Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

Дополнение
Некоторые нелинейные системы уравнений

D1. Нелинейные системы двух уравнений первого порядка

D1.1. Системы вида $\dfrac{\partial u}{\partial x} = F(u, w)$, $\dfrac{\partial w}{\partial t} = G(u, w)$

Предварительные замечания. Подобные системы уравнений встречаются в теории химических реакторов, в теории фильтрации и хроматографии.

Системы данного вида инварианты относительно сдвигов по независимым переменным и допускают решения типа бегущей волны $u = u(kx - \lambda t)$, $w = w(kx - \lambda t)$. Эти решения, а также вырожденные решения, когда одна из искомых функций равна нулю (или константе), далее не рассматриваются.

Ниже $f(\varphi)$, $g(\varphi)$, $h(\varphi)$, $r(\varphi)$ — произвольные функции соответствующего аргумента $\varphi = \varphi(u, w)$; уравнения упорядочены по мере усложнения этого аргумента.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = auw, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = buw.$

Общее решение:

$$u = -\frac{\psi'_t(t)}{a\varphi(x) + b\psi(t)}, \quad w = -\frac{\varphi'_x(x)}{a\varphi(x) + b\psi(t)},$$

где $\varphi(x)$, $\psi(t)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: В. С. Берман (1981).

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = au\sqrt{w}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = bu\sqrt{w}.$

Частный случай уравнения D1.1.5 при $k = 1$, $n = 1/2$.

3. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = a\sqrt{uw}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = b\sqrt{uw}.$

Частный случай уравнения D1.1.6 при $k = n = 1/2$.

⊙ *Литература*: В. С. Берман (1981).

4. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = auw^n, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = bu^k w.$

Общее решение:

$$u = \left(\frac{-\psi'_t(t)}{bn\psi(t) - ak\varphi(x)}\right)^{1/k}, \quad w = \left(\frac{\varphi'_x(x)}{bn\psi(t) - ak\varphi(x)}\right)^{1/n},$$

где $\varphi(x)$, $\psi(t)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

5. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = auw^n, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = bu^k w^{1-n}.$

Общее решение:

$$w = \left\{\varphi(x) + E(x)\left[\psi(t) - \frac{1}{2}ak\int E(x)\,dx\right]^{-1}\right\}^{1/n},$$

$$u = \left(\frac{1}{b}w^{n-1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{1/k}, \quad E(x) = \exp\left[ak\int \varphi(x)\,dx\right],$$

где $\varphi(x)$, $\psi(t)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006), рассматривался случай $n=1$.

6. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=au^{1-k}w^n,\quad \dfrac{\partial w}{\partial t}=bu^kw^{1-n}.$

Преобразование $U=u^k$, $W=w^n$ приводит к линейной системе уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial U}{\partial x}=akW,\qquad \frac{\partial W}{\partial t}=bnU.$$

7. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=uf(w),\quad \dfrac{\partial w}{\partial t}=u^kg(w).$

1°. Преобразование зависимых переменных

$$U=u^k,\quad W=\int\frac{dw}{g(w)} \qquad (1)$$

приводит к более простой системе

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\Phi(W)U,\qquad \frac{\partial W}{\partial t}=U, \qquad (2)$$

где функция $\Phi(W)$ задается параметрически (w играет роль параметра):

$$\Phi=kf(w),\qquad W=\int\frac{dw}{g(w)}. \qquad (3)$$

Заменив U в первом уравнении системы (2) на левую часть второго уравнения этой системы, приходим к уравнению второго порядка для функции W:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial t}=\Phi(W)\frac{\partial W}{\partial t}.$$

Интегрируя его по t, имеем

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\int\Phi(W)\,dW+\theta(x), \qquad (4)$$

где $\theta(x)$ — произвольная функция.

Вернувшись в (4) по формулам (1), (3) к исходной переменной w, получим

$$\frac{\partial w}{\partial x}=kg(w)\int\frac{f(w)}{g(w)}\,dw+\theta(x)g(w). \qquad (5)$$

Уравнение (5) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка по переменной x. Получив его общее решение, надо заменить в нем постоянную интегрирования C на произвольную функцию времени $\psi(t)$ (поскольку w зависит от x и t).

2°. Для специального случая $\theta(x)=\mathrm{const}$ в (5) существуют специальное решение вида

$$w=w(z),\quad u=[\psi'(t)]^{1/k}v(z),\quad z=x+\psi(t),$$

которое содержит произвольную функцию $\psi(t)$ (штрих обозначает производную). Функции $w(z)$ и $v(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$v'_z=f(w)v,$$
$$w'_z=g(w)v^k,$$

общее решение которой можно записать в неявном виде

$$\int\frac{dw}{g(w)[kF(w)+C_1]}=z+C_2,\quad v=[kF(w)+C_1]^{1/k},\quad F(w)=\int\frac{f(w)}{g(w)}\,dw.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

8. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(au+bw),\quad \dfrac{\partial w}{\partial t}=g(au+bw).$

Решение:

$$u=b(k_1x-\lambda_1t)+y(\xi),\quad w=-a(k_1x-\lambda_1t)+z(\xi),\quad \xi=k_2x-\lambda_2t,$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные, а функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$k_2y'_\xi+bk_1=f(ay+bz),$$
$$-\lambda_2z'_\xi+a\lambda_1=g(ay+bz).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

9. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(a_1u + b_1w), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = g(a_2u + b_2w).$

Пусть $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$u = \frac{1}{\Delta}[b_2\varphi(x) - b_1\psi(t)], \quad w = \frac{1}{\Delta}[a_1\psi(t) - a_2\varphi(x)],$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{b_2}{\Delta}\varphi'_x = f(\varphi), \quad \frac{a_1}{\Delta}\psi'_t = g(\psi).$$

Интегрируя, получим

$$\frac{b_2}{\Delta}\int\frac{d\varphi}{f(\varphi)} = x + C_1, \quad \frac{a_1}{\Delta}\int\frac{d\psi}{g(\psi)} = t + C_2.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

10. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(au - bw), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = ug(au - bw) + wh(au - bw) + r(au - bw).$

Здесь $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$, $r(z)$ — произвольные функции.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \varphi(t) + b\theta(t)x, \quad w = \psi(t) + a\theta(t)x.$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ определяются системой, состоящей из одного алгебраического (трансцендентного) уравнения и двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} b\theta &= f(a\varphi - b\psi), \\ a\theta'_t &= b\theta g(a\varphi - b\psi) + a\theta h(a\varphi - b\psi), \\ \psi'_t &= \varphi g(a\varphi - b\psi) + \psi h(a\varphi - b\psi) + r(a\varphi - b\psi). \end{aligned}$$

11. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(au - bw) + cw, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = ug(au - bw) + wh(au - bw) + r(au - bw).$

Здесь $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$, $r(z)$ — произвольные функции.

Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \varphi(t) + b\theta(t)e^{\lambda x}, \quad w = \psi(t) + a\theta(t)e^{\lambda x}, \quad \lambda = \frac{ac}{b}.$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ определяются системой, состоящей из одного алгебраического (трансцендентного) уравнения и двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} f(a\varphi - b\psi) + c\psi &= 0, \\ \psi'_t &= \varphi g(a\varphi - b\psi) + \psi h(a\varphi - b\psi) + r(a\varphi - b\psi), \\ a\theta'_t &= b\theta g(a\varphi - b\psi) + a\theta h(a\varphi - b\psi). \end{aligned}$$

12. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{\lambda u} f(\lambda u - \sigma w), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\sigma w} g(\lambda u - \sigma w).$

Решение:

$$u = y(\xi) - \frac{1}{\lambda}\ln(C_1t + C_2), \quad w = z(\xi) - \frac{1}{\sigma}\ln(C_1t + C_2), \quad \xi = \frac{x + C_3}{C_1t + C_2},$$

где функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y'_\xi &= e^{\lambda y} f(\lambda y - \sigma z), \\ -C_1\xi z'_\xi - \frac{C_1}{\sigma} &= e^{\sigma z} g(\lambda y - \sigma z). \end{aligned}$$

13. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u^k f(u^n w^m), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = w^s g(u^n w^m).$

Автомодельное решение при $s \neq 1$, $n \neq 0$:

$$u = t^{\frac{m}{n(s-1)}} y(\xi), \quad w = t^{-\frac{1}{s-1}} z(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{m(k-1)}{n(s-1)}},$$

где функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y'_\xi &= y^k f(y^n z^m), \\ m(k-1)\xi z'_\xi - nz &= n(s-1)z^s g(y^n z^m). \end{aligned}$$

14. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u^k f(u^n w^m), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = wg(u^n w^m).$

1°. Решение:

$$u = e^{mt} y(\xi), \quad w = e^{-nt} z(\xi), \quad \xi = e^{m(k-1)t} x,$$

где функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'_\xi = y^k f(y^n z^m),$$
$$m(k-1)\xi z'_\xi - nz = zg(y^n z^m).$$

2°. При $k \neq 1$ более удобно искать решение в виде

$$u = x^{-\frac{1}{k-1}} \varphi(\zeta), \quad w = x^{\frac{n}{m(k-1)}} \psi(\zeta), \quad \zeta = t + a \ln|x|,$$

где a — произвольная постоянная, а функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a\varphi'_\zeta + \frac{1}{1-k}\varphi = \varphi^k f(\varphi^n \psi^m),$$
$$\psi'_\zeta = \psi g(\varphi^n \psi^m).$$

15. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = uf(u^n w^m), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = wg(u^n w^m).$

Решение:

$$u = e^{m(kx-\lambda t)} y(\xi), \quad w = e^{-n(kx-\lambda t)} z(\xi), \quad \xi = \alpha x - \beta t,$$

где k, α, β, λ — произвольные постоянные, а функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\alpha y'_\xi + kmy = yf(y^n z^m),$$
$$-\beta z'_\xi + n\lambda z = zg(y^n z^m).$$

16. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = uf(u^n w^m), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = wg(u^k w^s).$

Пусть $\Delta = sn - km \neq 0$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = \bigl[\varphi(x)\bigr]^{s/\Delta} \bigl[\psi(t)\bigr]^{-m/\Delta}, \quad w = \bigl[\varphi(x)\bigr]^{-k/\Delta} \bigl[\psi(t)\bigr]^{n/\Delta},$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{s}{\Delta}\varphi'_x = \varphi f(\varphi), \qquad \frac{n}{\Delta}\psi'_t = \psi g(\psi).$$

Интегрируя, получим

$$\frac{s}{\Delta}\int \frac{d\varphi}{\varphi f(\varphi)} = x + C_1, \qquad \frac{n}{\Delta}\int \frac{d\psi}{\psi g(\psi)} = t + C_2.$$

17. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = au \ln u + uf(u^n w^m), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = wg(u^n w^m).$

Решение:

$$u = \exp\bigl(Cme^{ax}\bigr) y(\xi), \quad w = \exp\bigl(-Cne^{ax}\bigr) z(\xi), \quad \xi = kx - \lambda t,$$

где C, k, λ — произвольные постоянные, а функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ky'_\xi = ay \ln y + yf(y^n z^m),$$
$$-\lambda z'_\xi = zg(y^n z^m).$$

18. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = uf(au^k + bw), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = u^k.$

Решение:

$$w = \varphi(x) + C \exp\left[-\lambda t + k \int f\bigl(b\varphi(x)\bigr)\,dx\right], \quad u = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{1/k}, \quad \lambda = \frac{b}{a},$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

19. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = uf(au^n + bw), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = u^k g(au^n + bw).$

Решение:

$$u = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{n-k}}\,\theta(x), \qquad w = \varphi(x) - \frac{a}{b}(C_1 t + C_2)^{\frac{n}{n-k}}\,[\theta(x)]^n,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $\theta = \theta(x)$ и $\varphi = \varphi(x)$ описываются системой дифференциально-алгебраических уравнений

$$\theta'_x = \theta f(b\varphi),$$
$$\theta^{n-k} = \frac{b(k-n)}{aC_1 n}\,g(b\varphi).$$

20. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{cw^n u}{a + bw^n}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = (aw + bw^{n+1})u^k.$

Общее решение при $b \neq 0$:

$$w = \left[\psi(t)e^{F(x)} - be^{F(x)} \int e^{-F(x)}\varphi(x)\,dx\right]^{-1/n},$$
$$u = \left(\frac{w_t}{aw + bw^{n+1}}\right)^{1/k}, \qquad F(x) = \frac{ck}{b}x - a\int \varphi(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(t)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

D1.2. Системы газодинамического типа, линеаризуемые с помощью преобразования годографа

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial \sigma(u)}{\partial x} = 0.$

Частный случай системы D1.2.4. Данная система описывает нелинейные одномерные продольные колебания упругого стержня, где u — градиент деформации, w — скорость деформации, $\sigma(u)$ — напряжение. Условие $\sigma'(u) > 0$ выражает гиперболичность этой системы, штрих обозначает производную по u.

1°. Пусть $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемой системы уравнений. Тогда пара функций

$$u_1 = u(C_1 x + C_2,\, C_1 t + C_3), \qquad w_1 = w(C_1 x + C_2,\, C_1 t + C_3) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением данной системы.

2°. Тривиальные решения:

$$u = C_1, \qquad w = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельные решения, зависящие от отношения независимых переменных x/t:

$$w - \int \sqrt{\sigma'(u)}\,du = C_1, \quad \sqrt{\sigma'(u)} = -\frac{x}{t};$$
$$w + \int \sqrt{\sigma'(u)}\,du = C_2, \quad \sqrt{\sigma'(u)} = \frac{x}{t},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Точные решения в неявном виде:

$$w - \int \sqrt{\sigma'(u)}\,du = C_1, \quad x + t\sqrt{\sigma'(u)} = \Phi_1(u);$$
$$w + \int \sqrt{\sigma'(u)}\,du = C_2, \quad x - t\sqrt{\sigma'(u)} = \Phi_2(u),$$

где $\Phi_m(u)$ — произвольные функции, C_m — произвольные постоянные ($m = 1,\ 2$). Эти решения описывают простые волны Римана и характеризуются функциональной зависимостью искомых величин $u = u(w)$. В частных случаях $\Phi_m(w) \equiv 0$ эти формулы переходят в автомодельные решения из п. 3°.

5°. Рассматриваемая система может быть линеаризована с помощью преобразования годографа (подробности см. в п. 4° системы D1.2.4):

$$\frac{\partial t}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} - \sigma'(u)\frac{\partial t}{\partial w} = 0,$$

где u и w приняты за независимые переменные, а x и t — за зависимые переменные.

6°. Исключая из рассматриваемой системы w, приходим к уравнению вида 3.4.4.6:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + An\rho^{n-2}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0.}$

Частный случай системы D1.2.3 при $p(\rho) = A\rho^n + B$. Она описывает одномерные течения идеального политропного газа, где u — скорость газа, ρ — его плотность.

При $n \neq 1$ систему часто записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{n-1}c\frac{\partial c}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{n-1}{2}c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

где $c = \sqrt{p'(\rho)} = \sqrt{An\rho^{n-1}}$ — скорость звука.

1°. Пусть $u = u(x,t)$, $\rho = \rho(x,t)$ — решение рассматриваемой системы уравнений. Тогда пара функций

$$u_1 = B_1^{n-1}u(B_1^{1-n}B_2x + B_1^{1-n}B_2B_3t + B_4,\ B_2t + B_5) - B_3,$$
$$\rho_1 = B_1^2\rho(B_1^{1-n}B_2x + B_1^{1-n}B_2B_3t + B_4,\ B_2t + B_5),$$

где $B_1, \ldots, B_5$ — произвольные постоянные, также будет решением данной системы.

2°. Тривиальные решения:

$$u = B_1, \qquad \rho = B_2,$$

где B_1, B_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельные решения, зависящие от отношения независимых переменных x/t:

$$u = \frac{2}{n+1}\frac{x}{t} + B_1, \quad c = \frac{n-1}{n+1}\frac{x}{t} - B_1, \quad c = \sqrt{An\rho^{n-1}};$$
$$u = \frac{2}{n+1}\frac{x}{t} + B_2, \quad c = B_2 - \frac{n-1}{n+1}\frac{x}{t}, \quad c = \sqrt{An\rho^{n-1}},$$

где B_1, B_2 — произвольные постоянные.

Замечание. Решения из пп. 2°, 3°, которые подходящим образом «склеиваются» вдоль прямых линий $x/t = \mathrm{const}$, позволяют строить решения многих задач газовой динамики (см. цитируемую ниже литературу).

4°. Более общие автомодельные решения:

$$u = t^{k(1-n)}U(z), \qquad \rho = t^{-2k}R(z), \qquad z = t^{nk-k-1}x,$$

где функции $U(z)$ и $R(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$k(1-n)U + (nk-k-1)zU'_z + UU'_z + AnR^{n-2}R'_z = 0,$$
$$-2kR + (nk-k-1)zR'_z + RU'_z + UR'_z = 0.$$

5°. Точные решения в неявном виде:

$$u = \frac{2}{n-1}c + B_1, \qquad x - t\left(\frac{n+1}{n-1}c + B_1\right) = \Phi_1(\rho), \quad c = \sqrt{An\rho^{n-1}};$$
$$u = -\frac{2}{n-1}c - B_2, \quad x + t\left(\frac{n+1}{n-1}c + B_2\right) = \Phi_2(\rho), \quad c = \sqrt{An\rho^{n-1}},$$

где $\Phi_m(\rho)$ — произвольные функции, B_m — произвольные постоянные ($m = 1,\ 2$). Эти решения описывают простые волны Римана и характеризуются функциональной зависимостью искомых величин $u = u(\rho)$. В частных случаях $\Phi_m(\rho) \equiv 0$ эти формулы переходят в автомодельные решения из п. 3°.

Специальный случай. При $n = 3$ общее решение системы (1) задается неявно следующими формулами:

$$x = (u+c)t + F_1(u+c),$$
$$x = (u-c)t + F_2(u-c),$$

где $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ — произвольные функции.

6°. Рассматриваемая система может быть линеаризована с помощью преобразования годографа (подробности см. в п. 4° системы D1.2.4 при $\rho \equiv w$):

$$u\frac{\partial t}{\partial \rho} - \frac{\partial x}{\partial \rho} - An\rho^{n-2}\frac{\partial t}{\partial u} = 0, \qquad \rho\frac{\partial t}{\partial \rho} - u\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u} = 0. \tag{2}$$

Здесь u и ρ приняты за независимые переменные, а x и t — за зависимые переменные. При произвольном n общее решение полученной системы можно представить с помощью гипергеометрической функции Гаусса. Существует счетное множество значений показателя $n = \dfrac{2m+3}{2m+1}$, где $m = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, для которых общее решение системы (2) можно выразить в замкнутой форме.

7°. Рассматриваемую систему можно преобразовать к каноническому виду (система в характеристической форме)

$$\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x} = 0,$$

где $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ — инварианты Римана

$$\mathcal{R}_1 = u + \frac{2}{n-1}c, \qquad \mathcal{R}_2 = u - \frac{2}{n-1}c, \qquad c = \sqrt{p'(\rho)}.$$

8°. Рассматриваемая система может быть записана в виде законов сохранения (в дивергентном виде):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + A\rho^n)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0.$$

Эти уравнения используются для вывода условий Ренкина — Гюгонио (*Rankine — Hugoniot*), которые являются основой для построения разрывных решений, описывающих ударные волны. Пусть $x_f(t)$ — зависимость положения фронта ударной волны от времени t. Тогда скорость ударной волны определяется производной по времени $D = x'_f$, а условия Ренкина — Гюгонио имеют вид

$$[\rho u]D = [\rho u^2 + A\rho^n],$$
$$[\rho]D = [\rho u].$$

Здесь $[A] = A^+ - A^-$ обозначает скачок величины A на ударной волне (знаками «плюс» и «минус» соответственны помечены величины до и после ударной волны). Решения различных задач газовой динамики с ударными волнами можно найти в цитируемой ниже литературе.

⦿ *Литература для системы D1.2.2*: Р. Курант, К. О. Фридрихс (1950), Р. Курант (1964), К. П. Станюкович (1971), Л. В. Овсянников (1981), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), Г. Г. Черный (1988), И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989, стр. 35–78).

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad p = p(\rho).$

Частный случай системы D1.2.4 при $\rho \equiv w$. Данная система описывает одномерные изэнтропические (политропические) течения идеального сжимаемого газа, где u — скорость газа, ρ — плотность, $p(\rho)$ — давление. Скорость звука определяется формулой $c = \sqrt{p'(\rho)}$, где штрих обозначает производную; условие $c > 0$ выражает гиперболичность этой системы.

1°. Пусть $u = u(x,t)$, $\rho = \rho(x,t)$ — решение рассматриваемой системы уравнений. Тогда пара функций

$$u_1 = u(C_1x + C_1C_2t + C_3,\ C_1t + C_4) - C_2, \qquad \rho_1 = \rho(C_1x + C_1C_2t + C_3,\ C_1t + C_4),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением данной системы.

2°. Тривиальные решения:

$$u = C_1, \qquad \rho = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельные решения, зависящие от отношения независимых переменных x/t, в неявном виде:

$$u = \int \sqrt{p'(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho} + A_1, \qquad \int \sqrt{p'(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)} + A_1 = \frac{x}{t};$$
$$u = -\int \sqrt{p'(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho} - A_2, \qquad \int \sqrt{p'(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)} + A_2 = -\frac{x}{t},$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные.

Замечание. Решения из пп. 2°, 3°, которые подходящим образом «склеиваются» вдоль прямых линий $x/t = \text{const}$, позволяют строить решения ряда задач газовой динамики, в том числе дают возможность получить решение задачи о распаде произвольного разрыва (см. цитируемую ниже литературу).

4°. Точные решения в неявном виде:

$$u = \int \sqrt{p'(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho} + A_1, \qquad x - t\biggl[\int \sqrt{p'(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)} + A_1\biggr] = \Phi_1(\rho);$$
$$u = -\int \sqrt{p'(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho} - A_2, \quad x + t\biggl[\int \sqrt{p'(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)} + A_2\biggr] = \Phi_2(\rho),$$

где $\Phi_m(\rho)$ — произвольные функции, A_m — произвольные постоянные ($m=1,\ 2$). Эти решения описывают простые волны Римана и характеризуются функциональной зависимостью искомых величин $u = u(\rho)$. В частных случаях $\Phi_m(\rho) \equiv 0$ эти формулы определяют автомодельные решения из п. 3°.

6°. Рассматриваемая система может быть линеаризована с помощью преобразования годографа (подробности см. в п. 4° системы D1.2.4 при $\rho \equiv w$):

$$u\frac{\partial t}{\partial \rho} - \frac{\partial x}{\partial \rho} - \frac{p'(\rho)}{\rho}\frac{\partial t}{\partial u} = 0, \qquad \rho\frac{\partial t}{\partial \rho} - u\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

Здесь u и ρ приняты за независимые переменные, а x и t — за зависимые переменные.

7°. Рассматриваемую систему можно преобразовать к каноническому виду (система в характеристической форме)

$$\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial x} = 0,$$

где $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ — инварианты Римана

$$\mathcal{R}_1 = u + \int \frac{c}{\rho}\,d\rho, \qquad \mathcal{R}_2 = u - \int \frac{c}{\rho}\,d\rho, \qquad c = \sqrt{p'(\rho)}.$$

8°. Рассматриваемая система может быть записана в виде законов сохранения (в дивергентном виде):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u^2 + p(\rho)]}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0.$$

Эти уравнения используются для вывода условий Ренкина — Гюгонио (*Rankine — Hugoniot*), которые являются основой для построения разрывных решений, описывающих ударные волны. Пусть $x_f(t)$ — зависимость положения фронта ударной волны от времени t. Тогда скорость ударной волны определяется производной по времени $D = x'_f$, а условия Ренкина — Гюгонио имеют вид

$$[\rho u]D = [\rho u^2 + p(\rho)],$$
$$[\rho]D = [\rho u].$$

Здесь $[A] = A^+ - A^-$ обозначает скачок величины A на ударной волне (знаками «плюс» и «минус» соответственны помечены величины до и после ударной волны). Решения различных задач газовой динамики с ударными волнами можно найти в цитируемой ниже литературе.

⦿ *Литература для системы D1.2.3*: Р. Курант, К. О. Фридрихс (1950), Р. Курант (1964), К. П. Станюкович (1971), Л. В. Овсянников (1981), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), Г. Г. Черный (1988), И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989, стр. 35–78).

4. $$\boldsymbol{f_1(u,w)\frac{\partial u}{\partial t} + g_1(u,w)\frac{\partial w}{\partial t} + h_1(u,w)\frac{\partial u}{\partial x} + k_1(u,w)\frac{\partial w}{\partial x} = 0,}$$
$$\boldsymbol{f_2(u,w)\frac{\partial u}{\partial t} + g_2(u,w)\frac{\partial w}{\partial t} + h_2(u,w)\frac{\partial u}{\partial x} + k_2(u,w)\frac{\partial w}{\partial x} = 0.}$$

1°. Пусть $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемой системы уравнений. Тогда пара функций

$$u_1 = u(C_1 x + C_2,\ C_1 t + C_3), \qquad w_1 = w(C_1 x + C_2,\ C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением данной системы.

2°. Для любых функций $f_k(u,w)$ и $g_k(u,w)$ рассматриваемая система допускает тривиальные решения

$$u = C_1, \qquad w = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Рассматриваемая система допускает автомодельные решения вида

$$u = u(\xi), \quad w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t}.$$

4°. Будем искать точные решения, которые обобщают решения из п. 3° и характеризуются функциональной связью между искомыми величинами

$$w = w(u). \tag{1}$$

Подставив (1) в рассматриваемую систему, получим два уравнения для одной функции $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} (f_1 + g_1 w'_u)\frac{\partial u}{\partial t} + (h_1 + k_1 w'_u)\frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ (f_2 + g_2 w'_u)\frac{\partial u}{\partial t} + (h_2 + k_2 w'_u)\frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Зависимость (1) должна выбираться так, чтобы уравнения (2) были совместны. Это условие приводит к следующему нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для $w(u)$:

$$(g_1k_2 - g_2k_1)(w'_u)^2 + (f_1k_2 + g_1h_2 - f_2k_1 - g_2h_1)w'_u + f_1h_2 - f_2h_1 = 0. \tag{3}$$

Рассматривая (3) как квадратное уравнение относительно производной w'_u, потребуем положительности его дискриминанта (это соответствует выполнению условия гиперболичности рассматриваемой системы):

$$(f_1k_2 + g_1h_2 - f_2k_1 - g_2h_1)^2 - 4(f_1h_2 - f_2h_1)(g_1k_2 - g_2k_1) > 0. \tag{4}$$

В этом случае уравнение (3) имеет два действительных различных корня и эквивалентно двум различным обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка, разрешенным относительно производной:

$$w'_u = \Lambda_m(u,w), \quad m = 1,\, 2. \tag{5}$$

Определив решение этого уравнения $w = w(u)$ (для каждого $m = 1,\, 2$ имеем свое решение), подставим его в любое из уравнений (2). В результате получим квазилинейное уравнение первого порядка с частными производными для $u = u(x,t)$:

$$(f_1 + g_1\Lambda_m)\frac{\partial u}{\partial t} + (h_1 + k_1\Lambda_m)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad w = w(u). \tag{6}$$

Общее решение этого уравнения можно получить методом характеристик [см. Э. Камке (1965), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003)].

Решения уравнений (5)–(6) (при $m = 1,\, 2$), зависящие от произвольной функции и произвольной постоянной, называются простыми волнами Римана.

5°. Сделаем преобразование годографа

$$x = x(u,w), \quad t = t(u,w), \tag{7}$$

т. е. u, w выбираем за независимые переменные, а x, t — за зависимые переменные. Дифференцируя соотношения (7) по x и t (как сложные функции) и исключая из полученных соотношений частные производные u_t, w_t, u_x, w_x, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -J\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = J\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = J\frac{\partial t}{\partial w}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -J\frac{\partial t}{\partial u}, \tag{8}$$

где $J = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial w}{\partial x}$ — якобиан функций $u = u(x,t)$ и $w = w(x,t)$. Заменяя в исходной системе производные с помощью (8) и деля на J, приходим к линейной системе уравнений

$$\begin{aligned} g_1(u,w)\frac{\partial x}{\partial u} - k_1(u,w)\frac{\partial t}{\partial u} - f_1(u,w)\frac{\partial x}{\partial w} + h_1(u,w)\frac{\partial t}{\partial w} &= 0, \\ g_2(u,w)\frac{\partial x}{\partial u} - k_2(u,w)\frac{\partial t}{\partial u} - f_2(u,w)\frac{\partial x}{\partial w} + h_2(u,w)\frac{\partial t}{\partial w} &= 0. \end{aligned}$$

Замечание. Преобразование годографа (7) неприменимо, если $J \equiv 0$. В этом вырожденном случае величины u и w будут функционально зависимы и следовательно их нельзя принимать за независимые переменные. В этом случае имеет место соотношение (1), которое определяет простые волны Римана. Поэтому использование преобразования годографа (7) приводит к потере решений (1), описывающих простые волны Римана.

⊙ *Литература*: Р. Курант, К. О. Фридрихс (1950), Р. Курант (1964), К. П. Станюкович (1971), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), Л. В. Овсянников (1981), Г. Г. Черный (1988), A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov (2006).

D1.3. Другие нелинейные системы двух уравнений первого порядка

1. $\dfrac{\partial(u+w)}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \dfrac{\partial w}{\partial t}=f(w)u.$

Эта система описывает глубокую фильтрацию однокомпонентной суспензии частиц в пористой среде с учетом изменения ее проницаемости (обусловленной захватом частиц пористой средой). Первое уравнение системы представляет собой баланс массы для накапливаемых частиц и суспензии, а второе уравнение описывает кинетику накопления; u — концентрация суспензии, w — концентрация накапливаемого вещества (осадка), $f(w)$ — коэффициент фильтрации.

1°. Заменив $\frac{\partial w}{\partial t}$ в первом уравнении системы на правую часть второго уравнения и перейдя от переменных x и t к новым характеристическим переменным $z=-x$, $\eta=x-t$, получим систему

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f(w)u, \qquad \frac{\partial w}{\partial \eta}=-f(w)u,$$

которая является частным случаем системы D1.1.7 при $k=1$, $g(w)=-f(w)$.

2°. Задача о закачке суспензии в резервуар свободный от частиц описывается данной системой со следующими начальными и граничным условиями:

$$u=w=0 \quad \text{при} \quad t=0, \qquad u=1 \quad \text{при} \quad x=0.$$

Решение этой задачи можно записать в виде

$$u=\frac{w}{\Phi^{-1}(t-x)}, \qquad \int_w^{\Phi^{-1}(t-x)}\frac{dz}{zf(z)}=x. \tag{1}$$

Здесь второе равенство задает неявно функцию $w=w(x,t)$, а $\Phi^{-1}(w)$ — функция, обратная к функции

$$\Phi(w)=\int_0^w\frac{z}{f(z)}, \tag{2}$$

Приведенные формулы описывают точное решение рассматриваемой задачи для $x<t$. Для $x>t$ функции u и w равны нулю.

Специальный случай. При $f(w)=1-w$ из формулы (2) последовательно имеем $\Phi(w)=-\ln(1-w)$ и $\Phi^{-1}(w)=1-e^{-w}$. Подставляя последнее выражение в формулы (1), находим решение

$$u=\frac{e^{t-x}}{e^x+e^{t-x}-1}, \qquad w=\frac{e^{t-x}-1}{e^x+e^{t-x}-1}.$$

⊙ *Литература*: J. P. Herzig, D. M. Leclerc, P. Le Goff (1970), D. J. Logan (2001), A. C. Alvarez, P. Bedrikovetsky, G. Hime, D. Marchesin, J. R. Rodriguez (2006).

2. $\dfrac{\partial}{\partial t}g(u,w)+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1(w)u, \qquad \dfrac{\partial w}{\partial t}=f_2(w)u.$

Исключая u из первого уравнения с помощью второго уравнения, а затем интегрируя по t, приходим к нелинейному уравнению с частными производными первого порядка для функции $w(x,t)$:

$$g\biggl(\frac{1}{f_2(w)}\frac{\partial w}{\partial t},w\biggr)+\frac{a}{f_2(w)}\frac{\partial w}{\partial x}=\int\frac{f_1(w)}{f_2(w)}\,dw+\theta(x),$$

где $\theta(x)$ — произвольная функция. При $\theta=\mathrm{const}$ полный интеграл полученного уравнения ищется в виде $w=w(C_1x+C_2t+C_3)$ и позволяет найти соответствующий общий интеграл (содержащий произвольную функцию) в параметрическом виде [подробности см. в книгах Э. Камке (1966), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2003)].

3. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1(x,t)u+g_1(x,t)u^{1-n}+h_1(x,t)u^{1-n}w^m,$

$\dfrac{\partial w}{\partial t}=f_2(x,t)w+g_2(x,t)w^{1-m}+h_2(x,t)u^nw^{1-m}.$

Преобразование $U=u^n$, $W=w^m$ приводит к линейной системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x}=nf_1(x,t)U+nh_1(x,t)W+ng_1(x,t),$$
$$\frac{\partial W}{\partial t}=mf_2(x,t)W+mh_2(x,t)U+mg_2(x,t).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

D2. Нелинейные системы двух уравнений второго порядка

D2.1. Параболические системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u,w), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G(u,w)$$

Предварительные замечания. Подобные системы уравнений часто встречаются в теории массотеплопереноса реагирующих сред, в теории химических реакторов, в теории горения, в математической биологии и биофизике.

Системы рассматриваемого вида инварианты относительно сдвигов по независимым переменным (и относительно замены x на $-x$) и допускают решения типа бегущей волны $u = u(kx - \lambda t)$, $w = w(kx - \lambda t)$. Эти решения, а также вырожденные решения, когда одна из искомых функций равна константе, далее не рассматриваются. О группой классификации нелинейных систем данного вида см. работы R. Cherniha, J. R. King (2000, 2003), A. G. Nikitin, R. J. Wiltshire (2000, 2001), A. G. Nikitin (2004).

Ниже $f(\varphi), g(\varphi), h(\varphi)$ — произвольные функции соответствующего аргумента $\varphi = \varphi(u,w)$; уравнения упорядочены по мере усложнения этого аргумента.

D2.1.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.

1. $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\exp\Bigl(k\frac{w}{u}\Bigr)f(u), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \exp\Bigl(k\frac{w}{u}\Bigr)[wf(u) + g(u)].$

Точное решение:

$$u = y(\xi), \quad w = -\frac{2}{k}\ln|bx|\,y(\xi) + z(\xi), \quad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3, b — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ay''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{1}{b^2\xi^2}y\exp\Bigl(k\frac{z}{y}\Bigr)f(y) = 0,$$

$$az''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi - \frac{4a}{k\xi}y'_\xi + \frac{2a}{k\xi^2}y + \frac{1}{b^2\xi^2}\exp\Bigl(k\frac{z}{y}\Bigr)[zf(y) + g(y)] = 0.$$

⊙ *Литература*: T. Barannyk (2002).

2. $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(bu + cw), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(bu + cw).$

Точное решение:

$$u = c\theta(x,t) + y(\xi), \quad w = -b\theta(x,t) + z(\xi), \quad \xi = kx - \lambda t,$$

где функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ak^2 y''_{\xi\xi} + \lambda y'_\xi + f(by + cz) = 0,$$
$$ak^2 z''_{\xi\xi} + \lambda z'_\xi + g(by + cz) = 0,$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

3. $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial t} = a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(bu + cw), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(bu + cw).$

Точное решение:

$$u = c(\alpha x^2 + \beta x + \gamma t) + y(\xi), \quad w = -b(\alpha x^2 + \beta x + \gamma t) + z(\xi), \quad \xi = kx - \lambda t,$$

где k, α, β, γ, λ — произвольные постоянные, а функции $y(\xi)$ и $z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_1k^2 y''_{\xi\xi} + \lambda y'_\xi + 2a_1c\alpha - c\gamma + f(by + cz) = 0,$$
$$a_2k^2 z''_{\xi\xi} + \lambda z'_\xi - 2a_2b\alpha + b\gamma + g(by + cz) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 f(b_1u + c_1w) + c_1 g(b_2u + c_2w),$

$\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b_2 f(b_1u + c_1w) - b_1 g(b_2u + c_2w).$

Считается, что $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

Умножая уравнения на подходящие константы, а затем почленно складывая, получим два независимых уравнения вида 1.6.1.1:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (b_1c_2 - b_2c_1)f(U), \qquad U = b_1u + c_1w;$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = a\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (b_1c_2 - b_2c_1)g(W), \qquad W = b_2u + c_2w.$$

Эти уравнения в общем случае допускают решения типа бегущих волн

$$U = U(k_1x - \lambda_1 t), \quad W = W(k_2x - \lambda_2 t),$$

где k_m, λ_m — произвольные постоянные. Соответствующее решение исходной системы будет представлять собой суперпозицию (линейную комбинацию) двух бегущих волн.

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(bu - cw) + g(bu - cw), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(bu - cw) + h(bu - cw).$

Частному случаю $f(z) = 0$, $g(z) = z$, $h(z) = -z$ соответствует обратимая химическая реакция первого порядка [см. П. В. Данквертс (1973)]. При $f(z) = z + k$, $g(z) = h(z) = 0$ данная система является специальным случаем системы Вольерры — Лотки, которая описывает конкурентную борьбу двух биологических видов, питающихся одной и той же пищей [см. Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский (1984, стр. 35, 57)].

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) + c\exp\left[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\right]\theta(x,t), \quad w = \psi(t) + b\exp\left[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\right]\theta(x,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = \varphi f(b\varphi - c\psi) + g(b\varphi - c\psi),$$
$$\psi'_t = \psi f(b\varphi - c\psi) + h(b\varphi - c\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

2°. Точное решение:

$$u = \tilde{\varphi}(x) + c\tilde{\theta}(x,t), \quad w = \tilde{\psi}(x) + b\tilde{\theta}(x,t),$$

где функции $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a\varphi''_{xx} + \tilde{\varphi} f(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi}) + g(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi}) = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + \tilde{\psi} f(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi}) + h(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi}) = 0,$$

а функция $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению Шредингера

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + f(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi})\tilde{\theta}.$$

3°. Умножим первое уравнение на b, а второе — на $-c$ и сложим. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta), \qquad \zeta = bu - cw, \tag{1}$$

которое будем анализировать вместе с первым уравнением исходной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(\zeta) + g(\zeta). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно рассматривать отдельно. О точных решениях уравнений этого вида для некоторых кинетических функций $F(\zeta) = \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta)$ см. разд. 1.1.1-1.1.3, 1.2.1 и уравнения 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7. Если известно некоторое решение $\zeta=\zeta(x,t)$ уравнения (1), то функцию $u=u(x,t)$ можно найти путем решения линейного уравнения (2); функция $w=w(x,t)$ определяется по формуле $w=(bu-\zeta)/c$.

Отметим два важных решения уравнения (1):

(i) В общем случае уравнение (1) допускает точное решение типа бегущей волны $\zeta=\zeta(z)$, где $z=kx-\lambda t$; при этом соответствующие точные решения уравнения (2) имеют вид $u=u_0(z)+\sum e^{\beta_n t}u_n(z)$.

(ii) При выполнении условия $\zeta f(\zeta)+bg(\zeta)-ch(\zeta)=k_1\zeta+k_0$ уравнение (1) является линейным

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=a\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+k_1\zeta+k_0,$$

и сводится к линейному уравнению теплопроводности [см. А. Д. Полянин (2001 *b*)].

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *b*, 2005).

6. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{\lambda u}f(\lambda u-\sigma w),\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+e^{\sigma w}g(\lambda u-\sigma w).$

1°. Точное решение:

$$u=y(\xi)-\frac{1}{\lambda}\ln(C_1t+C_2),\qquad w=z(\xi)-\frac{1}{\sigma}\ln(C_1t+C_2),\qquad \xi=\frac{x+C_3}{\sqrt{C_1t+C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $y=y(\xi)$ и $z=z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ay''_{\xi\xi}+\frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi+\frac{C_1}{\lambda}+e^{\lambda y}f(\lambda y-\sigma z)=0,$$
$$bz''_{\xi\xi}+\frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi+\frac{C_1}{\sigma}+e^{\sigma z}g(\lambda y-\sigma z)=0.$$

2°. Точное решение при $b=a$:

$$u=\theta(x,t),\qquad w=\frac{\lambda}{\sigma}\theta(x,t)-\frac{k}{\sigma},$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda f(k)=\sigma e^{-k}g(k),$$

а функция $\theta=\theta(x,t)$ описывается уравнением вида 1.2.1.1:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+f(k)e^{\lambda\theta}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *b*).

D2.1.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.

1. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+uf\Big(\frac{u}{w}\Big),\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+wg\Big(\frac{u}{w}\Big).$

Частному случаю $f(z)=k_1-k_2z^{-1}$, $g(z)=k_2-k_1z$ соответствует обратимая химическая реакция первого порядка [см. П. В. Данквертс (1973)]. Модель Эйгена — Шустера, описывающая конкурентную борьбу популяций за питательный субстракт при постоянных коэффициентах размножения, приводит к данной системе при $f(z)=\dfrac{k}{z+1}$, $g(z)=-\dfrac{kz}{z+1}$, где k — разность коэффициентов размножения [см. Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский (1984, стр. 31, 32)].

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u=[C_1\sin(kx)+C_2\cos(kx)]\varphi(t),\qquad w=[C_1\sin(kx)+C_2\cos(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t=-ak^2\varphi+\varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi'_t=-bk^2\psi+\psi g(\varphi/\psi).$$

Эту систему можно проинтегрировать, поскольку после исключения переменной t она сводится к однородному уравнению первого порядка (таким же образом интегрируются соответствующие системы из пп. 2° и 3°).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]U(t), \quad w = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]W(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $U = U(t)$ и $W = W(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U_t' = ak^2 U + Uf(U/W),$$
$$W_t' = bk^2 W + Wg(U/W).$$

3°. Вырожденное решение:

$$u = (C_1 x + C_2)U(t), \quad w = (C_1 x + C_2)W(t),$$

где C_1, C_2, а функции $U = U(t)$ и $W = W(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U_t' = Uf(U/W),$$
$$W_t' = Wg(U/W).$$

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = e^{-\lambda t} y(x), \quad w = e^{-\lambda t} z(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a y_{xx}'' + \lambda y + y f(y/z) = 0,$$
$$b z_{xx}'' + \lambda z + z g(y/z) = 0.$$

5°. Точное решение (обобщает решение из п. 4°):

$$u = e^{kx - \lambda t} y(\xi), \quad w = e^{kx - \lambda t} z(\xi), \quad \xi = \beta x - \gamma t,$$

где k, λ, β, γ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a\beta^2 y_{\xi\xi}'' + (2ak\beta + \gamma) y_\xi' + (ak^2 + \lambda) y + y f(y/z) = 0,$$
$$b\beta^2 z_{\xi\xi}'' + (2bk\beta + \gamma) z_\xi' + (bk^2 + \lambda) z + z g(y/z) = 0.$$

Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны. При $k = \gamma = 0$, $\beta = 1$ имеем решение из п. 4°.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*, 2005).

2. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u f\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w g\Big(\frac{u}{w}\Big).$

Эта система является частным случаем предыдущей системы при $b = a$ и поэтому допускает приведенные там решения в пп. 1°–5°. Кроме того, она обладает интересными свойствами и имеет другие решения, указанные ниже.

1°. Пусть $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемой системы уравнений. Тогда пары функций

$$u_1 = Au(\pm x + C_1,\, t + C_2), \qquad w_1 = Aw(\pm x + C_1,\, t + C_2);$$
$$u_2 = \exp(\lambda x + a\lambda^2 t) u(x + 2a\lambda t,\, t), \quad w_2 = \exp(\lambda x + a\lambda^2 t) w(x + 2a\lambda t,\, t),$$

где A, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, также являются решениями этой системы уравнений.

2°. Точное решение типа точечного источника:

$$u = \exp\Big(-\frac{x^2}{4at}\Big)\varphi(t), \quad w = \exp\Big(-\frac{x^2}{4at}\Big)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_t' = -\frac{1}{2t}\varphi + \varphi f\Big(\frac{\varphi}{\psi}\Big),$$
$$\psi_t' = -\frac{1}{2t}\psi + \psi g\Big(\frac{\varphi}{\psi}\Big).$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \exp\bigl(kxt + \tfrac{2}{3}ak^2t^3 - \lambda t\bigr)y(\xi), \quad w = \exp\bigl(kxt + \tfrac{2}{3}ak^2t^3 - \lambda t\bigr)z(\xi), \quad \xi = x + akt^2,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ay''_{\xi\xi} + (\lambda - k\xi)y + yf(y/z) = 0,$$
$$az''_{\xi\xi} + (\lambda - k\xi)z + zg(y/z) = 0.$$

4°. Пусть k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(k) = g(k). \tag{1}$$

Точное решение:

$$u = ke^{\lambda t}\theta, \quad w = e^{\lambda t}\theta, \quad \lambda = f(k),$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

5°. Периодическое решение:

$$u = Ak\exp(-\mu x)\sin(\beta x - 2a\beta\mu t + B), \qquad w = A\exp(-\mu x)\sin(\beta x - 2a\beta\mu t + B), \qquad \beta = \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{a}f(k)},$$

где A, B, μ — произвольные постоянные, а k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения (1).

6°. Точное решение:

$$u = \varphi(t)\exp\biggl[\int g(\varphi(t))\,dt\biggr]\theta(x,t), \quad w = \exp\biggl[\int g(\varphi(t))\,dt\biggr]\theta(x,t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = [f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi, \tag{2}$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Частному решению $\varphi = k = \mathrm{const}$ уравнения (2) соответствует решение из п. 4°. Общее решение уравнения (2) записывается в неявном виде

$$\int \frac{d\varphi}{[f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi} = t + C.$$

7°. Точное решение для специального случая $g(z) = -z^2 f(z)$:

$$u = r(x,t)\sin\varphi(t), \quad w = r(x,t)\cos\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = f(\operatorname{tg}\varphi)\operatorname{tg}\varphi,$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial r}{\partial t} = a\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}. \tag{3}$$

8°. Точное решение для специального случая $g(z) = z^2 f(z)$:

$$u = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t), \quad w = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = f(\operatorname{th}\varphi)\operatorname{th}\varphi,$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности (3).

Замечание. В данном случае существует также решение вида

$$u = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t), \quad w = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *b*, 2005).

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + g\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + h\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

Пусть k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$g(k) = kh(k).$$

1°. Точное решение при $f(k) \neq 0$:

$$u(x,t) = k\bigg(\exp[f(k)t]\theta(x,t) - \frac{h(k)}{f(k)}\bigg), \quad w(x,t) = \exp[f(k)t]\theta(x,t) - \frac{h(k)}{f(k)},$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

2°. Точное решение при $f(k) = 0$:

$$u(x,t) = k[\theta(x,t) + h(k)t], \quad w(x,t) = \theta(x,t) + h(k)t,$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности (1).

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + \dfrac{u}{w}h\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wg\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + h\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

Точное решение:

$$u = \varphi(t)G(t)\bigg[\theta(x,t) + \int \frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\bigg], \quad w = G(t)\bigg[\theta(x,t) + \int \frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\bigg], \quad G(t) = \exp\bigg[\int g(\varphi)\,dt\bigg],$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = [f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi, \qquad (1)$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Общее решение уравнения (1) записывается в неявном виде

$$\int \frac{d\varphi}{[f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi} = t + C.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 f\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + u^3 g\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

Точное решение:

$$u = (x+A)\varphi(z), \quad w = (x+A)\psi(z), \quad z = t + \frac{1}{6a}(x+A)^2 + B,$$

где A, B — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi = \psi(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{zz} + 9a\varphi^3 f(\varphi/\psi) = 0,$$
$$\psi''_{zz} + 9a\varphi^3 g(\varphi/\psi) = 0.$$

⊙ *Литература*: T. A. Barannyk (2002), T. A. Barannyk, A. G. Nikitin (2004).

6. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - u^3 f\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw - u^3 g\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

1°. Точное решение при $a > 0$:

$$u = \big[C_1 \exp\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big) - C_2 \exp\big(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big)\big]\varphi(z),$$
$$w = \big[C_1 \exp\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big) - C_2 \exp\big(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big)\big]\psi(z),$$
$$z = C_1 \exp\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big) + C_2 \exp\big(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\,x + \tfrac{3}{2}at\big) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi = \psi(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a\varphi''_{zz} = 2\varphi^3 f(\varphi/\psi),$$
$$a\psi''_{zz} = 2\varphi^3 g(\varphi/\psi).$$

2°. Точное решение при $a < 0$:

$$u = \exp\bigl(\tfrac{3}{2}at\bigr)\sin\bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{2|a|}\,x + C_1\bigr)U(\xi),$$
$$w = \exp\bigl(\tfrac{3}{2}at\bigr)\sin\bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{2|a|}\,x + C_1\bigr)W(\xi),$$
$$\xi = \exp\bigl(\tfrac{3}{2}at\bigr)\cos\bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{2|a|}\,x + C_1\bigr) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $U = U(\xi)$ и $W = W(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$aU''_{\xi\xi} = -2U^3 f(U/W),$$
$$aW''_{\xi\xi} = -2U^3 g(U/W).$$

⊙ *Литература*: T. A. Barannyk (2002), А. Д. Полянин (2004 *b*).

7. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^n f\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w^n g\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr).$

При $f(z) = kz^{-m}$, $g(z) = -kz^{n-m}$ рассматриваемая система описывает химическую реакцию n-го порядка (порядка $n-m$ по компоненте u и порядка m по компоненте w); значения $n = 2$, $m = 1$ соответствуют весьма распространенной реакции второго порядка [см. П. В. Данквертс (1973)].

1°. Автомодельное решение:

$$u = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{1-n}}\, y(\xi), \quad w = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{1-n}}\, z(\xi), \quad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ay''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{n-1}y + y^n f\Bigl(\frac{y}{z}\Bigr) = 0,$$
$$bz''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi + \frac{C_1}{n-1}z + z^n g\Bigl(\frac{y}{z}\Bigr) = 0.$$

2°. Точное решение при $b = a$:

$$u(x,t) = k\theta(x,t), \quad w(x,t) = \theta(x,t),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k^{n-1} f(k) = g(k),$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению теплопроводности с источником степенного вида 1.1.3.1:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + g(k)\theta^n.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *b*).

8. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr)\ln u + ug\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr)\ln w + wh\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr).$

Точное решение:

$$u(x,t) = \varphi(t)\psi(t)\theta(x,t), \quad w(x,t) = \psi(t)\theta(x,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = \varphi[g(\varphi) - h(\varphi) + f(\varphi)\ln\varphi], \qquad (1)$$
$$\psi'_t = \psi[h(\varphi) + f(\varphi)\ln\psi], \qquad (2)$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + f(\varphi)\theta\ln\theta. \qquad (3)$$

Решение уравнения с разделяющимися переменными (1) можно представить в неявном виде. Уравнение (2) легко интегрируется, поскольку заменой $\psi = e^{\zeta}$ сводится к линейному уравнению. Уравнение (3) допускает точные решения вида

$$\theta = \exp\bigl[\sigma_2(t)x^2 + \sigma_1(t)x + \sigma_0(t)\bigr],$$

где функции $\sigma_n = \sigma_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_2' &= f(\varphi)\sigma_2 + 4a\sigma_2^2,\\ \sigma_1' &= f(\varphi)\sigma_1 + 4a\sigma_1\sigma_2,\\ \sigma_0' &= f(\varphi)\sigma_0 + a\sigma_1^2 + 2a\sigma_2. \end{aligned}$$

Эта система может быть последовательно проинтегрирована, поскольку первое уравнение является уравнением Бернулли, а второе и третье уравнение — линейны относительно искомой функции. Отметим, что первое уравнение имеет частное решение $\sigma_2 = 0$.

Замечание. Уравнение (1) допускает особое решение $\varphi = k = \mathrm{const}$, где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $g(k) - h(k) + f(k)\ln k = 0$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *b*).

9. $$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) - wg\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + \frac{u}{\sqrt{u^2+w^2}}h\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr),}$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + ug\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + \frac{w}{\sqrt{u^2+w^2}}h\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr).}$$

Точное решение:

$$u = r(x,t)\cos\varphi(t), \qquad w = r(x,t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi_t' = g(\operatorname{tg}\varphi),$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial t} = a\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + rf(\operatorname{tg}\varphi) + h(\operatorname{tg}\varphi). \qquad (1)$$

Замена

$$r = F(t)\Bigl[Z(x,t) + \int\frac{h(\operatorname{tg}\varphi)\,dt}{F(t)}\Bigr], \qquad F(t) = \exp\Bigl[\int f(\operatorname{tg}\varphi)\,dt\Bigr]$$

приводит (1) к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = a\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *b*).

10. $$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + wg\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + \frac{u}{\sqrt{u^2-w^2}}h\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr),}$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + ug\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + \frac{w}{\sqrt{u^2-w^2}}h\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr).}$$

Точное решение:

$$u = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t), \qquad w = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi_t' = g(\operatorname{th}\varphi),$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial t} = a\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + rf(\operatorname{th}\varphi) + h(\operatorname{th}\varphi). \qquad (1)$$

Замена
$$r = F(t)\Big[Z(x,t) + \int \frac{h(\operatorname{th}\varphi)\,dt}{F(t)}\Big], \quad F(t) = \exp\Big[\int f(\operatorname{th}\varphi)\,dt\Big]$$
приводит (1) к линейному уравнению теплопроводности
$$\frac{\partial Z}{\partial t} = a\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}.$$

D2.1.3. Произвольные функции зависят от произведения степеней искомых величин.

1. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(u^n w^m), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wg(u^n w^m).$

Точное решение:
$$u = e^{m(kx-\lambda t)}y(\xi), \quad w = e^{-n(kx-\lambda t)}z(\xi), \quad \xi = \beta x - \gamma t,$$
где k, λ, β, γ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$a\beta^2 y''_{\xi\xi} + (2akm\beta + \gamma)y'_\xi + m(ak^2m + \lambda)y + yf(y^n z^m) = 0,$$
$$b\beta^2 z''_{\xi\xi} + (-2bkn\beta + \gamma)z'_\xi + n(bk^2n - \lambda)z + zg(y^n z^m) = 0.$$
Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

⊙ *Литература*: T. A. Barannyk (2002), А. Д. Полянин (2004*b*).

2. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^{1+kn}f(u^n w^m), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w^{1-km}g(u^n w^m).$

Автомодельное решение:
$$u = (C_1t + C_2)^{-\frac{1}{kn}}y(\xi), \quad w = (C_1t + C_2)^{\frac{1}{km}}z(\xi), \quad \xi = \frac{x + C_3}{\sqrt{C_1t + C_2}},$$
где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$ay''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{kn}y + y^{1+kn}f\big(y^n z^m\big) = 0,$$
$$bz''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi - \frac{C_1}{km}z + z^{1-km}g\big(y^n z^m\big) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

3. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu\ln u + uf(u^n w^m), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw\ln w + wg(u^n w^m).$

Точное решение:
$$u = \exp(Ame^{ct})y(\xi), \quad w = \exp(-Ane^{ct})z(\xi), \quad \xi = kx - \lambda t,$$
где A, k, λ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$ak^2 y''_{\xi\xi} + \lambda y'_\xi + cy\ln y + yf(y^n z^m) = 0,$$
$$bk^2 z''_{\xi\xi} + \lambda z'_\xi + cz\ln z + zg(y^n z^m) = 0.$$
Частному случаю $A = 0$ отвечает решение типа бегущей волны. При $\lambda = 0$ имеем решение в виде произведения двух функций, зависящих соответственно от времени t и координаты x.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

D2.1.4. Произвольные функции зависят от суммы (разности) квадратов искомых величин.

1. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(u^2 + w^2) - wg(u^2 + w^2),$

$\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ug(u^2 + w^2) + wf(u^2 + w^2).$

1°. Периодическое решение по пространственной координате со сдвигом фаз у компонент:
$$u = \psi(t)\cos\varphi(x,t), \quad w = \psi(t)\sin\varphi(x,t), \quad \varphi(x,t) = C_1x + \int g(\psi^2)\,dt + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\psi'_t = \psi f(\psi^2) - aC_1^2\psi,$$

общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int \frac{d\psi}{\psi f(\psi^2) - aC_1^2\psi} = t + C_3.$$

2°. Периодическое решение по времени со сдвигом фаз у компонент:

$$u = r(x)\cos\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr], \quad w = r(x)\sin\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ar''_{xx} - ar(\theta'_x)^2 + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x - C_1 r + rg(r^2) = 0.$$

3°. Точное решение (обобщает решение из п. 2°):

$$u = r(z)\cos\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \quad w = r(z)\sin\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \quad z = x + \lambda t,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функции $r = r(z)$ и $\theta = \theta(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ar''_{zz} - ar(\theta'_z)^2 - \lambda r'_z + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{zz} + 2ar'_z\theta'_z - \lambda r\theta'_z - C_1 r + rg(r^2) = 0.$$

⊙ *Литература*: T. A. Barannyk (2002), А. Д. Полянин (2004 *b*).

2. $$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(u^2 - w^2) + wg(u^2 - w^2),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ug(u^2 - w^2) + wf(u^2 - w^2).$$

1°. Точное решение:

$$u = \psi(t)\operatorname{ch}\varphi(x,t), \quad w = \psi(t)\operatorname{sh}\varphi(x,t), \quad \varphi(x,t) = C_1 x + \int g(\psi^2)\,dt + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\psi'_t = \psi f(\psi^2) + aC_1^2\psi,$$

общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int \frac{d\psi}{\psi f(\psi^2) + aC_1^2\psi} = t + C_3.$$

2°. Точное решение:

$$u = r(x)\operatorname{ch}\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr], \quad w = r(x)\operatorname{sh}\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ar''_{xx} + ar(\theta'_x)^2 + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + rg(r^2) - C_1 r = 0.$$

3°. Точное решение (обобщает решение из п. 2°):

$$u = r(z)\operatorname{ch}\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \quad w = r(z)\operatorname{sh}\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \quad z = x + \lambda t,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функции $r = r(z)$ и $\theta = \theta(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ar''_{zz} + ar(\theta'_z)^2 - \lambda r'_z + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{zz} + 2ar'_z\theta'_z - \lambda r\theta'_z - C_1 r + rg(r^2) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *b*).

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(u^2+w^2) - wg(u^2+w^2) - w\,\mathrm{arctg}\Big(\dfrac{w}{u}\Big)h(u^2+w^2),$
$\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(u^2+w^2) + ug(u^2+w^2) + u\,\mathrm{arctg}\Big(\dfrac{w}{u}\Big)h(u^2+w^2).$

Решение с функциональным разделением переменных (при фиксированном t определяет периодическую по x структуру со сдвигом фаз у компонент):

$$u = r(t)\cos\big[\varphi(t)x+\psi(t)\big], \quad w = r(t)\sin\big[\varphi(t)x+\psi(t)\big],$$

где функции $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} r'_t &= -ar\varphi^2 + rf(r^2),\\ \varphi'_t &= h(r^2)\varphi,\\ \psi'_t &= h(r^2)\psi + g(r^2). \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*, 2005).

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(u^2-w^2) + wg(u^2-w^2) + w\,\mathrm{Arth}\Big(\dfrac{w}{u}\Big)h(u^2-w^2),$
$\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(u^2-w^2) + ug(u^2-w^2) + u\,\mathrm{Arth}\Big(\dfrac{w}{u}\Big)h(u^2-w^2).$

Решение с функциональным разделением переменных:

$$u = r(t)\,\mathrm{ch}\big[\varphi(t)x+\psi(t)\big], \quad w = r(t)\,\mathrm{sh}\big[\varphi(t)x+\psi(t)\big],$$

где функции $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} r'_t &= ar\varphi^2 + rf(r^2),\\ \varphi'_t &= h(r^2)\varphi,\\ \psi'_t &= h(r^2)\psi + g(r^2). \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*, 2005).

D2.1.5. Произвольные функции сложным образом зависят от искомых величин.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^{k+1}f(\varphi),$
$\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + u^{k+1}[f(\varphi)\ln u + g(\varphi)], \quad \varphi = u\exp\Big(-\dfrac{w}{u}\Big).$

Точное решение:

$$u=(C_1t+C_2)^{-\frac{1}{k}}y(\xi), \quad w=(C_1t+C_2)^{-\frac{1}{k}}\left[z(\xi)-\frac{1}{k}\ln(C_1t+C_2)y(\xi)\right], \quad \xi=\frac{x+C_3}{\sqrt{C_1t+C_2}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $y=y(\xi)$ и $z=z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &ay''_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{k}y + y^{k+1}f(\varphi) = 0, \qquad \varphi = y\exp\Big(-\frac{z}{y}\Big),\\ &az''_{\xi\xi} + \tfrac{1}{2}C_1\xi z'_\xi + \frac{C_1}{k}z + \frac{C_1}{k}y + y^{k+1}[f(\varphi)\ln y + g(\varphi)] = 0. \end{aligned}$$

⊙ *Литература*: T. A. Barannyk (2002).

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uf(bu+cw) - cg\Big(\dfrac{w}{u}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf(bu+cw) + bg\Big(\dfrac{w}{u}\Big).$

Точное решение:

$$u = cr(x,t)\cos^2\varphi(t), \quad w = br(x,t)\sin^2\varphi(t),$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = \frac{1}{\sin 2\varphi}\,g\Big(\frac{b}{c}\,\mathrm{tg}^2\varphi\Big), \tag{1}$$

а функция $r=r(x,t)$ удовлетворяет уравнению вида 1.6.1.1:

$$\frac{\partial r}{\partial t}=a\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+rf(bcr). \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (1) можно записать в неявной форме

$$\int\frac{\sin(2\varphi)d\varphi}{g(bc^{-1}\operatorname{tg}^2\varphi)}=t+C.$$

Отметим, что уравнение (2) допускает точное решение типа бегущей волны $r=r(kx-\lambda t)$, где k, λ — произвольные постоянные.

3. $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+uf(u^2+w^2)-wg\Big(\frac{w}{u}\Big),\quad \frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+ug\Big(\frac{w}{u}\Big)+wf(u^2+w^2).$

Точное решение:

$$u=r(x,t)\cos\varphi(t),\quad w=r(x,t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t=g(\operatorname{tg}\varphi), \qquad (1)$$

а функция $r=r(x,t)$ удовлетворяет уравнению вида 1.6.1.1:

$$\frac{\partial r}{\partial t}=a\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+rf(r^2). \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (1) можно записать в неявной форме

$$\int\frac{d\varphi}{g(\operatorname{tg}\varphi)}=t+C.$$

Уравнение (2) допускает точное решение типа бегущей волны $r=r(z)$, где $z=kx-\lambda t$, k, λ — произвольные постоянные, а функция $r(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $ak^2r''_{zz}+\lambda r'_z+rf(r^2)=0$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*, 2005).

4. $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+uf(u^2-w^2)+wg\Big(\frac{w}{u}\Big),\quad \frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+ug\Big(\frac{w}{u}\Big)+wf(u^2-w^2).$

Точное решение:

$$u=r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t),\quad w=r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t),$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t=g(\operatorname{th}\varphi), \qquad (1)$$

а функция $r=r(x,t)$ удовлетворяет уравнению вида 1.6.1.1:

$$\frac{\partial r}{\partial t}=a\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+rf(r^2). \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (1) можно записать в неявной форме

$$\int\frac{d\varphi}{g(\operatorname{th}\varphi)}=t+C.$$

Уравнение (2) допускает точное решение типа бегущей волны $r=r(z)$, где $z=kx-\lambda t$, k, λ — произвольные постоянные, а функция $r(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $ak^2r''_{zz}+\lambda r'_z+rf(r^2)=0$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*, 2005).

D2.2. Параболические системы вида $\displaystyle\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+F(u,w),\ \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{b}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+G(u,w)$

Предварительные замечания. Подобные системы уравнений часто встречаются в теории массотеплопереноса реагирующих сред, в теории химических реакторов, в теории горения, в математической биологии и биофизике. При $n=0$ см. разд. D2.1; значения $n=1$ и $n=2$ соответствуют плоской и пространственной задачам в радиально-симметричных случаях (переменная x играет роль радиальной координаты).

Ниже $f(\varphi)$, $g(\varphi)$, $h(\varphi)$ — произвольные функции соответствующего аргумента $\varphi=\varphi(u,w)$; уравнения упорядочены по мере усложнения этого аргумента.

D2.2.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.

1. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + c_2 f(b_1u + c_1w) + c_1 g(b_2u + c_2w),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) - b_2 f(b_1u + c_1w) - b_1 g(b_2u + c_2w).$$

Считается, что $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

Умножая уравнения на подходящие константы, а затем почленно складывая, получим два независимых уравнения
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial U}{\partial x}\right) + (b_1c_2 - b_2c_1)f(U), \qquad U = b_1u + c_1w;$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial W}{\partial x}\right) - (b_1c_2 - b_2c_1)g(W), \qquad W = b_2u + c_2w.$$

Эти уравнения в общем случае допускают простые решения вида
$$U = U(t), \quad W = W(x); \qquad U = U(x), \quad W = W(t).$$

2. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + uf(bu - cw) + g(bu - cw),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + wf(bu - cw) + h(bu - cw).$$

1°. Точное решение:
$$u = \varphi(t) + c\exp\left[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\right]\theta(x,t), \qquad w = \psi(t) + b\exp\left[\int f(b\varphi - c\psi)\,dt\right]\theta(x,t),$$
где $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\varphi'_t = \varphi f(b\varphi - c\psi) + g(b\varphi - c\psi),$$
$$\psi'_t = \psi f(b\varphi - c\psi) + h(b\varphi - c\psi),$$
а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial \theta}{\partial x}\right). \tag{1}$$

2°. Точное решение:
$$u = \tilde{\varphi}(x) + c\tilde{\theta}(x,t), \qquad w = \tilde{\psi}(x) + b\tilde{\theta}(x,t),$$
где функции $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$ax^{-n}(x^n\tilde{\varphi}'_x)'_x + \tilde{\varphi} f(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi}) + g(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi}) = 0,$$
$$ax^{-n}(x^n\tilde{\psi}'_x)'_x + \tilde{\psi} f(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi}) + h(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi}) = 0,$$
а функция $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению
$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}\right) + f(b\tilde{\varphi} - c\tilde{\psi})\tilde{\theta}.$$

3°. Умножим первое уравнение на b, а второе — на $-c$ и сложим. В результате приходим к уравнению
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta), \qquad \zeta = bu - cw, \tag{2}$$
которое будем анализировать вместе с первым уравнением исходной системы
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + uf(\zeta) + g(\zeta). \tag{3}$$

Уравнение (2) можно рассматривать отдельно. Если известно некоторое решение $\zeta = \zeta(x,t)$ уравнения (2), то функцию $u = u(x,t)$ можно найти путем решения линейного уравнения (3), а функция $w = w(x,t)$ определяется по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

Отметим два важных решения уравнения (2):

(i) В общем случае уравнение (2) допускает стационарное решение $\zeta = \zeta(x)$; при этом соответствующие точные решения уравнения (3) имеют вид $u = u_0(x) + \sum e^{\beta_n t} u_n(x)$.

(ii) При выполнении условия $\zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta) = k_1\zeta + k_0$ уравнение (2) является линейным

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + k_1\zeta + k_0,$$

и сводится к линейному уравнению теплопроводности вида (1) [см. А. Д. Полянин (2001 *b*)].

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2201.pdf).

3. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + e^{\lambda u} f(\lambda u - \sigma w),$

$\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + e^{\sigma w} g(\lambda u - \sigma w).$

Точное решение:

$$u = y(\xi) - \frac{1}{\lambda}\ln(C_1 t + C_2), \quad w = z(\xi) - \frac{1}{\sigma}\ln(C_1 t + C_2), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{C_1 t + C_2}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a\xi^{-n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{\lambda} + e^{\lambda y} f(\lambda y - \sigma z) = 0,$$
$$b\xi^{-n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi + \frac{C_1}{\sigma} + e^{\sigma z} g(\lambda y - \sigma z) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2202.pdf).

D2.2.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.

1. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + uf\left(\frac{u}{w}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + wg\left(\frac{u}{w}\right).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx)]\varphi(t), \quad \nu = \tfrac{1}{2}|n-1|,$$
$$w = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, $J_\nu(z), Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = -ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi'_t = -bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 I_\nu(kx) + C_2 K_\nu(kx)]\varphi(t), \quad \nu = \tfrac{1}{2}|n-1|,$$
$$w = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 I_\nu(kx) + C_2 K_\nu(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя, а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi'_t = bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = e^{-\lambda t}y(x), \quad w = e^{-\lambda t}z(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + \lambda y + yf(y/z) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x + \lambda z + zg(y/z) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2204.pdf).

2. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+uf\Big(\frac{u}{w}\Big),\quad \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+wg\Big(\frac{u}{w}\Big).$

Эта система является частным случаем предыдущей системы при $b=a$ и поэтому допускает приведенные там решения в пп. 1°–3°. Кроме того, она имеет другие решения, указанные ниже.

1°. Пусть k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(k)=g(k).$$

Точное решение:

$$u=ke^{\lambda t}\theta,\quad w=e^{\lambda t}\theta,\quad \lambda=f(k),$$

где функция $\theta=\theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial\theta}{\partial x}\right). \tag{1}$$

2°. Точное решение:

$$u=\varphi(t)\exp\left[\int g(\varphi(t))\,dt\right]\theta(x,t),\quad w=\exp\left[\int g(\varphi(t))\,dt\right]\theta(x,t),$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t=[f(\varphi)-g(\varphi)]\varphi, \tag{2}$$

а функция $\theta=\theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности (1).

Частному решению $\varphi=k=\mathrm{const}$ уравнения (2) соответствует решение из п. 1°. Общее решение уравнения (2) записывается в неявном виде

$$\int\frac{d\varphi}{[f(\varphi)-g(\varphi)]\varphi}=t+C.$$

3°. Точное решение для специального случая $g(z)=-z^2f(z)$:

$$u=r(x,t)\sin\varphi(t),\quad w=r(x,t)\cos\varphi(t),$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t=f(\operatorname{tg}\varphi)\operatorname{tg}\varphi,$$

а функция $r=r(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial r}{\partial x}\right). \tag{3}$$

4°. Точное решение для специального случая $g(z)=z^2f(z)$:

$$u=r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t),\quad w=r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t),$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t=f(\operatorname{th}\varphi)\operatorname{th}\varphi,$$

а функция $r=r(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности (3).

Замечание. В данном случае существует также решение вида

$$u=r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t),\quad w=r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t).$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2203.pdf), А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

3. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+uf\Big(\frac{u}{w}\Big)+\frac{u}{w}h\Big(\frac{u}{w}\Big),$

$\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+wg\Big(\frac{u}{w}\Big)+h\Big(\frac{u}{w}\Big).$

Точное решение:

$$u=\varphi(t)G(t)\left[\theta(x,t)+\int\frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\right],\quad w=G(t)\left[\theta(x,t)+\int\frac{h(\varphi)}{G(t)}\,dt\right],\quad G(t)=\exp\left[\int g(\varphi)\,dt\right],$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = [f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi, \tag{1}$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial\theta}{\partial x}\right).$$

Общее решение уравнения (1) записывается в неявном виде

$$\int\frac{d\varphi}{[f(\varphi) - g(\varphi)]\varphi} = t + C.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2205.pdf).

4. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u^k f\left(\frac{u}{w}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + w^k g\left(\frac{u}{w}\right).$

Автомодельное решение:

$$u = (C_1t + C_2)^{\frac{1}{1-k}}y(\xi), \quad w = (C_1t + C_2)^{\frac{1}{1-k}}z(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{C_1t + C_2}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a\xi^{-n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{k-1}y + y^k f(y/z) = 0,$$
$$b\xi^{-n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi + \frac{C_1}{k-1}z + z^k g(y/z) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2206.pdf).

5. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + uf\left(\frac{u}{w}\right)\ln u + ug\left(\frac{u}{w}\right),$

$\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + wf\left(\frac{u}{w}\right)\ln w + wh\left(\frac{u}{w}\right).$

Решение:

$$u = \varphi(t)\psi(t)\theta(x,t), \quad w = \psi(t)\theta(x,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi'_t &= \varphi[g(\varphi) - h(\varphi) + f(\varphi)\ln\varphi],\\ \psi'_t &= \psi[h(\varphi) + f(\varphi)\ln\psi],\end{aligned} \tag{1}$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + f(\varphi)\theta\ln\theta. \tag{2}$$

Первое уравнение (1) является уравнением с разделяющимися переменными; его решение можно записать в неявном виде. Решение второго уравнения (1) можно найти путем замены $\psi = e^\zeta$ (оно сводится к линейному уравнению для ζ).

Уравнение (2) допускает точные решения вида

$$\theta = \exp\bigl[\sigma_2(t)x^2 + \sigma_0(t)\bigr],$$

где функции $\sigma_n = \sigma_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sigma'_2 = f(\varphi)\sigma_2 + 4a\sigma_2^2,$$
$$\sigma'_0 = f(\varphi)\sigma_0 + 2a(n+1)\sigma_2.$$

Эта система может быть последовательно проинтегрирована, поскольку первое уравнение является уравнением Бернулли, а второе уравнение линейно относительно искомой функции.

Если $f = \text{const}$, то уравнение (2) имеет также точное решение типа бегущей волны $\theta = \theta(kx - \lambda t)$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2207.pdf).

D2.2.3. Произвольные функции зависят от произведения степеней искомых величин.

1. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(x, u^k w^m),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + wg(x, u^k w^m).$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:
$$u = e^{-m\lambda t}y(x), \quad w = e^{k\lambda t}z(x),$$
где λ — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + m\lambda y + yf(x, y^k z^m) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x - k\lambda z + zg(x, y^k z^m) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2208.pdf).

2. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + u^{1+kp}f(u^p w^q),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + w^{1-kq}g(u^p w^q).$$

Автомодельное решение:
$$u = (C_1t + C_2)^{-\frac{1}{kp}}y(\xi), \quad w = (C_1t + C_2)^{\frac{1}{kq}}z(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{C_1t + C_2}},$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$a\xi^{-n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2}C_1\xi y'_\xi + \frac{C_1}{kp}y + y^{1+kp}f(y^p z^q) = 0,$$
$$b\xi^{-n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + \frac{1}{2}C_1\xi z'_\xi - \frac{C_1}{kq}z + z^{1-kq}g(y^p z^q) = 0.$$

3. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + cu\ln u + uf(x, u^k w^m),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + cw\ln w + wg(x, u^k w^m).$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:
$$u = \exp(Ame^{ct})y(x), \quad w = \exp(-Ake^{ct})z(x),$$
где A — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + cy\ln y + yf(x, y^k z^m) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x + cz\ln z + zg(x, y^k z^m) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2210.pdf).

D2.2.4. Произвольные функции зависят от суммы (разности) квадратов искомых величин.

1. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(u^2 + w^2) - wg(u^2 + w^2),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + wf(u^2 + w^2) + ug(u^2 + w^2).$$

Периодическое решение по времени:
$$u = r(x)\cos\big[\theta(x) + C_1t + C_2\big], \quad w = r(x)\sin\big[\theta(x) + C_1t + C_2\big],$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$ar''_{xx} - ar(\theta'_x)^2 + \frac{an}{x}r'_x + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + \frac{an}{x}r\theta'_x + rg(r^2) - C_1r = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2211.pdf).

2. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(u^2 - w^2) + wg(u^2 - w^2),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + wf(u^2 - w^2) + ug(u^2 - w^2).$$

Точное решение:
$$u = r(x)\operatorname{ch}\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr], \quad w = r(x)\operatorname{sh}\bigl[\theta(x) + C_1 t + C_2\bigr],$$
где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$ar''_{xx} + ar(\theta'_x)^2 + \frac{an}{x}r'_x + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + \frac{an}{x}r\theta'_x + rg(r^2) - C_1 r = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2212.pdf).

D2.2.5. Произвольные функции зависят от разных аргументов.

1. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(bu + cw) - cg\Big(\frac{w}{u}\Big),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + wf(bu + cw) + bg\Big(\frac{w}{u}\Big).$$

Точное решение:
$$u = cr(x,t)\cos^2\varphi(t), \quad w = br(x,t)\sin^2\varphi(t),$$
где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными
$$\varphi'_t = \frac{1}{\sin 2\varphi}g\biggl(\frac{b}{c}\operatorname{tg}^2\varphi\biggr), \tag{1}$$
а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial r}{\partial x}\Big) + rf(bcr). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) можно записать в неявной форме
$$\int\frac{\sin(2\varphi)\,d\varphi}{g(bc^{-1}\operatorname{tg}^2\varphi)} = t + C.$$

Отметим, что уравнение (2) допускает стационарное решение $r = r(x)$.

2. $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(u^2 + w^2) - wg\Big(\frac{w}{u}\Big),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + wf(u^2 + w^2) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big).$$

Точное решение:
$$u = r(x,t)\cos\varphi(t), \quad w = r(x,t)\sin\varphi(t),$$
где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными
$$\varphi'_t = g(\operatorname{tg}\varphi), \tag{1}$$
а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\biggl(x^n\frac{\partial r}{\partial x}\biggr) + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) выражается в неявном виде
$$\int\frac{d\varphi}{g(\operatorname{tg}\varphi)} = t + C.$$

Уравнение (2) допускает стационарное точное решение $r = r(x)$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2213.pdf).

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(u^2 - w^2) + wg\Big(\dfrac{w}{u}\Big),$
$\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + wf(u^2 - w^2) + ug\Big(\dfrac{w}{u}\Big).$

Точное решение:

$$u = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t), \quad w = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = g(\operatorname{th}\varphi), \tag{1}$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial r}{\partial x}\right) + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) выражается в неявном виде

$$\int\frac{d\varphi}{g(\operatorname{th}\varphi)} = t + C.$$

Уравнение (2) допускает стационарное точное решение $r = r(x)$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde2214.pdf).

D2.3. Другие системы уравнений второго порядка параболического типа

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(t, bu - cw)\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big] + g(t, bu - cw),$
$\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(t, bu - cw)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + h(t, bu - cw).$

Точное решение:

$$u = \varphi(t) + c\theta(x,\tau), \quad w = \psi(t) + b\theta(x,\tau), \quad \tau = \int f(t, b\varphi - c\psi)\,dt,$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = g(t, b\varphi - c\psi),$$
$$\psi'_t = h(t, b\varphi - c\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x,\tau)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big)\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big] + ug\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + wh\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).$

Точное решение:

$$u = \varphi(t)\exp\left[\int h(t,\varphi(t))\,dt\right]\theta(x,\tau), \quad w = \exp\left[\int h(t,\varphi(t))\,dt\right]\theta(x,\tau), \quad \tau = \int f(t,\varphi(t))\,dt,$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_t = [g(t,\varphi) - h(t,\varphi)]\varphi,$$

а функция $\theta = \theta(x,\tau)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *b*), А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

D2.4. Эллиптические системы вида $\Delta u = F(u, w)$, $\Delta w = G(u, w)$

Предварительные замечания. Подобные системы уравнений часто встречаются в теории массотеплопереноса реагирующих сред, в теории химических реакторов, в теории горения (они описывают стационарные процессы).

Системы рассматриваемого вида инварианты относительно сдвигов по независимым переменным и относительно поворотов в плоскости x, y. Они допускают решения типа бегущей волны $u = u(k_1x + k_2y)$, $w = w(k_1x + k_2y)$. Эти решения, а также вырожденные решения, когда одна из искомых функций равна константе, далее не рассматриваются.

Ниже $f(\varphi), g(\varphi), h(\varphi)$ — произвольные функции соответствующего аргумента $\varphi = \varphi(u, w)$; уравнения упорядочены по мере усложнения этого аргумента.

D2.4.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c_2 f(b_1u + c_1w) + c_1 g(b_2u + c_2w),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -b_2 f(b_1u + c_1w) - b_1 g(b_2u + c_2w).$$

Считается, что $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

Умножая уравнения на подходящие константы, а затем почленно складывая, получим два независимых уравнения вида 5.4.1.1:
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = (b_1c_2 - b_2c_1)f(U), \qquad U = b_1u + c_1w;$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -(b_1c_2 - b_2c_1)g(W), \qquad W = b_2u + c_2w.$$

Эти уравнения в общем случае допускают решения типа бегущих волн
$$U = U(k_1x + k_2y), \quad W = W(k_3x + k_4y),$$
где $k_1, \ldots, k_4$ — произвольные постоянные. Соответствующее решение исходной системы будет представлять собой суперпозицию (линейную комбинацию) двух бегущих волн.

2. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = uf(au - bw) + g(au - bw),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = wf(au - bw) + h(au - bw).$$

1°. Точное решение:
$$u = \varphi(x) + b\theta(x, y), \quad w = \psi(x) + a\theta(x, y),$$
где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\varphi''_{xx} = \varphi f(a\varphi - b\psi) + g(a\varphi - b\psi),$$
$$\psi''_{xx} = \psi f(a\varphi - b\psi) + h(a\varphi - b\psi),$$
а функция $\theta = \theta(x, y)$ удовлетворяет линейному уравнению Шредингера специального вида
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = F(x)\theta, \qquad F(x) = f(a\varphi - b\psi).$$
Его решения строятся методом разделения переменных.

2°. Умножим первое уравнение на a, а второе — на $-b$ и сложим. В результате приходим к уравнению
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \zeta f(\zeta) + ag(\zeta) - bh(\zeta), \qquad \zeta = au - bw, \tag{1}$$
которое будем анализировать вместе с первым уравнением исходной системы
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = uf(\zeta) + g(\zeta). \tag{2}$$
Уравнение (1) можно рассматривать отдельно. О точных решениях уравнений этого вида для некоторых кинетических функций $F(\zeta) = \zeta f(\zeta) + ag(\zeta) - bh(\zeta)$ см. разд. 5.1.1, 5.2.1 и уравнения 5.3.2.1, 5.3.3.1, 5.3.3.2, 5.4.1.1.

Отметим два важных решения уравнения (1):

(i) В общем случае уравнение (1) допускает точное решение типа бегущей волны $\zeta = \zeta(z)$, где $z = k_1 x + k_2 y$ (k_1 и k_2 — произвольные постоянные).

(ii) При выполнении условия $\zeta f(\zeta) + ag(\zeta) - bh(\zeta) = c_1\zeta + c_0$ уравнение (1) является линейным уравнением Гельмгольца.

Если известно некоторое решение $\zeta = \zeta(x, y)$ уравнения (1), то функцию $u = u(x, y)$ можно найти путем решения линейного уравнения (2); функция $w = w(x, y)$ определяется по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde3101.pdf).

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{\lambda u} f(\lambda u - \sigma w), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{\sigma w} g(\lambda u - \sigma w).$

1°. Точное решение:

$$u = U(\xi) - \frac{2}{\lambda}\ln|x + C_1|, \quad w = W(\xi) - \frac{2}{\sigma}\ln|x + C_1|, \quad \xi = \frac{y + C_2}{x + C_1},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $U = U(\xi)$ и $W = W(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1 + \xi^2)U''_{\xi\xi} + 2\xi U'_\xi + \frac{2}{\lambda} = e^{\lambda U} f(\lambda U - \sigma W),$$
$$(1 + \xi^2)W''_{\xi\xi} + 2\xi W'_\xi + \frac{2}{\sigma} = e^{\sigma W} g(\lambda U - \sigma W).$$

2°. Точное решение:

$$u = \theta(x, y), \quad w = \frac{\lambda}{\sigma}\theta(x, y) - \frac{k}{\sigma},$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda f(k) = \sigma e^{-k} g(k),$$

а функция $\theta = \theta(x, y)$ описывается разрешимым уравнением вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = f(k)e^{\lambda\theta}.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde3102.pdf).

D2.4.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = uf\Big(\frac{u}{w}\Big), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = wg\Big(\frac{u}{w}\Big).$

1°. Решение в виде произведения функций разных аргументов, периодическое по пространственной переменной (аналогичное решение можно получить поменяв местами x и y):

$$u = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\varphi(y), \quad w = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\psi(y),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{yy} = k^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi''_{yy} = k^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]U(y), \quad w = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]W(y),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $U = U(y)$ и $W = W(y)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U''_{yy} = -k^2 U + Uf(U/W),$$
$$W''_{yy} = -k^2 W + Wg(U/W).$$

3°. Вырожденное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = (C_1 x + C_2)U(y), \quad w = (C_1 x + C_2)W(y),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $U = U(y)$ и $W = W(y)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U''_{yy} = Uf(U/W),$$
$$W''_{yy} = Wg(U/W).$$

Замечание. В пп. 1°–3° функции f и g могут зависеть от y.

4°. Решение в виде произведения функций с разными аргументами:

$$u = e^{a_1x+b_1y}\xi(z), \quad w = e^{a_1x+b_1y}\eta(z), \quad z = a_2x + b_2y,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные постоянные, а функции $\xi = \xi(z)$ и $\eta = \eta(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(a_2^2 + b_2^2)\xi''_{zz} + 2(a_1a_2 + b_1b_2)\xi'_z + (a_1^2 + b_1^2)\xi = \xi f(\xi/\eta),$$
$$(a_2^2 + b_2^2)\eta''_{zz} + 2(a_1a_2 + b_1b_2)\eta'_z + (a_1^2 + b_1^2)\eta = \eta g(\xi/\eta).$$

5°. Точное решение:

$$u = k\theta(x,y), \quad w = \theta(x,y),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(k) = g(k)$, а функция $\theta = \theta(x,y)$ описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = f(k)\theta.$$

О точных решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *b*).

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + \dfrac{u}{w}h\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = wg\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + h\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

Точное решение:

$$u = kw, \quad w = \theta(x,y) - \frac{h(k)}{f(k)},$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(k) = g(k)$, а функция $\theta = \theta(x,y)$ удовлетворяет линейному уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = f(k)\theta.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde3104.pdf).

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^n f\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = w^n g\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

При $f(z) = kz^{-m}$, $g(z) = -kz^{n-m}$ рассматриваемая система описывает химическую реакцию n-го порядка (порядка $n-m$ по компоненте u и порядка m по компоненте w); значениям $n=2$, $m=1$ соответствуют достаточно распространенная реакция второго порядка.

1°. Точное решение:

$$u = r^{\frac{2}{1-n}}U(\theta), \quad w = r^{\frac{2}{1-n}}W(\theta), \quad r = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2}, \quad \theta = \frac{y+C_2}{x+C_1},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U''_{\theta\theta} + \frac{4}{(1-n)^2}U = U^n f\Big(\frac{U}{W}\Big),$$
$$W''_{\theta\theta} + \frac{4}{(1-n)^2}W = W^n g\Big(\frac{U}{W}\Big).$$

2°. Решение:

$$u = k\zeta(x,y), \quad w = \zeta(x,y),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $k^{n-1}f(k) = g(k)$, а функция $\zeta = \zeta(x,y)$ удовлетворяет уравнению со степенной нелинейностью вида 5.1.1.1:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = g(k)\zeta^n.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde3105.pdf).

D2.4.3. Другие системы.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=uf(u^n w^m),\quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=wg(u^n w^m).$

Решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u=e^{m(a_1x+b_1y)}\xi(z),\quad w=e^{-n(a_1x+b_1y)}\eta(z),\quad z=a_2x+b_2y,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные постоянные, а функции $\xi=\xi(z)$ и $\eta=\eta(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(a_2^2+b_2^2)\xi''_{zz}+2m(a_1a_2+b_1b_2)\xi'_z+m^2(a_1^2+b_1^2)\xi=\xi f(\xi^n\eta^m),$$
$$(a_2^2+b_2^2)\eta''_{zz}-2n(a_1a_2+b_1b_2)\eta'_z+n^2(a_1^2+b_1^2)\eta=\eta g(\xi^n\eta^m).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=uf(u^2+w^2)-wg(u^2+w^2),$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=wf(u^2+w^2)+ug(u^2+w^2).$

1°. Периодическое решение по координате y со сдвигом фаз у компонент:

$$u=r(x)\cos\bigl[\theta(x)+C_1y+C_2\bigr],$$
$$w=r(x)\sin\bigl[\theta(x)+C_1y+C_2\bigr],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $r=r(x)$ и $\theta=\theta(x)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$r''_{xx}=r(\theta'_x)^2+C_1^2r+rf(r^2),$$
$$r\theta''_{xx}=-2r'_x\theta'_x+rg(r^2).$$

2°. Решение (обобщает решение из п. 1°):

$$u=r(z)\cos\bigl[\theta(z)+C_1y+C_2\bigr],\quad w=r(z)\sin\bigl[\theta(z)+C_1y+C_2\bigr],\quad z=k_1x+k_2y,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функции $r=r(z)$ и $\theta=\theta(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(k_1^2+k_2^2)r''_{zz}=k_1^2r(\theta'_z)^2+r(k_2\theta'_z+C_1)^2+rf(r^2),$$
$$(k_1^2+k_2^2)r\theta''_{zz}=-2\bigl[(k_1^2+k_2^2)\theta'_z+C_1k_2\bigr]r'_z+rg(r^2).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=uf(u^2-w^2)+wg(u^2-w^2),$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=wf(u^2-w^2)+ug(u^2-w^2).$

Точное решение:

$$u=r(z)\,\mathrm{ch}\bigl[\theta(z)+C_1y+C_2\bigr],\quad w=r(z)\,\mathrm{sh}\bigl[\theta(z)+C_1y+C_2\bigr],\quad z=k_1x+k_2y,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функции $r=r(z)$ и $\theta=\theta(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(k_1^2+k_2^2)r''_{zz}+k_1^2r(\theta'_z)^2+r(k_2\theta'_z+C_1)^2=rf(r^2),$$
$$(k_1^2+k_2^2)r\theta''_{zz}+2\bigl[(k_1^2+k_2^2)\theta'_z+C_1k_2\bigr]r'_z=rg(r^2).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde3108.pdf).

D2.5. Гиперболические системы вида $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + F(u,w)$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{b}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + G(u,w)$

D2.5.1. Произвольные функции зависят от линейной комбинации искомых величин.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + c_2 f(b_1u + c_1w) + c_1 g(b_2u + c_2w),$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) - b_2 f(b_1u + c_1w) - b_1 g(b_2u + c_2w).$

Считается, что $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

Умножая уравнения на подходящие константы, а затем почленно складывая, получим два независимых уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial U}{\partial x}\Big) + (b_1c_2 - b_2c_1)f(U), \qquad U = b_1u + c_1w;$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial W}{\partial x}\Big) - (b_1c_2 - b_2c_1)g(W), \qquad W = b_2u + c_2w.$$

Эти уравнения в общем случае допускают простые решения вида

$$U = U(t), \quad W = W(x); \qquad U = U(x), \quad W = W(t).$$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(bu - cw) + g(bu - cw),$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + wf(bu - cw) + h(bu - cw).$

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) + c\theta(x,t), \qquad w = \psi(t) + b\theta(x,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = \varphi f(b\varphi - c\psi) + g(b\varphi - c\psi),$$
$$\psi''_{tt} = \psi f(b\varphi - c\psi) + h(b\varphi - c\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + f(b\varphi - c\psi)\theta.$$

Для решения этого уравнение можно использовать метод разделения переменных.

2°. Точное решение:

$$u = \tilde\varphi(x) + c\tilde\theta(x,t), \qquad w = \tilde\psi(x) + b\tilde\theta(x,t),$$

где функции $\tilde\varphi = \tilde\varphi(x)$ и $\tilde\psi = \tilde\psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ax^{-n}(x^n\tilde\varphi'_x)'_x + \tilde\varphi f(b\tilde\varphi - c\tilde\psi) + g(b\tilde\varphi - c\tilde\psi) = 0,$$
$$ax^{-n}(x^n\tilde\psi'_x)'_x + \tilde\psi f(b\tilde\varphi - c\tilde\psi) + h(b\tilde\varphi - c\tilde\psi) = 0,$$

а функция $\tilde\theta = \tilde\theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde\theta}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial \tilde\theta}{\partial x}\right) + f(b\tilde\varphi - c\tilde\psi)\tilde\theta.$$

Для решения этого уравнение можно использовать метод разделения переменных.

3°. Умножим первое уравнение на b, а второе — на $-c$ и сложим. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta), \qquad \zeta = bu - cw, \tag{1}$$

которое будем анализировать вместе с первым уравнением исходной системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + uf(\zeta) + g(\zeta). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно рассматривать отдельно. Если известно некоторое решение $\zeta = \zeta(x,t)$ уравнения (1), то функцию $u = u(x,t)$ можно найти путем решения линейного уравнения (2), а функция $w = w(x,t)$ определяется по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

Отметим три важных решения уравнения (1):

(i) В общем случае уравнение (1) допускает пространственно-однородное решение $\zeta = \zeta(t)$. Соответствующее решение исходной системы в другой форме приведено в п. 1°.

(ii) В общем случае уравнение (1) допускает стационарное решение $\zeta = \zeta(x)$; при этом соответствующие точные решения уравнения (2) имеют вид $u = u_0(x) + \sum e^{-\beta_n t} u_n(x)$, $u = u_0(x) + \sum \cos(\beta_n t) u_n^{(1)}(x) + \sum \sin(\beta_n t) u_n^{(2)}(x)$.

(iii) При выполнении условия $\zeta f(\zeta) + bg(\zeta) - ch(\zeta) = k_1\zeta + k_0$ уравнение (1) является линейным

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + k_1\zeta + k_0$$

и может решаться методом разделения переменных.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde4101.pdf).

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n \frac{\partial u}{\partial x}\right) + e^{\lambda u} f(\lambda u - \sigma w),$

$\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{b}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n \frac{\partial w}{\partial x}\right) + e^{\sigma w} g(\lambda u - \sigma w).$

1°. Точное решение:

$$u = y(\xi) - \frac{2}{\lambda}\ln(C_1 t + C_2), \quad w = z(\xi) - \frac{2}{\sigma}\ln(C_1 t + C_2), \quad \xi = \frac{x}{C_1 t + C_2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C_1^2(\xi^2 y'_\xi)'_\xi + 2C_1^2\lambda^{-1} = a\xi^{-n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + e^{\lambda y} f(\lambda y - \sigma z),$$
$$C_1^2(\xi^2 z'_\xi)'_\xi + 2C_1^2\sigma^{-1} = b\xi^{-n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + e^{\sigma z} g(\lambda y - \sigma z).$$

2°. Точное решение при $b = a$:

$$u = \theta(x,t), \quad w = \frac{\lambda}{\sigma}\theta(x,t) - \frac{k}{\sigma},$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\lambda f(k) = \sigma e^{-k} g(k),$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + f(k)e^{\lambda\theta}.$$

Это уравнение разрешимо при $n = 0$, см. 3.2.1.1.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde4102.pdf).

D2.5.2. Произвольные функции зависят от отношения искомых величин.

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n \frac{\partial u}{\partial x}\right) + uf\left(\frac{u}{w}\right), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{b}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n \frac{\partial w}{\partial x}\right) + wg\left(\frac{u}{w}\right).$

1°. Периодическое решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = [C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt)]y(x), \quad w = [C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt)]z(x),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + k^2 y + yf(y/z) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x + k^2 z + zg(y/z) = 0.$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = [C_1\exp(kt) + C_2\exp(-kt)]y(x), \quad w = [C_1\exp(kt) + C_2\exp(-kt)]z(x),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $y=y(x)$ и $z=z(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x - k^2 y + yf(y/z) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x - k^2 z + zg(y/z) = 0.$$

3°. Вырожденное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = (C_1 t + C_2)y(x), \quad w = (C_1 t + C_2)z(x),$$

где функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x + yf(y/z) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x + zg(y/z) = 0.$$

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx)]\varphi(t), \quad \nu = \tfrac{1}{2}|n-1|,$$
$$w = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, а функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = -ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi''_{tt} = -bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

5°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 I_\nu(kx) + C_2 K_\nu(kx)]\varphi(t), \quad \nu = \tfrac{1}{2}|n-1|,$$
$$w = x^{\frac{1-n}{2}}[C_1 I_\nu(kx) + C_2 K_\nu(kx)]\psi(t),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя, а функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = ak^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi''_{tt} = bk^2\psi + \psi g(\varphi/\psi).$$

6°. Точное решение при $b = a$:

$$u = k\theta(x,t), \quad w = \theta(x,t),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(k) = g(k)$, а функция $\theta = \theta(x,t)$ описывается линейным уравнением Клейна — Гордона

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + f(k)\theta.$$

Об этом уравнении см. А. Д. Полянин (2001 *b*).

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde4103.pdf).

2. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + uf\left(\frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w}h\left(\frac{u}{w}\right),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + wg\left(\frac{u}{w}\right) + h\left(\frac{u}{w}\right).$$

Точное решение:

$$u = k\theta(x,t), \quad w = \theta(x,t),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $f(k) = g(k)$, а функция $\theta = \theta(x,t)$ описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + f(k)\theta + h(k).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde4104.pdf).

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + u^k f\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{b}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + w^k g\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

Автомодельное решение:

$$u = (C_1t + C_2)^{\frac{2}{1-k}}\, y(\xi), \quad w = (C_1t + C_2)^{\frac{2}{1-k}}\, z(\xi), \quad \xi = \frac{x}{C_1t + C_2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C_1^2\xi^2 y''_{\xi\xi} + \frac{2C_1^2(k+1)}{k-1}\xi y'_\xi + \frac{C_1^2(k+1)}{(k-1)^2}y = \frac{a}{\xi^n}(\xi^n y'_\xi)'_\xi + y^k f\Big(\frac{y}{z}\Big),$$
$$C_1^2\xi^2 z''_{\xi\xi} + \frac{2C_1^2(k+1)}{k-1}\xi z'_\xi + \frac{C_1^2(k+1)}{(k-1)^2}z = \frac{b}{\xi^n}(\xi^n z'_\xi)'_\xi + z^k g\Big(\frac{y}{z}\Big).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde4105.pdf).

D2.5.3. Другие системы.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(x, u^k w^m),$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{b}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + wg(x, u^k w^m).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = e^{-m\lambda t}y(x), \quad w = e^{k\lambda t}z(x),$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ax^{-n}(x^n y'_x)'_x - m^2\lambda^2 y + yf(x, y^k z^m) = 0,$$
$$bx^{-n}(x^n z'_x)'_x - k^2\lambda^2 z + zg(x, y^k z^m) = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde4106.pdf).

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(u^2 + w^2) - wg(u^2 + w^2),$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + wf(u^2 + w^2) + ug(u^2 + w^2).$

1°. Периодическое решение по времени t:

$$u = r(x)\cos\big[\theta(x) + C_1t + C_2\big], \quad w = r(x)\sin\big[\theta(x) + C_1t + C_2\big],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ar''_{xx} - ar(\theta'_x)^2 + \frac{an}{x}r'_x + C_1^2 r + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + \frac{an}{x}r\theta'_x + rg(r^2) = 0.$$

2°. При $n = 0$ существует точное решение вида

$$u = r(z)\cos\big[\theta(z) + C_1t + C_2\big], \quad w = r(z)\sin\big[\theta(z) + C_1t + C_2\big], \quad z = kx - \lambda t.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde4107.pdf).

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + uf(u^2 - w^2) + wg(u^2 - w^2),$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + wf(u^2 - w^2) + ug(u^2 - w^2).$

1°. Точное решение:

$$u = r(x)\operatorname{ch}\big[\theta(x) + C_1t + C_2\big], \quad w = r(x)\operatorname{sh}\big[\theta(x) + C_1t + C_2\big],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ar''_{xx} + ar(\theta'_x)^2 + \frac{an}{x} r'_x - C_1^2 r + rf(r^2) = 0,$$
$$ar\theta''_{xx} + 2ar'_x\theta'_x + \frac{an}{x} r\theta'_x + rg(r^2) = 0.$$

2°. При $n = 0$ существует точное решение вида

$$u = r(z)\,\mathrm{ch}\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \quad w = r(z)\,\mathrm{sh}\bigl[\theta(z) + C_1 t + C_2\bigr], \quad z = kx - \lambda t.$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*c*, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde4108.pdf).

D3. Нелинейные системы общего вида

D3.1. Системы двух уравнений, содержащие первые производные по t

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf(t, bu - cw) + g(t, bu - cw),$

$\dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf(t, bu - cw) + h(t, bu - cw).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор (любого порядка) по пространственным переменным $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющий условию $L[\mathrm{const}] = 0$.

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) + c\exp\biggl[\int f(t, b\varphi - c\psi)\,dt\biggr]\theta(x_1, \dots, x_n, t),$$
$$w = \psi(t) + b\exp\biggl[\int f(t, b\varphi - c\psi)\,dt\biggr]\theta(x_1, \dots, x_n, t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = \varphi f(t, b\varphi - c\psi) + g(t, b\varphi - c\psi),$$
$$\psi'_t = \psi f(t, b\varphi - c\psi) + h(t, b\varphi - c\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \dots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = L[\theta].$$

Замечание 1. Коэффициенты линейного дифференциального оператора L могут зависеть от переменных $x_1, \dots, x_n, t$.

2°. Умножим первое уравнение на b, а второе — на $-c$ и сложим. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = L[\zeta] + \zeta f(t, \zeta) + bg(t, \zeta) - ch(t, \zeta), \qquad \zeta = bu - cw, \tag{1}$$

которое будем анализировать вместе с первым уравнением исходной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf(t, \zeta) + g(t, \zeta). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно рассматривать отдельно. Если известно его некоторое решение $\zeta = \zeta(x_1, \dots, x_n, t)$, то функцию $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$ можно найти путем решения линейного уравнения (2); функция $w = w(x_1, \dots, x_n, t)$ определяется по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.

Замечание 2. Пусть L — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами по одной независимой переменной $x = x_1$ и выполняется условие

$$\frac{\partial}{\partial t}\Bigl[\zeta f(t, \zeta) + bg(t, \zeta) - ch(t, \zeta)\Bigr] = 0$$

(оно имеет место, например, когда функции f, g, h не зависят явно от t). Тогда уравнение (1) допускает точное решение типа бегущей волны $\zeta = \zeta(z)$, где $z = kx - \lambda t$ (k и λ — произвольные постоянные).

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + b_2 f(a_1 u + b_1 w) + b_1 g(a_2 u + b_2 w),$

$\dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] - a_2 f(a_1 u + b_1 w) - a_1 g(a_2 u + b_2 w).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменной x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x и t. Считается, что $L[\text{const}] = 0$ и $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Умножая уравнения на подходящие константы, а затем почленно складывая, получим два независимых уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} = L[U] + (a_1 b_2 - a_2 b_1) f(U), \qquad U = a_1 u + b_1 w;\\ &\frac{\partial W}{\partial t} = L[W] - (a_1 b_2 - a_2 b_1) g(W), \qquad W = a_2 u + b_2 w. \end{aligned} \tag{1}$$

Специальный случай 1. Если L — произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то уравнения (1) допускают решения типа бегущих волн

$$U = U(k_1 x - \lambda_1 t), \quad W = W(k_2 x - \lambda_2 t),$$

где k_m, λ_m — произвольные постоянные. Соответствующее решение исходной системы будет представлять собой суперпозицию (линейную комбинацию) двух бегущих волн.

Специальный случай 2. Если коэффициенты линейного оператора L зависят только от x, то уравнения (1) имеют простые решения вида

$$U = U(t), \quad W = W(x); \qquad U = U(x), \quad W = W(t).$$

Замечание. Аналогичным образом рассматривается случай, когда линейный дифференциальный оператор L зависит от нескольких пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L_1[u] + u f\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = L_2[w] + w g\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

Здесь L_1, L_2 — произвольные линейные дифференциальные операторы (любого порядка) по переменной x с постоянными коэффициентами.

1°. Точное решение:

$$u = e^{kx-\lambda t} y(\xi), \quad w = e^{kx-\lambda t} z(\xi), \quad \xi = \beta x - \gamma t,$$

где $k, \lambda, \beta, \gamma$ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &M_1[y] + \lambda y + y f(y/z) = 0, \quad M_2[z] + \lambda z + z g(y/z) = 0,\\ &M_1[y] = e^{-kx} L_1[e^{kx} y(\xi)], \quad M_2[z] = e^{-kx} L_2[e^{kx} z(\xi)]. \end{aligned}$$

Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

2°. Если операторы L_1, L_2 содержат только четные производные, то существуют решения следующего вида:

$$\begin{aligned} &u = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\varphi(t), && w = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]\psi(t);\\ &u = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]\varphi(t), && w = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]\psi(t);\\ &u = (C_1 x + C_2)\varphi(t), && w = (C_1 x + C_2)\psi(t), \end{aligned}$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные (третье решение является вырожденным).

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + u f\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] + w g\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n$, t:

$$L[u] = \sum A_{k_1 \ldots k_n}(x_1, \ldots, x_n, t) \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \tag{1}$$

где $k_1 + \cdots + k_n \geqslant 1$.

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t)\exp\biggl[\int g(t,\varphi(t))\,dt\biggr]\theta(x_1,\ldots,x_n,t), \quad w = \exp\biggl[\int g(t,\varphi(t))\,dt\biggr]\theta(x_1,\ldots,x_n,t), \quad (2)$$

где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\varphi'_t = [f(t,\varphi) - g(t,\varphi)]\varphi, \qquad (3)$$

а функция $\theta = \theta(x_1,\ldots,x_n,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = L[\theta].$$

2°. Преобразование

$$u = a_1(t)U + b_1(t)W, \quad w = a_2(t)U + b_2(t)W,$$

где $a_n(t)$, $b_n(t)$ — произвольные функции ($n=1,2$), приводит к уравнению аналогичного вида для U, W.

Замечание. Коэффициенты дифференциального оператора (1) могут зависеть также от отношения искомых функций u/w (оператор в этом случае будет квазилинейным), т. е. $A_{k_1\ldots k_n} = A_{k_1\ldots k_n}(x_1,\ldots,x_n,t,u/w)$. В этом случае также существует решение вида (2), где функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (3), а функция $\theta=\theta(x_1,\ldots,x_n,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = L^\circ[\theta].$$

Здесь использовано обозначение $L^\circ = L|_{u/w=\varphi}$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde5203.pdf).

5. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr) + g\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr) + h\Bigl(\frac{u}{w}\Bigr).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным $x_1,\ldots,x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1,\ldots,x_n,t$:

$$L[u] = \sum A_{k_1\ldots k_n}(x_1,\ldots,x_n,t)\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}},$$

где $k_1+\cdots+k_n \geqslant 1$.

Пусть λ — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$g(\lambda) = \lambda h(\lambda).$$

1°. Точное решение при $f(\lambda)\neq 0$:

$$u(x,t) = \lambda\biggl(\exp[f(\lambda)t]\theta(x_1,\ldots,x_n,t) - \frac{h(\lambda)}{f(\lambda)}\biggr), \quad w(x,t) = \exp[f(\lambda)t]\theta(x_1,\ldots,x_n,t) - \frac{h(\lambda)}{f(\lambda)},$$

где функция $\theta=\theta(x_1,\ldots,x_n,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = L[\theta].$$

2°. Точное решение при $f(\lambda)=0$:

$$u(x,t) = \lambda[\theta(x_1,\ldots,x_n,t) + h(\lambda)t], \quad w(x,t) = \theta(x_1,\ldots,x_n,t) + h(\lambda)t,$$

где функция $\theta=\theta(x_1,\ldots,x_n,t)$ удовлетворяет линейному уравнению из п. 1°.

6. $\displaystyle \frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) - wg\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + \frac{u}{\sqrt{u^2+w^2}}h\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr),$

$\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + ug\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr) + \frac{w}{\sqrt{u^2+w^2}}h\Bigl(\frac{w}{u}\Bigr).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменной x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x. Считается, что $L[\mathrm{const}]=0$.

Точное решение:

$$u = r(x,t)\cos\varphi(t), \quad w = r(x,t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = g(\operatorname{tg}\varphi),$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial t} = L[r] + rf(\operatorname{tg}\varphi) + h(\operatorname{tg}\varphi). \qquad (1)$$

Замена

$$r = F(t)\Big[Z(x,t) + \int \frac{h(\operatorname{tg}\varphi)\,dt}{F(t)}\Big], \qquad F(t) = \exp\Big[\int f(\operatorname{tg}\varphi)\,dt\Big]$$

приводит (1) к более простому уравнению

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = L[Z].$$

Замечание. Линейный дифференциальный оператор L может зависеть от нескольких пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

7. $$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf\Big(\frac{w}{u}\Big) + wg\Big(\frac{w}{u}\Big) + \frac{u}{\sqrt{u^2 - w^2}}h\Big(\frac{w}{u}\Big),}$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf\Big(\frac{w}{u}\Big) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big) + \frac{w}{\sqrt{u^2 - w^2}}h\Big(\frac{w}{u}\Big).}$$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменной x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x. Считается, что $L[\text{const}] = 0$.

Точное решение:

$$u = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t), \qquad w = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = g(\operatorname{th}\varphi),$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial t} = L[r] + rf(\operatorname{th}\varphi) + h(\operatorname{th}\varphi). \qquad (1)$$

Замена

$$r = F(t)\Big[Z(x,t) + \int \frac{h(\operatorname{th}\varphi)\,dt}{F(t)}\Big], \qquad F(t) = \exp\Big[\int f(\operatorname{th}\varphi)\,dt\Big]$$

приводит (1) к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = L[Z].$$

Замечание. Имеется также решение вида

$$u = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t), \qquad w = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t).$$

8. $$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf\Big(t, \frac{u}{w}\Big) + \frac{u}{w}h\Big(t, \frac{u}{w}\Big), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wg\Big(t, \frac{u}{w}\Big) + h\Big(t, \frac{u}{w}\Big).}$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор, описанный в уравнении D3.1.4.

Точное решение:

$$u = \varphi(t)G(t)\Big[\theta(x_1, \ldots, x_n, t) + \int \frac{h(t,\varphi)}{G(t)}\,dt\Big], \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t,\varphi)\,dt\Big],$$
$$w = G(t)\Big[\theta(x_1, \ldots, x_n, t) + \int \frac{h(t,\varphi)}{G(t)}\,dt\Big],$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\varphi'_t = [f(t,\varphi) - g(t,\varphi)]\varphi,$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = L[\theta].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

9. $$\frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf\Big(t, \frac{u}{w}\Big)\ln u + ug\Big(t, \frac{u}{w}\Big),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf\Big(t, \frac{u}{w}\Big)\ln w + wh\Big(t, \frac{u}{w}\Big).$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор, описанный в уравнении D3.1.4.

Точное решение:

$$u(x,t) = \varphi(t)\psi(t)\theta(x_1,\ldots,x_n,t), \quad w(x,t) = \psi(t)\theta(x_1,\ldots,x_n,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= \varphi[g(t,\varphi) - h(t,\varphi) + f(t,\varphi)\ln\varphi], \\ \psi'_t &= \psi[h(t,\varphi) + f(t,\varphi)\ln\psi], \end{aligned} \tag{1}$$

а функция $\theta = \theta(x_1,\ldots,x_n,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = L[\theta] + f(t,\varphi)\theta\ln\theta. \tag{2}$$

Если известно решение первого уравнения (1), то решение второго уравнения можно найти путем замены $\psi = e^{\zeta}$ (оно сводится к линейному уравнению для ζ). Если L — одномерный оператор ($n=1$) с постоянными коэффициентами и $f = \mathrm{const}$, то уравнение (2) имеет решение типа бегущей волны $\theta = \theta(kx - \lambda t)$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*b*).

10. $$\frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf(au+bw) - bg\Big(\frac{w}{u}\Big), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf(au+bw) + ag\Big(\frac{w}{u}\Big).$$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменной x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x.

Точное решение:

$$u = br(x,t)\cos^2\varphi(t), \quad w = ar(x,t)\sin^2\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = \frac{1}{\sin 2\varphi}\,g\bigg(\frac{a}{b}\operatorname{tg}^2\varphi\bigg), \tag{1}$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial t} = L[r] + rf(abr). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) можно записать в неявной форме

$$\int \frac{\sin(2\varphi)\,d\varphi}{g(ab^{-1}\operatorname{tg}^2\varphi)} = t + C.$$

Отметим, что уравнение (2) допускает стационарное решение $r = r(x)$. Если L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то уравнение (2) допускает точное решение типа бегущей волны $r = r(kx - \lambda t)$, где k, λ — произвольные постоянные.

Замечание. Указанное решение легко обобщается на случай, когда линейный дифференциальный оператор L зависит от n пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

11. $$\frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf(u^2+w^2) - wg\Big(\frac{w}{u}\Big), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf(u^2+w^2) + ug\Big(\frac{w}{u}\Big).$$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменной x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x.

Точное решение:

$$u = r(x,t)\cos\varphi(t), \quad w = r(x,t)\sin\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными

$$\varphi'_t = g(\operatorname{tg}\varphi), \tag{1}$$

а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial r}{\partial t} = L[r] + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) можно записать в неявной форме
$$\int \frac{d\varphi}{g(\operatorname{tg}\varphi)} = t + C.$$

Отметим, что уравнение (2) допускает стационарное решение $r = r(x)$. Если L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то уравнение (2) допускает точное решение типа бегущей волны $r = r(kx - \lambda t)$, где k, λ — произвольные постоянные.

Замечание. Указанное решение легко обобщается на случай, когда линейный дифференциальный оператор L зависит от n пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

12. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = L[u] + uf(u^2 - w^2) + wg\Big(\dfrac{w}{u}\Big), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = L[w] + wf(u^2 - w^2) + ug\Big(\dfrac{w}{u}\Big).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменной x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x.

Точное решение:
$$u = r(x,t)\operatorname{ch}\varphi(t), \quad w = r(x,t)\operatorname{sh}\varphi(t),$$
где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными
$$\varphi'_t = g(\operatorname{th}\varphi), \tag{1}$$
а функция $r = r(x,t)$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial r}{\partial t} = L[r] + rf(r^2). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) можно записать в неявной форме
$$\int \frac{d\varphi}{g(\operatorname{th}\varphi)} = t + C.$$

Отметим, что уравнение (2) допускает стационарное решение $r = r(x)$. Если L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то уравнение (2) допускает точное решение типа бегущей волны $r = r(kx - \lambda t)$, где k, λ — произвольные постоянные.

Замечание. Указанное решение легко обобщается на случай, когда линейный дифференциальный оператор L зависит от n пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

13. $F_1\bigg(w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^m w}{\partial x^m}, \dfrac{1}{u^k}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\bigg),$

$F_2\bigg(w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^m w}{\partial x^m}, \dfrac{1}{u^k}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}\bigg).$

Точное решение:
$$w = W(z), \quad u = [\varphi'(t)]^{1/k}U(z), \quad z = x + \varphi(t),$$
где функция $\varphi(t)$ — произвольная функция, штрих обозначает производную по t, а функции $W(z)$ и $U(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$F_1\bigg(W, W'_z, \ldots, W_z^{(m)}, \frac{W'_z}{U^k}, \frac{U'_z}{U}, \ldots, \frac{U_z^{(n)}}{U}\bigg),$$
$$F_2\bigg(W, W'_z, \ldots, W_z^{(m)}, \frac{W'_z}{U^k}, \frac{U'_z}{U}, \ldots, \frac{U_z^{(n)}}{U}\bigg).$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).

14. $ax\dfrac{\partial u}{\partial x} + ay\dfrac{\partial u}{\partial y} = F_1\bigg(u, w, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\bigg),$

$ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + ay\dfrac{\partial w}{\partial y} = F_2\bigg(u, w, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\bigg).$

Решение типа бегущей волны:
$$u(x,y) = U(z), \quad w(x,y) = W(z), \quad z = k_1x + k_2y,$$
где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функции $U = U(z)$ и $W = W(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$azU'_z = F_1\big(u, w, k_1U'_z, k_2U'_z, k_1W'_z, k_2W'_z, k_1^2U''_{zz}, k_2^2U''_{zz}, k_1^2W''_{zz}, k_2^2W''_{zz}\big),$$
$$azW'_z = F_2\big(u, w, k_1U'_z, k_2U'_z, k_1W'_z, k_2W'_z, k_1^2U''_{zz}, k_2^2U''_{zz}, k_1^2W''_{zz}, k_2^2W''_{zz}\big).$$

D3.2. Системы двух уравнений, содержащие вторые производные по t

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + uf(t, au - bw) + g(t, au - bw),$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] + wf(t, au - bw) + h(t, au - bw).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор (любого порядка) по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$, коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n, t$. Считается, что $L[\text{const}] = 0$.

1°. Точное решение:

$$u = \varphi(t) + a\theta(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad w = \psi(t) + b\theta(x_1, \ldots, x_n, t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = \varphi f(t, a\varphi - b\psi) + g(t, a\varphi - b\psi),$$
$$\psi''_{tt} = \psi f(t, a\varphi - b\psi) + h(t, a\varphi - b\psi),$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = L[\theta] + f(t, a\varphi - b\psi)\theta.$$

2°. Умножим первое уравнение на a, а второе — на $-b$ и сложим. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = L[\zeta] + \zeta f(t, \zeta) + ag(t, \zeta) - bh(t, \zeta), \qquad \zeta = au - bw, \tag{1}$$

которое будем анализировать вместе с первым уравнением исходной системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + uf(t, \zeta) + g(t, \zeta). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно рассматривать отдельно. Если известно некоторое решение $\zeta = \zeta(x, t)$ уравнения (1), то функцию $u = u(x_1, \ldots, x_n, t)$ можно найти путем решения линейного уравнения (2); функция $w = w(x_1, \ldots, x_n, t)$ определяется по формуле $w = (au - \zeta)/b$.

Отметим три важных случая, когда уравнение (1) допускает точные решения:

(i) Уравнение (1) всегда допускает пространственно-однородное решение $\zeta = \zeta(t)$.

(ii) Пусть коэффициенты оператора L и функции f, g, h не зависят явно от t. Тогда уравнение (1) допускает стационарное решение $\zeta = \zeta(x_1, \ldots, x_n)$.

(iii) При выполнении условия $\zeta f(t, \zeta) + bg(t, \zeta) - ch(t, \zeta) = k_1\zeta + k_0$ уравнение (1) является линейным. Если L — оператор с постоянными коэффициентами, то для построения его решений можно использовать метод разделения переменных.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde5301.pdf).

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + b_2 f(a_1 u + b_1 w) + b_1 g(a_2 u + b_2 w),$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] - a_2 f(a_1 u + b_1 w) - a_1 g(a_2 u + b_2 w).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменной x (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от x и t. Считается, что $L[\text{const}] = 0$ и $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Умножая уравнения на подходящие константы, а затем почленно складывая, получим два независимых уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= L[U] + (a_1 b_2 - a_2 b_1) f(U), \qquad U = a_1 u + b_1 w; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= L[W] - (a_1 b_2 - a_2 b_1) g(W), \qquad W = a_2 u + b_2 w. \end{aligned} \tag{1}$$

Специальный случай 1. Если L — произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то уравнения (1) допускают решения типа бегущих волн

$$U = U(k_1 x - \lambda_1 t), \quad W = W(k_2 x - \lambda_2 t),$$

где k_m, λ_m — произвольные постоянные. Соответствующее решение исходной системы будет представлять собой суперпозицию (линейную комбинацию) двух бегущих волн.

Специальный случай 2. Если коэффициенты линейного оператора L зависят только от x, то уравнения (1) имеют простые решения вида

$$U = U(t), \quad W = W(x); \qquad U = U(x), \quad W = W(t).$$

Замечание. Аналогичным образом рассматривается случай, когда линейный дифференциальный оператор L зависит от нескольких пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_1[u] + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L_2[w] + wg\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

Здесь L_1, L_2 — произвольные линейные дифференциальные операторы (любого порядка) по переменной x с постоянными коэффициентами.

1°. Точное решение в виде произведения двух бегущих волн с разными скоростями:

$$u = e^{kx-\lambda t} y(\xi), \quad w = e^{kx-\lambda t} z(\xi), \quad \xi = \beta x - \gamma t,$$

где $k, \lambda, \beta, \gamma$ — произвольные постоянные, а функции $y = y(\xi)$ и $z = z(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\gamma^2 y''_{\xi\xi} + 2\lambda\gamma y'_\xi + \lambda^2 y = M_1[y] + yf(y/z), && \gamma^2 z''_{\xi\xi} + 2\lambda\gamma z'_\xi + \lambda^2 z = M_2[z] + zg(y/z),\\ &M_1[y] = e^{-kx} L_1[e^{kx} y(\xi)], && M_2[z] = e^{-kx} L_2[e^{kx} z(\xi)]. \end{aligned}$$

Частному случаю $k = \lambda = 0$ соответствует решение типа бегущей волны.

2°. Периодическое решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = [C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)]\varphi(x), \quad w = [C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)]\psi(x),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_1[\varphi] + k^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi) = 0,\\ L_2[\psi] + k^2\psi + \psi g(\varphi/\psi) = 0. \end{aligned}$$

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = [C_1 \operatorname{sh}(kt) + C_2 \operatorname{ch}(kt)]\varphi(x), \quad w = [C_1 \operatorname{sh}(kt) + C_2 \operatorname{ch}(kt)]\psi(x),$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_1[\varphi] - k^2\varphi + \varphi f(\varphi/\psi) = 0,\\ L_2[\psi] - k^2\psi + \psi g(\varphi/\psi) = 0. \end{aligned}$$

4°. Вырожденное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = (C_1 t + C_2)\varphi(x), \quad w = (C_1 t + C_2)\psi(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_1[\varphi] + \varphi f(\varphi/\psi) = 0, \quad L_2[\psi] + \psi g(\varphi/\psi) = 0.$$

Замечание 1. Коэффициенты операторов L_1, L_2 и функции f, g в пп. 2°–4° могут зависеть от x.

Замечание 2. Если операторы L_1, L_2 содержат только четные производные, то существуют решения следующего вида:

$$\begin{aligned} &u = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]U(t), && w = [C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)]W(t);\\ &u = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]U(t), && w = [C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)]W(t);\\ &u = (C_1 x + C_2)U(t), && w = (C_1 x + C_2)W(t), \end{aligned}$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные (третье решение является вырожденным).

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde5302.pdf).

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] + wg\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от пространственных переменных.

Точное решение:

$$u = \varphi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n), \quad w = \psi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\varphi''_{tt} = a\varphi + \varphi f(t, \varphi/\psi),$$
$$\psi''_{tt} = a\psi + \psi g(t, \varphi/\psi),$$

a — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет линейному стационарному уравнению

$$L[\theta] = a\theta.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde5303.pdf).

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + uf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + g\Big(\dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] + wf\Big(\dfrac{u}{w}\Big) + h\Big(\dfrac{u}{w}\Big).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n, t$.

Точное решение:

$$u = k\theta(x_1, \ldots, x_n, t), \quad w = \theta(x_1, \ldots, x_n, t),$$

где k — корень алгебраического (трансцендентного) уравнения $g(k) = kh(k)$, а функция $\theta = \theta(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = L[\theta] + f(k)\theta + h(k).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde5304.pdf).

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] + au\ln u + uf\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big), \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L[w] + aw\ln w + wg\Big(t, \dfrac{u}{w}\Big).$

Здесь L — произвольный линейный дифференциальный оператор по переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от пространственных переменных.

Точное решение:

$$u = \varphi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n), \quad w = \psi(t)\theta(x_1, \ldots, x_n),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\varphi''_{tt} = a\varphi\ln\varphi + b\varphi + \varphi f(t, \varphi/\psi),$$
$$\psi''_{tt} = a\psi\ln\psi + b\psi + \psi g(t, \varphi/\psi),$$

b — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$L[\theta] + a\theta\ln\theta - b\theta = 0.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde5305.pdf).

D3.3. Системы, содержащие произвольное число уравнений

1. $\dfrac{\partial}{\partial t}\Big[u + G(w_1, \ldots, w_n)\Big] + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial w_k}{\partial t} = F_k(w_1, \ldots, w_n)u, \quad k = 1, \ldots, n.$

Эта система из $n+1$ уравнения описывает глубокую фильтрацию многокомпонентной суспензии частиц в пористой среде с учетом изменения ее проницаемости (обусловленной захватом частиц пористой средой).

Из последних n уравнений имеем

$$\frac{1}{F_1(w_1, \ldots, w_n)}\frac{\partial w_1}{\partial t} = \cdots = \frac{1}{F_n(w_1, \ldots, w_n)}\frac{\partial w_n}{\partial t} = u. \qquad (1)$$

Ищем точные решения рассматриваемой системы в виде

$$w_1 = w_1(w_n), \quad \ldots, \quad w_{n-1} = w_{n-1}(w_n), \tag{2}$$

т. е. предполагаем, что функции $w_1, \ldots, w_{n-1}$ могут быть выражены через w_n. Из (1) и (2) получим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_k}{dw_n} = \frac{F_k(w_1, \ldots, w_n)}{F_n(w_1, \ldots, w_n)}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Далее, считая, что решение системы (3) получено и зависимости (2) известны, подставим их в исходную систему. В результате приходим к системе из двух уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\bigl[u + g(w_n)\bigr] + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial w_n}{\partial t} = f_n(w_n)u, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$g(w_n) = G\bigl(w_1(w_n), \ldots, w_{n-1}(w_n), w_n\bigr), \quad f_n(w_n) = F_n\bigl(w_1(w_n), \ldots, w_{n-1}(w_n), w_n\bigr).$$

Введя в (4) новую зависимую переменную

$$w = g(w_n) \equiv G\bigl(w_1(w_n), \ldots, w_{n-1}(w_n), w_n\bigr),$$

получим систему D1.2.1, в которой функция $f = f(w)$ задается параметрически

$$f = g'(w_n)f_n(w_n), \quad w = g(w_n),$$

где w_n рассматривается как параметр.

Замечание. Решения указанного вида возникают, например, в задачах с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} w_1 = \cdots = w_n = u = 0 \quad &\text{при} \quad t = 0, \\ u = 1 \quad &\text{при} \quad x = 0. \end{aligned}$$

В этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) должна быть дополнена следующими начальными условиями:

$$w_1 = \cdots = w_{n-1} = 0 \quad \text{при} \quad w_n = 0.$$

⊙ *Литература*: P. Bedrikovetsky (2006).

2. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial u_m}{\partial t} = L[u_m] + u_m f(t, u_1 - b_1u_n, \ldots, u_{n-1} - b_{n-1}u_n) +}$
$\boldsymbol{+\, g_m(t, u_1 - b_1u_n, \ldots, u_{n-1} - b_{n-1}u_n), \qquad m = 1, \ldots, n.}$

Эта система содержит $n+1$ произвольную функцию $f, g_1, \ldots, g_n$, которые зависят от n аргументов; L — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ (любого порядка по производным), коэффициенты которого могут зависеть от $x_1, \ldots, x_n, t$. Считается, что $L[\text{const}] = 0$.

Точное решение:

$$u_m = \varphi_m(t) + \exp\Bigl[\int f(t, \varphi_1 - b_1\varphi_n, \ldots, \varphi_{n-1} - b_{n-1}\varphi_n)\,dt\Bigr]\theta(x_1, \ldots, x_n, t).$$

Здесь функции $\varphi_m = \varphi_m(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_m' = \varphi_m f(t, \varphi_1 - b_1\varphi_n, \ldots, \varphi_{n-1} - b_{n-1}\varphi_n) + g_m(t, \varphi_1 - b_1\varphi_n, \ldots, \varphi_{n-1} - b_{n-1}\varphi_n),$$

где $m = 1, \ldots, n$, штрих обозначает производную по t, а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = L[\theta].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde5401.pdf).

3. $$\frac{\partial u_m}{\partial t} = L[u_m] + u_m f_m\Big(t,\, \frac{u_1}{u_n}, \ldots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\Big) + \frac{u_m}{u_n} g\Big(t,\, \frac{u_1}{u_n}, \ldots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\Big),$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = L[u_n] + u_n f_n\Big(t,\, \frac{u_1}{u_n}, \ldots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\Big) + g\Big(t,\, \frac{u_1}{u_n}, \ldots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\Big).$$

Здесь $m = 1, \ldots, n-1$; система содержит $n+1$ произвольную функцию $f_1, \ldots, f_n$, g, которые зависят от n аргументов; L — линейный дифференциальный, описанный в системе D3.3.1.

Точное решение:

$$u_m = \varphi_m(t) F_n(t)\Big[\theta(x_1, \ldots, x_n, t) + \int \frac{g(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{F_n(t)}\, dt\Big], \qquad m = 1, \ldots, n-1,$$
$$u_n = F_n(t)\Big[\theta(x_1, \ldots, x_n, t) + \int \frac{g(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{F_n(t)}\, dt\Big],$$
$$F_n(t) = \exp\Big[\int f_n(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\, dt\Big],$$

где функции $\varphi_m = \varphi_m(t)$ описываются нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_m = \varphi_m[f_m(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) - f_n(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})], \qquad m = 1, \ldots, n-1,$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = L[\theta].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/syspde/spde5402.pdf).

4. $$\frac{\partial u_m}{\partial t} = L[u_m] + \sum_{k=1}^{n} u_k f_{mk}\Big(t,\, \frac{u_1}{u_n}, \ldots, \frac{u_{n-1}}{u_n}\Big), \qquad m = 1, \ldots, n.$$

Система содержит n^2 произвольных функций $f_{mk} = f_{mk}(t, z_1, \ldots, z_{n-1})$, зависящих от отношений искомых величин и времени; L — линейный дифференциальный оператор, описанный в системе D3.3.1.

Точное решение:

$$u_m(x_1, \ldots, x_n, t) = \varphi_m(t) F(t) \theta(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad m = 1, \ldots, n,$$
$$F(t) = \exp\Big[\int \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) f_{nk}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\, dt\Big], \qquad \varphi_n(t) = 1,$$

где функции $\varphi_m = \varphi_m(t)$ описываются нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_m = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k f_{mk}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) - \varphi_m \sum_{k=1}^{n} \varphi_k f_{nk}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \quad m = 1, \ldots, n-1,$$

а функция $\theta = \theta(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = L[\theta].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, Е. А. Вязьмина (2006).