ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 381, № 2, с. 176–179

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.956

СИММЕТРИИ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ КЛАССА УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

© 2001 г. А. В. Аксенов

Представлено академиком А.А. Самарским 26.06.2001 г.

Поступило 28.06.2001 г.

Получены все линейные дифференциальные соотношения первого порядка между решениями класса уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу. При этом рассмотрены как эллиптическое, так и гиперболическое уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Найденные соотношения не сводятся к классическим преобразованиям Лапласа [1]. Дана теоретико-групповая интерпретация полученных соотношений. Построены операторные тождества между операторами Эйлера–Пуассона–Дарбу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$L_\alpha u = 0,\quad L_\alpha \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad \alpha \in R. \tag{1}$$

Уравнение (1) представляет собой эллиптический аналог уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (гиперболическое уравнение будет рассмотрено ниже). Оно задает класс уравнений, определяемый параметром α. Уравнение (1) возникает во многих задачах механики и физики (см., например, [2–4]).

Дадим полное описание всех линейных дифференциальных соотношений первого порядка вида

$$u^{(\beta)} = A(r,z)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + B(r,z)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + C(r,z)u^{(\alpha)} \tag{2}$$

между решениями $u = u^{(\alpha)}$, $u = u^{(\beta)}$ класса уравнений (1).

В работе будут рассмотрены два способа построения таких соотношений. Первый способ основан на решении переопределенной системы уравнений для определения неизвестных функций A, B, C. Второй способ связан с использованием групп Ли непрерывных преобразований трехмерного уравнения Лапласа.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

НАХОЖДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Подставляя соотношение (2) в уравнение (1), получаем

$$L_\beta\left(A\frac{\partial u}{dr} + B\frac{\partial u}{\partial z} + Cu\right)\bigg|_{L_\alpha u = 0} = 0,$$

откуда следует система уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{(\beta-\alpha)}{2r}A = 0,\\
\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{(\beta-\alpha)}{2r}B = 0,\\
\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{(\beta-2\alpha)}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\alpha(\alpha-\beta+1)}{r^2}A + \\
+ 2\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{(\beta-\alpha)}{r}C = 0,\\
\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2\frac{\partial C}{\partial z} = 0,\\
\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Система уравнений (3) является переопределенной.

Предложение 1. *При* $(\beta^2-\alpha^2)(\beta+\alpha-2)(\beta+\alpha-4)[(\beta-\alpha)^2-4] \neq 0$ *система уравнений* (3) *имеет единственное решение* $A = B = C = 0$.

Из предложения 1 следует существование конечного числа серий значений параметра β (зависящих от α), при которых существуют линейные дифференциальные соотношения первого порядка между решениями $u = u^{(\alpha)}$, $u = u^{(\beta)}$ класса уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Класс уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу* (1) *при произвольных значениях параметра* α *допускает из всех соотношений меж-*

ду решениями $u = u^{(\alpha)}$, $u = u^{(\beta)}$ вида (2) только следующие независимые базисные соотношения:

$$\tilde{u}^{(\alpha)} = \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z}, \quad \tilde{u}^{(\alpha)} = r\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + z\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z},$$

$$\tilde{u}^{(\alpha)} = 2rz\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (z^2 - r^2)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha z u^{(\alpha)},$$

$$u^{(2-\alpha)} = r^{\alpha-1}u^{(\alpha)}, \quad u^{(\alpha-2)} = r\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + (\alpha - 1)u^{(\alpha)},$$

$$u^{(\alpha-2)} = rz\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - r^2\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + (\alpha - 1)zu^{(\alpha)},$$

$$u^{(\alpha-2)} = r(r^2 - z^2)\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2r^2 z\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \tag{4}$$

$$+ [r^2 - (\alpha - 1)z^2]u^{(\alpha)},$$

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{1}{r}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r}, \quad u^{(\alpha+2)} = \frac{z}{r}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} - \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z},$$

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{(r^2 - z^2)}{r}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial r} + 2z\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial z} + \alpha u^{(\alpha)}.$$

При $\beta = \alpha = 0$ происходит расширение первых трех базисных соотношений до базисных соотношений

$$\tilde{u}^{(0)} = \Psi(r, z)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} + \Phi(r, z)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial z}, \tag{5}$$

где $A = \Psi(r, z)$, $B = \Phi(r, z)$ – произвольные решения системы уравнений Коши–Римана

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial r}.$$

Отметим, что четвертое соотношение из (4) получено в работе [5], а восьмое – в работе [6].

ПОСТРОЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГРУПП НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Уравнение (1) связано с трехмерным уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

В цилиндрической системе координат r, φ, z:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

оно принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет решения вида

$$V(r, \varphi, z) = Ce^{\pm i\lambda\varphi}r^{\lambda}u(r, z), \tag{7}$$

где C – произвольная постоянная, $i^2 = -1$, $\lambda = \frac{\alpha - 1}{2}$ и функция $u = u(r, z)$ удовлетворяет уравнению (1). Выражение (7) задает редукцию уравнения (6) к классу уравнений (1).

Справедливо следующее утверждение

Предложение 2. *Пусть линейное однородное уравнение $Lv = 0$ допускает оператор симметрии*

$$X = \sum_{i=1}^{n}\xi^i(x, v)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, v)\frac{\partial}{\partial v}, \quad x \in R^n.$$

Тогда если $v = \varphi(x)$ является решением, то и

$$\tilde{v} = X[v - \varphi(x)]|_{v = \varphi(x)}$$

также является решением этого линейного однородного уравнения.

Применим утверждение 2 для получения новых решений уравнения (6) с помощью операторов симметрии трехмерного уравнения Лапласа [7], действуя ими на решения вида (7). Если при этом вид решений (7) не будет меняться, то тогда можно получить новые решения уравнения (1). Они и определяют искомые соотношения между решениями рассматриваемого класса уравнений (1).

Можно показать, что таким же способом получаются соотношения (4), (5). При этом необходимо использовать симметрии уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу [9].

ТОЖДЕСТВА МЕЖДУ ОПЕРАТОРАМИ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

Используя соотношения (2), можно получить линейные дифференциальные соотношения между операторами L_α, L_β.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть между решениями $u^{(\alpha)}$, $u^{(\beta)}$ уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (1) выполнены соотношения (2). Тогда справедливо следующее тождество между операторами Эйлера–Пуассона–Дарбу L_α, L_β:*

$$L_\beta\left(A\frac{\partial u}{\partial r} + B\frac{\partial u}{\partial z} + Cu\right) \equiv A\frac{\partial}{\partial r}L_\alpha u + B\frac{\partial}{\partial z}L_\alpha u +$$

$$+ \left(C + 2\frac{\partial B}{\partial z}\right)L_\alpha u;$$

здесь $u = u(r, z)$ – произвольная трижды дифференцируемая функция.

Из предложения 3 и соотношений (4) следует

Теорема 2. *Линейным дифференциальным соотношениям* (4) *соответствуют следующие тождества между операторами Эйлера–Пуассона–Дарбу*:

$$L_\alpha \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial z} L_\alpha u,$$

$$L_\alpha\left(r\frac{\partial u}{\partial r} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right) \equiv r\frac{\partial}{\partial r}L_\alpha u + z\frac{\partial}{\partial z}L_\alpha u + 2L_\alpha u,$$

$$L_\alpha\left[2rz\frac{\partial u}{\partial r} + (z^2 - r^2)\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha z u\right] \equiv$$

$$\equiv 2rz\frac{\partial}{\partial r}L_\alpha u + (z^2 - r^2)\frac{\partial}{\partial z}L_\alpha u + (\alpha + 4)zL_\alpha u,$$

$$L_{2-\alpha}(r^{\alpha-1}u) \equiv r^{\alpha-1}L_\alpha u,$$

$$L_{\alpha-2}\left[r\frac{\partial u}{\partial r} + (\alpha - 1)u\right] \equiv r\frac{\partial}{\partial r}L_\alpha u + (\alpha - 1)L_\alpha u,$$

$$L_{\alpha-2}\left[rz\frac{\partial u}{\partial r} - r^2\frac{\partial u}{\partial z} + (\alpha - 1)zu\right] \equiv$$

$$\equiv rz\frac{\partial}{\partial r}L_\alpha u - r^2\frac{\partial}{\partial z}L_\alpha u + (\alpha - 1)zL_\alpha u,$$

$$L_{\alpha-2}\left\{r(r^2 - z^2)\frac{\partial u}{\partial r} + 2r^2z\frac{\partial u}{\partial z} + [r^2 - (\alpha - 1)z^2]u\right\} \equiv$$

$$\equiv r(r^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial r}L_\alpha u +$$

$$+ 2r^2z\frac{\partial}{\partial z}L_\alpha u + [5r^2 - (\alpha - 1)z^2]L_\alpha u,$$

$$L_{\alpha+2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}L_\alpha u,$$

$$L_{\alpha+2}\left(\frac{z}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \equiv \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}L_\alpha u - \frac{\partial}{\partial z}L_\alpha u,$$

$$L_{\alpha+2}\left[\frac{(r^2 - z^2)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha u\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{(r^2 - z^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r}L_\alpha u + 2z\frac{\partial}{\partial z}L_\alpha u + (\alpha + 4)L_\alpha u.$$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

Рассмотрим гиперболическое уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\alpha}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \alpha \in R. \tag{8}$$

Уравнение (8) можно получить комплексной заменой $z \to iz$ из эллиптического аналога уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (1). Оно задает класс уравнений, определяемый параметром α. Уравнение (8) возникает во многих задачах механики (см., например, [8]). Используя эту замену, можно получить аналог теоремы 1 для гиперболического уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (8).

В характеристических переменных $\xi = r - z$, $\eta = r + z$ уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\alpha}{2(\xi + \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0. \tag{9}$$

Теорема 3. *Класс уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу* (9) *при произвольных значениях параметра* α *допускает из всех соотношений между решениями* $u = u^{(\alpha)}$, $u = u^{(\beta)}$ *вида* (2) *только следующие независимые базисные соотношения*:

$$\tilde{u}^{(\alpha)} = -\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi} + \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\eta},$$

$$\tilde{u}^{(\alpha)} = \xi\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\eta},$$

$$\tilde{u}^{(\alpha)} = -\xi^2\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi} + \eta^2\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\eta} + \frac{1}{2}\alpha(\eta - \xi)u^{(\alpha)},$$

$$u^{(2-\alpha)} = \left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)^{\alpha-1}u^{(\alpha)},$$

$$u^{(\alpha-2)} = \frac{1}{2}(\xi + \eta)\left(\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi} + \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\eta}\right) + (\alpha - 1)u^{(\alpha)},$$

$$u^{(\alpha-2)} = \frac{1}{2}(\xi + \eta)\left(-\xi\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\eta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\eta - \xi)u^{(\alpha)},$$

$$u^{(\alpha-2)} = \frac{1}{2}(\xi + \eta)\left(\xi^2\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi} + \eta^2\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\eta}\right) +$$

$$+ \left[\frac{1}{4}\alpha(\eta - \xi)^2 + \xi\eta\right]u^{(\alpha)},$$

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{2}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi} + \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\eta}\right),$$

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{2}{\xi + \eta}\left(-\xi\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\eta}\right),$$

$$u^{(\alpha+2)} = \frac{2}{\xi + \eta}\left(\xi^2\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi} + \eta^2\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\eta}\right) + \alpha u^{(\alpha)}.$$

При $\beta = \alpha = 0$ ***происходит расширение первых трех базисных соотношений до базисных соотношений***

$$\tilde{u}^{(0)} = \Psi(\xi)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} + \Phi(\eta)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \eta},$$

где Ψ, Φ ***– произвольные функции своих аргументов.***

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00188).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.; Л.: ГТТИ, 1933. Т. 3. Ч. 1. 276 с.
2. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.
3. *Джаиани Г.В.* Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам. Тбилиси: Изд-во ТбГУ, 1982. 163 с.
4. *Жданов В.К., Трубников Б.А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. 176 с.
5. *Weinstein A.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. V. 63. № 2. P. 342–354.
6. *Weinstein A.* // Communs Pure and Appl. Math. 1954. V. 7. № 1. P. 105–116.
7. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
8. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961. 588 с.
9. *Аксенов А.В.* // Изв. АН. МТТ. 1997. № 2. С. 14–20.