EqWorld http://eqworld.ipmnet.ru

Из книги А. Д. Полянина, А. В. Манжирова, «Справочник по интегральным уравнениям». — М.: Физматлит, 2003.

7. Основные определения и формулы. Интегральные преобразования

7.1. Некоторые определения, замечания и формулы

7.1-1. Некоторые определения

Действительная функция $f(x)$ называется квадратично интегрируемой (квадратично суммируемой, интегрируемой с квадратом) на отрезке $[a,b]$, если $f^2(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Комплекснозначная функция $f(x)$ называется квадратично интегрируемой на отрезке $[a,b]$, если $|f(x)|^2$ интегрируема на $[a,b]$. Совокупность всех квадратично интегрируемых на $[a,b]$ функций обозначают $L_2(a,b)$ или коротко L_2*. Совокупность всех интегрируемых на $[a,b]$ функций обычно обозначают $L_1(a,b)$ или коротко L_1.

Основные свойства функций из L_2:

1°. Сумма двух квадратично интегрируемых функций есть квадратично интегрируемая функция.

2°. Произведение квадратично интегрируемой функции на константу есть квадратично интегрируемая функция.

3°. Произведение двух квадратично интегрируемых функций есть интегрируемая функция.

4°. Если действительные функции $f(x) \in L_2$ и $g(x) \in L_2$, то имеет место неравенство Буняковского — Шварца

$$(f,g)^2 \leqslant \|f\|^2\|g\|^2, \qquad (f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad \|f\|^2 = (f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Число (f,g) называется скалярным произведением действительных функций $f(x)$ и $g(x)$, а число $\|f\|$ — нормой действительной функции $f(x)$ в L_2.

Для комплекснозначных функций из L_2 указанные соотношения имеют вид

$$|(f,g)|^2 \leqslant \|f\|^2\|g\|^2, \qquad (f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \|f\|^2 = (f,f) = \int_a^b |f(x)|^2\,dx.$$

Здесь и далее черта сверху означает комплексно сопряженную величину, причем для действительных функций действительного аргумента $\overline{g(x)} = g(x)$.

5°. Для $f(x) \in L_2$ и $g(x) \in L_2$ имеет место неравенство треугольника

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

6°. Пусть функции $f(x)$ и $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, $\ldots$ квадратично интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Если

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|^2\,dx = 0,$$

то говорят, что последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$ сходится в среднем квадратичном к функции $f(x)$.

Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ из L_2 сходится равномерно к $f(x)$, то $f(x) \in L_2$ и $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в среднем.

Аналогичным образом вводится понятие интегрируемой (суммируемой) функции нескольких переменных. Например, функция $f(x,t)$ называется квадратично интегрируемой в области $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$, если $f(x,t)$ измерима и

$$\|f\|^2 = \int_a^b\!\!\int_a^b |f(x,t)|^2\,dx\,dt < +\infty.$$

Здесь, как и ранее $\|f\|$ обозначает норму функции $f(x,t)$.

* В общем случае рассматриваются измеримые функции и интеграл Лебега. Как обычно, эквивалентные функции (т. е. равные почти всюду или отличающиеся на множестве меры нуль) считаются одним и тем же элементом L_2.

7.1-2. Структура решений линейных интегральных уравнений

Линейное интегральное уравнение с переменным пределом интегрирования имеет вид

$$\beta y(x)+\int_a^x K(x,t)y(t)\,dt=f(x), \tag{1}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция.

Линейное интегральное уравнение с постоянными пределами интегрирования имеет вид

$$\beta y(x)+\int_a^b K(x,t)y(t)\,dt=f(x). \tag{2}$$

При $\beta=0$, уравнения (1) и (2) называются *линейными интегральными уравнениями первого рода*, а при $\beta\neq 0$ — *линейными интегральными уравнениями второго рода*.

Уравнения вида (1) и (2) при специальных условиях, накладываемых на их ядра и правые части, образуют различные классы интегральных уравнений (уравнения Вольтерра, уравнения Фредгольма, уравнения типа свертки и др.), которые подробно рассмотрены в главах 8–13.

В ряде случаев, для краткости, будем использовать операторную форму записи линейных интегральных уравнений (1) и (2):

$$\mathbf{L}\,[y]=f(x). \tag{3}$$

Линейный оператор $\mathbf{L}$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}\,[y_1+y_2]=\mathbf{L}\,[y_1]+\mathbf{L}\,[y_2],\\&\mathbf{L}\,[\sigma y]=\sigma\mathbf{L}\,[y],\quad \sigma=\mathrm{const}.\end{aligned}$$

При $f(x)\equiv 0$ линейные уравнения называются однородными, а при $f(x)\not\equiv 0$ — неоднородными.

Любое линейное однородное интегральное уравнение имеет тривиальное решение $y\equiv 0$.

Если $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ — частные решения линейного однородного интегрального уравнения, то их линейная комбинация $C_1y_1+C_2y_2$ с произвольными постоянными C_1, C_2 также будет решением данного уравнения (в физических задачах это свойство называют принципом линейной суперпозиции).

Общее решение линейного неоднородного интегрального уравнения (3) равно сумме общего решения $Y=Y(x)$ соответствующего однородного уравнения $\mathbf{L}\,[Y]=0$ и любого частного решения $\bar y=\bar y(x)$ данного неоднородного уравнения $\mathbf{L}\,[\bar y]=f(x)$:

$$y=Y+\bar y. \tag{4}$$

Если однородное интегральное уравнение имеет только тривиальное решение $Y\equiv 0$, то решение соответствующего неоднородного уравнения будет единственным (если оно существует).

Пусть $\bar y_1$ и $\bar y_2$ — решения линейных неоднородных интегральных уравнений с одинаковыми левыми и разными правыми частями: $\mathbf{L}\,[\bar y_1]=f_1(x)$ и $\mathbf{L}\,[\bar y_2]=f_2(x)$. Тогда функция $\bar y=\bar y_1+\bar y_2$ является решением уравнения $\mathbf{L}\,[\bar y]=f_1(x)+f_2(x)$.

Преобразование

$$x=g(z),\quad t=g(\tau),\qquad y(x)=\varphi(z)w(z)+\psi(z), \tag{5}$$

где $g(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — произвольные непрерывные функции ($g'_z\neq 0$), приводит уравнения (1) и (2) к линейным уравнениям того же вида относительно неизвестной функции $w=w(z)$. Такие преобразования часто используются для построения точных решений линейных интегральных уравнений.

7.1-3. Интегральные преобразования

Интегральные преобразования имеют вид

$$\tilde f(\lambda)=\int_a^b \varphi(x,\lambda)f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ называется *оригиналом*, $\tilde f(\lambda)$ — *изображением* (или *образом*) функции $f(x)$, а $\varphi(x,\lambda)$ — ядром интегрального преобразования. Пределы интегрирования a и b — действительные (как правило $a=0$, $b=\infty$ или $a=-\infty$, $b=\infty$).

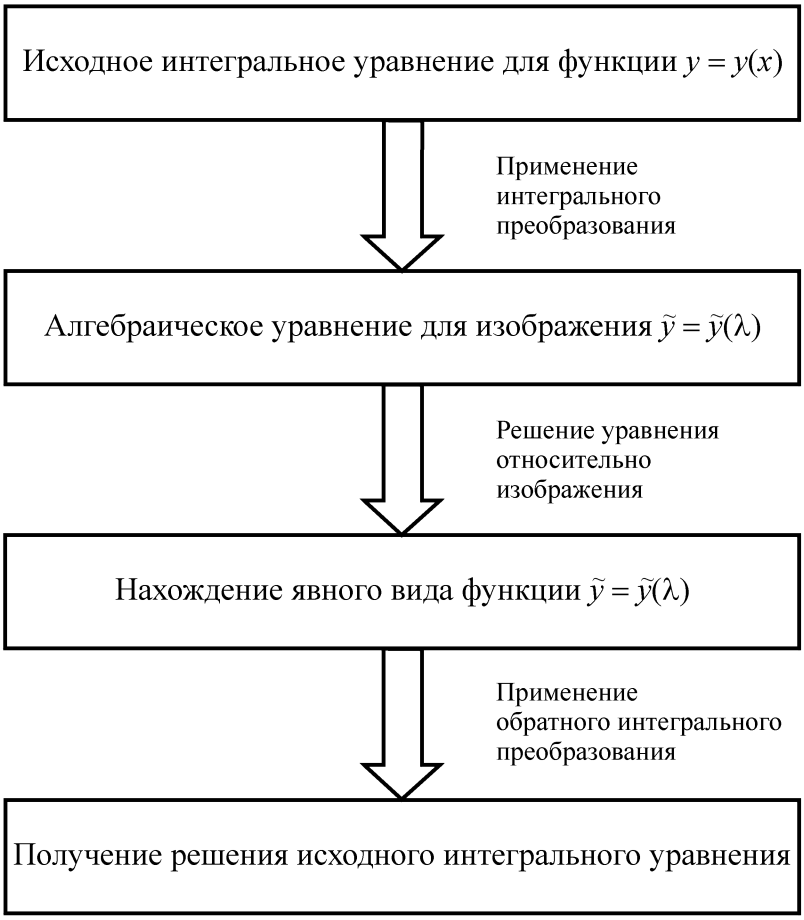

Рис. 1. Принципиальная схема решения интегральных уравнений при помощи интегральных преобразований

В разд. 7.2–7.6 описаны наиболее распространенные интегральные преобразования (Лапласа, Меллина, Фурье и др.), которые встречаются в этой книге при решении конкретных интегральных уравнений. В этих же разделах даны соответствующие формулы для обратных преобразований, которые имеют вид

$$f(x) = \int_{\mathcal{L}} \psi(x, \lambda) \tilde{f}(\lambda)\, d\lambda$$

и позволяют по заданному изображению $\tilde{f}(\lambda)$ восстановить оригинал $f(x)$. Контур интегрирования $\mathcal{L}$ при этом может проходить как по действительной оси, так и по комплексной плоскости.

Интегральные преобразования используются для решения различных дифференциальных и интегральных уравнений. На рис. 1 приведена принципиальная схема решения интегральных уравнений при помощи интегральных преобразований (в случае, приведенном на схеме, использование подходящего интегрального преобразования позволяет получить линейное алгебраическое уравнение первого порядка относительно изображения $\tilde{f}(\lambda)$).

Во многих случаях для вычисления определенных интегралов, в том числе для определения обратных преобразований Лапласа, Меллина и Фурье, используют методы теории функций комплексного переменного, включая теорему о вычетах и лемму Жордана, которые излагаются ниже в пп. 7.1-4 и 7.1-5.

7.1-4. Вычеты. Формулы для вычислений

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ комплексной плоскости z называется число

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon} f(z)\,dz, \quad i^2 = -1,$$

где c_ε — окружность достаточно малого радиуса ε, которая описывается уравнением $|z-a| = \varepsilon$.

Если точка $z = a$ есть полюс n-го порядка* функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \bigl[(z-a)^n f(z)\bigr].$$

Для простого полюса, что соответствует $n = 1$, отсюда имеем

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \bigl[(z-a) f(z)\bigr].$$

Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(a) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в точке $z = a$ нуль первого порядка, т. е. $\psi(a) = 0$, а $\psi'_z(a) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'_z(a)}.$$

7.1-5. Лемма Жордана

Если функция $f(z)$ непрерывна в области $|z| \geqslant R_0$, $\operatorname{Im} z \geqslant \alpha$ (α — фиксированное действительное число) и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то для любого $\lambda > 0$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz = 0,$$

где C_R — дуга окружности $|z| = R$, лежащая в рассматриваемой области.

⊙ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов (1970).

7.2. Преобразование Лапласа

7.2-1. Определение. Формула обращения

Преобразование Лапласа для произвольной (комплекснозначной) функции $f(x)$ действительного переменного x ($x \geqslant 0$) определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx, \tag{1}$$

где $p = s + i\sigma$ — комплексная переменная.

Функция $f(x)$ называется *оригиналом*, а $\tilde{f}(p)$ — *изображением* (*образом*) функции $f(x)$.

Преобразование Лапласа существует для непрерывных и кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|f(x)| < Me^{\sigma_0 x}$, где $M > 0$ и $\sigma_0 \geqslant 0$ — некоторые числа. Далее считаем, что в указанной оценке взято наименьшее из возможных чисел σ_0, которое называется *показателем роста* функции $f(x)$.

Для всякого оригинала $f(x)$ функция $\tilde{f}(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Формулу (1) кратко будем записывать так:

$$\tilde{f}(p) = \mathfrak{L}\bigl\{f(x)\bigr\} \qquad \text{или} \qquad \tilde{f}(p) = \mathfrak{L}\bigl\{f(x),\, p\bigr\}.$$

По известному изображению $\tilde{f}(p)$ оригинал находится с помощью обратного преобразования Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p) e^{px}\,dp, \qquad i^2 = -1, \tag{2}$$

* В окрестности этой точки $f(z) \approx \operatorname{const}(z-a)^{-n}$.

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости справа от всех особых точек функции $\tilde f(p)$, что соответствует $c > \sigma_0$.

Интеграл в (2) понимается в смысле главного значения:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde f(p) e^{px}\,dp = \lim_{\omega\to\infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} \tilde f(p) e^{px}\,dp.$$

В области $x < 0$ формула (2) дает $f(x) \equiv 0$.

Формула (2) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $x = x_0 > 0$, функция $f(x)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (2) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$ (при $x_0 = 0$ первый член в квадратных скобках должен быть опущен).

Формулу обращения преобразования Лапласа (2) кратко будем записывать так:

$$f(x) = \mathfrak{L}^{-1}\bigl\{\tilde f(p)\bigr\} \qquad \text{или} \qquad f(x) = \mathfrak{L}^{-1}\bigl\{\tilde f(p),\, x\bigr\}.$$

7.2-2. Обращение рациональных функций

Рассмотрим важный случай, когда изображение является рациональной функцией вида

$$\tilde f(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \tag{3}$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены переменной p, причем степень многочлена $Q(p)$ больше степени многочлена $R(p)$.

Пусть все нули знаменателя простые, т. е. справедливо равенство

$$Q(p) \equiv \text{const}\,(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\ldots(p-\lambda_n).$$

Тогда оригинал можно определить по формуле

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{R(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)} \exp(\lambda_k x), \tag{4}$$

где штрихом обозначены производные.

Пусть многочлен $Q(p)$ имеет кратные корни, т. е.

$$Q(p) \equiv \text{const}\,(p-\lambda_1)^{s_1}(p-\lambda_2)^{s_2}\ldots(p-\lambda_m)^{s_m}.$$

В этом случае оригинал вычисляется по формуле

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(s_k-1)!} \lim_{p\to s_k} \frac{d^{s_k-1}}{dp^{s_k-1}} \bigl[(p-\lambda_k)^{s_k} \tilde f(p) e^{px}\bigr].$$

7.2-3. Представление оригиналов в виде ряда

Если функция $\tilde f(p)$ имеет конечное число особых точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и стремится к нулю при $p \to \infty$, то интеграл в (2) можно вычислить с помощью теории вычетов путем применения леммы Жордана (см. пп. 7.1-4 и 7.1-5). В этом случае

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k} [\tilde f(p) e^{px}]. \tag{5}$$

Формула (5) может быть обобщена на случай, когда функция $\tilde f(p)$ имеет бесконечное количество особых точек. Тогда функция $f(x)$ представляется в виде бесконечного ряда.

Если точка $p = \infty$ является правильной точкой функции $\tilde f(p)$ и $\tilde f(\infty) = 0$, то функция $\tilde f(p)$ представляет собой изображение функции действительной переменной

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{x^n}{n!} & \text{при } t < 0, \end{cases} \tag{6}$$

где c_n — коэффициенты разложения функции $\tilde f(p)$ в ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$.

7.2-4. Теорема о свертке для преобразования Лапласа

Сверткой (по Лапласу) двух функций $f(x)$ и $g(x)$ называется выражение

$$f(x) * g(x) \equiv \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt.$$

Справедлива *теорема о свертке*:

$$\mathfrak{L}\{f(x) * g(x)\} = \mathfrak{L}\{f(x)\}\,\mathfrak{L}\{g(x)\},$$

которая часто используется при решении уравнений Вольтерра с разностным ядром.

7.2-5. Предельные теоремы

Пусть $0 \leqslant x < \infty$ и $\tilde{f}(p) = \mathfrak{L}\{f(x)\}$ — преобразование Лапласа функции $f(x)$. Если существует предел $f(x)$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{p\to\infty} \bigl[p\tilde{f}(p)\bigr].$$

Если существует предел $f(x)$ при $x \to \infty$, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{p\to 0} \bigl[p\tilde{f}(p)\bigr].$$

7.2-6. Основные свойства преобразования Лапласа

В таблице 1 приведены основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Лапласа.

ТАБЛИЦА 1
Основные свойства преобразования Лапласа

№	Оригинал	Изображение	Операция
1	$af_1(x) + bf_2(x)$	$a\tilde{f}_1(p) + b\tilde{f}_2(p)$	Линейность
2	$f(x/a),\ a > 0$	$a\tilde{f}(ap)$	Изменение масштаба
3	$f(x-a)$, $f(\xi) \equiv 0$ при $\xi < 0$	$e^{-ap}\tilde{f}(p)$	Сдвиг аргумента
4	$x^n f(x);\ n = 1, 2, \ldots$	$(-1)^n \tilde{f}_p^{(n)}(p)$	Дифференцирование изображения
5	$\dfrac{1}{x} f(x)$	$\displaystyle\int_p^\infty \tilde{f}(q)\,dq$	Интегрирование изображения
6	$e^{ax} f(x)$	$\tilde{f}(p-a)$	Смещение в комплексной плоскости
7	$f'_x(x)$	$p\tilde{f}(p) - f(+0)$	Дифференцирование
8	$f_x^{(n)}(x)$	$p^n\tilde{f}(p) - \sum\limits_{k=1}^{n} p^{n-k} f_x^{(k-1)}(+0)$	Дифференцирование
9	$x^m f_x^{(n)}(x),\quad m \geqslant n$	$\left(-\dfrac{d}{dp}\right)^m \bigl[p^n\tilde{f}(p)\bigr]$	Дифференцирование
10	$\dfrac{d^n}{dx^n}\bigl[x^m f(x)\bigr],\ m \geqslant n$	$(-1)^m p^n \dfrac{d^m}{dp^m}\tilde{f}(p)$	Дифференцирование
11	$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$	$\dfrac{\tilde{f}(p)}{p}$	Интегрирование
12	$\displaystyle\int_0^x f_1(t) f_2(x-t)\,dt$	$\tilde{f}_1(p)\tilde{f}_2(p)$	Свертка

Существуют таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа (см. литературу в конце раздела), в которых сведены вместе конкретные функции и их изображения. Эти таблицы удобно использовать при решении линейных интегральных и дифференциальных уравнений.

7.2-7. Формула Поста–Уиддера

Для приложений имеется возможность определять значения оригинала $f(x)$, если известны значения изображения $\tilde{f}(t)$ на действительной полуоси при $t = p \geqslant 0$. Для этого можно использовать формулу Поста–Уиддера

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{x}\right)^{n+1}\tilde{f}_t^{(n)}\left(\frac{n}{x}\right)\right]. \tag{7}$$

Для получения приближенной формулы обращения можно в (5) вместо предела взять конкретное (достаточно большое) целое значение n.

⊙ *Литература*: И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), Г. Дёч (1971), J. W. Miles (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), B. Davis (1978), Yu. A. Brychkov, A. P. Prudnikov (1989), W. H. Beyer (1991), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

7.3. Преобразование Меллина

7.3-1. Определение. Формула обращения

Пусть функция $f(x)$ определена при положительных x и удовлетворяет условию

$$\int_0^1 |f(x)|x^{\sigma_1-1}\,dx < \infty$$

и условию

$$\int_1^\infty |f(x)|x^{\sigma_2-1}\,dx < \infty$$

при подходящем выборе чисел σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 < \sigma_2$).

Преобразование Меллина функции $f(x)$ вводится следующим образом:

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx, \tag{1}$$

где $s = \sigma + i\tau$ — комплексная переменная ($\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$).

Функция $f(x)$ называется *оригиналом*, а $\widehat{f}(s)$ — *изображением* $f(x)$.

Формулу (1) кратко будем записывать так:

$$\widehat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\},$$

или в ряде случаев в форме

$$\widehat{f}(s) = \mathfrak{M}\{f(x), s\}.$$

По известному изображению $\widehat{f}(s)$ оригинал находится с помощью обратного преобразования Меллина

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\widehat{f}(s)x^{-s}\,ds, \qquad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \tag{2}$$

где путь интегрирования расположен параллельно мнимой оси комплексной плоскости s, а интеграл понимается в смысле главного значения.

Формула (2) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $x = x_0$ $x = x_0 > 0$, функция $f(x)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (2) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ (при $x_0 = 0$ первый член в квадратных скобках должен быть опущен).

Кратко формулу (2) будем записывать так:

$$f(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\widehat{f}(s)\} \qquad \text{или} \qquad f(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\widehat{f}(s),\, x\}.$$

7.3-2. Основные свойства преобразования Меллина

В таблице 2 приведены основные формулы соответствия оригиналов и изображений преобразования Меллина.

ТАБЛИЦА 2
Основные свойства преобразования Меллина

№	Оригинал	Изображение	Операция
1	$af_1(x)+bf_2(x)$	$a\widehat{f}_1(s)+b\widehat{f}_2(s)$	Линейность
2	$f(ax),\ a>0$	$a^{-s}\widehat{f}(s)$	Изменение масштаба
3	$x^a f(x)$	$\widehat{f}(s+a)$	Сдвиг аргумента у изображения
4	$f(x^2)$	$\frac{1}{2}\widehat{f}\left(\frac{1}{2}s\right)$	Квадратичный аргумент
5	$f(1/x)$	$\widehat{f}(-s)$	Изменение знака у аргумента изображения
6	$x^\lambda f(ax^\beta),\ a>0,\beta\neq 0$	$\dfrac{1}{\beta}a^{-\frac{s+\lambda}{\beta}}\widehat{f}\Big(\dfrac{s+\lambda}{\beta}\Big)$	Преобразование оригинала, содержащее степени
7	$f'_x(x)$	$-(s-1)\widehat{f}(s-1)$	Дифференцирование
8	$xf'_x(x)$	$-s\widehat{f}(s)$	Дифференцирование
9	$f_x^{(n)}(x)$	$(-1)^n\dfrac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\widehat{f}(s-n)$	Многократное дифференцирование
10	$\Big(x\dfrac{d}{dx}\Big)^n f(x)$	$(-1)^n s^n\widehat{f}(s)$	Многократное дифференцирование
11	$x^\alpha\displaystyle\int_0^\infty t^\beta f_1(xt)f_2(t)\,dt$	$\widehat{f}_1(s+\alpha)\widehat{f}_2(1-s-\alpha+\beta)$	Сложное интегрирование
12	$x^\alpha\displaystyle\int_0^\infty t^\beta f_1\Big(\dfrac{x}{t}\Big)f_2(t)\,dt$	$\widehat{f}_1(s+\alpha)\widehat{f}_2(s+\alpha+\beta+1)$	Сложное интегрирование

7.3-3. Связь преобразований Меллина, Лапласа и Фурье

Существуют таблицы прямых и обратных преобразований Меллина (см. литературу в конце раздела), которые удобно использовать при решении конкретных интегральных и дифференциальных уравнений. Преобразование Меллина связано с преобразованиями Лапласа и Фурье следующими формулами:

$$\mathfrak{M}\{f(x),s\}=\mathfrak{L}\{f(e^x),-s\}+\mathfrak{L}\{f(e^{-x}),s\}=\mathfrak{F}\{f(e^x),is\},$$

что позволяет использовать также более распространенные таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа и Фурье.

⊙ *Литература*: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), Г. Дёч (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), Yu. A. Brychkov, A. P. Prudnikov (1989), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

7.4. Преобразование Фурье

7.4-1. Определение. Формула обращения

Преобразование Фурье вводится следующим образом:

$$\tilde{f}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iux}\,dx. \qquad (1)$$

Формулу (1) кратко будем записывать так:

$$\tilde{f}(u)=\mathfrak{F}\{f(x)\} \qquad \text{или} \qquad \tilde{f}(u)=\mathfrak{F}\{f(x),u\}.$$

По известному изображению $\tilde{f}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u) e^{iux}\, du. \qquad (2)$$

Формула (2) справедлива для непрерывных функций. Если в точке $x = x_0$ $x = x_0 > 0$, функция $f(x)$ имеет конечный разрыв первого рода, то правая часть формулы (2) в этой точке дает значение $\frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$.

Кратко будем записывать (2) так:

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{f}(u)\} \qquad \text{или} \qquad f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{f}(u),\, x\}.$$

7.4-2. Несимметричная форма преобразования

В ряде случаев бывает удобно пользоваться преобразованием Фурье в форме

$$\check{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux}\, dx, \qquad (3)$$

где (3) запишем следующим образом: $\check{f}(u) = \boldsymbol{\mathcal{F}}\{f(x)\}$ или $\check{f}(u) = \boldsymbol{\mathcal{F}}\{f(x), u\}$.

В этом случае по известному изображению $\check{f}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью формулы обратного преобразования Фурье в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(u) e^{iux}\, du, \qquad (4)$$

причем для (4) вводится краткая запись $f(x) = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\{\check{f}(u)\}$ или $f(x) = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\{\check{f}(u),\, x\}$.

7.4-3. Альтернативное преобразование Фурье

Иногда, например в теории краевых задач, используют *альтернативное преобразование Фурье* (его называют просто преобразованием Фурье) в форме

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iux}\, dx. \qquad (5)$$

Формулу (5) кратко будем записывать следующим образом:

$$\mathcal{F}(u) = \mathbf{F}\{f(x)\} \qquad \text{или} \qquad \mathcal{F}(u) = \mathbf{F}\{f(x), u\}.$$

По известному изображению $\mathcal{F}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(u) e^{-iux}\, du. \qquad (6)$$

Формулу (6) кратко будем записывать так:

$$f(x) = \mathbf{F}^{-1}\{\mathcal{F}(u)\} \qquad \text{или} \qquad f(x) = \mathbf{F}^{-1}\{\mathcal{F}(u),\, x\}.$$

Функция $\mathcal{F}(u)$ называется также *интегралом Фурье* от функции $f(x)$.

Аналогично тому, как было проделано для преобразования Фурье, можно ввести несимметричную форму и для альтернативного преобразования Фурье в виде

$$\check{\mathcal{F}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iux}\, dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \check{\mathcal{F}}(u) e^{-iux}\, du, \qquad (7)$$

при этом прямое и обратное преобразования (7) обозначают соответственно $\check{\mathcal{F}}(u) = \check{\mathbf{F}}\bigl\{f(x)\bigr\}$ и $f(x) = \check{\mathbf{F}}^{-1}\bigl\{\check{\mathcal{F}}(u)\bigr\}$ или $\check{\mathcal{F}}(u) = \check{\mathbf{F}}\bigl\{f(x),\, u\bigr\}$ и $f(x) = \check{\mathbf{F}}^{-1}\bigl\{\check{\mathcal{F}}(u)\, x\bigr\}$.

7.4-4. Теорема о свертке для преобразования Фурье

Сверткой (по Фурье) двух функций $f(x)$ и $g(x)$ называется выражение

$$f(x) * g(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) g(t)\, dt.$$

Путем замены переменных $x - t = u$ легко установить, что свертка симметрична относительно свертываемых функций: $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$.

Теорема. *Преобразование Фурье свертки равно произведению интегралов Фурье свертываемых функций:*

$$\mathfrak{F}\{f(x) * g(x)\} = \mathfrak{F}\{f(x)\}\,\mathfrak{F}\{g(x)\}. \tag{8}$$

Для альтернативного преобразования Фурье теорема о свертке выражается соотношением

$$\mathbf{F}\{f(x) * g(x)\} = \mathbf{F}\{f(x)\}\,\mathbf{F}\{g(x)\}. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) будут использованы в главах 10 и 11 для решения линейных интегральных уравнений с разностными ядрами.

⊙ *Литература*: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), J. W. Miles (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), B. Davis (1978), Yu. A. Brychkov, A. P. Prudnikov (1989), W. H. Beyer (1991), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

7.5. Синус- и косинус-преобразования Фурье

7.5-1. Косинус-преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на полуоси $0 \leqslant x < \infty$. Косинус-преобразование Фурье вводится следующим образом:

$$\tilde{f}_{\rm c}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(xu)\,dx, \qquad 0 < u < \infty. \tag{1}$$

По известному изображению $\tilde{f}_{\rm c}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного косинус-преобразования Фурье

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{f}_{\rm c}(u)\cos(xu)\,du, \qquad 0 < x < \infty. \tag{2}$$

Косинус-преобразование Фурье (1) обозначают $\tilde{f}_{\rm c}(u) = \mathfrak{F}_{\rm c}\{f(x)\}$. Из формулы (2) следует, что косинус-преобразование Фурье обладает свойством $\mathfrak{F}_{\rm c}^2 = 1$. Существуют таблицы косинус-преобразования Фурье (см. литературу в конце раздела), которыми удобно пользоваться при решении конкретных интегральных уравнений.

Иногда пользуются несимметричной формой косинус-преобразования Фурье, задаваемой парой формул

$$\check{f}_{\rm c}(u) = \int_0^\infty f(x)\cos(xu)\,dx, \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \check{f}_{\rm c}(u)\cos(xu)\,du. \tag{3}$$

Прямое и обратное косинус-преобразования Фурье (3) обычно обозначают соответственно $\check{f}_{\rm c}(u) = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\rm c}\{f(x)\}$ и $f(x) = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\rm c}^{-1}\{\check{f}_{\rm c}(u)\}$.

7.5-2. Синус-преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на полуоси $0 \leqslant x < \infty$. Синус-преобразование Фурье вводится следующим образом:

$$\tilde{f}_{\rm s}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(xu)\,dx, \qquad 0 < u < \infty. \tag{4}$$

По известному изображению $\tilde{f}_{\rm s}(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного синус-преобразования Фурье

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{f}_{\rm s}(u)\sin(xu)\,du, \qquad 0 < x < \infty. \tag{5}$$

Синус-преобразование Фурье (4) кратко обозначают $\tilde{f}_{\rm s}(u) = \mathfrak{F}_{\rm s}\{f(x)\}$. Из формулы (5) следует, что синус-преобразование Фурье обладает свойством $\mathfrak{F}_{\rm s}^2 = 1$. Существуют таблицы синус-преобразования Фурье (см. литературу в конце раздела), которыми удобно пользоваться при решении конкретных интегральных уравнений.

В ряде случаев бывает удобнее использовать несимметричную форму синус-преобразования Фурье, задаваемую следующей парой формул:

$$\check{f}_{\mathrm{s}}(u) = \int_0^\infty f(x)\sin(xu)\,dx, \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \check{f}_{\mathrm{s}}(u)\sin(xu)\,du. \tag{6}$$

Прямое и обратное синус-преобразования Фурье (6) часто обозначают через $\check{f}_{\mathrm{s}}(u) = \mathcal{F}_{\mathrm{s}}\bigl\{f(x)\bigr\}$ и $f(x) = \mathcal{F}_{\mathrm{s}}^{-1}\bigl\{\check{f}_{\mathrm{s}}(u)\bigr\}$ соответственно.

⊙ *Литература*: И. Снеддон (1955), И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер (1958), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

7.6. Другие интегральные преобразования

7.6-1. Преобразование Ханкеля

Преобразование Ханкеля вводится следующим образом:

$$\tilde{f}_\nu(u) = \int_0^\infty xJ_\nu(ux)f(x)\,dx, \qquad 0 < u < \infty, \tag{1}$$

где $\nu > -\frac{1}{2}$, а $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν.

По известному изображению $\tilde{f}_\nu(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Ханкеля

$$f(x) = \int_0^\infty uJ_\nu(ux)\tilde{f}_\nu(u)\,du, \qquad 0 < x < \infty. \tag{2}$$

Отметим, что если функция $f(x)$ такая, что $f(x) = O(x^\alpha)$ при $x \to 0$, $\alpha + \nu + 2 > 0$ и $f(x) = O(x^\beta)$ при $x \to \infty$, $\beta + \frac{3}{2} < 0$, то интеграл (1) сходится.

Формула обращения (2) справедлива для непрерывных функций. Если $f(x)$ в некоторых точках имеет конечный разрыв первого рода, то левую часть формулы (2) следует заменить на $\frac{1}{2}\bigl[f(x-0) + f(x+0)\bigr]$.

Преобразование Ханкеля (1) кратко обозначают $\tilde{f}_\nu(u) = \mathfrak{H}_\nu\bigl\{f(x)\bigr\}$. Из формулы (2) следует, что преобразование Ханкеля обладает свойством $\mathfrak{H}_\nu^2 = 1$.

7.6-2. Преобразование Мейера

Преобразование Мейера вводится следующим образом:

$$\widehat{f}_\mu(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{sx}\,K_\mu(sx)f(x)\,dx, \qquad 0 < s < \infty, \tag{3}$$

где $K_\mu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) порядка μ.

По известному изображению $\tilde{f}_\mu(s)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Мейера

$$f(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{sx}\,I_\mu(sx)\widehat{f}_\mu(s)\,ds, \qquad 0 < x < \infty, \tag{4}$$

где $I_\mu(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка μ. Для преобразования Мейера определена свертка и построено операционное исчисление.

7.6-3. Преобразование Конторовича–Лебедева

Преобразование Конторовича–Лебедева вводится следующим образом:

$$F(\tau) = \int_0^\infty K_{i\tau}(x)f(x)\,dx, \qquad 0 < \tau < \infty, \tag{5}$$

где $K_\mu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) порядка μ, а i — мнимая единица.

По известному изображению $F(\tau)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного преобразования Конторовича–Лебедева

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x}\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)K_{i\tau}(x)F(\tau)\,d\tau, \qquad 0 < x < \infty. \tag{6}$$

7.6-4. Y-преобразование и другие преобразования

Интегральное Y-преобразование вводится соотношением

$$F_\nu(u) = \int_0^\infty \sqrt{ux}\, Y_\nu(ux) f(x)\, dx, \tag{7}$$

где $Y_\nu(x)$ — функция Бесселя второго рода порядка ν.

По известному изображению $F_\nu(u)$ оригинал $f(x)$ находится с помощью обратного Y-преобразования

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{ux}\, \mathbf{H}_\nu(ux) F_\nu(u)\, du, \tag{8}$$

где $\mathbf{H}_\nu(x)$ — функция Струве, определяемая формулой

$$\mathbf{H}_\nu(x) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j (x/2)^{\nu+2j+1}}{\Gamma\bigl(j+\frac{3}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\nu+j+\frac{3}{2}\bigr)}.$$

Существуют и другие интегральные преобразования, основные из которых, наряду с указанными выше преобразованиями, приведены в табл. 3 (об ограничениях, накладываемых на функции и параметры преобразований, см. в литературе, приведенной в конце раздела).

ТАБЛИЦА 3
Интегральные преобразования

Название преобразования	Интегральное преобразование	Формула обращения
Преобразование Лапласа	$\widetilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$	$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px}\widetilde{f}(p)\, dp$
Двухстороннее преобразование Лапласа	$\widetilde{f}_*(p) = \int_{-\infty}^\infty e^{-px} f(x)\, dx$	$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px}\widetilde{f}_*(p)\, dp$
Преобразование Фурье	$\widetilde{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-iux} f(x)\, dx$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{iux}\widetilde{f}(u)\, du$
Синус-преобразование Фурье	$\widetilde{f}_\mathrm{s}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xu) f(x)\, dx$	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xu)\widetilde{f}_\mathrm{s}(u)\, du$
Косинус-преобразование Фурье	$\widetilde{f}_\mathrm{c}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xu) f(x)\, dx$	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xu)\widetilde{f}_\mathrm{c}(u)\, du$
Преобразование Хартли	$\widetilde{f}_\mathrm{h}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,u) f(x)\, dx,$ $g(x,u) \equiv \cos xu + \sin xu$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,u)\widetilde{f}_\mathrm{h}(u)\, du$
Преобразование Меллина	$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx$	$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\widehat{f}(s)\, ds$
Преобразование Ханкеля	$\widehat{f}_\nu(w) = \int_0^\infty xJ_\nu(xw) f(x)\, dx$	$f(x) = \int_0^\infty wJ_\nu(xw)\widehat{f}_\nu(w)\, dw$
Y-преобразование	$F_\nu(u) = \int_0^\infty \sqrt{ux}\, Y_\nu(ux) f(x)\, dx$	$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{ux}\, \mathbf{H}_\nu(ux) F_\nu(u)\, du$
Преобразование Мейера (K-преобразование)	$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{sx}\, K_\nu(sx) f(x)\, dx$	$f(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{sx}\, I_\nu(sx)\widehat{f}(s)\, ds$

ТАБЛИЦА 3 (*продолжение*)

Название преобразования	Интегральное преобразование	Формула обращения
Преобразование Бохнера	$\widetilde{f}(r)=\int_0^\infty J_{n/2-1}(2\pi xr)G(x,r)f(x)\,dx$, $G(x,r)=2\pi r(x/r)^{n/2}$, $n=1,2,\dots$	$f(x)=\int_0^\infty J_{n/2-1}(2\pi rx)G(r,x)\widetilde{f}(r)\,dr$
Преобразование Вебера	$F_a(u)=\int_a^\infty W_\nu(xu,au)xf(x)\,dx$, $W_\nu(\beta,\mu)\equiv J_\nu(\beta)Y_\nu(\mu)-J_\nu(\mu)Y_\nu(\beta)$	$f(x)=\int_0^\infty \dfrac{W_\nu(xu,au)}{J_\nu^2(au)+Y_\nu^2(au)}uF_a(u)\,du$
Преобразование Конторовича–Лебедева	$F(\tau)=\int_0^\infty K_{i\tau}(x)f(x)\,dx$	$f(x)=\dfrac{2}{\pi^2 x}\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)K_{i\tau}(x)F(\tau)\,d\tau$
Преобразование Мелера–Фока	$\widetilde{F}(\tau)=\int_1^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)f(x)\,dx$	$f(x)=\int_0^\infty \tau\,\mathrm{th}(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\widetilde{F}(\tau)\,d\tau$
Преобразование Гильберта*	$\widehat{F}(s)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \dfrac{f(x)}{x-s}\,dx$	$f(x)=-\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\widehat{F}(s)}{s-x}\,ds$

Обозначения: $i=\sqrt{-1}$, $J_\mu(x)$ и $Y_\mu(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода, $I_\mu(x)$ и $K_\mu(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, $P_\mu(x)$ — сферическая функция Лежандра второго рода.

* **Примечание.** В прямом и обратном преобразованиях Гильберта интегралы понимаются в смысле главного значения.

⊙ *Литература*: Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), J. W. Miles (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), B. Davis (1978), D. Zwillinger (1989), Yu. A. Brychkov, A. P. Prudnikov (1989), W. H. Beyer (1991).