Из книги А. Д. Полянина «Справочник по линейным уравнениям математической физики». — М.: Физматлит, 2001.

7.4.5. Уравнение вида $a(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + c(x)w = -\Phi(x,y)$

7.4.5-1. Постановки краевых задач. Формулы для функции Грина.

Будем рассматривать двумерные краевые задачи для уравнения

$$a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x)w = -\Phi(x,y) \tag{1}$$

с общими граничными условиями по переменной x:

$$\begin{aligned} s_1\partial_x w - k_1 w &= f_1(y) \quad \text{при} \quad x = x_1, \\ s_2\partial_x w + k_2 w &= f_2(y) \quad \text{при} \quad x = x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

и различными граничными условиями по переменной y. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2) удовлетворяют условиям:

$a(x),\ b(x),\ c(x)$ — непрерывные функции ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$); $\quad a > 0,\ |s_1| + |k_1| > 0,\ |s_2| + |k_2| > 0.$

В общем случае функцию Грина можно представить в виде

$$G(x,y,\xi,\eta) = \rho(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\|u_n\|^2}\,\Psi_n(y,\eta;\lambda_n). \tag{3}$$

Здесь

$$\rho(x) = \frac{1}{a(x)}\exp\Bigl[\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Bigr], \quad \|u_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2}\rho(x)u_n^2(x)\,dx, \tag{4}$$

а λ_n и $u_n(x)$ — собственные значения и собственные функции однородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$a(x)u''_{xx} + b(x)u'_x + \bigl[\lambda + c(x)\bigr]u = 0, \tag{5}$$

$$s_1u'_x - k_1u = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \tag{6}$$

$$s_2u'_x + k_2u = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2. \tag{7}$$

Явный вид функций Ψ_n для различных граничных условий по переменной y указан в табл. 25.

Уравнение (5) можно записать в самосопряженной форме

$$[p(x)u'_x]'_x + [\lambda\rho(x) - q(x)]u = 0, \tag{8}$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ описываются формулами

$$p(x) = \exp\Bigl[\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Bigr], \quad q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}\exp\Bigl[\int\frac{b(x)}{a(x)}\,dx\Bigr],$$

а функция $\rho(x)$ определена в (4).

Относительно задачи на собственные значения (8), (6)–(7) известно следующее:

1°. Все собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ вещественны и $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

2°. Система собственных функций $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots$ является ортогональной на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ с весовой функцией $\rho(x)$, т. е.

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)u_n(x)u_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

3°. При выполнении условий

$$q(x) \geqslant 0, \quad s_1k_1 \geqslant 0, \quad s_2k_2 \geqslant 0, \tag{9}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $q \equiv 0$, $k_1 = k_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_0 = 0$, которому отвечает собственная функция $u_0 = \text{const}$ [в этом случае в формуле для функции Грина (3) суммирование надо начинать с $n = 0$]. В остальных случаях

ТАБЛИЦА 25

Функции Ψ_n в формуле (3) для различных граничных условий.* Обозначение: $\beta_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Область	Граничные условия	Функция $\Psi_n(y,\eta;\lambda_n)$
$-\infty < y < \infty$	$\|w\| < \infty$ при $y \to \pm\infty$	$\frac{1}{2\beta_n} e^{-\beta_n \|y-\eta\|}$
$0 \leqslant y < \infty$	$w = 0$ при $y = 0$	$\frac{1}{\beta_n} \begin{cases} e^{-\beta_n y} \operatorname{sh}(\beta_n \eta) & \text{при } y > \eta, \\ e^{-\beta_n \eta} \operatorname{sh}(\beta_n y) & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y < \infty$	$\partial_y w = 0$ при $y = 0$	$\frac{1}{\beta_n} \begin{cases} e^{-\beta_n y} \operatorname{ch}(\beta_n \eta) & \text{при } y > \eta, \\ e^{-\beta_n \eta} \operatorname{ch}(\beta_n y) & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y < \infty$	$\partial_y w - k_3 w = 0$ при $y = 0$	$\frac{1}{\beta_n(\beta_n + k_3)} \begin{cases} e^{-\beta_n y} \bigl[\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n \eta) + k_3 \operatorname{sh}(\beta_n \eta)\bigr] & \text{при } y > \eta, \\ e^{-\beta_n \eta} \bigl[\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n y) + k_3 \operatorname{sh}(\beta_n y)\bigr] & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y \leqslant h$	$w = 0$ при $y = 0$, $w = 0$ при $y = h$	$\frac{1}{\beta_n \operatorname{sh}(\beta_n h)} \begin{cases} \operatorname{sh}(\beta_n \eta) \operatorname{sh}\bigl[\beta_n(h-y)\bigr] & \text{при } y > \eta, \\ \operatorname{sh}(\beta_n y) \operatorname{sh}\bigl[\beta_n(h-\eta)\bigr] & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y \leqslant h$	$\partial_y w = 0$ при $y = 0$, $\partial_y w = 0$ при $y = h$	$\frac{1}{\beta_n \operatorname{sh}(\beta_n h)} \begin{cases} \operatorname{ch}(\beta_n \eta) \operatorname{ch}\bigl[\beta_n(h-y)\bigr] & \text{при } y > \eta, \\ \operatorname{ch}(\beta_n y) \operatorname{ch}\bigl[\beta_n(h-\eta)\bigr] & \text{при } \eta > y \end{cases}$
$0 \leqslant y \leqslant h$	$w = 0$ при $y = 0$, $\partial_y w = 0$ при $y = h$	$\frac{1}{\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n h)} \begin{cases} \operatorname{sh}(\beta_n \eta) \operatorname{ch}\bigl[\beta_n(h-y)\bigr] & \text{при } y > \eta, \\ \operatorname{sh}(\beta_n y) \operatorname{ch}\bigl[\beta_n(h-\eta)\bigr] & \text{при } \eta > y \end{cases}$

при выполнении условий (9) все собственные значения положительны [первое неравенство в (9) выполняется, если $c(x) \leqslant 0$].

В разд. 1.8.9 приведены некоторые формулы для оценки собственных значений λ_n и собственных функций $u_n(x)$.

Функция Грина двумерной третьей краевой задачи (1)–(2), дополненной граничными условиями

$$\frac{\partial w}{\partial y} - k_3 w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} + k_4 w = 0 \quad \text{при} \quad y = h,$$

дается формулой (3), где

$$\Psi_n(y,\eta;\lambda_n) = \begin{cases} \dfrac{\bigl[\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n \eta) + k_3 \operatorname{sh}(\beta_n \eta)\bigr]\bigl\{\beta_n \operatorname{ch}\bigl[\beta_n(h-y)\bigr] + k_4 \operatorname{sh}\bigl[\beta_n(h-y)\bigr]\bigr\}}{\beta_n\bigl[\beta_n(k_3+k_4)\operatorname{ch}(\beta_n h) + (\beta_n^2 + k_3 k_4)\operatorname{sh}(\beta_n h)\bigr]} & \text{при } y > \eta, \\ \dfrac{\bigl[\beta_n \operatorname{ch}(\beta_n y) + k_3 \operatorname{sh}(\beta_n y)\bigr]\bigl\{\beta_n \operatorname{ch}\bigl[\beta_n(h-\eta)\bigr] + k_4 \operatorname{sh}\bigl[\beta_n(h-\eta)\bigr]\bigr\}}{\beta_n\bigl[\beta_n(k_3+k_4)\operatorname{ch}(\beta_n h) + (\beta_n^2 + k_3 k_4)\operatorname{sh}(\beta_n h)\bigr]} & \text{при } y < \eta. \end{cases}$$

7.4.5-2. Представление решений краевых задач с помощью функции Грина.

1°. Решение первой краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями

$$\begin{aligned} &w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad w = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = x_2, \\ &w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = h \end{aligned}$$

выражается через функцию Грина в виде:

$$\begin{aligned} w(x,y) = {} & a(x_1)\int_0^h f_1(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=x_1} d\eta - a(x_2)\int_0^h f_2(\eta)\Bigl[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\xi=x_2} d\eta + {} \\ & + \int_{x_1}^{x_2} f_3(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=0} d\xi - \int_{x_1}^{x_2} f_4(\xi)\Bigl[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigr]_{\eta=h} d\xi + {} \\ & + \int_{x_1}^{x_2}\int_0^h \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi. \end{aligned}$$

2°. Решение второй краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями

$$\partial_x w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = x_1, \qquad \partial_x w = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = x_2,$$
$$\partial_y w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = h$$

выражается через функцию Грина в виде:

$$\begin{aligned} w(x,y) = &- a(x_1)\int_0^h f_1(\eta)G(x,y,x_1,\eta)\,d\eta + a(x_2)\int_0^h f_2(\eta)G(x,y,x_2,\eta)\,d\eta - \\ &- \int_{x_1}^{x_2} f_3(\xi)G(x,y,\xi,0)\,d\xi + \int_{x_1}^{x_2} f_4(\xi)G(x,y,\xi,h)\,d\xi + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2}\int_0^h \Phi(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi. \end{aligned}$$

3°. Представление решения третьей краевой задачи для уравнения (1) с помощью функции Грина будет таким же, как для второй краевой задачи.

* Для неограниченных областей выставляется условие ограниченности решения при $y \to \pm\infty$ (в табл. 25 это условие опускается).