Российская академия наук
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (ИПМех РАН)

Реакционно-диффузионные, гидродинамические и другие системы с запаздыванием: точные решения, методы, задачи, нелинейная неустойчивость

А. Д. Полянин

23 января 2014 г.

Примеры нелинейных уравнений и систем с запаздыванием

- Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием [2, 4–6]:

$$u_t = ku_{xx} + F(u,w),$$

где $u = u(x,t)$, $w = u(x,t-\tau)$, τ — время запаздывания.

- Дифференциально-разностные уравнения теплопроводности (диффузии) с конечным временем релаксации [2]:

$$\mathrm{v}_t = [f(u)u_x]_x + g(\mathrm{v}), \qquad \mathrm{v} = u(x,t+\tau).$$

(Следствие модели Каттанео—Вернотте $\mathbf{q}|_{t+\tau} = -\lambda \nabla T$.)

- Уравнения типа Клейна—Гордона с запаздыванием [7]:

$$u_{tt} = ku_{xx} + F(u,w).$$

- Дифференциально-разностные уравнения гидродинамики с конечным временем релаксации [1, 3]:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\tfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\Delta\mathbf{u}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t+\tau)$.

Области приложений нелинейных уравнений и систем с запаздыванием

- **Области приложений:** химическая механика, теория массо- и теплопереноса, гидродинамика, теория фильтрации, теплофизика, биология, биохимия, биофизика, биомеханика, химия, физическая химия, медицина, экология, экономика, теория искусственных нейронных сетей, теория управления и др.
- **Физический смысл запаздывания:** в моделях массо- и теплопереноса, гидродинамики и биологии запаздывание обычно связано с конечной скоростью распространения возмущений или инерционными свойствами системы, которая реагирует на воздействие не мгновенно, а на время τ позже.

Замечание. Может быть несколько различных времен запаздывания $\tau_1,\ldots,\tau_n$. Запаздывание может зависеть от времени $\tau = \tau(t)$.

Точные решения (терминология)

- Термин *точные решения* нелинейных дифференциальных уравнений (систем уравнений) в частных производных с запаздыванием применяется, когда решение выражается:
  - через элементарные функции и неопределенные и определенные интегралы;
  - через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием (или систем таких уравнений).
- Допустимы также комбинации указанных решений.
- Данное определение обобщает определение точных решений, которое часто используется для нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания.

Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием

$$u_t = ku_{xx} + F(u, w), \qquad (1)$$

где $u = u(x,t)$, $w = u(x,t-\tau)$, τ — время запаздывания.

Точные решения (что было известно до середины 2012 г.)

- Уравнения вида (1) допускают очевидные *решения типа бегущей волны* $u = u(z)$, где $z = \alpha x + \beta t$. Эти решения изучались в ряде работ (численный анализ + теоремы существования и единственности).

  Исследовалась устойчивость (обычно в линейном приближении) стационарных решений и решений типа бегущей волны.

- Полный групповой анализ сделан Meleshko & Moyo (2008). Были найдены 4 уравнения вида (1), допускающие точные решения; 2 из этих уравнений имеют *вырожденные решения*. Второе из двух невырожденных решений является частным случаем первого.

Метод функциональных связей

Решения с обобщенным разделением переменных

- Ищем точные решения вида

$$u = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n(x)\,\Psi_n(t), \qquad (2)$$

где функции $\Phi_n(x)$ и $\Psi_n(t)$ подлежат определению.

Класс реакционно-диффузионных уравнений

- Рассматриваем нелинейные уравнения с запаздыванием [6]:

$$\begin{gathered} u_t = k u_{xx} + u f(z) + w g(z) + h(z), \\ w = u(x, t - \tau), \quad z = z(u, w), \end{gathered} \qquad (3)$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции, а $z = z(u, w)$ — функция, удовлетворяющая некоторым условиям (см. далее).

Функциональные связи первого и второго рода

Ищутся решения с обобщенным разделением переменных вида (2), удовлетворяющие одной из двух *функциональных связей* [6]:

$$z(u,w) = p(x), \qquad w = u(x, t-\tau); \qquad (4)$$

$$z(u,w) = q(t), \qquad w = u(x, t-\tau), \qquad (5)$$

которые представляют собой разностные уравнения по t, где x играет роль свободного параметра. Функция $z = z(u,w)$ является аргументом произвольных функций, входящих в уравнение (3). Функции $p(x)$ и $q(t)$ зависят от x и t неявно (выражаются через функции $\Phi_n(x)$ и $\Psi_n(t)$).

Решение (*частное*) разностного уравнения (4) (или (5)) с учетом (2) определяет *допустимый вид точного решения*, окончательный вид которого находится из исходного реакционно-диффузионного уравнения (3).

Примеры построения точных решений

Пример 1. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = ku_{xx} + bu + f(u - w), \qquad (6)$$

которое является частным случаем уравнения (3) при $z = u - w$.

Функциональная связь 2-го рода (5) имеет вид

$$u - w = q(t), \qquad w = u(x, t - \tau). \qquad (7)$$

Разностному уравнению (7) можно удовлетворить, если положить

$$u = \varphi(x) + \psi(t), \qquad (8)$$

что дает $q(t) = \psi(t) - \psi(t - \tau)$. Подставив (8) в (6) и разделив переменные, получим уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(t)$:

$$k\varphi'' + b\varphi = C, \qquad \psi'(t) = b\psi(t) + C + f(\psi(t) - \psi(t - \tau)).$$

Замечание. Запаздывание может быть функцией времени: $\tau = \tau(t)$.

Примеры построения точных решений

Пример 2. Рассмотрим опять уравнение

$$u_t = ku_{xx} + bu + f(u - w). \qquad (9)$$

Функциональная связь 1-го рода (4) имеет вид

$$u - w = p(x), \qquad w = u(x, t - \tau). \qquad (10)$$

Разностному уравнению (10) можно, например, удовлетворить, взяв решение с обобщенным разделением переменных

$$u = t\varphi(x) + \psi(x), \qquad (11)$$

которое дает $p(x) = \tau\varphi(x)$. Подставив (11) в (9), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$k\varphi''_{xx} + b\varphi = 0,$$

$$k\psi''_{xx} + b\psi + f(\tau\varphi) - \varphi = 0.$$

Другие реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием

Обозначения: $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — произвольные функции.

- Уравнение:

$$u_t = ku_{xx} + u\,f(w/u).$$

Получено 5 различных точных решений [2, 5, 6], в том числе 2 решения, содержащие *любое число произвольных постоянных*.

- Уравнение:

$$u_t = ku_{xx} + uf(u - aw) + wg(u - aw) + h(u - aw).$$

Получены точные решения (имеют разную структуру при $a > 0$, $a < 0$ и $a = 1$), содержащие *любое число произвольных постоянных* [6].

- Два уравнения:

$$u_t = ku_{xx} + uf(u^2 \pm w^2) + wg(u^2 \pm w^2).$$

Для знака "+" получен счетный набор решений [6], а для знака "–" получены 2 решения, содержащие *любое число произв. постоянных*.

Нелинейная неустойчивость

Класс реакционно-диффузионных систем уравнений

Рассмотрим класс нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием

$$u_t = k_1 u_{xx} + bu + F(u - a\overline{u}, w, \overline{w}), \qquad (12)$$

$$w_t = k_2 w_{xx} + G(u - a\overline{u}, w, \overline{w}), \qquad (13)$$

где $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$, $\overline{u} = u(x, t-\tau)$, $\overline{w} = w(x, t-\tau)$; $F(...)$, $G(...)$ — произвольные функции трех аргументов; τ — время запаздывания ($\tau > 0$, F — *невырождена по первому аргументу*).

Замечание. Здесь используются новые обозначения.

Формула для "размножения" точных решений

Пусть

$$u_0 = u_0(x,t), \qquad w_0 = w_0(x,t) \qquad (14)$$

— произвольное решение рассматриваемой системы. Прямой проверкой можно убедиться, что система (12)–(13) при *a* > 0 имеет также решение

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}\mathrm{v}(x,t), \;\; w = w_0(x,t), \;\; c = \tfrac{1}{\tau}\ln a, \quad (15)$$

где v = v(*x*, *t*) — любое τ-периодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником

$$\mathrm{v}_t = k_1\mathrm{v}_{xx} + (b-c)\mathrm{v}, \qquad \mathrm{v}(x,t) = \mathrm{v}(x,t-\tau). \quad (16)$$

Глобальные условия неустойчивости

Стационарное пространств.-периодическое решение задачи (16):

$$\mathrm{v} = \varepsilon \sin(\sigma x + \mu), \quad \sigma = \sqrt{(b-c)/k_1}, \quad b \geq c, \quad (17)$$

где ε, μ — произвольные постоянные.

Из анализа формул (15) и (17) следует, что *любое решение* системы (12)–(13) будет неустойчивым при выполнении условий

$$a > 1, \quad b > 0, \quad \tau \geq \tau_0, \qquad \tau_0 = (\ln a)/b. \qquad (18)$$

Физический смысл условий (18): в области параметров $a > 1$, $b > 0$ неустойчивость возникает за счет запаздывания, которое должно быть достаточно большим $\tau \geq \tau_0$. Вид кинетических функций F и G не влияет на условия неустойчивости (18) реакционно-диффузионной системы (12)–(13) (т.е. имеет место *глобальная неустойчивость*).

Полученный результат является точным и не использует линеаризации и других приближений.

Точное решение системы (12)–(13)

Точное решение системы (12)–(13), являющееся следствием формулы (15) и уравнения (16):

$$u = u_0(z) + e^{ct}[A\sin(\sigma x) + B\cos(\sigma x)], \qquad w = w_0(z),$$

$$z = \alpha x + \beta t, \qquad c = (\ln a)/\tau, \qquad \sigma = \sqrt{(b-c)/k_1},$$

где A, B, α, β — произвольные постоянные, а функции $u_0(z)$ и $w_0(z)$ описываются соответствующей нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Замечание. При $a = 1$, что соответствует $c = 0$, данное решение можно трактовать как *нелинейную суперпозицию бегущей и стоячей волн*.

Неустойчивость решений начально-краевых задач

Задачи с начальными данными ($-\infty < x < \infty$):

$$u = u_{\mathrm{i}}(x,t), \;\; w = w_{\mathrm{i}}(x,t) \;\; \text{при} \;\; 0 \le t \le \tau. \qquad (19)$$

При выполнении условий (18) решение системы (12)–(13) с начальными данными (19) является *неустойчивым*.

Начально-краевые задачи ($0 \le x \le h$). Система (12)–(13) с начальными данными (19) и граничными условиями первого рода:

$$\begin{aligned} &u(0,t) = \varphi_1(t), \quad w(0,t) = \psi_1(t); \\ &u(h,t) = \varphi_2(t), \quad w(h,t) = \psi_2(t), \end{aligned} \qquad (20)$$

где $h = \pi/\sigma$. При выполнении условий (18) решение задачи (12)–(13), (19), (20) является *неустойчивым*.

Периодические решения

Линейное уравнение теплопроводности с источником вида (16):

$$\mathrm{v}_t = k_1 \mathrm{v}_{xx} + b\mathrm{v}$$

Это уравнение имеет τ-периодические решения

$$\mathrm{v}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} A_n \exp(-\lambda_n x)\cos(\beta_n t - \gamma_n x + B_n) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{M} C_n \exp(\lambda_n x)\cos(\beta_n t + \gamma_n x + D_n), \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\tau},$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} - b}{2k_1} \right)^{1/2}, \quad \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} + b}{2k_1} \right)^{1/2},$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные; $N = 0, 1, 2, \ldots;$ $M = 1, 2, 3, \ldots;$ $\mathrm{v}(x,t) = \mathrm{v}(x, t-\tau)$.

Вторая задача Стокса
(без начальных условий)

Рассмотрим одномерное нестационарное движение жидкости в области $y > 0$, возникающее за счет продольных колебаний плоскости $y = 0$. Используем модель жидкости с конечным временем релаксации τ [3].

Уравнение для продольной компоненты скорости $u = u(y, t)$ имеет вид

$$\mathrm{v}_t = \nu u_{yy}, \qquad \mathrm{v} = u(y, t+\tau). \tag{21}$$

Периодические граничные условия:

$$u = U_0 \cos(\omega t) \ \text{ при } \ y = 0, \qquad u \to 0 \ \text{ при } \ y \to \infty. \tag{22}$$

1. Решение задачи (21)–(22) при $\cos(\omega\tau) > 0$:

$$u = U_0 e^{-\lambda y} \cos(\omega t - \beta y),$$

где

$$\beta = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} [1 + \sin(\omega\tau)]^{1/2}, \qquad \lambda = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} \frac{\cos(\omega\tau)}{[1 + \sin(\omega\tau)]^{1/2}}.$$

2. Решение задачи (21)–(22) при $\cos(\omega\tau) < 0$:

$$u = U_0 e^{\lambda y} \cos(\omega t + \beta y).$$

Основные публикации по теме доклада

1. A.D. Polyanin, A.I. Zhurov. Integration of linear and some model non-linear equations of motion of incompressible fluids. *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 49, pp. 77–83, 2013.
2. A.D. Polyanin, A.I. Zhurov. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 54, pp. 115–126, 2013.
3. A.D. Polyanin, A.I. Zhurov. Exact solutions of nonlinear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 57, pp. 116–122, 2013.
4. A.D. Polyanin, A.I. Zhurov. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations*. International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 59, pp. 16–22, 2014.

Основные публикации по теме доклада

5. A.D. Polyanin, A.I. Zhurov. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 19, No. 3, pp. 409–416, 2014.
6. A.D. Polyanin, A.I. Zhurov. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 19, No. 3, pp. 417–430, 2014.
7. A.D. Polyanin, A.I. Zhurov. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.12.021.