Из книги А. Д. Полянина, А. В. Манжирова, «Справочник по интегральным уравнениям». — М.: Физматлит, 2003.

8. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x)$

8.1. Уравнения Вольтерра первого рода

8.1-1. Структура уравнений. Классы функций и ядер

В главе 8 излагаются методы решения линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которые имеют вид

$$\int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция ($a \leqslant x \leqslant b$), $K(x,t)$ — *ядро интегрального уравнения*, $f(x)$ — некоторая известная функция, которая называется *свободным членом* или *правой частью* уравнения (1).

Функции $y(x)$ и $f(x)$ обычно считают непрерывными, либо квадратично интегрируемыми на $[a,b]$. Ядро интегрального уравнения $K(x,t)$ полагают непрерывным в квадрате $S = \{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$, либо удовлетворяющим условию

$$\int_a^b\!\!\int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt = B^2 < \infty, \tag{2}$$

где B — постоянная, т. е. квадратично интегрируемым в этом квадрате. В формуле (2) полагается, что $K(x,t) \equiv 0$ при $t > x$.

Ядро интегрального уравнения $K(x,t)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде $K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + \cdots + g_n(x)h_n(t)$.

Ядро интегрального уравнения $K(x,t)$ называется *разностным*, если оно зависит от разности аргументов: $K(x,t) = K(x-t)$.

Рассматривают также *полярные ядра*

$$K(x,t) = \frac{L(x,t)}{(x-t)^\beta} + M(x,t), \qquad 0 < \beta < 1, \tag{3}$$

и *логарифмические ядра* (ядра, имеющие логарифмическую особенность)

$$K(x,t) = L(x,t)\ln(x-t) + M(x,t), \tag{4}$$

где $L(x,t)$ ($L(x,x) \not\equiv 0$) и $M(x,t)$ — непрерывны в S.

Полярные и логарифмические ядра составляют класс ядер со слабой особенностью. Уравнения, содержащие такие ядра, называются *уравнениями со слабой особенностью*.

Частным случаем уравнения (1) с ядром (3) является *обобщенное уравнение Абеля*:

$$\int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^\beta}\,dt = f(x), \qquad 0 < \beta < 1.$$

Для непрерывных $K(x,t)$ и $f(x)$ правая часть уравнения (1) должна удовлетворять следующим условиям:

1°. Если $K(a,a) \neq 0$, то должно выполняться условие $f(a) = 0$.

2°. Если $K(a,a) = K'_x(a,a) = \cdots = K_x^{(n-1)}(a,a) = 0$, $0 < \bigl|K_x^{(n)}(a,a)\bigr| < \infty$, то правая часть уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(n)}(a) = 0.$$

3°. Если $K(a,a) = K'_x(a,a) = \cdots = K_x^{(n-1)}(a,a) = 0$, $K_x^{(n)}(a,a) = \infty$, то правая часть уравнения должна удовлетворять условиям

$$f(a) = f'_x(a) = \cdots = f_x^{(n-1)}(a) = 0.$$

Для полярных ядер вида (4) и непрерывных $f(x)$ на правую часть интегрального уравнения дополнительные условия не накладываются.

Замечание 1. Случай, когда $a = -\infty$, вообще говоря, не исключается.

8.1-2. Существование и единственность решения

Если в уравнении (1) функции $f(x)$ и $K(x,t)$ — непрерывны и ограничены вместе со своими первыми производными на $[a,b]$ и в S соответственно, причем $K(x,x)\neq 0$ $(x\in[a,b])$ и $f(a)=0$, то существует единственное непрерывное решение $y(x)$ уравнения (1).

Замечание 2. Вопрос о существовании и единственности решения уравнения Вольтерра первого рода тесно связан с условиями, при которых оно приводится к уравнениям Вольтерра второго рода (см. разд. 8.3).

Замечание 3. Уравнение Вольтерра первого рода можно трактовать как уравнение Фредгольма первого рода, ядро которого $K(x,t)$ обращается в нуль при $t>x$ (см. главу 10).

⦿ *Литература*: Э. Гурса (1934), Г. М. Мюнтц (1934), С. Г. Михлин (1959), Ф. Трикоми (1960), П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Л. Я. Цлаф (1970), J. A. Cochran (1972), C. Corduneanu (1973), В. И. Смирнов (1974), В. Вольтерра (1982), A. J. Jerry (1985), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (1998), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).

8.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x,t)=g_1(x)h_1(t)+\cdots+g_n(x)h_n(t)$

8.2-1. Уравнения с ядром $K(x,t)=g_1(x)h_1(t)+g_2(x)h_2(t)$

Рассматриваемое уравнение можно записать так:

$$g_1(x)\int_a^x h_1(t)y(t)\,dt+g_2(x)\int_a^x h_2(t)y(t)\,dt=f(x). \tag{1}$$

Считается, что выполнены условия: $g_1(x)\neq \text{const}\, g_2(x)$, $h_1(t)\neq \text{const}\, h_2(t)$, $f(a)=0$, $0<g_1^2(a)+g_2^2(a)<\infty$.

Замена

$$u(x)=\int_a^x h_1(t)y(t)\,dt \tag{2}$$

и последующее интегрирование по частям второго интеграла в (1) с учетом равенства $u(a)=0$ дает уравнение Вольтерра второго рода

$$[g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)]u(x)-g_2(x)h_1(x)\int_a^x\left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)}\right]_t' u(t)\,dt=h_1(x)f(x). \tag{3}$$

Подстановка

$$w(x)=\int_a^x\left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)}\right]_t' u(t)\,dt \tag{4}$$

приводит (3) к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$[g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)]w_x'-g_2(x)h_1(x)\left[\frac{h_2(x)}{h_1(x)}\right]_x' w=f(x)h_1(x)\left[\frac{h_2(x)}{h_1(x)}\right]_x'. \tag{5}$$

1°. При $g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)\not\equiv 0$, решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $w(a)=0$ (которое является следствием замены (4)), имеет вид

$$w(x)=\Phi(x)\int_a^x\left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)}\right]_t' \frac{f(t)h_1(t)\,dt}{\Phi(t)[g_1(t)h_1(t)+g_2(t)h_2(t)]}, \tag{6}$$

$$\Phi(x)=\exp\left\{\int_a^x\left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)}\right]_t' \frac{g_2(t)h_1(t)\,dt}{g_1(t)h_1(t)+g_2(t)h_2(t)}\right\}. \tag{7}$$

Продифференцируем обе части (4) и подставим в полученное выражение зависимость (6). После интегрирования по частям с учетом равенств $f(a)=0$, $w(a)=0$, при $f\not\equiv\text{const}\, g_2$ получим

$$u(x)=\frac{g_2(x)h_1(x)\Phi(x)}{g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)}\int_a^x\left[\frac{f(t)}{g_2(t)}\right]_t' \frac{dt}{\Phi(t)}.$$

При помощи формулы (2) находим решение исходного уравнения в виде

$$y(x)=\frac{1}{h_1(x)}\frac{d}{dx}\left\{\frac{g_2(x)h_1(x)\Phi(x)}{g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)}\int_a^x\left[\frac{f(t)}{g_2(t)}\right]_t' \frac{dt}{\Phi(t)}\right\}, \tag{8}$$

где функция $\Phi(x)$ дается выражением (7).

Если $f(x)\equiv\text{const}\, g_2(x)$, то решение дается формулами (8) и (7), в которых индекс 1 должен быть заменен на 2 и наоборот.

2°. При $g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)\equiv 0$ решение имеет вид

$$y(x)=\frac{1}{h_1}\frac{d}{dx}\left[\frac{(f/g_2)'_x}{(g_1/g_2)'_x}\right]=-\frac{1}{h_1}\frac{d}{dx}\left[\frac{(f/g_2)'_x}{(h_2/h_1)'_x}\right].$$

8.2-2. Уравнения с вырожденным ядром общего вида

Уравнение Вольтерра первого рода с вырожденным ядром общего вида можно записать так:

$$\sum_{m=1}^{n} g_m(x)\int_a^x h_m(t)y(t)\,dt=f(x). \tag{9}$$

Используя обозначения

$$w_m(x)=\int_a^x h_m(t)y(t)\,dt, \qquad m=1,2,\ldots,n, \tag{10}$$

запишем уравнение (9) следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{n} g_m(x)w_m(x)=f(x). \tag{11}$$

Дифференцируя формулы (10) и исключая из полученных выражений $y(x)$, приходим к линейным дифференциальным уравнениям для функций $w_m=w_m(x)$:

$$h_1(x)w'_m=h_m(x)w'_1, \qquad m=2,3,\ldots,n, \tag{12}$$

(штрих соответствует производной по x) с начальными условиями

$$w_m(a)=0, \qquad m=1,2,\ldots,n.$$

Если найдено решение системы уравнений (11), (12), то решение исходного интегрального уравнения (9) определяется с помощью любого из выражений

$$y(x)=\frac{w'_m(x)}{h_m(x)}, \qquad m=1,2,\ldots,n,$$

которые получены путем дифференцирования формулы (10).

Систему (11), (12) (путем неоднократного дифференцирования уравнения (11) с учетом (12)) можно свести к линейному дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка для любой функции $w_m(x)$ $(m=1,2,\ldots,n)$.

⊙ *Литература*: Э. Гурса (1934), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

8.3. Сведение уравнений Вольтерра первого рода к уравнениям Вольтерра второго рода

8.3-1. Первый способ

Пусть ядро и правая часть уравнения

$$\int_a^x K(x,t)y(t)\,dt=f(x), \tag{1}$$

имеют непрерывные производные по x и выполняется условие $K(x,x)\not\equiv 0$. Тогда после дифференцирования (1) с последующим делением обеих частей полученного выражения на $K(x,x)$, приходим к уравнению Вольтерра второго рода:

$$y(x)+\int_a^x \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)}y(t)\,dt=\frac{f'_x(x)}{K(x,x)}. \tag{2}$$

Уравнения этого типа рассматриваются в главе 9. Если $K(x,x)\equiv 0$, то дифференцируя дважды уравнение (1) по x при $K'_x(x,t)|_{t=x}\not\equiv 0$ имеем уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x)+\int_a^x \frac{K''_{xx}(x,t)}{K'_x(x,t)|_{t=x}}y(t)\,dt=\frac{f''_{xx}(x)}{K'_x(x,t)|_{t=x}}.$$

Если же $K'_x(x,x)\equiv 0$, то вновь можно применить дифференцирование и т. д. В случае, когда первые $m-2$ частные производные ядра по x тождественно равны нулю, а $(m-1)$-я производная не равна нулю, то m-кратное дифференцирование исходного уравнения дает следующее уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x)+\int_a^x \frac{K^{(m)}_x(x,t)}{K^{(m-1)}_x(x,t)|_{t=x}}y(t)\,dt=\frac{f^{(m)}_x(x)}{K^{(m-1)}_x(x,t)|_{t=x}}.$$

8.3-2. Второй способ

Введем новую переменную

$$Y(x) = \int_a^x y(t)\,dt,$$

а затем проинтегрируем по частям правую часть уравнения (1) с учетом равенства $f(a) = 0$. В результате после деления обеих частей полученного выражения на $K(x,x)$, приходим к уравнению Вольтерра второго рода:

$$Y(x) - \int_a^x \frac{K_t'(x,t)}{K(x,x)} Y(t)\,dt = \frac{f(x)}{K(x,x)},$$

для которого должно выполняться условие $K(x,x) \not\equiv 0$.

⊙ *Литература*: Э. Гурса (1934), В. Вольтерра (1982).

8.4. Уравнения с разностным ядром: $K(x,t) = K(x-t)$

8.4-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа

Уравнения Вольтерра первого рода с ядром, зависящим от разности аргументов, имеют вид

$$\int_0^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Для решения этих уравнений используют преобразование Лапласа (см. разд. 7.2). Для дальнейшего понадобятся образы ядра и правой части интегрального уравнения, которые вычисляются по формулам

$$\tilde{K}(p) = \int_0^\infty K(x)e^{-px}\,dx, \quad \tilde{f}(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}\,dx. \tag{2}$$

Применяя преобразование Лапласа $\mathfrak{L}$ к уравнению (1) и учитывая, что интеграл с ядром, зависящим от разности аргументов, преобразуется в произведение по правилу (см. п. 7.2-4):

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^x K(x-t)y(t)\,dt\right\} = \tilde{K}(p)\tilde{y}(p),$$

приходим к уравнению для образа искомой величины $\tilde{y}(p)$:

$$\tilde{K}(p)\tilde{y}(p) = \tilde{f}(p). \tag{3}$$

Решение уравнения (3) определяется формулой

$$\tilde{y}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)}. \tag{4}$$

Применяя к (4) обратное преобразование Лапласа (если оно существует), получим решение уравнения (1) в виде

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)} e^{px}\,dp. \tag{5}$$

При использовании указанного аналитического метода решения могут возникнуть следующие технические трудности:

1°. Получение изображения $\tilde{K}(p) = \displaystyle\int_0^\infty K(x)e^{-px}\,dx$ для данного ядра $K(x)$.

2°. Получение оригинала (4), задаваемого формулой (5).

Для вычисления соответствующих интегралов применяют таблицы прямых и обратных преобразований Лапласа [см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)], причем во многих случаях для обратного преобразования используют методы теории функций комплексного переменного, включая теорему о вычетах (см. п. 7.1-4).

Замечание. Если нижний предел в интеграле уравнения Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов, равен a, то его можно свести к уравнению (1) с помощью замены $x = \bar{x} - a$, $t = \bar{t} - a$.

8.4-2. Случай рационального образа решения

Рассмотрим важный частный случай, когда образ решения (4) является рациональной функцией вида

$$\tilde{y}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(p)} \equiv \frac{R(p)}{Q(p)},$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены переменной p, причем степень многочлена $Q(p)$ больше степени многочлена $R(p)$.

Если все нули знаменателя $Q(p)$ простые, т. е. справедливо равенство

$$Q(p) = \mathrm{const}\,(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\ldots(p-\lambda_n)$$

и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{R(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)} \exp(\lambda_k x),$$

где штрихом обозначены производные.

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x e^{-a(x-t)} y(t)\,dt = A\,\mathrm{sh}(bx).$$

Применяя к нему преобразование Лапласа, получим

$$\frac{1}{p+a}\tilde{y}(p) = \frac{Ab}{p^2-b^2}.$$

Отсюда находим, что

$$\tilde{y}(p) = \frac{Ab(p+a)}{p^2-b^2} = \frac{Ab(p+a)}{(p-b)(p+b)}.$$

Имеем $Q(p) = (p-b)(p+b)$, $R(p) = Ab(p+a)$ и $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = -b$. Поэтому решение интегрального уравнения может быть записано в виде

$$y(x) = \tfrac{1}{2}A(b+a)e^{bx} + \tfrac{1}{2}A(b-a)e^{-bx} = Aa\,\mathrm{sh}(bx) + Ab\,\mathrm{ch}(bx).$$

8.4-3. Представление решения в виде композиции

При решении интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разностным ядром $K(x-t)$ с помощью преобразования Лапласа иногда полезно использовать следующий прием.

Представим образ решения (4) в следующем виде:

$$\tilde{y}(p) = \tilde{N}(p)\tilde{M}(p)\tilde{f}(p), \qquad \tilde{N}(p) \equiv \frac{1}{\tilde{K}(p)\tilde{M}(p)}. \tag{6}$$

Если удается подобрать такую функцию $\tilde{M}(p)$, что существуют

$$\mathfrak{L}^{-1}\{\tilde{M}(p)\} = M(x), \qquad \mathfrak{L}^{-1}\{\tilde{N}(p)\} = N(x), \tag{7}$$

то решение интегрального уравнения можно записать в виде композиции:

$$y(x) = \int_0^x N(x-t)F(t)\,dt, \qquad F(t) = \int_0^t M(t-s)f(s)\,ds. \tag{8}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\int_0^x \sin\bigl(k\sqrt{x-t}\bigr)y(t)\,dt = f(x), \qquad f(0) = 0. \tag{9}$$

Используя преобразование Лапласа, получим изображение решения в виде

$$\tilde{y}(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,k} p^{3/2}\exp(\alpha/p)\tilde{f}(p), \qquad \alpha = \tfrac{1}{4}k^2. \tag{10}$$

Перепишем правую часть (10) в эквивалентном виде

$$\tilde{y}(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,k} p^2\bigl[p^{-1/2}\exp(\alpha/p)\bigr]\tilde{f}(p), \qquad \alpha = \tfrac{1}{4}k^2. \tag{11}$$

Здесь в квадратных скобках выделен сомножитель, соответствующий $\tilde{M}(p)$ в формуле (6), $\tilde{N}(p) = \mathrm{const}\,p^2$.

Применяя обратное преобразование Лапласа по указанной схеме к формуле (11) с учетом равенства

$$\mathfrak{L}^{-1}\{p^2\tilde{\varphi}(p)\} = \frac{d^2}{dx^2}\varphi(x), \quad \mathfrak{L}^{-1}\{p^{-1/2}\exp(\alpha/p)\} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\operatorname{ch}\bigl(k\sqrt{x}\bigr),$$

находим решение интегрального уравнения

$$y(x) = \frac{2}{\pi k}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{\operatorname{ch}\bigl(k\sqrt{x-t}\,\bigr)}{\sqrt{x-t}} f(t)\,dt.$$

8.4-4. Использование вспомогательного уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\int_a^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \tag{12}$$

где ядро $K(x)$ имеет интегрируемую особенность при $x=0$.

Пусть $w = w(x)$ — решение вспомогательного более простого уравнения при $f(x)\equiv 1$, $a=0$:

$$\int_0^x K(x-t)w(t)\,dt = 1. \tag{13}$$

Тогда решение исходного уравнения с произвольной правой частью (12) выражается через решение вспомогательного уравнения (13) с помощью формулы

$$y(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x w(x-t)f(t)\,dt = f(a)w(x-a) + \int_a^x w(x-t)f'_t(t)\,dt. \tag{14}$$

Пример 3. Рассмотрим обобщенное уравнение Абеля

$$\int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^\mu} = f(x), \qquad 0<\mu<1. \tag{15}$$

Решение соответствующего вспомогательного уравнения

$$\int_0^x \frac{w(t)\,dt}{(x-t)^\mu} = 1, \qquad 0<\mu<1, \tag{16}$$

ищем методом неопределенных коэффициентов в виде

$$w(x) = Ax^\beta. \tag{17}$$

Подставим (17) в (15), а затем сделаем в интеграле сделаем замену переменной $t = x\xi$. Учитывая связь

$$B(p,q) = \int_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{1-q}\,d\xi = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

между бета- и гамма-функциями, имеем

$$A\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(2+\beta-\mu)}x^{\beta+1-\mu} = 1.$$

Из этого равенства находим коэффициенты A и β:

$$\beta = \mu-1, \quad A = \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)} = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}. \tag{18}$$

Формулы (17), (18) определяют решение вспомогательного уравнения (16) и позволяют с помощью формулы (14) получить решение обобщенного уравнения Абеля (15) в следующем виде:

$$y(x) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}} = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\Bigl[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\mu}} + \int_a^x \frac{f'_t(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}}\Bigr]. \tag{19}$$

8.4-5. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Рассмотрим специальный случай, когда образ ядра интегрального уравнения (1) можно представить в виде

$$\tilde{K}(p) = \frac{M(p)}{N(p)}, \tag{20}$$

где $M(p)$ и $N(p)$ некоторые многочлены степеней m и n соответственно:

$$M(p) = \sum_{k=0}^{m} A_k p^k, \quad N(p) = \sum_{k=0}^{n} B_k p^k. \tag{21}$$

В этом случае решение интегрального уравнения (1) (если оно существует) удовлетворяет линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению m-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^{m} A_k y_x^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k f_x^{(k)}(x). \tag{22}$$

Уравнение (22) можно кратко записать в операторном виде

$$M(D)y(x) = N(D)f(x), \qquad D \equiv \frac{d}{dx}.$$

Начальные условия для дифференциального уравнения (22), а также условия, которые необходимо наложить на правую часть интегрального уравнения (1), получаются из равенства

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} y_x^{(s)}(0) - \sum_{k=0}^{n} B_k \sum_{s=0}^{k-1} p^{k-1-s} f_x^{(s)}(0) = 0 \tag{23}$$

путем выделения членов при одинаковых степенях параметра p.

Доказательство этого утверждения проводится с помощью применения преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению (22) и последующим сравнением полученного выражения с уравнением (3) с учетом равенства (20).

8.4-6. Связь уравнений Вольтерра и Винера–Хопфа

Уравнение Вольтерра первого рода с разностным ядром вида

$$\int_0^x K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{24}$$

можно привести к уравнению Винера–Хопфа первого рода в форме

$$\int_0^\infty K_+(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{25}$$

где ядро $K_+(x-t)$ дается соотношением

$$K_+(s) = \begin{cases} K(s) & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Методы решения уравнения (25) приведены в главе 10.

⊙ *Литература*: П. П. Забрейко, А. И. Кошелев и др. (1968), М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), Г. Дёч (1971), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974), В. И. Смирнов (1974), Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978).

8.5. Метод дробного дифференцирования

8.5-1. Определение дробных интегралов

Функция $f(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset [a,b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, такой, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Класс всех таких функций обозначается AC.

Через AC^n, где $n = 1, 2, \ldots$, обозначим класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ до порядка $n-1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC$.

Пусть $\varphi(x) \in L_1(a,b)$. Интегралы

$$\mathbf{I}^{\mu}_{a+}\varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\mu}}\,dt, \qquad x > a, \tag{1}$$

$$\mathbf{I}^{\mu}_{b-}\varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\mu}}\,dt, \qquad x < b, \tag{2}$$

где $\mu > 0$, называются *интегралами дробного порядка* μ. Первый из них называют иногда *левосторонним*, а второй — *правосторонним*. Операторы $\mathbf{I}^{\mu}_{a+}$, $\mathbf{I}^{\mu}_{b-}$ называют *операторами дробного интегрирования*.

Интегралы (1), (2) принято называть также *дробными интегралами Римана–Лиувилля*.

Справедлива формула

$$\int_a^b \varphi(x)\mathbf{I}^{\mu}_{a+}\psi(x)\,dx = \int_a^b \psi(x)\mathbf{I}^{\mu}_{b-}\varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

называемая иногда *формулой дробного интегрирования по частям*.

Дробное интегрирование обладает свойством

$$\mathbf{I}^{\mu}_{a+}\mathbf{I}^{\beta}_{a+}\varphi(x) = \mathbf{I}^{\mu+\beta}_{a+}\varphi(x), \quad \mathbf{I}^{\mu}_{b-}\mathbf{I}^{\beta}_{b-}\varphi(x) = \mathbf{I}^{\mu+\beta}_{b-}\varphi(x), \qquad \mu > 0, \quad \beta > 0. \tag{4}$$

Свойство (4) называется *полугрупповым свойством дробного интегрирования*.

8.5-2. Определение дробных производных

Дробное дифференцирование естественно ввести как операцию, обратную дробному интегрированию. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$, выражения

$$\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\mu}}\,dt, \tag{5}$$

$$\mathbf{D}^{\mu}_{b-}f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\mu}}\,dt \tag{6}$$

называются соответственно *левосторонней* и *правосторонней дробными производными порядка* μ. В этих формулах считается, что $0 < \mu < 1$.

Дробные производные (5), (6) называют обычно *производными Римана–Лиувилля*.

Заметим, что дробные интегралы определены для любого порядка $\mu > 0$, а дробные производные — пока только для порядка $0 < \mu < 1$.

Если $f(x) \in AC$, то функция $f(x)$ имеет почти всюду производные $\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x)$ и $\mathbf{D}^{\mu}_{b-}f(x)$, $0 < \mu < 1$, причем $\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x), \mathbf{D}^{\mu}_{b-}f(x) \in L_r(a,b)$, $1 \leqslant r < 1/\mu$, и их можно представить также в виде

$$\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\mu}} + \int_a^x \frac{f'_t(t)}{(x-t)^{\mu}}\,dt \right], \tag{7}$$

$$\mathbf{D}^{\mu}_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\mu}} - \int_x^b \frac{f'_t(t)}{(t-x)^{\mu}}\,dt \right]. \tag{8}$$

Перейдем, наконец, к дробным производным порядков $\mu \geqslant 1$. Будем пользоваться обозначениями: $[\mu]$ — целая часть числа μ, $\{\mu\}$ — дробная часть числа μ, $0 \leqslant \{\mu\} < 1$, так что

$$\mu = [\mu] + \{\mu\}. \tag{9}$$

Если μ — целое число, то под дробной производной порядка μ будем понимать обычное дифференцирование:

$$\mathbf{D}^{\mu}_{a+} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu}, \quad \mathbf{D}^{\mu}_{b-} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\mu}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Если же μ — не целое, то $\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x)$, $\mathbf{D}^{\mu}_{b-}f(x)$ вводятся по формулам

$$\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x) \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\mu]} \mathbf{D}^{\{\mu\}}_{a+}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\mu]+1} \mathbf{I}^{1-\{\mu\}}_{a+}f(x), \tag{11}$$

$$\mathbf{D}^{\mu}_{b-}f(x) \equiv \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\mu]} \mathbf{D}^{\{\mu\}}_{b-}f(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\mu]+1} \mathbf{I}^{1-\{\mu\}}_{b-}f(x). \tag{12}$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\mu-n+1}}\,dt, \qquad n = [\mu]+1, \tag{13}$$

$$\mathbf{D}^{\mu}_{b-}f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\mu)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\mu-n+1}}\,dt, \qquad n = [\mu]+1. \tag{14}$$

Достаточное условие существования производных (13), (14) состоит в том, чтобы

$$\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\{\mu\}}} \in AC^{[\mu]}.$$

Для выполнения этого условия достаточно, чтобы $f(x) \in AC^{[\mu]}$.

Замечание. Определения дробных интегралов и дробных производных можно обобщить на случай комплексных μ (см., например, С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987)).

8.5-3. Основные свойства

Через $\mathbf{I}^{\mu}_{a+}(L_1)$, $\mu > 0$, обозначим класс функций $f(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка μ от интегрируемой функции: $f(x) = \mathbf{I}^{\mu}_{a+}\varphi(x)$, $\varphi(x) \in L_1(a,b)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Для того чтобы $f(x) \in \mathbf{I}^{\mu}_{a+}(L_1)$, $\mu > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{n-\mu}(x) \equiv \mathbf{I}^{n-\mu}_{a+}f(x) \in AC^n, \tag{15}$$

где $n = [\mu]+1$, и чтобы*

$$f^{(k)}_{n-\mu}(a) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{16}$$

Пусть $\mu > 0$. Будем говорить, что функция $f(x) \in L_1$ имеет интегрируемую дробную производную $\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x)$, если $\mathbf{I}^{n-\mu}_{a+}f(x) \in AC^n$, $n = [\mu]+1$.

Другими словами, этим определением введено понятие, использующее только первое из двух условий (15), (16), описывающих класс $\mathbf{I}^{\mu}_{a+}(L_1)$.

Пусть $\mu > 0$. Тогда равенство

$$\mathbf{D}^{\mu}_{a+}\mathbf{I}^{\mu}_{a+}\varphi(x) = \varphi(x) \tag{17}$$

выполняется для любой интегрируемой функции $\varphi(x)$, а равенство

$$\mathbf{I}^{\mu}_{a+}\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x) = f(x) \tag{18}$$

выполняется для функции

$$f(x) \in \mathbf{I}^{\mu}_{a+}(L_1). \tag{19}$$

Если вместо (19) предположить, что функция $f(x) \in L_1(a,b)$ имеет суммируемую производную $\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x)$, то (18), вообще говоря, неверно и заменяется формулой

$$\mathbf{I}^{\mu}_{a+}\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu-k)} f^{(n-k-1)}_{n-\mu}(a), \tag{20}$$

где $n = [\mu]+1$ и $f_{n-\mu}(x) = \mathbf{I}^{n-\mu}_{a+}f(x)$. В частности, при $0 < \mu < 1$ имеем

$$\mathbf{I}^{\mu}_{a+}\mathbf{D}^{\mu}_{a+}f(x) = f(x) - \frac{f_{1-\mu}(a)}{\Gamma(\mu)}(x-a)^{\mu-1}. \tag{21}$$

8.5-4. Решение обобщенного уравнения Абеля

Рассмотрим интегральное уравнение Абеля в форме

$$\int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\mu}}\,dt = f(x), \tag{22}$$

* Здесь и далее в разд. 8.5 запись $f^{(n)}(x)$ обозначает n-ю производные функции $f(x)$ по ее аргументу, а $f^{(n)}(a) \equiv f^{(n)}(x)\big|_{x=a}$.

где $0<\mu<1$. Будем считать, что $x\in[a,b]$, $f(x)\in AC$, $y(t)\in L_1$, и применим технику дробного дифференцирования. Разделив обе части уравнения (22) на $\Gamma(1-\mu)$, на основании (1) запишем это уравнение в виде

$$\mathbf{I}_{a+}^{1-\mu}y(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\mu)},\qquad x>a. \tag{23}$$

Подействуем на обе части равенства (23) оператором дробного дифференцирования $\mathbf{D}_{a+}^{1-\mu}$. Тогда на основании свойств операторов дробного интегрирования и дифференцирования получим

$$y(x)=\frac{\mathbf{D}_{a+}^{1-\mu}f(x)}{\Gamma(1-\mu)}, \tag{24}$$

или в развернутой записи

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\mu}}+\int_a^x\frac{f_t'(t)}{(x-t)^{1-\mu}}\,dt\right]. \tag{25}$$

Теперь с учетом соотношения

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)}=\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}$$

придем к решению обобщенного уравнения Абеля в форме

$$y(x)=\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\mu}}+\int_a^x\frac{f_t'(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}}\right], \tag{26}$$

которая совпадает с полученной ранее в п. 8.4-4.

⊙ *Литература*: K. B. Oldham, J. Spanier (1974), Ю. И. Бабенко (1986), С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев (1987).

8.6. Уравнения с ядрами, имеющими слабую особенность

8.6-1. Метод преобразования ядра

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода с полярным ядром

$$K(x,t)=\frac{L(x,t)}{(x-t)^\alpha},\qquad 0<\alpha<1. \tag{1}$$

Тогда исследуемое интегральное уравнение можно записать в форме

$$\int_0^x\frac{L(x,\,t)}{(x-t)^\alpha}y(t)\,dt=f(x), \tag{2}$$

причем предполагается, что функции $L(x,\,t)$ и $\partial L(x,\,t)/\partial x$ являются непрерывными и ограниченными. Для решения уравнения (2) умножим обе его части на $dx/(\xi-x)^{1-\alpha}$ и проинтегрируем от 0 до ξ. Тогда

$$\int_0^\xi\left[\int_0^x\frac{L(x,\,t)}{(x-t)^\alpha}y(t)\,dt\right]\frac{dx}{(\xi-x)^{1-\alpha}}=\int_0^\xi\frac{f(x)\,dx}{(\xi-x)^{1-\alpha}}.$$

Полагая

$$K^*(\xi,\,t)=\int_t^\xi\frac{L(x,\,t)\,dx}{(\xi-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha},$$
$$\varphi(\xi)=\int_0^\xi\frac{f(x)\,dx}{(\xi-x)^{1-\alpha}},\quad \varphi(0)=0,$$

будем иметь другое интегральное уравнение первого рода с неизвестной функцией $y(t)$:

$$\int_0^\xi K^*(\xi,\,t)y(t)\,dt=\varphi(\xi), \tag{3}$$

в котором ядро $K^*(\xi,t)$ не имеет особенностей.

Можно показать, что любое решение уравнения (3) является также решением уравнения (2). Таким образом, после преобразования уравнения (2) к виду (3), к последнему применимы методы, пригодные для непрерывных ядер.

8.6-2. Ядро с логарифмической особенностью

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^x \ln(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad f(0)=0. \tag{4}$$

Для его решения применим преобразование Лапласа. Заметим, что

$$\mathfrak{L}\{x^\nu\} = \int_0^\infty e^{-px}x^\nu\,dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1. \tag{5}$$

Продифференцируем соотношение (5) по ν. Тогда

$$\mathfrak{L}\{x^\nu \ln x\} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}\Big[\frac{\Gamma'_\nu(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} + \ln\frac{1}{p}\Big]. \tag{6}$$

При $\nu=0$ в силу (6) имеем

$$\frac{\Gamma'_\nu(1)}{\Gamma(1)} = -\mathcal{C},$$

где $\mathcal{C}=0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера. С учетом последнего равенства формула (6) принимает вид

$$\mathfrak{L}\{\ln x\} = -\frac{\ln p+\mathcal{C}}{p}. \tag{7}$$

Применяя к уравнению (4) преобразование Лапласа, с учетом (7) получим

$$-\frac{\ln p+\mathcal{C}}{p}\,\tilde{y}(p) = \tilde{f}(p),$$

откуда

$$\tilde{y}(p) = -\frac{p\tilde{f}(p)}{\ln p+\mathcal{C}}. \tag{8}$$

Запишем теперь $\tilde{y}(p)$ в виде

$$\tilde{y}(p) = -\frac{p^2\tilde{f}(p)-f'_x(0)}{p(\ln p+\mathcal{C})} - \frac{f'_x(0)}{p(\ln p+\mathcal{C})}. \tag{9}$$

Так как $f(0)=0$, то

$$\mathfrak{L}\{f''_{xx}(x)\} = p^2\tilde{f}(p) - f'_x(0). \tag{10}$$

Перепишем формулу (5) следующим образом:

$$\mathfrak{L}\Big\{\frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\Big\} = \frac{1}{p^{\nu+1}}, \tag{11}$$

и проинтегрируем обе части (11) по ν в пределах от 0 до ∞. Тогда

$$\mathfrak{L}\Big\{\int_0^\infty \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\Big\} = \int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p\,\ln p}.$$

Воспользовавшись формулой для преобразования Лапласа при изменении масштаба переменной (см. табл. 1 из п. 7.2-5), будем иметь

$$\mathfrak{L}\Big\{\int_0^\infty \frac{(x/a)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\Big\} = \int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p\,\ln ap} = \frac{1}{p\,(\ln p+\ln a)}.$$

Если положить $a=e^{\mathcal{C}}$, то

$$\mathfrak{L}\Big\{\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\mathcal{C}\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\Big\} = \frac{1}{p\,(\ln p+\mathcal{C})}. \tag{12}$$

Обратимся к равенству (9). В силу соотношения (12)

$$\frac{f'_x(0)}{p\,(\ln p+\mathcal{C})} = \mathfrak{L}\Big\{f'_x(0)\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\mathcal{C}\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\Big\}. \tag{13}$$

Учитывая (10) и (12), первое слагаемое в правой части (9) можно рассматривать как произведение изображений. Для отыскания этого слагаемого воспользуемся теоремой о свертке:

$$\frac{p^2\tilde{f}(p)-f'_x(0)}{p\,(\ln p+\mathcal{C})} = \mathfrak{L}\Big\{\int_0^x f''_{tt}(t)\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\mathcal{C}\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\,dt\Big\}. \tag{14}$$

На основании соотношений (9), (13) и (14) получим решение интегрального уравнения (4) в виде

$$y(x) = -\int_0^x f''_{tt}(t)\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\mathcal{C}\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\,dt - f'_x(0)\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\mathcal{C}\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu. \tag{15}$$

⦿ *Литература*: М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко (1968), В. Вольтерра (1982).

8.7. Метод квадратур

8.7-1. Квадратурные формулы

Методом квадратур называется метод построения приближенного решения интегрального уравнения, основанный на замене интегралов конечными суммами по некоторой формуле. Такие формулы называются *квадратурными* и в общем случае имеют вид

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^n A_i\psi(x_i) + \varepsilon_n[\psi], \tag{1}$$

где x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — абсциссы точек разбиения промежутка интегрирования $[a, b]$ или *узлы квадратуры* (или *интерполирования*), A_i — числовые коэффициенты не зависящие от выбора функции $\psi(x)$, $\varepsilon_n[\psi]$ — *остаточный член* (ошибка) формулы (1). Как правило $A_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^n A_i = b - a$.

Существует довольно много квадратурных формул вида (1). Наиболее простыми и часто применяемыми на практике являются следующие (h — постоянный шаг интегрирования):

Формула прямоугольников:

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = h, \quad A_n = 0, \\ &h = \frac{b-a}{n-1}, \quad x_i = a + h(i-1) \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2}$$

Формула трапеций:

$$\begin{aligned} &A_1 = A_n = \tfrac{1}{2}h, \quad A_2 = A_3 = \cdots = A_{n-1} = h, \\ &h = \frac{b-a}{n-1}, \quad x_i = a + h(i-1) \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{3}$$

Формула Симпсона (*парабол*):

$$\begin{aligned} &A_1 = A_{2m+1} = \tfrac{1}{3}h, \;\; A_2 = \cdots = A_{2m} = \tfrac{4}{3}h, \;\; A_3 = \cdots = A_{2m-1} = \tfrac{2}{3}h, \\ &h = \frac{b-a}{n-1}, \;\; x_i = a + h(i-1) \;\; (n = 2m+1, \;\; i = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{4}$$

где m — натуральное число.

Широко применяются также квадратурные формулы Чебышева и Гаусса с разным количеством узлов интерполирования. Проиллюстрируем эти формулы на примере.

Пример. На отрезке $[-1, 1]$, параметры формулы (1) принимают следующие значения:
Формула Чебышева ($n = 6$):

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = \cdots = \frac{2}{n} = \frac{1}{3}, && x_1 = -x_6 = -0{,}8662468181, \\ &x_2 = -x_5 = -0{,}4225186538, && x_3 = -x_4 = -0{,}2666354015. \end{aligned} \tag{5}$$

Формула Гаусса ($n = 7$):

$$\begin{aligned} &A_1 = A_7 = 0{,}1294849662, && A_2 = A_6 = 0{,}2797053915, \\ &A_3 = A_5 = 0{,}3818300505, && A_4 = 0{,}4179591837, \\ &x_1 = -x_7 = -0{,}9491079123, && x_2 = -x_6 = -0{,}7415311856, \\ &x_3 = -x_5 = -0{,}4058451514, && x_4 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что квадратурным формулам посвящена обширная литература, которую заинтересованный читатель сможет найти, например, в книгах Н. С. Бахвалов (1973), С. М. Никольский (1979), Г. Корн, Т. Корн (1984).

8.7-2. Общая схема метода

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x), \qquad f(a) = 0, \tag{7}$$

и применим для его решения на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ метод квадратур. Процедура построения решения состоит из двух этапов:

1°. Во-первых, определим начальное значение $y(a)$. Для этого продифференцируем уравнение (7) по x. Тогда

$$K(x,x)y(x) + \int_a^x K'_x(x,t)y(t)\,dt = f'_x(x).$$

Полагая $x = a$, найдем

$$y_1 = y(a) = \frac{f'_x(a)}{K(a,a)} = \frac{f'_x(a)}{K_{11}}.$$

2°. Возьмем постоянный шаг интегрирования h и рассмотрим дискретное множество точек $x_i = a + h(i-1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. При $x = x_i$ уравнение (7) примет вид

$$\int_a^{x_i} K(x_i,t)y(t)\,dt = f(x_i), \qquad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{8}$$

Заменяя интеграл в (8) квадратурной формулой (1) и выбирая x_j ($j = 1, 2, \ldots, i$) узлами квадратуры (по переменной t), получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{i} A_{ij}K(x_i,x_j)y(x_j) = f(x_i) + \varepsilon_i[y], \qquad i = 2, 3, \ldots, n, \tag{9}$$

где A_{ij} — коэффициенты квадратурной формулы на отрезке $[a, x_i]$, $\varepsilon_i[y]$ — ошибка аппроксимации. Полагая $\varepsilon_i[y]$ малыми и отбрасывая их, получим систему линейных алгебраических уравнений в форме

$$\sum_{j=1}^{i} A_{ij}K_{ij}y_j = f_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, n, \tag{10}$$

где $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ ($j = 1, 2, \ldots, i$), $f_i = f(x_i)$, y_j — приближенные значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_i.

Теперь система уравнений (10) позволяет последовательно определить при $A_iK_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) искомые приближенные значения посредством формул

$$y_1 = \frac{f'_x(a)}{K_{11}}, \quad y_2 = \frac{f_2 - A_{21}K_{21}y_1}{A_{22}K_{22}}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{f_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} A_{nj}K_{nj}y_j}{A_{nn}K_{nn}},$$

конкретный вид которых зависит от выбора квадратурной формулы.

8.7-3. Алгоритм на основе формулы трапеций

В соответствии с формулой трапеций (3), имеем

$$A_{i1} = A_{ii} = \tfrac{1}{2}h, \quad A_{i2} = \cdots = A_{i,i-1} = h, \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Применение этой формулы в общей схеме приводит к следующему пошаговому алгоритму:

$$y_1 = \frac{f'_x(a)}{K_{11}}, \quad f'_x(a) = \frac{-3f_1 + 4f_2 - f_3}{2h},$$

$$y_i = \frac{2}{K_{ii}}\Bigl(\frac{f_i}{h} - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j K_{ij}y_j\Bigr), \quad \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } j = 1, \\ 1 & \text{при } j > 1, \end{cases} \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

где обозначения совпадают с введенными в п. 8.7-2. Формула трапеций достаточно проста, эффективна и часто используется на практике для решения интегральных уравнений с переменным пределом интегрирования.

На основании 8.7-1 и 8.7-2 можно выписать аналогичные выражения с использованием других квадратурных формул. Однако существуют особенности в их применении. Например, применение формулы Симпсона должно чередоваться для нечетных узлов с каким-либо другим правилом, скажем, с формулой прямоугольников или формулой трапеций. Для уравнений с переменным пределом интегрирования возникают сложности и в применении формул Чебышева и Гаусса.

8.7-4. Алгоритм для уравнения с вырожденным ядром

Общее свойство алгоритмов метода квадратур при решении уравнений Вольтерра первого рода с произвольным ядром состоит в пропорциональной зависимости количества вычислений на шаге от номера шага: все операции предыдущего шага повторяются с новыми данными на следующем шаге и добавляется еще один член суммы.

Если же ядро в уравнении (7) вырожденное, т. е.

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x)q_k(t), \tag{11}$$

или возможна приближенная замена произвольного ядра вырожденным, то можно построить алгоритм, для которого количество операций не зависит от номера узла дискретизации. С учетом (11) уравнение (7) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(x)\int_a^x q_k(t)y(t)\,dt = f(x). \tag{12}$$

Применяя к (12) формулу трапеций, получаем рекуррентные выражения для решения уравнения (см. формулы п. 8.7-3):

$$y(a) = \frac{f'_x(a)}{\sum\limits_{k=1}^{m} p_k(a)q_k(a)}, \quad y_i = \frac{2}{\sum\limits_{k=1}^{m} p_{ki}q_{ki}}\Bigl[\frac{f_i}{h} - \sum_{k=1}^{m} p_{ki}\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j q_{kj}y_j\Bigr],$$

где y_i — приближенные значения неизвестной функции $y(x)$ в узлах x_i, $f_i = f(x_i)$, $p_{ki} = p_k(x_i)$, $q_{ki} = q_k(x_i)$.

⊙ *Литература*: Н. С. Бахвалов (1973), В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный (1984), А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков (1986).

8.8. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования

Представляют интерес интегральные уравнения первого рода с одним переменным, а другим бесконечным пределами, содержащие разностное ядро. Часто ядра и функции таких уравнений не принадлежат описанным в начале главы классам. Исследование этих уравнений проводится методом модельных решений (см. разд. 9.6) или методом сведения к уравнениям типа свертки. Рассмотрим отмеченные методы на примере уравнения первого рода с переменным нижним пределом.

8.8-1. Уравнение с переменным нижним пределом интегрирования

Рассмотрим уравнение первого рода с разностным ядром:

$$\int_x^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Уравнение (1) нельзя решить путем непосредственного применения преобразования Лапласа, так как здесь теорема о свертке не применима. В соответствии с методом модельных решений, подробное изложение которого приведено в разд. 9.6, рассмотрим вспомогательное уравнение с экспоненциальной правой частью

$$\int_x^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = e^{px}. \tag{2}$$

Решение (2) имеет вид

$$Y(x,p) = \frac{1}{\tilde{K}(-p)}e^{px}, \qquad \tilde{K}(-p) = \int_0^{\infty} K(-z)e^{pz}\,dz. \tag{3}$$

Тогда на основании этих формул и формулы (11) из разд. 9.6 получим решение уравнения (1) для произвольной правой части $f(x)$ в форме

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{K}(-p)}e^{px}\,dp, \tag{4}$$

где $\tilde{f}(p)$ — изображение функции $f(x)$, полученное с помощью преобразования Лапласа.

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода с переменным нижним пределом интегрирования

$$\int_x^\infty e^{a(x-t)} y(t)\,dt = A\sin(bx), \qquad a > 0. \tag{5}$$

В соответствии с формулами (3) и (4) получим выражения для $\tilde{f}(p)$ и $\tilde{K}(-p)$:

$$\tilde{f}(p) = \frac{Ab}{p^2+b^2}, \qquad \tilde{K}(-p) = \int_0^\infty e^{(p-a)z}\,dz = \frac{1}{a-p}, \tag{6}$$

а также решение уравнения (5) в форме

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Ab(a-p)}{p^2+b^2} e^{px}\,dp. \tag{7}$$

Теперь, воспользовавшись таблицами обратного преобразования Лапласа [см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1969), В. А. Диткин, А. П. Прудников (1974)], получим точное решение

$$y(x) = Aa\sin(bx) - Ab\cos(bx), \qquad a > 0, \tag{8}$$

которое можно легко проверить подстановкой (8) в уравнение (5) с использованием таблиц интегралов.

8.8-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа первого рода

Уравнение (1) может быть приведено к одностороннему уравнению первого рода

$$\int_0^\infty K_-(x-t)y(t)\,dt = -f(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{9}$$

где ядро $K_-(x-t)$ имеет следующий вид:

$$K_-(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s > 0, \\ -K(s) & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Методы исследования уравнения (9) описаны в главе 10.

⊙ *Литература*: Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский (1978), А. В. Манжиров, А. Д. Полянин (1999, 2000).