\mathcal{H}(q)$.

Первоначально различные формулы для обобщенного решения уравнения (64) с начальным условием при $x = 0$ были получены Хопфом (E. Hopf, 1965), который рассматривал область $x > 0$. Позже M. Bardi, L. C. Evans (1984) показали, что решения Хопфа являются вязкими решениями.

◉ *Литература к разделу* 14.1.3: E. Hopf (1965), С. Н. Кружков (1966, 1975), P. L. Lions (1982), M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983), M. G. Crandall, L. C. Evans, P. L. Lions (1984), P. L. Lions, P. E. Souganidis (1985), E. N. Barron, R. Jensen (1987), H. Ishii (1988), A. И. Субботин (1991), M. G. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions (1992), W. H. Fleming, H. M. Soner (1993), A. I. Subbotin (1995), A. A. Меликян (1996), A. A. Melikyan (1998), M. Bardi, I. C. Dolcetta (1998).