



Из книги А. Д. Polyainin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

Некоторые обозначения и замечания

Латинский алфавит

C_1, C_2, \dots — произвольные постоянные;
 r, φ, z — цилиндрические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;
 r, θ, φ — сферические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
 t — время ($t \geq 0$);
 w — искомая функция (зависимая переменная);
 x, y, z — пространственные переменные (декартовы координаты);
 x_1, \dots, x_n — декартовы координаты в n -мерном пространстве.

Греческий алфавит

Δ — оператор Лапласа:
 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — в двумерном случае,
 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — в трехмерном случае,
 $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — в n -мерном случае;
 $\Delta\Delta$ — бигармонический оператор, $\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ — в двумерном случае;
 $|\nabla w|^2$ — модуль градиента функции w , $|\nabla w|^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2$ — в n -мерном случае;
 $\nabla \cdot \vec{v}$ — дивергенция вектора \vec{v} , $\nabla \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ — в n -мерном случае;
 $(\vec{v} \cdot \nabla)w$ — градиент скаляра w по вектору \vec{v} , $(\vec{v} \cdot \nabla)w = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial w}{\partial x_k}$ — в n -мерном случае.

Краткие обозначения производных

Частные производные:

$$\partial_t w = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \partial_x w = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \partial_{tt} w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \partial_{xx} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \partial_{xxx} w = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Обыкновенные производные функции $f = f(x)$:

$$f'_x \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''_{xx} \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f'''_{xxx} \equiv \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad f''''_{xxxx} \equiv \frac{d^4 f}{dx^4}, \quad f_x^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{при } n \geq 5.$$

Замечания

1. В формулах, содержащих выражения типа $\frac{f(x)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a \neq 2$.
2. В книге обычно не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной переменной, которая входит в исходное уравнение.
3. При ссылках в тексте на конкретные уравнения запись вида «3.1.2.5» означает «уравнение 5 из раздела 3.1.2».
4. В книге часто используется очень простая и наглядная классификация наиболее распространенных типов точных решений, которая не связана с конкретным видом рассматриваемых уравнений (см. таблицу).

ТАБЛИЦА
 Наиболее распространенные типы точных решений (для уравнений
 с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией w).

№	Название решения	Структура решения (x и t можно поменять местами)
1	Решение типа бегущей волны*	$w = F(z), z = \alpha x + \beta t, \alpha\beta \neq 0$
2	Решение в виде суммы функций разных аргументов**	$w = \varphi(x) + \psi(t)$
3	Решение в виде произведения функций разных аргументов***	$w = \varphi(x)\psi(t)$
4	Автомодельное решение****	$w = t^\alpha F(z), z = xt^\beta$
5	Обобщенное автомодельное решение	$w = \varphi(t)F(z), z = x\psi(t)$
6	Решение типа обобщенной бегущей волны	$w = F(z), z = \varphi(t)x + \psi(t)$
7	Решение с обобщенным разделением переменных	$w = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$
8	Решение с функциональным разделением переменных	$w = F(z), z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$

* Обе переменные могут играть роль пространственных координат.

** Другое название — решение с аддитивным разделением переменных.

*** Другое название — решение с мультипликативным разделением переменных.

**** Иногда решения вида $w = \bar{t}^\alpha F(z), z = \bar{x}\bar{t}^\beta$, где $\bar{x} = x + C_1$ и $\bar{t} = t + C_2$, также будут называться автомодельными решениями.

⊙ Этим знаком помечены ссылки на литературные источники после уравнения, когда:

а) хотя бы одно из приведенных выше решений или преобразований получено в цитируемой работе (даже если решение там было приведено с «устраняемыми» ошибками в знаках и коэффициентах);

б) в цитируемой работе содержится полезная дополнительная информация, относительно свойств рассматриваемого уравнения, его решений и приложений.