ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 342, № 2, с. 151 - 153

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

СИММЕТРИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

 А. В. Аксенов

Представлено академиком А.А. Самарским 04.02.94 г.

Поступило 09.02.94 г.

Фундаментальные решения линейных уравнений математической физики зачастую являются инвариантными относительно преобразований, допускаемых исходным уравнением [1]. В настоящей работе сформулирован алгоритм нахождения фундаментальных решений линейных уравнений с частными производными на основе использования допускаемой группы точечных преобразований.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с частными производными p-го порядка

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{p} A_\alpha(x) D^\alpha u = 0, \quad x \in R^m. \tag{1}$$

Здесь приняты стандартные обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ – мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$,

$$D^\alpha \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{\alpha_m}.$$

Фундаментальные решения уравнения (1) являются решениями уравнения

$$Lu = \delta(x - x_0). \tag{2}$$

В работе [2] было показано, что уравнение (1) при $p \geq 2$ и $m \geq 2$ может допускать операторы симметрии только следующего вида:

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0.$$

Основная алгебра Ли операторов симметрии уравнения (1) как векторное пространство есть прямая сумма двух подалгебр: подалгебры, состоящей из операторов вида

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta(x) u \frac{\partial}{\partial u}, \tag{3}$$

и бесконечномерной подалгебры, порожденной операторами

$$X = \varphi(x) \frac{\partial}{\partial u}, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ – произвольное решение уравнения (1). Отметим, что операторы (4), очевидно, являются операторами симметрии уравнения (2). В дальнейшем рассматриваются лишь операторы вида (3).

Обозначим: $\underset{p}{X}$ – продолжение порядка p оператора (3).

Предложение 1. *Для того чтобы инфинитезимальный оператор вида* (3) *был оператором симметрии уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $\lambda = \lambda(x)$, *удовлетворяющая тождеству*

$$\underset{p}{X}(Lu) \equiv \lambda(x) Lu \tag{5}$$

для любой функции $u = u(x)$ *из области определения уравнения* (1).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Алгебра Ли операторов симметрии уравнения* (2) *является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии уравнения* (1), *выделяемой соотношениями*

$$\xi^i(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

$$\lambda(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x^i} = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Оператор симметрии уравнения (2) в силу непрерывности его координат в точке x_0 является оператором симметрии уравнения (1). Условие (6) следует из определения симметрии. Оно означает, что точка x_0 является неподвижной точкой допускаемой группы преобразований уравнения (2). Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований уравнения (2), соответствующую оператору симметрии (3):

$$\bar{x}^i = f^i(x, a), \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \bar{u} = g(x, a) u, \tag{8}$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

где $f^i(x, 0) = x^i$, $g(x, 0) = 1$, a – параметр группы. Формула для преобразования δ-функции имеет вид [3]

$$\delta(\bar{x} - \bar{x}_0) = J^{-1}(x_0, a)\delta(x - x_0),$$

где $J(x, a) = \det(\partial\bar{x}^i/\partial x^j)$. В силу уравнений Ли для независимых переменных

$$\frac{d\bar{x}^i}{da} = \xi^i(\bar{x}),$$

$$\bar{x}^i(0) = x^i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

якобиан $J(x, a)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \ln J(x, a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i}. \tag{9}$$

Из (9), используя условие (6), находим

$$J(x_0, a) = \exp\left(a\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x^i}\right).$$

Таким образом, формула для преобразования δ-функции принимает вид

$$\delta(\bar{x} - x_0) = \exp\left(-a\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x^i}\right)\delta(x - x_0). \tag{10}$$

Из формулы для ряда Ли

$$\bar{L}\bar{u} = \exp(a\underset{p}{X})Lu$$

получаем, что левая часть уравнения (2) преобразуется следующим образом:

$$\bar{L}\bar{u} = F(x, a)Lu;$$

при этом в силу условия (6) в точке x_0 справедливо соотношение

$$F(x_0, a) = \exp(a\lambda(x_0)). \tag{11}$$

Из (10), (11) получаем условие (7). Можно показать, что условия (6), (7) справедливы и для коммутатора двух операторов симметрии уравнения (2). Следовательно, операторы симметрии уравнения (2) образуют подалгебру алгебры Ли операторов симметрии уравнения (1). Теорема доказана.

Сформулируем алгоритм нахождения фундаментальных решений на основе использования симметрий:

1. Нахождение общего вида оператора симметрии уравнения (1) и соответствующей ему функции $\lambda(x)$, удовлетворяющей тождеству (5).

2. Получение по найденному оператору симметрии уравнения (1) общего вида оператора симметрии уравнения (2) на основе ограничений (6), (7).

3. Построение инвариантных фундаментальных решений с помощью симметрий уравнения (2).

4. Получение новых фундаментальных решений из известных с помощью симметрий уравнения (2) (производство решений).

Отметим, что при нахождении обобщенных инвариантных фундаментальных решений необходимо искать инварианты в классе обобщенных функций [4, 5].

Рассмотрим в качестве примера многомерное обобщенное осесимметрическое уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} + \frac{\nu}{x^0}\frac{\partial u}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^k)^2} = 0, \quad \nu \in R^1. \tag{12}$$

Предложение 2. *Общий вид координат оператора симметрии уравнения* (12) *при* $\nu(2 - \nu) \neq 0$ *следующий*:

$$\xi^0 = 2x^0\left(\sum_{k=1}^{n} a^k x^k + b\right),$$

$$\xi^p = -a^p\sum_{k=0}^{n} (x^k)^2 + 2x^p\left(\sum_{k=1}^{n} a^k x^k + b\right) + \sum_{k=1}^{n} d^{pk}x^k + e^p,$$

$$\eta = \left[-(\nu + n - 1)\sum_{k=1}^{n} a^k x^k + c\right]u,$$

где $d^{pk} = -d^{kp}$; a^p, b, c, d^{pk}, e^p – *постоянные*; $p = 1, \ldots, n$.

Функция $\lambda(x)$, соответствующая выписанному оператору симметрии, имеет вид

$$\lambda(x) = -4b + c - (\nu + n + 3)\sum_{k=1}^{n} a^k x^k.$$

Предложение 3. *Уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} + \frac{\nu}{x^0}\frac{\partial u}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^k)^2} = \delta(x^0 - 1)\delta(r), \tag{13}$$

описывающее фундаментальные решения уравнения (12), *допускает при* $\nu(2 - \nu) \neq 0$ *оператор симметрии с координатами*

$$\xi^0 = 2x^0\sum_{k=1}^{n} a^k x^k,$$

$$\xi^p = -a^p\sum_{k=0}^{n} (x^k)^2 + 2x^p\sum_{k=1}^{n} a^k x^k + \sum_{k=1}^{n} d^{pk}x^k + a^p, \tag{14}$$

$$\eta = -(\nu + n - 1)u\sum_{k=1}^{n} a^k x^k.$$

Здесь $r = (x^1, \ldots, x^n)$, $d^{pk} = -d^{kp}$; $p = 1, \ldots, n$.

Оператор симметрии, задаваемый (14), имеет лишь два инварианта:

$$z = \frac{\sum_{k=0}^{n} (x^k)^2 + 1}{2x^0}, \quad w = (x^0)^{\frac{\nu + n - 1}{2}} u. \tag{15}$$

Используя (15), получаем

Предложение 4. *Решение уравнения* (13), *инвариантное относительно оператора симметрии с координатами* (14), *имеет вид*

$$u = (x^0)^{\sigma - \mu} (z^2 - 1)^{-\mu/2} \left[c \cdot P_\sigma^{-\mu}(z) - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-i\mu\pi}}{(2\pi)^{\mu + 1}} Q_\sigma^\mu(z) \right], \tag{16}$$

где $\mu = (n - 1)/2$, $\sigma = -\nu/2$; $P_\sigma^{-\mu}(z)$, $Q_\sigma^\mu(z)$ – *функции Лежандра первого и второго рода* [6]; c – *произвольная постоянная.*

Можно показать, что фундаментальные решения уравнения (12), полученные в работах [7, 8], являются частными случаями (16).

В заключение отметим, что построение фундаментальных решений с помощью симметрий может использоваться и в случае уравнений с переменными коэффициентами, когда традиционный метод интегральных преобразований неприменим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94–01–00490).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. *Bluman G.* // J. Math. Anal. and Applications. 1990. V. 145. № 1. P. 52 - 62.
3. *Choquet-Bruhat Y., De Witt-Morette C.* Analysis, Manifolds and Physics. Part 1: Basics. Amsterdam: North-Holland, 1982. 630 p.
4. *Берест Ю.Ю.* // ДАН. 1991. Т. 317. № 4. С. 786 - 789.
5. *Ибрагимов Н.Х.* // УМН. 1992. Т. 47. В. 4. С. 85 - 144.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 1. 296 с.
7. *Олевский М.Н.* // ДАН. 1949. Т. 64. № 6. С. 767 - 770.
8. *Diaz J.B., Weinstein A.* In: Studies in Mathematics and Mechanics. N.Y.: Acad. Press Inc., 1954. P. 97 - 102.