К задаче о реконструкции нелинейностей в уравнениях математической физики*

А.С. Демидов, А.С. Кочуров и А.Ю. Попов

Одна из целей этой работы состоит в том, чтобы на сравнительно простом, но важном примере конкретизировать (и, тем самым, сделать более прозрачной) общую конструкцию [5] поиска **всех** существенно различных нелинейностей в уравнениях математической физики. Этот поиск осуществляется при наличии дополнительных граничных данных. В качестве важного модельного примера здесь рассматривается задача о реконструкции всех существенно различных нелинейностей f в эллиптическом уравнении

$$\Delta u(x,y) \stackrel{def}{=} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f\big(u(x,y)\big) \geq 0\,, \qquad (x,y) \in \omega \Subset \mathbb{R}^2 \tag{0.1}$$

при наличии данных Коши на границе $\gamma = \partial\omega$ области ω. Это — центральная проблема в так называемой [6] обратной задаче о равновесии плазмы в токамаке[1]. Равновесие описывается уравнением Грэда–Шафранова, которое при некотором допущении сводится к уравнению (0.1) относительно потенциала u магнитного поля (точнее, относительно некоторой компоненты векторного потенциала магнитного поля). При этом по данным магнитного мониторинга формируется множество $\mathbf{\Psi}$ вычисляемых (и/или оцениваемых [3, 23]) приближений для нормальных производных $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\gamma$ функции u на границе области ω. Требуется для *фиксированной* функции $\Psi \in \mathbf{\Psi}$ реконструировать <u>ВСЕ</u> “существенно различные” (если таковые имеются) функции $f : u \mapsto f(u)$ в правой части уравнения (0.1), для которых найдутся решения $u = u_f$ уравнения (0.1), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u\Big|_\gamma = 0 \qquad \text{и} \qquad \max_{s\in\gamma} \big|\varrho(s)\big(\Phi(s) - \Psi(s)\big)\big| \leq \eta \ll 1\,, \quad \text{где} \quad \Phi \stackrel{def}{=} \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\gamma\,, \quad \int_\gamma \Phi \neq 0. \tag{0.2}$$

Здесь ν — внешняя единичная нормаль[2] к γ, $\varrho : \gamma \to [0,1]$ — “весовая” функция, равная нулю вблизи точек, в которых кривизна кривой γ превышает некоторое значение, и равная единице в остальных точках. При этом функции f_1 и f_2 считаются “существенно различными”, если найдется пара соответствующих им функций u_{f_1} и u_{f_2}, для которых справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{\|\cdot\|}(u_{f_1}, u_{f_2}) \stackrel{def}{=} \frac{2\,\|f_1(u_{f_1}) - f_2(u_{f_2})\|}{\|f_1(u_{f_1})\| + \|f_2(u_{f_2})\|} \geq \alpha\,, \tag{0.4}$$

где та или иная норма $\|\cdot\|$ (например, $\|\cdot\|_{L^p(\omega)}$), а также параметр $\alpha \in (0,1)$ задаются (экспертами). В работе

1) изложен алгоритм, позволяющий сравнительно быстро реконструировать все “существенно различные” функции $f : u \mapsto f(u)$ из компактного подмножества заданного функционального пространства;

2) предъявлен первый пример области и даже целое семейство $\Omega = \{\omega\}$ областей ω с *гладкой* границей, для которых в случае $\Phi = \Psi$ (т.е. при $\eta = 0$) обратная задача имеет не более одного

---

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-22001, 05-01-00261, 06-01-00330 и 07-01-00500).

[1] ТОКАМАК — это ТОроидальная КАмера с МАгнитными Катушками.

[2] Уравнение (0.1) соответствует цилиндрическому приближению камеры токамака (когда большой радиус тороидальной камеры считается равным бесконечности). В том случае, когда не пренебрегают эффектами тороидальности, уравнение Грэда-Шафранова (в отличие от уравнения (0.1)) принимает следующий вид

$$\widetilde{\Delta} u \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x} f(u) + x g(u) \geq 0 \quad \text{в } \omega \Subset \mathbb{R}^2\,. \tag{0.3}$$

где искомыми являются функции f и g. Они определяют распределение тока и давления в плазме. Для соответствующей им функции u величина $I = \int_\omega \widetilde{\Delta} u\, dxdy$ есть полный ток, протекающий по плазме. Он известен. В цилиндрическом приближении полный ток может быть выражен через функцию Φ, поскольку (в силу формулы Гаусса) $\int_\omega \Delta u\, dxdy \stackrel{(0.1)-(0.2)}{=} \int_\gamma \Phi\, d\gamma$. Аналогичное представление в тороидальном случае будет выполнено, если по данным измерениям градиента u вне функциональной камеры вычислять на γ не нормальную, а конормальную производную функции u, ассоциированную с оператором $\widetilde{\Delta}$.

решения f в классе аффинных[3] ($f(u) = au + b$), а также в классе экспоненциальных ($f(u) = ce^{du}$, $d > 0$) функций;

3) в Ω выделено некоторое подсемейство односвязных областей ω и предъявлены функции $\Psi : \gamma \to \mathbb{R}$, для которых обратная задача в классе аналитических функций f имеет не менее двух "существенно различных" решений.

В заключительном параграфе статьи обозначен рецепт реконструкции по граничным данным всех "существенно различных" нелинейностей в весьма общих уравнениях математической физики. К их числу относится система уравнений

$$\begin{aligned} &\rho_t + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = 0, \qquad && \rho T_t + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla T = \lambda\Delta T + Q(\mathbf{u})Ye^{-\sigma(\mathbf{u})} + A(\mathbf{u})(T - T_0), \\ &\rho\mathbf{v}_t + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = \mu\Delta\mathbf{v} - \nabla p, && \rho Y_t - \rho\mathbf{v}\cdot\nabla Y = \rho D\Delta Y - k(\mathbf{u})Ye^{-\sigma(\mathbf{u})}, \end{aligned} \tag{0.5}$$

описывающая процессы горения и детонации [8]. Здесь $p = p(\rho, T)$ — заданная функция (характеризующая уравнение состояния),

$$\mathbf{u} = (\rho, \mathbf{v}, T, Y) : (x,t) \mapsto \mathbf{u}(x,t)\,, \qquad \text{где} \quad x \in \omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, t_*), \quad t_* \le \infty\,.$$

Можно считать известным значение вектор-функции $\mathbf{u}$ при $t = 0$. Задача состоит в том, чтобы по градиенту $\mathbf{u}$, заданному при $x \in \partial\omega$ и $t \in (0, t_*)$, реконструировать все "существенно различные" функции

$$A : \mathbf{u} \mapsto A(\mathbf{u}), \qquad Q : \mathbf{u} \mapsto Q(\mathbf{u}), \qquad \sigma : \mathbf{u} \mapsto \sigma(\mathbf{u}), \qquad k : \mathbf{u} \mapsto k(\mathbf{u}), \tag{0.6}$$

для которых система уравнений (0.5) имеет вектор-функцию $\mathbf{u}$ в качестве решения.

§ 1 "Реальная" и "идеализированная" постановки задачи

1. Рассматриваемая задача для уравнения (0.1) относится к проблеме управляемого термоядерного синтеза в токамаках. Одна из тех функций f, для которых (при соответствующей функции Ψ) выполнены условия (0.1)–(0.2), обозначим эту функцию через f_*, характеризует распределение электрического тока

$$f_* \circ u_{f_*} : \omega \ni (x,y) \mapsto f_*\big(u_{f_*}(x,y)\big) \tag{1.1}$$

в так называемом плазменном шнуре, сечение которого есть область ω. Таким образом, величина

$$I \overset{def}{=} \int_\omega \Delta u_{f_*}\, dxdy \overset{(0.1)-(0.2)}{=} \int_\gamma \Phi\, d\gamma > 0 \tag{1.2}$$

есть полный ток, протекающий по плазме. Функция $u = u_{f_*}$ — это z-компонента векторного потенциала магнитного поля. Известно, что $u\big|_{\partial\omega} = \mathrm{const}$. Для определенности, эта константа считается здесь равной нулю, т.е. $\gamma = \partial\omega$ — это нулевая линия уровня функции u. Известно также, что (вообще говоря, априори неизвестная) функция $\Phi = \partial u/\partial\nu\big|_\gamma$ может быть приближена функцией Ψ, которая строится по данным магнитной диагностики.

Проблема реконструкции (идентификации) правой части уравнения Грэда-Шафранова по данным магнитной диагностики была поднята в начале 70-х годов (см., например, [6]) и живо обсуждается физиками до сих пор (в частности, в [25]). Ее принципиальная значимость обусловлена тем, что методы управления разрядом и, в частности, методы борьбы с неустойчивостью плазмы в существенной мере зависят от того, каково распределение (1.1) протекающего по ней тока, определяемого функцией f_*. Но эта функция физикам реально неизвестна. Конечно, можно (численно) подобрать некоторую функцию $f_\#$ и соответствующую ей функцию $u_{f_\#}$, для которых с той или иной точностью будут выполнены условия (0.1)–(0.2). Однако если композиции $f_\#\circ u_{f_\#}$ и $f_*\circ u_{f_*}$ удовлетворяют условию (0.4),

[3] Ранее [4, 22, 26] было доказано, что для односвязных областей с гладкой границей, отличных от диска (круга), существует не более конечного числа решений обратной задачи в классе аффинных функций. Базовая идея работы [4] лежит в основе как приводимых здесь результатов единственности, так и общего алгоритма реконструкции всех нелинейностей в уравнениях с частными производными. Для уравнения (0.3) этот алгоритм реализован в определенной мере в [10].

то управление разрядом, базирующееся на (ошибочном) предположении, что именно функция $f_{\#} \circ u_{f_{\#}}$ характеризует реальное распределение тока в плазме, то такое управление разрядом может привести не к подавлению, а наоборот, к развитию неустойчивостей плазмы. Поэтому необходимо предварительно найти множество из представителей всех "существенно различных" функций, для которых выполнены условия (0.1)–(0.2). Если такому множеству будет соответствовать лишь один элемент $f \circ u_f$, то его можно принять за искомую физиками функцию $f_* \circ u_{f_*}$. Если же "существенно различных" функций несколько, то нужно будет выбирать ту из них, которая представляет функцию $f_* \circ u_{f_*}$. Для этих целей могут применяться дополнительные диагностики (см., например, [27]). Но сначала необходимо уметь сравнительно быстро находить все "существенно различные" (в указанном выше смысле) представители искомых правых частей уравнения Грэда–Шафранова.

2. В работах [17]–[19] было доказано (за исключением некоторых частных случаев), что если граница $\gamma = \partial\omega$ "плазменной" области $\omega \Subset \mathbb{R}^2$ имеет угловую особенность (что соответствует современным экспериментам с так называемой диверторной конфигурацией[4]), то в классе аналитических функций может существовать только одна функция f, для которой равенство $\partial u_f/\partial\nu\big|_\gamma = \Phi$ справедливо в сколь угодно малой окрестности угловой точки. Другими словами, функция f определяется по асимптотическому поведению ее нормальной производной в окрестности угловой точки.

На первый взгляд может показаться (см., например, [18, 20]), что этот красивый математический результат позволяет положительно решить вопрос о единственности реконструкции искомого распределения.

Однако это не так. *Во-первых*, нормальная производная (вернее, ее абсолютное значение) сколь угодно мала при приближении к угловой точке контура γ. При этом, согласно [17]–[19], множество значений этих нормальных производных, заданных в окрестности угловой точки, находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех аналитических функций, задающих правую часть уравнения (0.1). Тем самым, любые равномерные приближения нормальной производной в окрестности угловой точки абсолютно неинформативны для реконструкции правой части (даже в рамках ее аффинной аппроксимации, как это следует из [22]). *Во-вторых*, если искомая нелинейность восстановлена по асимптотическому поведению нормальной производной, то можно говорить о знании функции u, а потому и о ее нормальной производной на всей гладкой части границы. Но тогда получаем с вероятностью 1 несовпадение так вычисляемой нормальной производной с функцией Ψ, представляющей эту производную.

Итак, реконструкция нелинейностей по асимптотическому поведению нормальной производной при приближении к угловой точке не может считаться приемлимой. Кроме того, необходимо учитывать, что максимально возможная информация о функции $\partial u/\partial\nu\big|_\gamma$ реально может извлекаться лишь из условия

$$\max_{s\in\gamma_1}\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}(s) - \Psi(s)\Big| \le \eta. \tag{1.3}$$

Здесь η — малое число, Ψ — реально вычисляемая (по данным магнитной диагностики) функция на $\gamma_1 = \gamma\setminus\gamma_0$, где $\gamma_0 = \{x \in \gamma \mid \ |x-y| \le C_\eta, \ \ |k(y)| \ge D_\eta\}$, $k(y)$ — кривизна кривой γ в точке $y \in \gamma$, а C_η и D_η — некоторые (экспертные) константы.

Такая постановка задачи соответствует тому реальному факту, что данные о функции $\Phi = \partial u/\partial\nu\Big|_\gamma$ возможно получить лишь приближенные, да и то только на тех гладких дугах кривой γ, которые несколько отдалены от точек, в которых кривая γ имеет завышенную кривизну.

Можно несколько упростить постановку задачи, идеализируя реальную ситуацию, полагая $\eta = 0$ и $\gamma_1 = \gamma$. Другими словами, идеализированная постановка предполагает, что кривая γ достаточно гладкая[5] и на ней известна функция $\Phi = \partial u/\partial\nu\Big|_\gamma$.

[4]В этом случае магнитные силовые линии имеют сепаратрису, содержащую петлю в виде "половинки" восьмерки, охватывающей "плазменную" область ω. Тем самым, ω имеет угловую точку. Однако вблизи точек с чрезмерной кривизной, а тем более в окрестности угловой точки реально невозможно получить данные о коэффициентах асимптотического поведения функции $\varphi = \partial u/\partial\nu\big|_\gamma$. Поэтому весовая функция ϱ в формуле (0.2) равна нулю вблизи угловой точки.

[5]Как было отмечено, исходные данные, к сожалению, информативны в реальности лишь на гладких дугах кривой γ. Это создает существенную трудность в изучении рассматриваемой здесь задачи о реконструкции правой части f уравнения $\Delta u = f(u)$, поскольку, чем глаже кривая γ (являющаяся линией уровня функции u), тем труднее из знания нормальной производной $\partial u/\partial\nu\big|_\gamma$ извлечь данные о функции f.

§ 2 Факторизация, функция $\varkappa$, функциональные классы, алгоритм поиска

В этом параграфе на примере задачи о поиске функции f, для которой существует решение u задачи Дирихле

$$\Delta u = f(u) \geq 0 \quad \text{в} \quad \omega \Subset \mathbb{R}^2, \qquad u\big|_{\gamma=\partial\omega} = 0, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее с некоторой точностью условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\gamma} = \Phi \tag{2.2}$$

для фиксированной функции Φ, подробно представлены следующие пять элементов общей конструкции[6] поиска **всех** существенно различных нелинейностей в обратных задачах математической физики, а именно:

1) выбор функционального класса $\mathcal{F}$ в некотором нормированном пространстве X искомых функций f;

2) "факторизация" исходного уравнения и переход к "факторизованному" функциональному классу $\mathcal{G}$;

3) конструирование функции $\varkappa$, определенной на классе $\mathcal{G}$, и конструирование серии $\mathfrak{S}$ необходимых условий, "сходящихся" (по модулю двух быстро проверяемых соотношений)[7] к критерию, характеризующему искомую нелинейность $f \in \mathcal{F}$;

4) сравнительно быстрый отсев тех функций $f \in \mathcal{F}$, которые не удовлетворяют обозначенной серии $\mathfrak{S}$ необходимых условий[8] и формирование, тем самым, некоторого множества $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ функций, удовлетворяющих всей серии $\mathfrak{S}$;

5) выборка из множества $\mathcal{F}_0$ всех искомых существенно различных функций f.

1. Не конкретизируя поначалу функциональный класс $\mathcal{F}$ искомых функций f, изложим базовую идею. Она заложена в двух простых леммах 2.1–2.2 и относится к факторизации исходного уравнения, конструированию функции $\varkappa$ и серии $\mathfrak{S}$ необходимых условий. Эти леммы является естественным обобщением леммы из заметки [4] (или, что то же самое, леммы 4.1 из работы [22]). Леммы 2.1 и 2.2 формулируется в рамках "идеализированной" постановки рассматриваемой задачи, т.е. для случая, когда кривая γ достаточно гладкая и на ней всюду задана (известна) функция $\Phi = \partial u/\partial\nu\Big|_{\gamma}$. Обобщение этих лемм на "реальный" случай представляют леммы 2.3 и 2.4.

Под *факторизацией* некоторым подходящим числовым множителем $\sigma \neq 0$ (*параметром факторизации*) исходного уравнения $\Delta u = f(u)$ для однородной задачи Дирихле в области ω понимается переход к *факторизованной* задаче Дирихле

$$\Delta v = g(v) \quad \text{в} \quad \omega, \quad v\Big|_{\gamma} = 0, \qquad \text{где} \quad g(v) = \sigma f(u), \quad \text{а} \quad v = \sigma u. \tag{2.4}$$

[6] Определенным подспорьем при реконструкции функций $f_j : u \mapsto f_j(u)$ в дифференциальном уравнении вида

$$F(x, D^\beta u) = \sum_{j=1}^{J} \rho_j(x) f_j(u)$$

может служить ассоциативное с ним дифференциальное уравнение (см., например, [1, 14]), отражающее постоянство искомых функций f_j вдоль любой линии уровня функции u. Именно это свойство может помочь эффективно искать функции f_j с априори заданной топологией линий уровня отображений

$$f_j \circ u : \omega \ni (x, y) \mapsto f_j(u(x, y)).$$

В случае уравнения Грэда–Шафранова (0.3) ассоцированное с ним уравнение таково:

$$u_y\{A(x, Du)\}_x - u_x\{A(x, Du)\}_y = 0, \qquad \text{где} \qquad A(x, Du) = \frac{u_y(\widetilde{\Delta} u)_x - u_x(\widetilde{\Delta} u)_y}{x u_y}, \tag{2.3}$$

а в случае уравнения $\Delta u = f(u)$, оно имеет такой вид: $u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = 0$.

[7] См. ниже замечания 2.1 и 2.2.

[8] В случае отсутствия дополнительного аналитического анализа речь идет переборе функций $g \in \mathcal{G}$.

При этом имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\gamma} = \sigma\Phi\,, \quad \text{где} \quad \Phi = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\gamma}. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1 *(необходимое условие) Пусть задача* (2.1)–(2.2) *имеет решения* u_1 *и* u_2 *соответственно для функций* f_1 *и* f_2, *а* $g_j(v) = \sigma_j f_j(v/\sigma_j)$, *где* σ_1 *и* σ_2 *— ненулевые константы. Тогда для любых двух точек* $s_R \in \gamma$ *и* $s_\rho \in \gamma$ *выполнено равенство:*

$$\varkappa(f_1, \sigma_1; s_R, s_\rho) = \varkappa(f_2, \sigma_2; s_R, s_\rho), \qquad \text{где} \qquad \varkappa(f_j, \sigma_j; s_R, s_\rho) \stackrel{def}{=} \frac{\partial v_j}{\partial \nu}\Big|_{s_R} \Big/ \frac{\partial v_j}{\partial \nu}\Big|_{s_\rho}, \quad \text{а} \quad v_j = \sigma_j u_j\,. \tag{2.6}$$

♡ [9] Если для функций f_1 и f_2 существуют решения u_1 и u_2 задачи (2.1)–(2.2), то для соответствующих им функций $g_j : v \mapsto g_j(v) = \sigma_j f(v/\sigma_j)$ и функций $v_j = \sigma_j u_j$ имеем:

$$\frac{\varphi_1}{\sigma_1} = \Phi = \frac{\varphi_2}{\sigma_2}\,, \qquad \text{где} \qquad \varphi_j \stackrel{def}{=} \frac{\partial v_j}{\partial \nu}\Big|_{\gamma}. \tag{2.7}$$

Отсюда[10])

$$\varphi_1/\varphi_2 = \sigma_1/\sigma_2. \tag{2.8}$$

В частности, для любых двух точек $s_\rho \in \gamma$ и $s_R \in \gamma$ получаем

$$\frac{\varphi_1(s_R)}{\varphi_2(s_R)} = \frac{\varphi_1(s_\rho)}{\varphi_2(s_\rho)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\varphi_1(s_R)}{\varphi_1(s_\rho)} = \frac{\varphi_2(s_R)}{\varphi_2(s_\rho)}\,. \tag{2.9}$$

Итак, установлено необходимое условие (2.6) разрешимости задачи (2.1)–(2.2) для функции f_2 в том случае, когда эта задача разрешима для функции f_1. □

Лемма 2.2 *(необходимое и достаточное условие) Пусть* v_j *— решение задачи Дирихле* (2.4) *для функции* $g_j : v \mapsto g_j(v) \stackrel{def}{=} \sigma_j f_j(v/\sigma_j)$, *где* $j = 1, 2$, *а* σ_j *— ненулевая константа. Предположим, что*

1) равенство (2.6) *верно для любой точки* $s_R \in \gamma$ *(и некоторой* $s_\rho \in \gamma$*);*

2) хотя бы для одной точки $s_\rho \in \gamma$ *справедливо равенство*

$$\frac{\varphi_1(s_\rho)}{\sigma_1} = \frac{\varphi_2(s_\rho)}{\sigma_2}\,, \qquad \text{где} \qquad \varphi_j(s) \stackrel{def}{=} \frac{\partial v_j}{\partial \nu}\Big|_{s \in \gamma}. \tag{2.10}$$

Тогда функция u_2 *удовлетворяет условию* (2.2), *если и только если этому условию удовлетворяет функция* u_1.

♡ Согласно предположению, справедливо равенство

$$\varkappa(f_1, \sigma_1; s_R, s_\rho) = \varkappa(f_2, \sigma_2; s_R, s_\rho) \qquad \forall s_R \in \gamma. \tag{2.11}$$

Обозначим обе части этого равенства через $\kappa(s_R)$. Имеем

$$\varphi_1(s_R) = \kappa(s_R)\varphi_1(s_\rho) \qquad \text{и} \qquad \varphi_2(s_R) = \kappa(s_R)\varphi_2(s_\rho)\,. \tag{2.12}$$

Поэтому

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\Big|_{s_R} \stackrel{(2.5)}{=} \frac{\varphi_1(s_R)}{\sigma_1} \stackrel{(2.12)}{=} \frac{\kappa(s_R)\varphi_1(s_\rho)}{\sigma_1} \stackrel{(2.10)}{=} \frac{\kappa(s_R)\varphi_2(s_\rho)}{\sigma_2} \stackrel{(2.12)}{=} \frac{\varphi_2(s_R)}{\sigma_2} \stackrel{(2.5)}{=} \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\Big|_{s_R} \qquad \forall s_R \in \gamma\,,$$

Тем самым, два соотношения (2.10) и (2.11) вместе образуют достаточное (а также необходимое) условие существования двух функций f_1 и f_2, для которых существуют решения u_1 и u_2 задачи (2.1)–(2.2). □

---

[9] Иногда начало и конец доказательств отмечаются соответственно такими символами: ♡ и □.

[10] Согласно лемме Жиро-Хопфа-Олейник о граничной производной, функции $\varphi_j = \sigma_j \Phi$ отличны от нуля, т.к. $\Phi > 0$ в силу условия $f \geq 0$.

Замечание 2.1 *В случае "идеализированной" постановки задачи, ансамбль равенств* (2.6) *есть та обозначенная в начале параграфа серия* $\mathfrak{S}$ *необходимых условий, которая "сходится" к критерию, характеризующему искомую нелинейность* $f \in \mathcal{F}$ *по модулю двух быстро проверяемых соотношений. Одним из этих соотношений является равенство* (2.10), *а другим — неравенство* (0.4).

Обобщим предыдущие леммы на случай "реальной" постановки задачи.

Пусть f_1 и f_2 — две функции из $\mathcal{F}$, а $u = u_j$ (где $j = 1, 2$) — соответствующие им решения задачи

$$\Delta u = f_j(u) \quad \text{в} \quad \omega \Subset \mathbb{R}^2, \qquad u\big|_{\gamma=\partial\omega} = 0, \tag{2.13}$$

удовлетворяющие такому неравенству

$$\max_{s\in\gamma_1}\Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) - \Psi(s)\Big| \leq \eta. \tag{2.14}$$

Здесь η — малое число, Ψ —фиксированная функция, заданная на $\gamma_1 = \gamma \setminus \gamma_0$, где

$$\gamma_0 = \{x \in \gamma \ \big| \quad |x-y| \geq C_\eta, \quad |k(y)| \geq D_\eta\},$$

$k(y)$ — кривизна кривой γ в точке $y \in \gamma$, а C_η и D_η — некоторые (экспертные) константы.

Лемма 2.3 *(необходимое условие) Для любых двух точек* $s_\rho \in \gamma_1$ *и* $s_R \in \gamma_1$ *(в которых модуль функции* Ψ *превосходит*[11] η*) выполнено неравенство*

$$|\varkappa(f_1, \sigma_1; s_R, s_\rho) - \varkappa(f_2, \sigma_2; s_R, s_\rho)| \leq \mu(\eta, \Psi) \overset{def}{=} 2\eta \frac{|\Psi(s_R)| + |\Psi(s_\rho)| + 2\eta}{\big(|\Psi(s_\rho)| - \eta\big)^2} \min\{|\sigma_1|^2, |\sigma_2|^2\}, \tag{2.15}$$

где σ_1, σ_2 *— ненулевые константы, а*

$$\varkappa(f_j, \sigma_j; s_R, s_\rho) \overset{def}{=} \frac{\varphi_j(s_R)}{\varphi_j(s_\rho)}, \qquad \varphi_j(s) = \sigma_j\,\Phi_j(s), \qquad \Phi_j(s) \overset{def}{=} \frac{\partial u_j}{\partial \nu}\Big|_{s\in\gamma}. \tag{2.16}$$

♡ Если для функций f_1 и f_2 существуют решения u_1 и u_2 задачи (2.13), то для соответствующих им функций g_j (с $j = 1, 2$) и функций $v_j = \sigma_j u_j$ имеем:

$$\max_{s\in\gamma_1}\Big|\frac{\varphi_j(s)}{\sigma_j} - \Psi(s)\Big| \leq \eta, \quad \text{где} \quad \varphi_j(s) = \frac{\partial v_j}{\partial \nu}\Big|_{s\in\gamma_1}. \tag{2.17}$$

Отсюда

$$\Big|\frac{\varphi_1(s)}{\sigma_1} - \frac{\varphi_2(s)}{\sigma_2}\Big| \leq 2\eta \qquad \forall s \in \gamma_1. \tag{2.18}$$

Представим последнее неравенство в виде

$$\Big|\frac{\varphi_1(s)}{\varphi_2(s)} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\Big| \leq 2\eta\Big|\frac{\sigma_1}{\varphi_2(s)}\Big| \qquad \forall s \in \gamma_1. \tag{2.19}$$

В частности, для любых двух точек $s_R \in \gamma_1$ и $s_\rho \in \gamma_1$ имеем

$$\Big|\frac{\varphi_1(s_R)}{\varphi_2(s_R)} - \frac{\varphi_1(s_\rho)}{\varphi_2(s_\rho)}\Big| \leq 2\eta|\sigma_1|\Big(\frac{1}{|\varphi_2(s_R)|} + \frac{1}{|\varphi_2(s_\rho)|}\Big). \tag{2.20}$$

Перепишем неравенство (2.20) в таком виде

$$|\varkappa(f_1, \sigma_1; s_R, s_\rho) - \varkappa(f_2, \sigma_2; s_R, s_\rho)| \leq \eta K, \tag{2.21}$$

где

$$\varkappa(f_j, \sigma_j; s_R, s_\rho) \overset{def}{=} \frac{\varphi_j(s_R)}{\varphi_j(s_\rho)}, \qquad K \overset{def}{=} 2|\sigma_1|\frac{|\varphi_2(s_R)| + |\varphi_2(s_\rho)|}{|\varphi_1(s_\rho)\varphi_2(s_\rho)|}. \tag{2.22}$$

Отметим, что

$$\varphi_j(s) = \sigma_j\Phi_j(s), \quad \text{где} \quad \Phi_j(s) \overset{def}{=} \frac{\partial u_j}{\partial \nu}\Big|_{s\in\gamma}, \quad \text{а} \quad \max_{s\in\gamma_1}\Big|\Phi_j(s) - \Psi(s)\Big| \overset{(2.13)}{\leq} \eta. \tag{2.23}$$

Поэтому разрешимость задачи (2.13)–(2.14) для функций f_1 и f_2 с необходимостью влечет условие (2.15). □

[11]См. примечание 10.

Лемма 2.4 *(необходимое и достаточное условие) Пусть* v_j *— решение задачи Дирихле* (2.4) *для функции* $g_j : v \mapsto g_j(v) \overset{def}{=} \sigma_j f_j(v/\sigma_j)$, *где* $j = 1, 2$, *а* σ_j *— ненулевая константа. Предположим, что*

1) равенство (2.15) *верно для любой точки* $s_R \in \gamma$ *(и некоторой* $s_\rho \in \gamma$);

2) хотя бы для одной точки $s_\rho \in \gamma$ *установлена справедливость неравенства*

$$\left|\frac{\varphi_1(s_\rho)}{\sigma_1} - \frac{\varphi_2(s_\rho)}{\sigma_2}\right| \le \delta \ll 1\,; \tag{2.24}$$

3) Функция $u = u_1$ *удовлетворяет условию* (2.14).

Тогда функция $u = u_2$ *удовлетворяет аналогу условия* (2.14), *а именно, условию*

$$\max_{s\in\gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(s) - \Psi(s)\right| \le \lambda(\eta,\delta,\Psi) \overset{def}{=} \eta + \frac{|\Psi(s_R)|+\eta}{|\Psi(s_\rho)|-\eta}\delta + \Big(|\Psi(s_\rho)| + \eta + \delta\Big)\mu(\eta,\Psi)\,, \tag{2.25}$$

где величина $\mu(\eta, \Psi)$ *определена в* (2.15).

♡ Заметим, что

$$\frac{\partial u_j}{\partial\nu}\Big|_{s_R} = \frac{\varphi_j(s_R)}{\sigma_j} = \kappa_j L_j\,, \qquad \text{где} \qquad \kappa_j = \varkappa(f_j,\sigma_j; s_R, s_\rho)\,, \quad \text{а} \quad L_j = \frac{\varphi_j(s_\rho)}{\sigma_j}\,.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\Big|_{s_R} - \frac{\partial u_2}{\partial\nu}\Big|_{s_R}\right| = |\kappa_1 L_1 - \kappa_2 L_2| = |\kappa_1 L_1 - \kappa_1 L_2 + \kappa_1 L_2 - \kappa_2 L_2| \le |\kappa_1||L_1 - L_2| +$$

$$|L_2||\kappa_1 - \kappa_2| \overset{(2.15)-(2.24)}{\le} |\varkappa(f_j,\sigma_j;s_R,s_\rho)|\delta + \left(\left|\frac{\varphi_1(s_\rho)}{\sigma_1}\right| + \delta\right)\mu(\eta,\Psi) \overset{(2.14)}{\le}$$

$$\frac{|\Psi(s_R)|+\eta}{|\Psi(s_\rho)|-\eta}\delta + \Big(|\Psi(s_\rho)|+\eta+\delta\Big)\mu(\eta,\Psi) \qquad \overset{(2.14)}{\Longrightarrow} \quad (2.25). \qquad \square$$

Замечание 2.2 *В случае "реальной" постановки задачи ансамбль равенств* (2.15) *есть та обозначенная в начале параграфа серия* $\mathfrak{S}$ *необходимых условий, которая "сходится" к критерию, характеризующему искомую нелинейность* $f \in \mathcal{F}$ *по модулю двух быстро проверяемых соотношений. Одним из этих соотношений (в данном, "реальном" случае) является неравенство* (2.24), *а другим — неравенство* (0.4).

2. В этом пункте описывается конструкция численного поиска всех существенно различных правых частей уравнения (0.1), принадлежащих почти минимальной ε-сети[12] некоторого компактного подмножества $\mathcal{F}$ пространства X формальных степенных рядов[13]

$$f \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m \qquad \text{с нормой} \qquad \|f\| = \sup_{m\ge 0}|a_m|\,. \tag{2.26}$$

Эта конструкция применима как непосредственно для задачи (0.1)–(0.2) с искомой функцией f, так и для "факторизованной" задачи (2.4)–(2.5) с искомой функцией

$$g \sim \sum_{m=0}^{\infty} b_m v^m\,, \quad \text{определяемой формулой} \quad g(v) = \sigma f(v/\sigma) \quad \text{с некоторым} \quad \sigma \ne 0. \tag{2.27}$$

[12]Напомним [9, 15], что множество A называется ε-сетью для $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F} \subset (A + \varepsilon\cdot B_X)$, где B_X — единичный шар пространства X. Если среди всех ε-сетей некоторая содержит наименьшее общее количество элементов, то она называется минимальной ε-сетью. Под почти минимальной ε-сетью понимается ε-сеть, которая возможно содержит чуть больше элементов, чем минимальная ε-сеть (ср. формулы (2.40) и (2.41)).

[13]Отметим, что если $\overline{\lim}_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|} = 1/R$, то X — это пространство функций, аналитических в круге $\{|u| < R\}$. Отметим также (см. [9]), что приводимые ниже построения можно без принципиальных изменений перенести на случай, когда вместо пространства X рассматривается одно из весовых пространств $L^2(\mathbb{R}, e^{-u^2})$, $L^2(\mathbb{R}_-, |u|^a e^u)$ или $L^2([-1,0],h)$ с другими классическими весами $h \ge 0$. Рассмотрение последних двух пространств естественно в силу того, что решение задачи (2.1) удовлетворяет условию $u \le 0$.

Определим следующим образом операцию взятия r-ой ($r \in \mathbb{N}$) производной:

$$f^{(r)} \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_r^m a_m u^{m-r}, \qquad \text{где} \quad A_r^m = m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-r+1)\,. \tag{2.28}$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $K_0 > 0$ и $K_1 > 0$. Объединение множеств

$$\mathcal{F}(r, K_0, K_1) \stackrel{def}{=} \{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m \in X \;\Big|\; |a_m| \le K_0, \;\; A_r^m |a_m| \le K_1 \} \tag{2.29}$$

по всем K_0 и K_1 содержит все полиномы. Поэтому можно ожидать, что особенности изучаемой задачи проявятся среди $f \in \mathcal{F}(r, K_0, K_1)$, если K_0 и K_1 — достаточно велики. Отметим, что

$$\mathcal{F}(r, K_0, K_1) = K_0 \cdot \mathcal{F}(r, 1, K), \quad \text{где} \quad K = K_1/K_0. \tag{2.30}$$

Очевидно следующее

Предложение 2.1 *Для функции $f \in \mathcal{F}(r, K_0, K_1)$ существует функция u_f, удовлетворяющая условиям* (0.1)–(0.2) *тогда и только тогда, когда для факторизованной функции $g \in \mathcal{F}(r, 1, K_1/K_0)$, определяемой формулой*

$$g(t) = \sigma f(t/\sigma), \qquad \text{где} \quad \sigma = 1/K_0\,, \tag{2.31}$$

функция $v = \sigma u_f$ удовлетворяет условиям (2.4)–(2.5).

Таким образом, искомые правые части уравнения (0.1) задаются формулой

$$f(u) = \frac{g(\sigma u)}{\sigma}\,, \qquad \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \quad g \in \mathcal{G} = \mathcal{G}(r, K) \stackrel{def}{=} \mathcal{F}(r, 1, K)\,, \tag{2.32}$$

в которой функции $v = \sigma u$ и g удовлетворяют условиям леммы 2.2 (в случае “идеализированной” постановки задачи) или леммы 2.4 (в случае ее “реальной” постановки).

Множество $\mathcal{G} = \mathcal{G}(r, K)$ (также как и $\mathcal{F}(r, K_0, K_1)$) компактно в X, а множество полиномов

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_M(r, K) \stackrel{def}{=} \{ \sum_{m=0}^{M} b_m v^m \in X \;\Big|\; |b_m| \le \min\bigl(1, \frac{K}{A_r^m}\bigr) \}\,, \qquad \text{где} \quad M \ge r \ge 1\,, \tag{2.33}$$

приближает $\mathcal{G}$ с точностью

$$\sup_{f \in \mathcal{G}} \inf_{p \in \mathfrak{P}} \| f - p \| = \sup_{m > M} \{ |b_m| \;\Big|\; |b_m| \le 1, \; A_r^m |b_m| \le K \} = \sup_{m > M} \min\{1, \frac{K}{A_r^m}\} = \min\{1, \frac{K}{A_r^{M+1}}\}. \tag{2.34}$$

Замечание 2.3 *Излагаемый здесь рецепт поиска всех существенно различных правых частей $f \in \mathcal{F}$ уравнения Грэда–Шафранова предполагает разрешимость задачи Дирихле*

$$\Delta v = p(v) \ge 0 \quad \text{в} \quad \omega \Subset \mathbb{R}^2\,, \quad v\big|_{\gamma = \partial\omega} = 0\,, \qquad \text{где} \qquad p(v) = \sum_{m=0}^{M} b_m v^m\,. \tag{2.35}$$

Условия $p(v) \ge 0$ и $v\big|_{\gamma=\partial\omega} = 0$ влекут $b_0 \ge 0$. Поэтому не нужно рассматривать варианты с $b_0 < 0$. Кроме того, отслеживая число решений[14] *задачи* (2.35), *нужно проверять выполнение неравенства $p(v(x,y)) \ge 0$ в ω.*

Пусть $M \in \mathbb{N}$, $M \ge r \ge 1$ таково, что $A_r^{M+1} = (M+1)M \cdot \ldots \cdot (M-r+2) \ge K > 0$. Тогда, согласно (2.34), получаем такую формулу для точности приближения

$$\varepsilon \stackrel{def}{=} K / A_r^{M+1} \le 1\,. \tag{2.36}$$

[14]Как известно (см., например, [7]), при нечетном M и $b_M > 0$ задача (2.35) имеет (хотя бы одно) решение $u \in H_0^1(\omega) \cap L^p(\omega)$, где $p = M+1$. С другой стороны, согласно [24], не имеет решения в $H_0^1(\omega)$, например, такое уравнение $\Delta u = u^2 + a_0$, если $a_0 > \lambda_1/4$, где λ_1 — первое собственное значение оператора $-\Delta : H_0^1(\omega) \to H^{-1}(\omega)$.

Предложение 2.2 *Любая ε-сеть для множества $\mathfrak{P}$, состоящая из полиномов этого множества, является ε-сетью для* $\mathcal{G}(r,K) \overset{(2.32)}{=} \mathcal{F}(r,1,\varepsilon A_r^{M+1})$.

♡ Каждый элемент $g \in \mathcal{G}$ однозначно представим в виде $g = g_0 + g_1$, где

$$g_0(u) = \sum_{m=0}^{M} b_m v^m \in \mathfrak{P}\,, \qquad g_1 = \sum_{m=M+1}^{\infty} b_m v^m\,.$$

Имеем

$$\|g_1\| \overset{(2.26)}{=} \sup_{m\ge M+1} |b_m| \overset{(2.33)}{\le} \sup\{\frac{K}{A_r^m}\}\Big|_{m\ge M+1} \overset{(2.28)}{=} \frac{K}{A_r^{M+1}} \overset{(2.36)}{=} \varepsilon.$$

Возьмем из ε-сети множества $\mathfrak{P}$ элемент

$$\widehat{p} = \sum_{m=0}^{M} \widehat{b}_m v^m = \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{b}_m v^m\,, \quad \text{где} \quad \widehat{b}_m = 0 \quad \text{при} \quad m > M\,.$$

Тогда

$$\|g_0 - \widehat{p}\,\| \le \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \|\sum_{m=0}^{M}(b_m - \widehat{b}_m)u^m\| \le \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |b_m - \widehat{b}_m| \le \varepsilon \quad \forall\, m = 0,\ldots,M.$$

А поскольку $|b_m| \le \varepsilon$ при $m > M$ (ибо $\|g_1\| \le \varepsilon$) и $\widehat{b}_m = 0$ при $m > M$, то

$$|b_m - \widehat{b}_m| \le \varepsilon \quad \text{при} \quad m \ge 0, \quad \text{т.е.} \qquad \|g - \widehat{p}\| = \sup_m |b_m - \widehat{b}_m| \le \varepsilon. \qquad \Box$$

Согласно (2.36), $A_r^{M+1} = (M+1)M\cdot\ldots\cdot(M-r+2) \ge K > 0$. Поэтому существует число

$$m_* = \min_{r-1\le m\le M}\{m \;\Big|\; A_r^{m+1} \ge K\} \qquad \overset{(2.36)}{\Longleftrightarrow} \qquad \frac{1}{\varepsilon} \in [N_-, N_+) \overset{def}{=} \Big[\frac{A_r^{M+1}}{A_r^{m_*+1}}\,,\ \frac{A_r^{M+1}}{A_r^{m_*}}\Big)\,. \tag{2.37}$$

Для целого $m \in [0,M]$ определим

$$B_m \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m \in [0, m_*]\,, \\ K/A_r^m & \text{при} \quad m \in [m_*+1, M] \quad (\text{если} \quad m_*+1 \le M). \end{cases} \tag{2.38}$$

Очевидно следующее

Предложение 2.3 *Множество $\mathfrak{P} \subset X$ состоит из полиномов $p : v \mapsto p(v) = \sum b_m v^m$, коэффициенты которых удовлетворяют условию*

$$|b_m| \le B_m, \quad 0 \le m \le M.$$

Отображение

$$J : \mathfrak{P} \ni \sum b_m v^m \mapsto b = (b_0,\ldots,b_M) \in \mathbf{P} \overset{def}{=} \prod_{m=0}^{M} [-B_m, B_m] \tag{2.39}$$

есть изометрия между множествами $\mathfrak{P} \subset X$ и $\mathbf{P} \subset l^\infty_{M+1}$, где норма элемента $b = (b_0,\ldots,b_M) \in l^\infty_{M+1}$ равна $\|b\| = \max_{0\le m\le M}|b_m|$.

Следствие 2.1 *Отображение J^{-1} переводит ε-сеть для $\mathbf{P} \subset l^\infty_{M+1}$ в ε-сеть для $\mathfrak{P} \subset X$.*

Хорошо известно (см., например, [6]), что общее число элементов любой ε-сети параллелепипеда $\mathbf{P}$ не меньше

$$L = \prod_{m=0}^{M} \frac{B_m}{\varepsilon}\,, \tag{2.40}$$

т.е. не меньше отношения объема $V(\mathbf{P}) = \prod_{m=0}^{M} 2B_m$ параллелепипеда $\mathbf{P}$ к объему $(M+1)$-мерного куба $\mathbf{C}_\varepsilon^{M+1}$, имеющего ребра длины 2ε. Учитывая это, построим ε-сеть для $\mathbf{P}$ следующим образом. Возьмем некоторую угловую точку параллелепипеда $\mathbf{P}$ и отложим от нее вдоль каждого исходящего из нее ребра примыкающие друг к другу отрезки длины 2ε. При этом, для того или иного ребра последний отрезок, вообще говоря, может выходить за пределы этого ребра. Общее число таких отрезков, отложенных вдоль m-го ребра, равно

$$\lceil \frac{2B_m}{2\varepsilon} \rceil = \lceil \frac{B_m}{\varepsilon} \rceil , \quad \text{где} \quad \lceil x \rceil \text{ – наименьшее целое, больше или равное } x\,.$$

Так отложенные отрезки определяют примыкающие друг к другу кубы $\mathbf{C}_\varepsilon^{M+1}$, покрывающие параллелепипед $\mathbf{P}$. В качестве ε-сети возьмем их центры. Общее число таких центров есть

$$S = \prod_{m=0}^{M} \lceil \frac{B_m}{\varepsilon} \rceil \overset{(2.40)}{\geq} L\,. \tag{2.41}$$

В силу (2.37)–(2.38), формулу (2.41) можно переписать в виде

$$S = N^{m_*+1} S_*\,, \quad \text{где} \quad N = \lceil 1/\varepsilon \rceil, \quad \text{а} \quad S_* = \begin{cases} \prod_{m=m_*+1}^{M} \lceil \frac{A_r^{M+1}}{A_r^m} \rceil & \text{при} \quad m_* < M\,, \\ 1 & \text{при} \quad m_* = M\,, \end{cases} \tag{2.42}$$

Примеры. В приведенных ниже примерах в качестве исходных характеристик ε-сети в $\mathcal{G}(r,K)$ задаются три параметра:

1) натуральное число M, которое есть степень приближающих полиномов (элементов ε-сети);

2) натуральное число $r \leq M$;

3) положительное число $K \leq A_r^{M+1} = (M+1)M \cdot \ldots \cdot (M+2-r)$, которое ограничивает сверху модуль r-ой производной функций g из $\mathcal{G}(r,K)$.

По этим трем параметрам определяются

- Точность приближения $\varepsilon = K/A_r^{M+1}$.
- Натуральное $m_* \in [r-1, M]$, равное тому минимальному m, для которого $A_r^{m+1} \geq K$, а также числа[15] N_- и N_+, определенные в формуле (2.37).
- Общее число S (см. (2.42)) элементов ε-сети, т.е. полиномов

$$p_\mathbf{j} : v \mapsto p_\mathbf{j}(v) = \sum_{m=0}^{M} b_{m,\mathbf{j}} v^m\,, \quad \text{где} \qquad \mathbf{j} = \{j_0, \ldots, j_M\}\,, \quad b_\mathbf{j} = \{b_{j_0}, \ldots, b_{j_M}\}. \tag{2.43}$$

- Числа

$$B_m \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m \in [0, m_*]\,, \\ K/A_r^m & \text{при} \quad m \in [m_*+1, M] \quad (\text{если} \quad m_*+1 \leq M)\,, \end{cases}$$

ограничивающие коэффициенты b_{m,j_m} полиномов (2.43).

- Сами коэффициенты

$$b_{m,j_m} = \varepsilon\,(2j_m + 1 - \lceil B_m/\varepsilon \rceil)\,, \qquad j_m = 0, \ldots, \lceil B_m/\varepsilon \rceil - 1\,. \tag{2.44}$$

В нижеследующей ТАБЛИЦЕ представлены значения параметров ε, S, m_*, N_- и N_+ в зависимости от 5-ти значений $M = 1,2,3,4,5$, M значений $r = 1, \ldots, M$ и 2-х значений K.

[15] В том случае, когда $1/\varepsilon \notin \mathbb{N}$, а промежуток $[N_-, N_+) \ni 1/\varepsilon$ содержит целое число, точность аппроксимации реально чуть лучше, чем ε. В силу формулы (2.42) она не хуже, чем $1/\lceil 1/\varepsilon \rceil \leq \varepsilon$.

№	M	r	K	ε	S	m_*	N_-	N_+
1	1	1	2	1	1	1	1	2
2	2	1	2	0.67	4	1	1	3
3	2	2	2	1/3	27	1	3	∞
4	3	1	2	1/2	8	1	2	4
5	3	2	2	1/6	432	1	6	∞
6	3	3	2	1/12	6912	2	4	∞
7	4	1	2	0.4	18	1	2	5
8	4	2	2	1/10	3000	1	10	∞
9	4	3	2	1/30	540000	2	10	∞
10	4	4	2	1/60	64800000	3	5	∞
11	5	1	2	1/3	54	1	3	6
12	5	2	2	1/15	33750	1	15	∞
13	5	3	2	1/60	43200000	2	20	∞
14	5	4	2	1/180	47239200000	3	15	∞
15	5	5	2	1/360	36279700000000	4	6	∞
16	3	2	10	0.83	16	3	1	2
17	3	3	10	0.42	81	3	1	4
18	4	2	10	1/2	16	3	1	3
19	4	3	10	1/6	2592	3	2	10
20	4	4	10	1/12	103680	3	5	∞
21	5	2	10	1/3	162	3	2	5
22	5	3	10	1/12	207360	3	5	20
23	5	4	10	1/36	75582720	3	15	∞
24	5	5	10	1/72	11609500000	4	6	∞

Комментарий. Выгоднее брать вариант, где больше K (“ширина” функционального класса), но меньше S (число перебираемых вариантов), M (степень приближающих полиномов) и ε (точность приближения). Из представленных в таблице вариантов определенный интерес, по-видимому, представляют варианты № 5 и № 17. При этом, согласно примечанию 15, точность аппроксимации в варианте № 17 не хуже чем $1/3 < 0.42$. Что касается вариантов № 2, № 3, № 7, № 8, № 18 и № 19, то в их пользу говорит то, что согласно замечанию 2.3, коэффициент при старшей степени полинома, скорее всего, достаточно будет брать только близким к нулю, а коэффициент при старшей нечетной степени только положительным.

Замечание 2.4 *В рассматриваемом здесь примере уравнения Грэда–Шафранова следует, учитывая замечание 2.3, выбирать программным образом лишь неотрицательные свободные коэффициенты у полиномов ε-сети. В этом случае число реально перебираемых вариантов будет равным примерно $S/2$.*

Замечание 2.5 *В процессе численной проверки выполнения условий, сформулированных в леммах 2.1–2.2 (или леммах 2.3–2.4), следует использовать получаемую информацию для заполнения таблицы соответствий между испытуемыми элементами ε-сети и функциями Ψ, входящими в базу данных множества $\mathbf{\Psi}$, т.е. множества приближений для нормальных производных $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\gamma$, которые вычисляются по данным магнитного мониторинга.*

§ 3 Примеры единственности и неединственности решения обратной задачи

Во 2-ом и 3-ем пунктах этого параграфа представлены результаты о единственности решения обратной задачи для уравнения $\Delta u = f(u)\Big|_{\omega \Subset \mathbb{R}^2} \geq 0$ в рамках “идеализированной” постановки, т.е. когда на

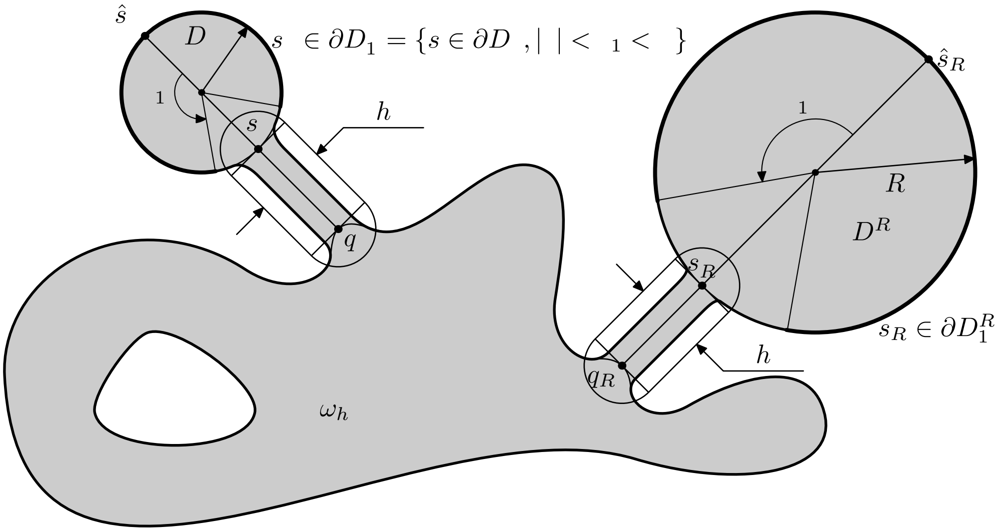

Рис. 1. Пример рассматриваемых областей ω_h.

гладкой кривой $\gamma = \partial\omega$ (нулевой линии уровня функции u) всюду известна функция $\Phi = \partial u/\partial\nu\Big|_\gamma$. Эти результаты получены для аффинных и экспоненциальных классов функций

$$\mathcal{F}_{aff} \overset{def}{=} \{ f : \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = au + b \}\Big|_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}, \qquad \mathcal{F}_{exp} \overset{def}{=} \{ f : \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = \frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu} \}\Big|_{(\lambda>0,\ \mu>0)} \tag{3.1}$$

в случае специального семейства областей $\omega = \omega_h$, описываемого в п. 1. Специфическая особенность этих областей заключается в том, что они имеют два непересекающихся “полуострова” в виде дисков D^R и D^ρ разных радиусов R и ρ, которые примыкают к “материковой” части.

Если “материковая” часть области ω_h сводится к узкой перемычке, соединяющей диски D^R и D^ρ, то тогда, как показано в 4-ом пункте этого параграфа, для функционального класса

$$\mathcal{F}_{(aff,\ exp)} \overset{def}{=} \{ f : \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = \alpha(au + b) + \beta\frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu} \}\Big|_{(\lambda\geq 0,\ \mu\geq 0)}, \tag{3.2}$$

т.е. объединения классов $\mathcal{F}_{aff}$ и $\mathcal{F}_{exp}$, имеется два существенно различных решения обратной задачи в рамках ее “реальной” постановки. Напомним, что в этом случае функция $\Phi = \partial u/\partial\nu\Big|_\gamma$ задана лишь приближено, да и то лишь на той части кривой γ, которая несколько отдалена от точек, в которых кривизна кривой γ чрезмерно велика.

1. Пример областей $\omega = \omega_h$ представлен на рисунке 1. Дадим формальное описание. В точках $s^*_R \in \partial D^R$ и $s^*_\rho \in \partial D^\rho$, диаметрально противоположных точкам $\widehat{s}_R \in \partial D^R$ и $\widehat{s}_\rho \in \partial D^\rho$, к дискам D^R и D^ρ восстановлены внешние единичные нормали $\nu_R = \overrightarrow{s^*_R q_R}$ и $\nu_\rho = \overrightarrow{s^*_\rho q_\rho}$, которые составляют остов областей $P_R = \{dist(x, \nu_R) < h\}$ и $P_\rho = \{dist(x, \nu_\rho) < h\}$. Область P_R составлена из прямоугольника, симметричного относительно нормали ν_R, и примыкающих к нему полудисков весьма малого радиуса $h/2$. Тот из них, который не пересекается с D^R, обозначим через δ^R. Аналогично определяется полудиск $\delta^\rho \subset D^\rho$. “Материковая” часть ω области ω_h представляет собой связную область с гладкой границей, которая имеет ровно две точки пересечения q_R и q_ρ (концы нормалей ν_R и ν_ρ) с областью $\big(D^R \cup (P_R \setminus \delta^R)\big) \cup \big(D^\rho \cup (P_\rho \setminus \delta^\rho)\big)$. Связная область ω_h с гладкой границей обладает следующими свойствами: 1) $D^R \subset \omega_h$, $D^\rho \subset \omega_h$, $\omega \subset \omega_h$; 2) $\omega_h \subset \big(D^R \cup P_R \cup \omega_h \cup P_\rho \cup D^\rho\big)$; 3) $\partial\omega_h \setminus (P_R \cup P_\rho) = (\partial D^R \cup \partial\omega \cup \partial D^\rho) \setminus (P_R \cup P_\rho)$.

Рассматриваемое семейство областей ω_h зависит от малого параметра h, который характеризует ширину “перешейков”, соединяющих “материковую” часть области ω_h (возможно состоящую лишь из слившихся “перешейков”) с двумя ее “полуостровами” в виде дисков D^R и D^ρ радиусов R и $\rho < R$. Возьмем две точки s_R и s_ρ, расположенные соответственно на тех дугах $\gamma^R_1 \subset \partial D^R$ и $\gamma^\rho_1 \subset \partial D^\rho$ (см. рис. 1) границ дисков D^R и D^ρ, которые отстоят на некотором расстоянии от “перешейков”. Если $\mathcal{F}$ есть одно из множеств $\mathcal{F}_{aff}$, $\mathcal{F}_{exp}$ или $\mathcal{F}_{(aff,\ exp)}$, то для такой области ω_h функция

$$\varkappa : \mathcal{F} \times \mathbb{R} \ni (f,\sigma) \mapsto \varkappa(f,\sigma; s_R, s_\rho) \stackrel{def}{=} \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{s_R} \Big/ \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{s_\rho} \qquad s_R \in \gamma_1^R\,, \quad s_\rho \in \gamma_1^\rho\,, \tag{3.3}$$

построенная (ср. с (2.6)) по решению v задачи Дирихле[16]

$$\Delta v = g(v) \quad \text{в} \quad \omega\,, \quad v\Big|_\gamma = 0\,, \qquad \text{где} \quad g(v) = \sigma f(v/\sigma) \tag{3.4}$$

строго монотонна при малых h одновременно с функцией

$$\varkappa_0 : (f,\sigma) \mapsto \varkappa_0(f,\sigma) \stackrel{def}{=} \frac{dv^R}{dr}\Big|_{r=R} \Big/ \frac{dv^\rho}{dr}\Big|_{r=\rho}\,, \tag{3.5}$$

которая строится по решениям v^R и v^ρ задачи (3.4) соответственно для $\omega_h = D^R$ и $\omega_h = D^\rho$.

Функция $\varkappa_0$ считается явно. Проверяется, что она строго монотонна. Доказывается, что при малых h функция $\varkappa$ тоже строго монотонна. Это позволяет с помощью изложенной в предыдущем параграфе леммы 2.1 установить нижеследующие теоремы 3.1 и 3.2 о единственности решения обратной задачи для уравнения Грэда–Шафранова в классе аффиных и в классе растущих экспоненциальных функций. Результат о неединственности в объединении этих классов представлен в пункте 4.

2 Отметим, прежде всего, что разрешимость следующей задачи

$$\Delta u = f(u) \quad \text{в} \quad \omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \gamma = \partial\omega\,, \tag{3.6}$$

где $f \in \mathcal{F}_{aff}$=$\{f : \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = au + b\ \}\Big|_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}$ необходимо влечет

$$b \geq 0, \quad a \geq -\lambda_1, \qquad \text{причем} \qquad b = 0 \iff a = -\lambda_1, \tag{3.7}$$

где $\lambda_1 = \lambda_1(\omega)$ — первое собственное значение оператора $-\Delta$, т.е.

$$-\Delta\psi = \lambda_1\psi\,, \quad \text{в} \quad \omega, \qquad \text{где} \quad \psi > 0 \quad \text{в} \quad \omega, \quad \psi = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega. \tag{3.8}$$

В самом деле, $b \geq 0$, т.к. $au + b \geq 0$ и $u = 0$ на γ. Далее,

$$\lambda_1 \int u \cdot \psi = -\int u \cdot \Delta\psi = -\int \Delta u \cdot \psi = -a \int u \cdot \psi - b \int \psi,$$

т.е.

$$(\lambda_1 + a) \underbrace{\int u \cdot \psi}_{<0} = -b \underbrace{\int \psi}_{>0}, \quad \text{откуда} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 + a > 0 \iff b > 0, \\ \lambda_1 + a = 0 \iff b = 0. \end{array} \tag{3.9}$$

Из сказанного следует, что остается рассмотреть случай $b > 0 \iff a > -\lambda_1$.

Предложение 3.1 *Пусть* $a > -\lambda_1$. *Тогда решение* u *задачи*

$$\Delta u = au + b \geq 0 \quad \textit{в} \quad \omega = \omega_h\,, \qquad u\Big|_{\gamma=\partial\omega_h} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\gamma = \Phi\,, \tag{3.10}$$

существует т. и т.т., к. $\int_\gamma \Phi \neq 0$ *и* $\Phi = b\,\partial v_a/\partial\nu\big|_{s\in\gamma}$, *где* v_a *есть решение следующей факторизованной*[17] *задачи*

$$\Delta v = av + 1 \quad \textit{в} \quad \omega, \quad v\big|_{\partial\omega} = 0. \tag{3.11}$$

При этом, b *равно*

$$b_{(a,\Phi)} \stackrel{def}{=} \frac{\int_\gamma \Phi}{\int_\gamma \partial v_a/\partial\nu}. \tag{3.12}$$

[16] Напомним (см., например, [11], стр. 370), что решение задачи (3.4) существует, если $f \in \mathcal{F}$.

[17] Ср. с предложением 2.1.

♡ Соотношение
$$v = u/b \tag{3.13}$$
связывает решения задач (3.10) и (3.11). При этом $\partial v/\partial\nu\Big|_\gamma \overset{(3.13)}{=} \frac{1}{b}\partial u/\partial\nu\Big|_\gamma \overset{(3.10)}{=} \frac{1}{b}\Phi.$ □

Функции $v^R = v_a^R : D^R \to \mathbb{R}$ и $v^\rho = v_a^\rho : D^\rho \to \mathbb{R}$, фигурирующие в формуле (3.5), зависят от полярного радиуса r. Они являются решениями задачи (3.11) соответственно в областях $\omega = D^R$ и $\omega = D^\rho$. Отметим, что
$$-\lambda_1(\omega_h) > -\lambda_1(D^R)\,, \quad \text{т.к.} \quad D^R \subsetneqq \omega_h. \tag{3.14}$$
Поскольку $b \overset{(3.12)}{=} b_{(a,\Phi)}$, функция $f : u \mapsto au + b$ полностью характеризуется параметром a, подчиненном условию (3.9). В данном случае естественно считать параметр a аргументом введенных формулами (3.3), (3.5) функций
$$\varkappa : a \mapsto \varkappa(a; s_R, s_\rho) \overset{def}{=} \frac{\partial v_a}{\partial\nu}\Big|_{s_R} \Big/ \frac{\partial v_a}{\partial\nu}\Big|_{s_\rho} \qquad s_R \in \gamma_1^R\,, \;\; s_\rho \in \gamma_1^\rho\,, \tag{3.15}$$
и
$$\varkappa_0 : a \mapsto \varkappa_0(a) \overset{def}{=} \frac{dv_a^R}{dr}\Big|_{r=R} \Big/ \frac{dv_a^\rho}{dr}\Big|_{r=\rho}. \tag{3.16}$$
Через $\dot\varkappa$ и $\dot\varkappa_0$ будем обозначать производные этих функций по параметру $a > -\lambda_1$.

Без особого труда находятся асимптотики $\dot\varkappa_0(a) \overset{def}{=} \frac{d}{da}\varkappa_0(a)$ при $a \to \infty$, при $a \to 0$ и при $a \to -\lambda_1(D^R)$. В частности,
$$\dot\varkappa_0(a)\Big|_{a\to\infty} \sim -\frac{R-\rho}{4R\rho}\, a^{-3/2}\,, \qquad \dot\varkappa_0(0) = -\frac{R}{\rho}\frac{R^2-\rho^2}{8}\,, \qquad \dot\varkappa_0(a)\Big|_{a\to-\lambda_1(D^R)+0} \sim -\frac{C}{\big(\lambda_1(D^R)+a\big)^2}\,, \tag{3.17}$$
где $C > 0$. Однако неравенство
$$\dot\varkappa_0(a) \le -\frac{C}{1+a^2} \qquad \forall\, a > -\lambda_1(D^R)\,, \quad \text{где} \quad C = C(R,\rho) > 0\,, \tag{3.18}$$
отнюдь не тривиально[18]. Неравенство (3.18) позволяет доказать, что справедлива

Лемма 3.1 *Существует такое $h^* > 0$, что*[19]
$$\dot\varkappa(a) < 0 \qquad \textit{при} \quad h \le \frac{h^*}{2} \quad \textit{и} \quad a \ge -\lambda_1(\omega_{h^*}) > -\lambda_1(\omega_h). \tag{3.19}$$
Из этой леммы (доказанной в параграфе 4) и леммы 2.1 следует

Теорема 3.1 *Существует такое достаточно малое $h^* > 0$, зависящее от R, ρ и геометрии “материковой” части семейства областей ω_h, что при $h \le h^*/2$ существует лишь одна пара вещественных чисел (a,b) с $a \ge -\lambda_1(\omega_{h^*})$, для которых при заданной функции $\Phi : \gamma \to \mathbb{R}$ найдется функция u, удовлетворяющая условиям* (3.10). *Эта функция задается формулой $u = b\,v_a$, где v_a есть решение задачи* (3.11).

♡ В силу леммы 3.1, функция $\varkappa : a \mapsto \varkappa(a)$, определенная в (3.15), строго монотонна при $a \ge -\lambda_1(\omega_{h^*})$. Поэтому равенство
$$\varkappa(a_1; s_R, s_\rho) = \varkappa(a_2; s_R, s_\rho)\,, \tag{3.20}$$
выражающее, согласно лемме 2.1, необходимое условие разрешимости задачи (3.10) для двух различных пар чисел (a_1, b_1) и (a_2, b_2), невозможно. □

[18] Его доказательство (составляющее вклад третьего автора в эту работу) приведено в параграфе 5. Основная трудность в доказательстве неравенства (3.18) преодолевается с помощью неравенства (5.19), которое имеет самостоятельный интерес.

[19] Требование $h \le h^*/2$ в (3.19) обеспечивает используемое нами в задаче (3.10) неравенство
$$b \ne 0 \quad \overset{(3.7)}{\Longleftrightarrow} \quad a > -\lambda_1(\omega_h).$$

Замечание 3.1 *Для произвольной отличной от диска односвязной области* $\omega \Subset \mathbb{R}^2$ *с гладкой границей* $\partial\omega$ *справедливы [4, 22] два факта, относящиеся к функции* $a \mapsto \varkappa(a; s_R, s_\rho)$ *:*

1) эта функция аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{\cup_{j\geq 2}(-\lambda_j + i0)\}$*, где* λ_j *— это* j *-ое собственное значение оператора* $-\Delta : H_0^1(\omega) \to H^{-1}(\omega)$*;*

2) главный член ее асимптотики при $a \to \infty$ *есть* $\varkappa_0(a) \overset{(3.17)}{\sim} -\frac{R-\rho}{4R\rho}\, a^{-3/2}$ *.*

Из этих двух фактов (первый из них устанавливается сравнительно легко) сразу следует теорема [4, 22] о том, что обратная задача (в ее "идеализированной" постановке) имеет не более чем конечное множество решений в классе аффинных функций.

До сих пор не подтверждена (или не опровергнута) гипотеза о том, что обратная задача в области с гладкой границей имеет ровно одно решение в классе аффинных функций. Более того, остаются открытыми вопросы о существовании или несуществовании (отличной от диска) **выпуклой** *области с гладкой границей, в которой обратная задача имеет ровно одно или, наоборот, не менее двух решений в классе аффинных функций. Численный анализ этих вопросов затронут в работе [2].*

3. Рассмотрим вопрос о реконструкции функции $f \in \mathcal{F}_{exp} \overset{def}{=} \{f : \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = \frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu}\ \}\Big|_{(p>0,\ q>0)}$, для которой при заданной функции $\Phi : \gamma \to \mathbb{R}$ найдется решение u задачи

$$\Delta u = \frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu} \quad \text{в} \quad \omega = \omega_h\,, \qquad u\Big|_{\gamma=\partial\omega_h} = 0\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\gamma = \Phi\,, \tag{3.21}$$

Предложение 3.2 *Решение* u *задачи* (3.21) *существует т. и т.т., к.* $\Phi = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\nu}\big|_{s\in\gamma}$*, где* v_λ *есть решение*[20] *следующей факторизованной задачи*

$$\Delta v = \lambda e^v > 0 \quad \textit{в} \quad \omega, \quad v\big|_{\partial\omega} = 0. \tag{3.22}$$

При этом, параметр μ *равен*

$$\mu_{(\lambda,\Phi)} \overset{def}{=} \frac{\int_\gamma \partial v_\lambda/\partial\nu}{\int_\gamma \Phi}. \tag{3.23}$$

♡ Соотношение

$$v = 2\mu u \tag{3.24}$$

связывает решения задач (3.21) и (3.22). При этом $\partial v/\partial\nu\Big|_\gamma \overset{(3.24)}{=} \frac{1}{b}\partial u/\partial\nu\Big|_\gamma \overset{(3.21)}{=} \Phi/b.$ □

Если $\omega = D^R$, то решение $v_\lambda = v_\lambda^R$ задачи (3.22) зависят от полярного радиуса r и задается, как нетрудно проверить, следующей формулой

$$v_\lambda^R(r) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{4q^2(R)}{\lambda} - 2\ln\Big(q^2(R) - r^2\Big)\right), \qquad \text{где} \quad q(R) = \frac{1+\sqrt{1+\lambda R^2}}{\sqrt{\lambda}} > R\,. \tag{3.25}$$

Поскольку $\mu \overset{(3.23)}{=} \mu_{(\lambda,\Phi)}$, функция $f : u \mapsto \frac{\lambda}{\mu}e^{2\mu u}$ полностью характеризуется параметром $\lambda > 0$. Будем поэтому считать параметр $\lambda > 0$ аргументом введенных формулами (3.3), (3.5) функций

$$\varkappa : \lambda \mapsto \varkappa(\lambda; s_R, s_\rho) \overset{def}{=} \frac{\partial v_\lambda}{\partial\nu}\Big|_{s_R}\Big/\frac{\partial v_\lambda}{\partial\nu}\Big|_{s_\rho} \qquad s_R \in \gamma_1^R\,,\ \ s_\rho \in \gamma_1^\rho\,, \tag{3.26}$$

и

$$\varkappa_0 : \lambda \mapsto \varkappa_0(\lambda) \overset{def}{=} \frac{dv_\lambda^R}{dr}\Big|_{r=R}\Big/\frac{dv_\lambda^\rho}{dr}\Big|_{r=\rho} \overset{(3.25)}{=} \frac{R(1+\sqrt{1+\lambda\rho^2})}{\rho(1+\sqrt{1+\lambda R^2})}\,. \tag{3.27}$$

Через $\dot\varkappa$ и $\dot\varkappa_0$ будем обозначать производные этих функций по параметру λ. Из (3.27) очевидным образом следует, что

$$\dot\varkappa_0(\lambda) = \frac{(\rho^2 - R^2)\alpha}{2\sqrt{1+\lambda R^2}\sqrt{1+\lambda\rho^2}(1+\sqrt{1+\lambda R^2})^2},$$

[20] См. примечание 16.

где

$$\alpha = 1 + \frac{\rho^2 + R^2 + \lambda\rho^2 R^2}{\rho^2\sqrt{1+\lambda R^2} + R^2\sqrt{1+\lambda\rho^2}} > 0.$$

Лемма 3.2 *Существует такое* $h^* > 0$, *что для области* ω_h *с* $h \le h^*$ *справедливо неравенство*

$$\dot{\varkappa}(\lambda) < 0 \qquad \textit{для любого} \quad \lambda > 0\,. \tag{3.28}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 3.1.

Теорема 3.2 *Существует такое достаточно малое* $h^* > 0$, *зависящее от* R, ρ *и геометрии "материковой" части семейства областей* ω_h, *что при* $h \le h^*$ *существует лишь одна пара положительных чисел* (λ, μ), *для которых при заданной функции* $\Phi : \gamma \to \mathbb{R}$ *найдется функция* u, *удовлетворяющая условиям* (3.21). *Эта функция задается формулой* $u = \frac{v_\lambda}{2\mu}$, *где* v_λ *есть решение задачи* (3.22).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

4. Пусть a, b, λ, μ и r — положительные числа. Обозначим через u_1^r решение задачи

$$\Delta u_1 = au_1 + b \ge 0 \qquad \text{в} \quad D^r \stackrel{def}{=} \{\xi \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2+y^2} < r\}\,, \qquad u_2\big|_{\partial D^r} = 0\,, \tag{3.29}$$

а через u_2^r — решение такой задачи:

$$\Delta u_2 = \frac{\lambda e^{2\mu u_2}}{\mu} \qquad \text{в} \quad D^r\,, \qquad u_2\big|_{\partial D^r} = 0\,. \tag{3.30}$$

Непосредственная проверка показывает, что[21]

$$u_1^r : [0,r] \ni \xi \mapsto u_1^r(\xi) = \frac{b}{a}\left(\frac{I_0(\sqrt{a}\xi)}{I_0(\sqrt{a}r)} - 1\right)\,, \tag{3.31}$$

а

$$u_2^r : [0,r] \ni \xi \mapsto u_2^r(\xi) = \frac{1}{2\mu}\left(\ln\frac{4q^2(r)}{\lambda} - 2\ln\big(q^2(r) - \xi^2\big)\right), \qquad \text{где} \quad q(r) = \frac{1+\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}} > r\,. \tag{3.32}$$

Предложение 3.3 *Пусть* $0 < \rho < R = 1$. *Тогда функции* u_1^R, u_2^R, u_1^ρ, u_2^ρ *удовлетворяют условиям*

$$\frac{d}{dr}u_1^R(r)\bigg|_{r=R} = \frac{d}{dr}u_2^R(r)\bigg|_{r=R} = 1\,, \qquad \frac{d}{dr}u_1^\rho(r)\bigg|_{r=\rho} = \frac{d}{dr}u_2^\rho(r)\bigg|_{r=\rho} \tag{3.33}$$

в том и только в том случае, когда входящие в формулы (3.31)–(3.32) *положительные числа* b, λ *и* μ *следующим образом зависят от параметра* $a > 0$:

$$b = \sqrt{a}\,\frac{I_0(\sqrt{a})}{I_1(\sqrt{a})}, \qquad \lambda = \mu(\mu+2), \qquad \mu = \frac{2(c-\rho)}{(1-c^2)\rho}, \qquad \textit{где} \quad c = \frac{I_1(\sqrt{a}\rho)\,I_0(\sqrt{a})}{I_0(\sqrt{a}\rho)\,I_1(\sqrt{a})}\,, \tag{3.34}$$

♡ Поскольку

$$\frac{d}{dr}u_1^r(\xi) = \frac{b}{\sqrt{a}}\frac{I_1(\sqrt{a}\xi)}{I_0(\sqrt{a}r)}\,, \qquad \text{а} \qquad \frac{d}{dr}u_2^r(\xi) = \frac{2\xi}{\mu\big(q^2(r)-\xi^2\big)}\,, \tag{3.35}$$

то первые два равенства в (3.33) означают, что

$$b = \sqrt{a}\,\frac{I_0(\sqrt{a})}{I_1(\sqrt{a})} \qquad \text{и} \qquad \frac{2}{\mu\big(q^2(1)-1\big)} = 1 \quad \stackrel{(3.31)}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda = \mu(\mu+2)\,. \tag{3.36}$$

[21] Функции Бесселя I_0, I_1 представлены в формулах (4.4), (4.5).

Последнее равенство в (3.33) эквивалентно таким соотношениям:

$$\frac{2\rho}{\mu\big(q^2(\rho)-\rho^2\big)}=c \quad \stackrel{(3.31)}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\rho(2+\mu)}{1+\sqrt{1+(2+\mu)\mu\rho^2}}=c \quad \stackrel{\mu>0,\ \rho\neq 1}{\Longleftrightarrow} \quad \mu=\frac{2(c-\rho)}{(1-c^2)\rho}\,, \tag{3.37}$$

где

$$c=\frac{d}{dr}u_1^{\rho}(r)\Big|_{r=\rho} \quad \stackrel{(3.35)-(3.36)}{\Longleftrightarrow} \quad c=\frac{I_1(\sqrt{a}\rho)\,I_0(\sqrt{a})}{I_0(\sqrt{a}\rho)\,I_1(\sqrt{a})}\,. \qquad \Box \tag{3.38}$$

Рассмотрим пример “реальной” постановки обратной задачи (0.1)–(0.2), т.е. задачи о поиске существенно различных функций $f=f_j\in\mathcal{F}$, для которых имеются функции $u=u_{f_j}$, удовлетворяющие,

во-первых, уравнению

$$\Delta u(x,y)=f\big(u(x,y)\big)\geq 0$$

в области $\omega=\omega_h$, состоящей из двух непересекающихся дисков D^R и D^ρ радиусов $R=1$ и $\rho=1/2$, соединенных очень узкой короткой перемычкой[22] и,

во-вторых, таким граничным условиям:

$$u\Big|_{\gamma=\partial\omega}=0 \qquad \text{и} \qquad \max_{s\in\gamma_1\subset\gamma}\Big|\frac{\partial u(s)}{\partial\nu}-\Psi(s)\Big|\leq\eta\ll 1\,,$$

где Ψ — заданная фиксированная функция, $\gamma_1=\partial D_1^R\cup\partial D_1^\rho$, а

$$\partial D_1^R=\{s\in\partial D^R\ \Big|\ |\theta|<\theta_1<\pi\ \} \qquad \text{и} \qquad \partial D_1^\rho=\{s\in\partial D^\rho\ \Big|\ |\theta|<\theta_1<\pi\ \}$$

— это (см. рис 1) те части границы γ области ω_h, которые несколько отдалены от перемычки, т.е. от тех точек, в которых кривизна кривой $\gamma=\partial\omega_h$ чрезмерно велика.

Зададим следующим образом функцию

$$\Psi(s)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad s\in D_1^R\,,\\ \Psi\ \stackrel{(3.38)}{=}\ \Psi_a\ \stackrel{def}{=}\ \frac{I_1(\sqrt{a}/2)\,I_0(\sqrt{a})}{I_0(\sqrt{a}/2)\,I_1(\sqrt{a})} & \text{при}\quad s\in D_1^\rho\,.\end{cases} \tag{3.39}$$

Как следует из предыдущих построений и формул

$$b=\sqrt{a}\,\frac{I_0(\sqrt{a})}{I_1(\sqrt{a})},\qquad \lambda=\mu(\mu+2),\qquad \mu=\frac{2(c-\rho)}{(1-c^2)\rho},\qquad \text{где}\quad c=\frac{I_1(\sqrt{a}\rho)\,I_0(\sqrt{a})}{I_0(\sqrt{a}\rho)\,I_1(\sqrt{a})}\,,$$

для коэффициентов $b=b(a)$, $\lambda=\lambda(a)$ и $\mu=\mu(a)$, определяющих функции

$$f_1:\mathbb{R}\ni u\mapsto f_1(u)=au+b\,,\qquad f_2:\mathbb{R}\ni u\mapsto f_2(u)=\frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu}\,,$$

в этих условиях и при достаточно малой ширине перемычки h, функции $f_1\in\mathcal{F}_{aff}$ и $f_2\in\mathcal{F}_{exp}$ являются существенно различными (см. (0.4)) в смысле такого оцениваемого (экспертами) коэффициента “различия”:

$$\mathcal{E}_{L^p}(u_{f_1},u_{f_2})=\frac{2\,\|f_1(u_{f_1})-f_2(u_{f_2})\|_{L^p}}{\|f_1(u_{f_1})\|_{L^p}+\|f_2(u_{f_2})\|_{L^p}}\,,$$

А именно, при достаточно малом $h>0$

- <u>если $a=10$</u>, то

$$\Psi_a\approx 0.75\,,\quad \mathcal{E}_{L^2}\approx 0.03\,,\quad \mathcal{E}_{L^\infty}\approx 0.1\,,\quad b\approx 3.85\,,\quad \lambda\approx 9.74\,,\quad \mu\approx 2.28\,,$$

при этом полный ток $I\approx 8.64$;

- <u>если $a=10^2$</u>, то

$$\Psi_a\approx 0.94\,,\quad \mathcal{E}_{L^2}\approx 0.14\,,\quad \mathcal{E}_{L^\infty}\approx 0.5\,,\quad b\approx 10.5\,,\quad \lambda\approx 276\,,\quad \mu\approx 15.6\,,$$

при этом полный ток $I\approx 9.2$.

Представление о функциях u_{f_1}, u_{f_2}, $f_1(u_{f_1})$, $f_2(u_{f_2})$ дают их “предельные” (при $h\to 0$) графики, изображенные (для $a=10$ и $a=10^2$) на рис. 2.

[22] Это означает, что “материковая” часть этой области представленной на (см. рис. 1) свелась к этой перемычке.

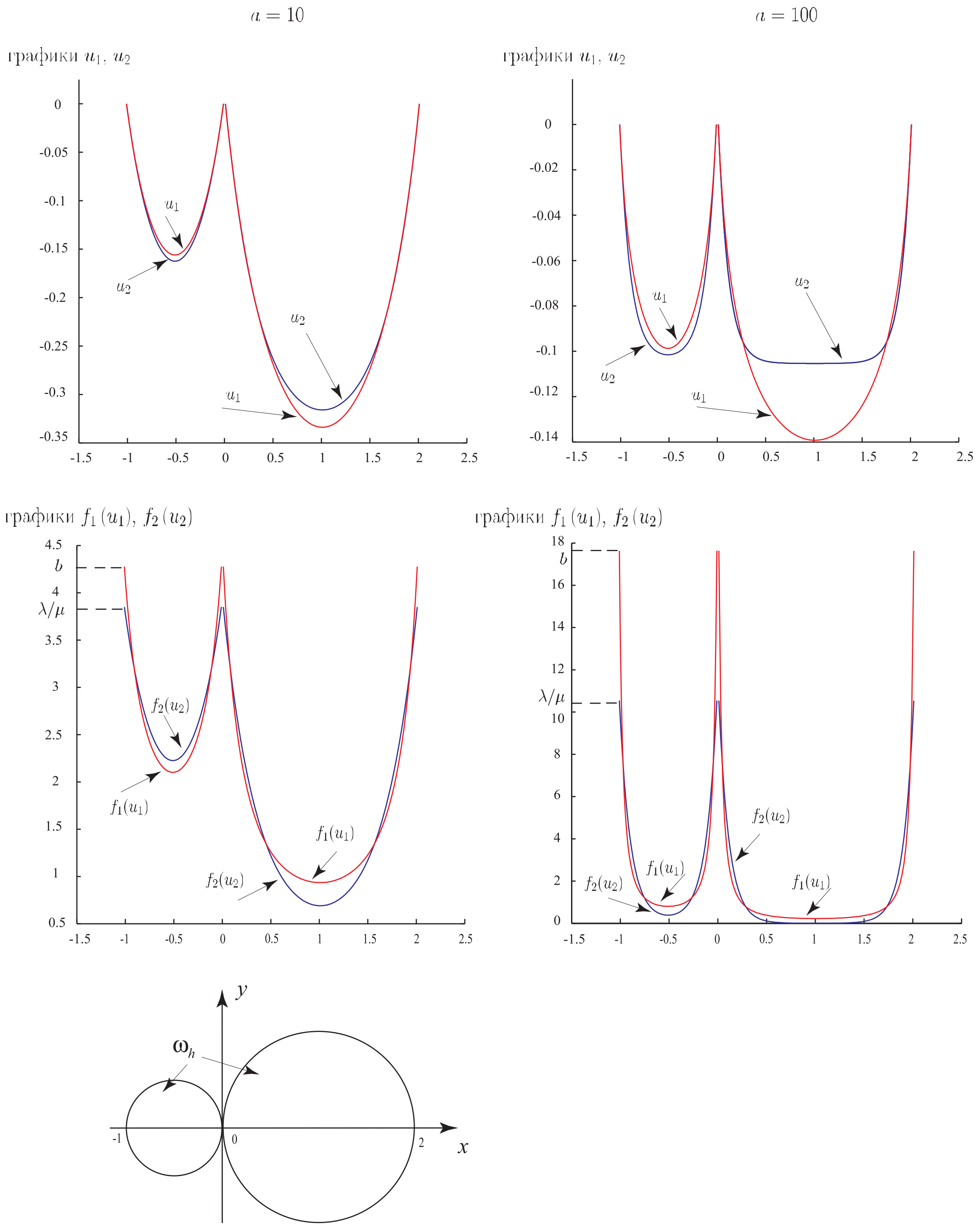

Рис. 2. Графики функций $x \mapsto u_k(x, 0)$, $x \mapsto f_k(u_k(x, 0))$ при $a = 10$ и $a = 100$ в предельной при $h \to 0$ области ω_h, состоящей из двух дисков радиусов $1/2$ и 1. Соединяющая их “перемычка” в пределе стягивается в некоторую кривую (состоящую не более чем из двух отрезков), которая на рисунке заменена началом координат.

§ 4 Доказательство леммы 3.1

Благодаря неравенству (3.18), для доказательства леммы 3.1 достаточно показать, что для любого $t>0$ (в частности, для $t \overset{(3.18)}{=} C/2$) существует такое $h^*>0$, что

$$|\dot{\varkappa}(a)-\dot{\varkappa}_0(a)| \le \frac{t}{1+a^2} \qquad \text{при} \quad h \le \frac{h^*}{2} \quad \text{и} \quad a \ge -\lambda_1(\omega_{h^*}) > -\lambda_1(\omega_h). \tag{4.1}$$

Имеем $\varkappa=\delta_R/\delta_\rho$, $\varkappa_0=d_R/d_\rho$, где

$$\delta_R=\frac{\partial v_a}{\partial \nu}\Big|_{s=s_R}, \quad \delta_\rho=\frac{\partial v_a}{\partial \nu}\Big|_{s=s_\rho}, \quad d_R=\frac{dv_a^R}{dr}\Big|_{r=R}, \quad d_\rho=\frac{dv_a^\rho}{dr}\Big|_{r=\rho}.$$

Поэтому

$$\dot{\varkappa}=\frac{\dot{\delta}_R\delta_\rho-\delta_R\dot{\delta}_\rho}{\delta_\rho^2}, \qquad \dot{\varkappa}_0=\frac{\dot{d}_R d_\rho-d_R\dot{d}_\rho}{d_\rho^2}. \tag{4.2}$$

Полагая $\varepsilon_R \overset{def}{=} \delta_R-d_R$, $\varepsilon_\rho \overset{def}{=} \delta_\rho-d_\rho$, получаем

$$\dot{\varkappa}-\dot{\varkappa}_0=\frac{\dot{\varepsilon}_R d_\rho-\dot{\varepsilon}_\rho d_R}{d_\rho^2}+\frac{\varepsilon_\rho \dot{d}_R-\varepsilon_R\dot{d}_\rho}{d_\rho^2}+\frac{\dot{\varepsilon}_R\varepsilon_\rho-\varepsilon_R\dot{\varepsilon}_\rho}{d_\rho^2} - \varepsilon_\rho\frac{d_\rho+\delta_\rho}{d_\rho^2\,\delta_\rho^2}\big[\dot{\delta}_R\delta_\rho-\delta_R\dot{\delta}_\rho\big]. \tag{4.3}$$

Функция d_R явно выражается через функции Бесселя индексов 0 и 1 :

$$J_0(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \qquad I_0(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{4.4}$$

$$J_1(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}=-J_0'(x), \qquad I_1(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}=I_0'(x). \tag{4.5}$$

Имеем

$$d_R(a)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a|}}\frac{J_1(R\sqrt{|a|})}{J_0(R\sqrt{|a|})} & \text{при} \quad -(\mu_1/R)^2<a<0, \\ R/2 & \text{при} \quad a=0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{I_1(R\sqrt{a})}{I_0(R\sqrt{a})} & \text{при} \quad a>0, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $\mu_1=2.4048\ldots$ — наименьший положительный нуль функции J_0. Отметим, что $\lambda_1(D^R)=(\mu_1/R)^2$. Согласно хорошо известным асимптотикам функций Бесселя и их производных,

$$d_R(a)\sim a^{-1/2}, \qquad \dot{d}_R(a)\sim -\frac{1}{2}\,a^{-3/2} \qquad \text{при} \quad a\to+\infty. \tag{4.7}$$

Поэтому, учитывая, гладкость и положительность функции $a\mapsto d(a)\overset{def}{=} d_r(a)$, где $r=R$ или $r=\rho$, а также включение $D^r \subsetneqq \omega_h$ (влекущее неравенство $\lambda_1(D^r)>\lambda_1(\omega_h)$), заключаем, что существуют такие положительные величины C_1 и C_2, зависящие лишь от R, ρ и $\delta\lambda_h \overset{def}{=} \lambda_1(D^R)-\lambda_1(\omega_h)>0$, что

$$C_1\le\, d(a)\,(1+a_+^{1/2})\le C_2, \qquad |\,\dot{d}(a)\,|\le\frac{C_2}{1+a_+^{3/2}} \qquad \text{при} \quad a\ge-\lambda_1(\omega_h)=-\lambda_1(D^R)+\delta\lambda_h. \tag{4.8}$$

где $a_+=\max(0,a)$. Отсюда и (4.3) получаем, что лемма 3.2 будет доказана, если будет установлено, что для некоторого числа $C_3=C_3(C_1,C_2)>1$ и любого $t>0$ найдется такое $h^*>0$, что

$$C_3\left|\frac{\dot{\varepsilon}(a)}{d(a)}\right|\le\frac{t}{1+a_+^2}, \quad C_3\left|\varepsilon(a)\,\frac{\dot{d}(a)}{d^2(a)}\right|\le\frac{t}{1+a_+^2} \qquad \text{при любом} \quad h\le h^*/2 \quad \text{и} \quad a\ge-\lambda_1(\omega_{h^*}), \tag{4.9}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_R$ или $\varepsilon = \varepsilon_\rho$. Для доказательства оценок (4.9) достаточно (в силу (4.8)) показать, что для некоторого числа $C_4 = C_4(C_1, C_2) > 1$ и любого $t > 0$ найдется такое $h^* > 0$, что

$$C_4\big|\varepsilon(a)\big| \le \frac{t}{1 + a_+^{1/2}}\,, \qquad C_4\big|\,\dot\varepsilon(a)\big| \le \frac{t}{1 + a_+^2} \qquad \text{при любом} \quad h \le h^*/2 \quad \text{и} \quad a \ge -\lambda_1(\omega_{h^*})\,. \tag{4.10}$$

Ясно, что достаточно установить оценки (4.10) лишь для $\varepsilon = \varepsilon_R$. Заметим, что

$$\varepsilon_R = \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{s=s_R}, \quad \dot\varepsilon_R = \frac{\partial \dot w}{\partial r}\Big|_{s=s_R}, \quad \text{где} \quad w = (v_a - v_a^R)\Big|_{D=D^R}. \tag{4.11}$$

При этом,

$$\Delta w - aw = 0 \quad \text{в} \quad D = D^R\,, \qquad w\big|_{\partial D \smallsetminus \Gamma_h} = 0\,, \quad w\big|_{\Gamma_h} = v_a\big|_{\Gamma_h}\,, \tag{4.12}$$

$$\Delta \dot w - a\dot w = w \quad \text{в} \quad D = D^R\,, \qquad \dot w\big|_{\partial D \smallsetminus \Gamma_h} = 0\,, \quad \dot w\big|_{\Gamma_h} = \dot v_a\big|_{\Gamma_h}\,, \tag{4.13}$$

где

$$\Gamma_h = \partial D \cap \omega_h\,, \tag{4.14}$$

а $\dot v_a$ есть решение следующей задачи

$$\Delta \dot v_a - a\dot v_a = v_a \quad \text{в} \quad \omega\,, \qquad \dot v_a\big|_\Gamma = 0\,. \tag{4.15}$$

Чуть ниже доказывается

Лемма 4.1 . *Для любого $\alpha > 0$ существует такое $h^* > 0$, что*

$$\max_{\Gamma_h}\Big|\,v_a\big|_{\Gamma_h}\Big| \le \alpha, \qquad \max_{\Gamma_h}\Big|\,\dot v_a\big|_{\Gamma_h}\Big| \le \alpha \qquad \textit{при любом} \quad h \le \widehat{h} = h^*/2 \quad \textit{и} \quad a \ge -\lambda_1(\omega_{h^*})\,. \tag{4.16}$$

Проверим, что эта лемма позволяет установить оценки (4.10) и потому завершить доказательство леммы 3.1. В самом деле, в точке $z = (x, y) \in \omega$, согласно формуле Грина, имеем

$$w(z) = \int_{s\in\Gamma_h} v_a(s)\frac{\partial}{\partial \nu_s}G_a(z - s)\,ds\,, \quad \dot w(z) = \int_{s\in\Gamma_h} \dot v_a(s)\frac{\partial}{\partial \nu_s}G_a(z - s)\,ds + \int\!\!\int_{\zeta\in D^R} w(\zeta)G_a(z - \zeta)\,d\zeta\,, \tag{4.17}$$

где функция Грина $z = (x, y) \mapsto G_a(z)$ определяется как решение следующей задачи

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - a\Big)G_a(z)\Big|_{z=(x,y)\in\omega} = \delta(x, y), \qquad G_a(z)\Big|_{z\in\partial\omega} = 0\,.$$

Известно (см., например, [16]), что эта функция Грина и ее производные экспоненциально убывают при $a \to \infty$, точнее, имеют место такие оценки:

$$|\partial_x^k \partial_y^l G_a(x, y)| \le C_{kl} \exp\left(-C(r_0)\sqrt{a}\right) \qquad \text{при} \quad a \to \infty \quad \text{и} \quad |z| \ge r_0 > 0, \tag{4.18}$$

где $C_{kl} > 0$ и $C(r_0) > 0$ — некоторые константы. Кроме того, очевидно, что при $|z| \ge r_0$ существует такая константа $C^*(r_0) > 0$, что $|G_a(z)| \le C^*(r_0)$. Поэтому оценки (4.10) следуют из формул (4.17).

Доказательство леммы 4.1. Прежде всего отметим, что

$$\tau \stackrel{def}{=} \lambda_1(\omega_{\widehat h}) - \lambda_1(\omega_{h^*}) > 0\,, \quad \text{т.к.} \quad \omega_{\widehat h} \subsetneqq \omega_{h^*}\,. \tag{4.19}$$

Поэтому существует такое число $C_\tau > 0$, что

$$|v_a| \le C_\tau \le \infty \qquad \text{при} \quad a \ge -\lambda_1(\omega_{h^*}) \quad \text{и} \quad h \in (0, \widehat{h}\,]. \tag{4.20}$$

Рассмотрим далее две подобласти: $D = D^R$ и $\omega_h \setminus D$. В каждой из этих подобластей, также как и в области ω_h, обе функции v_a и $\dot v_a$ удовлетворяют уравнению $\Delta\psi - a\psi = g$, где $g \stackrel{(3.11)}{=} 1$ для

$\psi = v_a$ и $g \overset{(4.15)}{=} v_a \overset{(4.20)}{\in} [-C_\tau, C_\tau\,]$ для $\psi = \dot v_a$. Тем самым, существует такая константа $K_\tau > 0$, что

$$|\psi| \le K_\tau \le \infty \qquad \text{при} \quad a \ge -\lambda_1(\omega_{h^*}) \quad \text{и} \quad h \in (0, \widehat{h}\,].$$

При этом, на границе подобластей D и $\omega_h \setminus D$ функция ψ всюду равна нулю, кроме кривой Γ_h.

Покажем теперь, что импликация

$$\Big(\exists\ \alpha > 0\ \ \forall\ h^* > 0\ \ \exists\ h \le \widehat{h} = h^*/2\ \ \exists\ a \ge -\lambda_1(\omega_{h^*})\ \Big) \Longrightarrow\ \max_{\Gamma_h} \big|\,\psi\big|_{\Gamma_h}\big| > \alpha \tag{4.21}$$

приводит к абсурду. Согласно сделанному предположению, на некоторой дуге $\Gamma_* \subset \Gamma_h$ имеем: $|\psi| > \alpha/2$ при любом, сколь угодно малом $h^* > 0$. При этом, $\psi = 0$ на $\partial\omega_h$. Поэтому в некоторой точке $z_* \in \Gamma_*$ производная функции $\psi\big|_{\omega_h \setminus D}$ по направлению внешней (относительно $\omega_h \setminus D$) нормали к Γ_* стремится при $h_* \to 0$ к $-\infty$ (если $\psi(z_*) < 0$) или к $+\infty$ (если $\psi(z_*) > 0$). Эта производная должна совпадать (в той же точке $z_* \in \Gamma_*$) с нормальной производной функции $\psi\big|_D$ по направлению внутренней (относительно D) нормали к Γ_*. Но при любом h^* эта производная ограничена снизу при $\psi(z_*) < 0$, а при $\psi(z_*) > 0$ она ограничена сверху (поскольку $\psi\Big|_{\partial D \setminus \Gamma_h} = 0$). Полученное противоречие доказывает лемму 4.1, а тем самым, и лемму 3.1.

§ 5 Доказательство неравенства (3.18)

Рассмотрим логарифмические производные функций Бесселя (см. (4.4)–(4.5))

$$F(x) \overset{def}{=} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \quad \text{для} \quad x > 0\,, \qquad \Phi(x) \overset{def}{=} \frac{J_1(x)}{J_0(x)} \quad \text{для} \quad x \in (0, \mu_1)\,, \tag{5.1}$$

где $\mu_1 = 2.4048\ldots$ — наименьший положительный нуль J_0.

Лемма 5.1 . *При любых* $q > 1$ *и* $x \in (\,0,\, \mu_1/q)$ *справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)}\right) \ge \frac{(q-1)x}{8}\,. \tag{5.2}$$

Лемма 5.2 . *При любых* $q > 1$ *и* $x > 0$ *верно неравенство*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F(qx)}{F(x)}\right) \le -\frac{(q-1)x}{9q^3(1+x^4)}\,. \tag{5.3}$$

Выведем неравенство (3.18) из[23] лемм 5.1 и 5.2 . Заметим, что

$$\varkappa_0(a) \overset{(3.5)}{=} \begin{cases} \Phi(R\sqrt{|a|})/\Phi(\rho\sqrt{|a|}) & \text{при} \quad a < 0\,, \\[2ex] R/\rho & \text{при} \quad a = 0\,, \\[2ex] F(R\sqrt{a})/F(\rho\sqrt{a}) & \text{при} \quad a \ge 0\,. \end{cases} \tag{5.4}$$

Пусть $x = \rho\sqrt{|a|}$, а $q{=}R/\rho$. Применяя леммы 5.1 и 5.2, получаем, что для любого $a < 0$

$$\dot\varkappa_0(a) = -\frac{\rho}{2\sqrt{|a|}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)}\right) \overset{(5.2)}{\le} -\frac{(q-1)x}{8} = -\frac{\rho^2(q-1)}{16} \le -\frac{C^-}{(1+a^2)}, \tag{5.5}$$

где $C^- = \frac{\rho(R-\rho)}{16}$, а для $a > 0$

$$\dot\varkappa_0(a) = \frac{\rho}{2\sqrt{a}}\frac{d}{dx}\left(\frac{F(qx)}{F(x)}\right) \overset{(5.3)}{\le} -\frac{\rho}{2\sqrt{a}}\,\frac{(q-1)x}{9q^3(1+x^4)} = -\frac{(q-1)\rho^2}{18q^3(1+\rho^4a^2)} \le -\frac{C^+}{(1+a^2)}, \tag{5.6}$$

[23]Учитывая, что $\dot\varkappa_0(0) \overset{(3.17)}{=} -\frac{R}{\rho}\,\frac{R^2-\rho^2}{8}$, нужно доказать неравенство (3.18) лишь для $a \ne 0$.

где $C^+ = \min(1,\rho^4)\frac{R-\rho}{18R^3}$.

В нижеследующих доказательствах лемм 3 и 4 используются формулы[24]

$$x\frac{dF(x)}{dx} = x\Big(1 - F^2(x)\Big) - F(x)\,, \qquad x\frac{d\Phi(x)}{dx} = x\Big(1 + \Phi^2(x)\Big) - \Phi(x)\,, \tag{5.7}$$

а также следствие теоремы Лагранжа о приращениях дифференцируемой функции $\Psi \neq 0$:

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\Psi(qx)}{\Psi(x)}\Big) = \frac{\Psi(qx)}{\Psi(x)}\left(\frac{\psi(qx)-\psi(x)}{x}\right) = \frac{\Psi(qx)}{\Psi(x)}(q-1)\psi\,'(\xi)\,, \quad \text{где} \quad \psi(x) = \frac{x\Psi\,'(x)}{\Psi(x)}\,, \quad \text{а} \quad \xi \in (x, qx). \tag{5.8}$$

Доказательство леммы 3. Проверим сначала, что

$$x + \frac{x^3}{8} < 2\Phi(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < \mu_1 \qquad \text{и} \qquad \Phi(x) \le x \quad \text{при} \quad 0 < x \le \sqrt{2}. \tag{5.9}$$

Воспользуемся тем, что степенные ряды для J_0 и J_1 (см. (4.4)–(4.5)) являются обвертывающими [13] для этих функций при любом $x \in \mathbb{R}$. В частности, для $\forall x > 0$ верны оценки

$$1 - x^2/4 \le J_0(x) \le 1 - x^2/4 + x^4/64 \equiv (1 - x^2/8)^2\,, \qquad x/2 - x^3/16 \le J_1(x) \le x/2. \tag{5.10}$$

Поэтому в области положительности функций J_0 , J_1 и оценивающих их многочленов справедливы неравенства

$$\frac{J_1(x)}{J_0(x)} \le \frac{x/2}{1 - x^2/4} \quad \text{для} \quad 0 < x \le 2\,, \qquad \frac{x/2 - x^3/16}{(1 - x^2/8)^2} \le \frac{J_1(x)}{J_0(x)} \le x/2 \quad \text{для} \quad 0 < x < \mu_1\,. \tag{5.11}$$

первое из этих неравенств дает оценку сверху в (5.9), т.к. $1 - x^2/4 \ge 1/2$ при $0 < x \le \sqrt{2}$. Второе неравенство в (5.11) приводит к оценке снизу в (5.9), поскольку

$$\frac{x/2 - x^3/16}{(1 - x^2/8)^2} = \frac{x/2}{1 - x^2/8} > \frac{x}{2}\Big(1 + x^2/8\Big)\,. \tag{5.12}$$

Оценим теперь производную функции $\varphi(x) = \frac{x\Phi\,'(x)}{\Phi(x)}$. Из (5.7) следуют такие соотношения для производной функции $f(x) = xF'(x)/F(x)$:

$$f\,'(x) = F^{-2}(x)\left(2F(x) + xF^4(x) - x\right), \qquad \varphi\,'(x) = \Phi^{-2}(x)\left(2\Phi(x) + x\Phi^4(x) - x\right), \tag{5.13}$$

а из первого неравенства (5.9) вытекает

$$\varphi\,'(x) > \Phi^{-2}(x)\left(x^3/8 + x\Phi^4(x)\right) = x\left[\Phi^2(x) + \big(x/\Phi(x)\big)^2/8\right] \qquad \text{при} \quad 0 < x < \mu_1\,. \tag{5.14}$$

Кроме того, из (5.9) следует

$$x/\Phi(x) \ge 1 \quad \text{при} \quad 0 < x \le \sqrt{2}\,, \qquad 1/\sqrt{2} \le x/2 < \Phi(x) \quad \text{при} \quad \sqrt{2} \le x < \mu_1\,.$$

Отсюда и (5.14) вытекает

$$\varphi\,'(x) > x/8 \quad \text{при} \quad 0 < x \le \sqrt{2}\,, \qquad \varphi\,'(x) > x\Phi^2(x) > x/2 \quad \text{при} \quad \sqrt{2} \le x < \mu_1\,, \tag{5.15}$$

что почти мгновенно влечет лемму 2, ибо

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)}\right) \overset{(5.8)}{\ge} \frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)}(q-1)\left(\min_{0<x<\mu_1}\Phi\,'(x)\right) \overset{(5.15)}{\ge} \frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)}\frac{(q-1)x}{8}\,. \tag{5.16}$$

Осталось показать, что $\Phi(qx)/\Phi(x) \ge 1$. Это так, поскольку $q > 1$, а $\Phi'(x)>0$. Последнее верно, т.к.

$$\Phi'(x) \overset{(5.7)}{=} \Phi^2(x) + (1 - \Phi(x)/x) \overset{(5.9)}{\ge} \Phi^2(x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x \le \sqrt{2}\,, \tag{5.17}$$

а если $\sqrt{2} < x < \mu_1$, то $\Phi(x)/x < \Phi(x)/\sqrt{2}$ и потому

$$\Phi'(x) \overset{(5.7)}{=} 1 + \Phi^2(x) - \Phi(x)/x > 1 + \Phi^2(x) - \Phi(x)/\sqrt{2} = (1 - \Phi(x))^2 + (2 - 1/\sqrt{2})\Phi(x) > \Phi(x)\,. \tag{5.18}$$

[24] Формулы (5.7) получаются непосредственным дифференцированием функций F и Φ с использованием известных соотношений $I_1'(x) = I_0(x) - \frac{1}{x}I_1(x)$ и $J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x}J_1(x)$. Напомним также, что $I_1(x) = I_0'(x)$, а $J_1(x) = -J_0'(x)$.

Доказательство леммы 4 опирается на следующее неравенство[25] для функции $I \overset{def}{=} I_0$:

$$I(x)I''(x) - I'^2(x) > \frac{1}{2x^2} I^2(x)\,, \quad \text{если} \quad x \geq \sqrt{2}\,. \tag{5.19}$$

Учитывая тождество $I''(x) = I(x) - I'(x)/x$ и формулы (5.1), перепишем неравенство (5.19) в такой форме:

$$F^2(x) < 1 - \frac{1}{x}\,F(x) - \frac{1}{2x^2}\,, \qquad \text{если} \quad x \geq \sqrt{2}\,. \tag{5.20}$$

Отсюда

$$F(x) < 1\,, \qquad F^4(x) \overset{(5.20)}{<} 1 + \frac{1}{x^2}\,F^2(x) + \frac{1}{4x^4} - \frac{2}{x}\,F(x) - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\,F(x) \tag{5.21}$$

и потому при $x \geq \sqrt{2}$

$$\Big(2F(x) + xF^4(x) - x\Big) \overset{(5.21)}{<} \frac{1}{x}\,F^2(x) + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,F(x) = \frac{1}{x}\Big(F^2(x) - 1 + F(x)/x\Big) + \frac{1}{4x^3} \overset{(5.20)}{<} -\frac{1}{4x^3}\,. \tag{5.22}$$

Тем самым, для производной функции $f(x) = xF'(x)/F(x)$ имеем

$$f'(x) \overset{(5.13)}{=} F^{-2}(x)\,\Big(2F(x) + xF^4(x) - x\Big) \overset{(5.22)}{<} -F^{-2}(x)\frac{1}{4x^3} \overset{(5.21)}{<} -\frac{1}{4x^3} \qquad \text{при} \quad x \geq \sqrt{2}\,. \tag{5.23}$$

Оценим теперь $f'(x)$ при $x \in (0,\,\sqrt{2})$, используя (см. [12], стр. 429) неравенство

$$F(x) \leq x(x^2+4)^{-1/2} \qquad (\forall x > 0)\,.$$

В силу этого неравенства, имеем

$$f'(x) \overset{(5.13)}{\leq} F^{-2}(x)\Big(\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{x^5}{(x^2+4)^2} - x\Big) = xF^{-2}(x)\frac{2(x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 8x^2 - 16}{(x^2+4)^2}\,.$$

Воспользовавшись тем, что $\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{1 + x^2/4} \leq 2(1 + x^2/8) = 2 + x^2/4$, получаем

$$f'(x) \leq 2xF^{-2}(x)\frac{(x^2+4)(2+x^2/4) - 4x^2 - 8}{(x^2+4)^2} = 2xF^{-2}(x)\frac{x^2/4 - 1}{(x^2+4)^2}\,.$$

Но $x^2/4 - 1 < -1/2$, а $(x^2+4)^2 < 36$, т.к. $x^2 < 1$. Поэтому, учитывая, что $x/F(x) \geq 2$ при $x > 0$, получаем

$$f'(x) < -\frac{x^3}{F^2(x)(x^2+4)^2} < -\frac{x^2}{F^2(x)}\frac{x}{36} \leq -\frac{x}{9} \qquad \text{при} \quad 0 < x < \sqrt{2}\,. \tag{5.24}$$

Формулы (5.23) и (5.24) влекут неравенство

$$f'(x) < -\frac{x}{9(1+x^4)} \qquad \text{при} \quad x > 0\,,$$

в силу которого

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{F(qx)}{F(x)}\Big) \overset{(5.8)}{\leq} \frac{F(qx)}{F(x)}(q-1) \sup_{x<\xi<qx} f'(\xi) = -\frac{F(qx)}{F(x)}(q-1) \inf_{x<\xi<qx}\Big(\frac{\xi}{9(1+\xi^4)}\Big)\,. \tag{5.25}$$

[25] Доказательство неравенства (5.19) приводится в заключительной (основной) части этого параграфа. Отметим, что известные асимптотики функции I и ее производных позволяют показать, что

$$I(x)I''(x) - I'^2(x) = \frac{2e^y}{\pi y^3}\Big(1 + \frac{3}{2y} + O\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\Big)\,, \qquad \frac{I^2(x)}{2x^2} = \frac{2e^y}{\pi y^3}\Big(1 + \frac{1}{2y} + O\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\Big) \quad \text{при} \quad y = 2x \to +\infty\,.$$

Отсюда видно, что неравенство (5.19) выполняется при всех достаточно больших x. Основная трудность в том, чтобы доказать справедливость этого неравенства при всех $x \geq \sqrt{2}$. Ограничение $x \geq \sqrt{2}$ не случайно: уже при $x = 1$ верно противоположное неравенство $I(1)I''(1) - I'^2(1) < I^2(1)/2$.

Функция $F(x) = I_1(x)/I_0(x)$, как нетрудно понять, возрастает при $x > 0$ и потому $F(x)/F(qx) \le 1$. Кроме того,

$$\inf_{x<\xi<qx}\Big(\frac{\xi}{9(1+\xi^4)}\Big) \le -(q-1)\min\Big(\frac{x}{9(1+x^4)}, \frac{qx}{9(1+qx^4)}\Big) \le -\frac{q-1}{9q^3}\frac{x}{(1+x^4)},$$

и потому

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{F(qx)}{F(x)}\Big) \overset{(5.25)}{\le} -\frac{q-1}{9q^3}\frac{x}{(1+x^4)}. \tag{5.26}$$

Чтобы завершить доказательство леммы 3, остается проверить справедливость неравенства (5.19).

Доказательство неравенства (5.19)**.** Проверим сначала, что функция

$$D(x) = I(x)I''(x) - I'^2(x)$$

допускает следующие интегральные представления:

$$D(x) = \frac{2e^{2x}}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{(\tau_1-\tau_2)^2 e^{-2x(\tau_1+\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}\sqrt{1-\tau_1}\sqrt{1-\tau_2}}, \tag{5.27}$$

$$D(x) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{(t_1+t_2)^2\cosh\big(x(t_1-t_2)\big) + (t_1-t_2)^2\cosh\big(x(t_1+t_2)\big)}{\sqrt{1-t_1^2}\sqrt{1-t_2^2}}\,dt_1dt_2. \tag{5.28}$$

Воспользуемся тем, что (см., например, [12])

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{e^{xt}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cosh(xt)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{5.29}$$

и потому

$$I'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{te^{xt}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t\sinh(xt)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad I''(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{t^2e^{xt}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t^2\cosh(xt)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{5.30}$$

Из (5.29)–(5.30) получаем

$$D(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \frac{(t_1-t_2)^2\,e^{x(t_1+t_2)}}{\sqrt{1-t_1^2}\,\sqrt{1-t_2^2}}\,dt_1dt_2. \tag{5.31}$$

Отсюда

$$D(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{(t_1^2+t_2^2)\cosh(xt_1)\cosh(xt_2) - 2t_1t_2\sinh(xt_1)\sinh(xt_2)}{\sqrt{1-t_1^2}\,\sqrt{1-t_2^2}}\,dt_1dt_2 =$$

$$\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{(t_1-t_2)^2\cosh(xt_1)\cosh(xt_2) + 2t_1t_2\Big(\cosh(xt_1)\cosh(xt_2) - \sinh(xt_1)\sinh(xt_2)\Big)}{\sqrt{1-t_1^2}\,\sqrt{1-t_2^2}}\,dt_1dt_2. \tag{5.32}$$

Производя в интеграле (5.31) замену переменных $t_j = 1 - 2\tau_j$, придем к представлению (5.27), а поскольку

$$2\cosh a\cosh b = \cosh(a+b) + \cosh(a-b), \quad \cosh a\cosh b - \sinh a\sinh b = \cosh(a-b),$$

то (5.32) влечет (5.28).

Из (5.28) следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$D^{(2n)}(0) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{(t_1+t_2)^2(t_1-t_2)^{2n} + (t_1-t_2)^2(t_1+t_2)^{2n}}{\sqrt{1-t_1^2}\sqrt{1-t_2^2}}\,dt_1dt_2 > 0. \tag{5.33}$$

А так как $D(x) = I(x)I''(x) - I'^2(x)$ — четная целая функция, то из (5.33) заключаем, что эта функция разлагается в ряд Маклорена по четным степеням переменной x с положительными коэффициентами:

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z = (x/2)^2, \;\; a_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.34}$$

Учитывая (4.4), получаем

$$a_0 = 1/2, \quad a_1 = 1/4, \quad a_2 = 1/12, \quad a_3 = 5/288. \tag{5.35}$$

Из (5.34)–(5.35) выводим неравенства

$$D(x) \geq 1/2 + z/4 + z^2/12 + 5z^3/288 \qquad \forall z = (x/2)^2. \tag{5.36}$$

Сделаем еще один подготовительный шаг к доказательству неравенства (5.19). Оценим сверху $I(x)$ и $I^2(x)$ при $|x| \leq \sqrt{12}$ (т.е. при $z \leq 3$). Заметим, что $n! \geq 2 \cdot 3^{n-2}$ $\forall n \geq 2$. Поэтому при $z = (x/2)^2 \leq 3$

$$I(x) \overset{(4.4)}{=} 1 + z + \sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{(n!)^2} \geq 1 + z + \sum_{n \geq 2} \frac{z^2 \cdot 3^{n-2}}{(2 \cdot 3^{n-2})^2} = 1 + z + \sum_{n\geq 2} 3^{2-n} = 1 + z + 3z^2/8.$$

Отсюда

$$I^2(x) \leq 1 + 2z + (7/4)z^2 + (3/4)z^3 + z^4/7 \qquad \text{при} \quad |x| \leq \sqrt{12}.$$

Следовательно,

$$0.5x^{-2}I^2(x) = I^2(x)/(8z) \leq 1/(8z) + 1/4 + 7z/32 + 3z^2/32 + z^3/56 \qquad \text{при} \quad z = (x/2)^2 \leq 3. \tag{5.37}$$

Теперь уже нетрудно доказать неравенство (5.19) для $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{12}$. Для этого достаточно проверить, что правая часть неравенства (5.36) больше правой части неравенства (5.37), т.е.

$$\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{8z}\Big) + z\Big(\frac{1}{4} - \frac{7}{32}\Big) + z^2\Big(\frac{1}{12} - \frac{3}{32}\Big) + z^3\Big(\frac{5}{288} - \frac{1}{56}\Big) > 0 \qquad \text{при} \quad 1/2 \leq z \leq 3. \tag{5.38}$$

Умножив обе части неравенства (5.38) на 32 и произведя несложные вычисления, получим равносильное неравенство:

$$(8 - 4/z) + z - z^2/3 - z^3/63 > 0 \qquad \text{при} \quad 1/2 \leq z \leq 3. \tag{5.39}$$

Если $1/2 \leq z \leq 1$, то $8 - 4/z \geq 0$ и

$$z - z^2/3 - z^3/63 \geq z(1 - 1/3 - 1/63) > z/2 \geq 1/4.$$

Потому неравенство (5.39) верно при $1/2 \leq z \leq 1$. Если $z \in [1,3]$, то $z - z^2/3 \geq 0$, $8 - 4/z \geq 4$, и остается доказать, что $4 - z^3/63 > 0$ при $z \in [1,3]$. Но это очевидно. Итак, неравенство (5.39) доказано, а потому доказано и неравенство (5.19) для $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{12}$.

При $x > \sqrt{12}$ неравенство (5.19) следует из следующей цепочки неравенств

$$I^2(x) < \frac{e^y}{\pi y}\Big(1 + \frac{0.88}{y}\Big) < \frac{e^y}{\pi y}\Big(1 + \frac{1}{y}\Big) < \frac{y^2}{2} D(x) \qquad \text{при} \quad y = 2x > \sqrt{48}. \tag{5.40}$$

Доказательство первого из них начнем с вывода такой оценки[26]:

$$I^2(x) < \frac{e^y}{\pi y}\left(1 + \frac{0.88}{y}\right) \qquad \text{при} \quad y = 2x > \sqrt{48}. \tag{5.41}$$

---

[26]За счет усложнения доказательства можно получить более точную оценку: $I^2(x) < \frac{e^y}{\pi y}\left(1 + \frac{0.8}{y}\right)$. Отметим, что при $y = 2x \to +\infty$ верна асимптотика $I^2(x) = \frac{e^y}{\pi y}\left(1 + \frac{1}{2}y + O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right)$.

Сделав в первой интегральной формуле (5.29) замену переменной $t = 1 - 2\tau$ и воспользовавшись неравенствами

$$\frac{1}{\sqrt{1-\tau}} < \begin{cases} 1 + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{2\sqrt{1-\tau}} & \text{при} \quad 0 < \tau \le 1/2\,, \\ \\ 1 + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{\sqrt{1-\tau}} & \text{при} \quad 1/2 < \tau \le 1\,, \end{cases}$$

получим

$$I(x) = \frac{e^x}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-2\tau x}}{\sqrt{\tau-\tau^2}}\,d\tau < \frac{e^x}{\pi}\left(\int_0^1 \frac{e^{-2\tau x}}{\sqrt{\tau}}(1+\tau/2)\,d\tau + \int_0^{1/2}\frac{\tau^2 e^{-2\tau x}}{2\sqrt{\tau-\tau^2}}\,d\tau + \int_{1/2}^1 \frac{\tau^3 e^{-2\tau x}}{\tau\sqrt{\tau-\tau^2}}\,d\tau\right)$$

$$< \frac{e^x}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-2\tau x}}{\sqrt{\tau}}(1+\tau/2)\,d\tau + \sup_{\tau>0}\big(\tau^2 e^{-2\tau x}\big)\int_0^{1/2}\frac{1}{2\sqrt{\tau-\tau^2}}\,d\tau + \sup_{\tau>0}\big(\tau^3 e^{-2\tau x}\big)\int_{1/2}^1\frac{e^{-2\tau x}}{\tau\sqrt{\tau-\tau^2}}\,d\tau\right).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sup_{\tau>0}(\tau^k e^{-\tau y}) = k^k e^{-k} y^{-k}, \qquad \int_0^{1/2}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau-\tau^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{1/2}^1 \frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau-\tau^2}} = 2,$$

$$\int_0^\infty \tau^{-1/2}e^{-\tau y}\,d\tau = \sqrt{\pi/y}, \qquad \int_0^\infty \tau^{1/2}e^{-\tau y}\,d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2y^{-3/2}},$$

получаем

$$I(x) < \frac{e^x}{\pi}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{y^{0.5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4y^{1.5}} + \frac{\pi}{y^2e^2} + \frac{54}{y^3e^3}\Big) = \frac{e^x}{\sqrt{\pi y}}\Big(1 + \frac{1}{4y} + \frac{\sqrt{\pi}}{e^2y^{1.5}} + \frac{54}{\sqrt{\pi}y^{2.5}e^3}\Big).$$

Имеем: $\pi^{0.5}48^{-0.25}e^{-2} < 0.0912, \quad 54\pi^{-0.5}e^{-3}48^{-0.75} < 0.0832$. Поэтому

$$I(x) < \frac{e^x}{\sqrt{\pi y}}\Big(1 + \frac{0.425}{y}\Big), \qquad \text{при} \quad y = 2x \ge \sqrt{48}. \tag{5.42}$$

Отсюда следует требуемая оценка (5.40), т.к.

$$I^2(x) < \frac{e^y}{\pi y}\Big(1 + \frac{0.85}{y} + \frac{0.425^2}{y^2}\Big) < \frac{e^y}{\pi y}\Big(1 + \frac{0.88}{y}\Big) \qquad \text{при} \quad y \ge \sqrt{48}.$$

Осталось установить последнее из неравенств в (5.19). С этой целью заметим, что равенство (5.27) и неравенство $(1-\tau)^{-1/2} > 1 + \tau/2$ влекут

$$D(x) > \frac{2e^y}{\pi^2}\int_0^1\int_0^1 (\tau_1\tau_2)^{-1/2}(\tau_1-\tau_2)^2\big(1+\tau_1/2\big)\big(1+\tau_2/2\big)e^{-y(\tau_1+\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2 > \frac{2e^y}{\pi^2}\big(A_1 + A_2\big), \tag{5.43}$$

где

$$A_1 = \int_0^1\int_0^1 \frac{(\tau_1-\tau_2)^2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}e^{-y(\tau_1+\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2 \qquad A_2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{(\tau_1-\tau_2)^2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}\big(\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\big)e^{-y(\tau_1+\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2.$$

Перепишем

$$A_1 = 2\int_0^1\int_0^1 \Big(\tau_1^{3/2}\tau_2^{-1/2} - \tau_1^{1/2}\tau_2^{1/2}\Big)e^{-y(\tau_1+\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2$$

в виде

$$\frac{1}{2}A_1 = \Big(\int_0^1 \tau^{3/2}e^{-y\tau}\,d\tau\Big)\Big(\int_0^1 \tau^{-1/2}e^{-y\tau}\,d\tau\Big) - \Big(\int_0^1 \tau^{1/2}e^{-y\tau}\,d\tau\Big)^2.$$

Отсюда, полагая

$$R_p(y) \overset{def}{=} y^p\int_1^\infty \tau^{p-1}e^{-y\tau}\,d\tau \equiv \int_y^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt\,, \qquad p > 0, \tag{5.44}$$

получаем

$$A_1=\Big(\frac{\Gamma(2.5)}{y^{2.5}}-\frac{R(2.5)}{y^{2.5}}\Big)\Big(\frac{\Gamma(0.5)}{y^{0.5}}-\frac{R(0.5)}{y^{0.5}}\Big)-\Big(\frac{\Gamma(1.5)}{y^{1.5}}-\frac{R(1.5)}{y^{1.5}}\Big)^2,$$

т.е.

$$A_1=\frac{\Gamma(2.5)\Gamma(0.5)-2\Gamma^2(2.5)}{y^3}-\frac{\Gamma(2.5)R_{0.5}(y)+\Gamma(0.5)R_{2.5}(y)-2\Gamma(1.5)R_{1.5}(y)}{y^3}+r(y)\,,$$

где

$$r(y)=\frac{R_{2.5}(y)R_{0.5}(y)-R^2_{1.5}(y)}{y^3}=\int_1^\infty\int_1^\infty(\tau_1\tau_2)^{-1/2}(\tau_1-\tau_2)^2e^{-y(\tau_1+\tau_2)}\,d\tau_1d\tau_2>0\,.$$

Поэтому

$$A_1>\frac{\pi}{y^3}-\frac{2\sqrt{\pi}}{y^3}\Big(R_{2.5}(y)+\frac{3}{4}R_{0.5}(y)-R_{1.5}(y)\Big)\,.$$

Отсюда, учитывая неравенство $R_{1.5}(y)\overset{(5.44)}{>}R_{0.5}(y)$, верное при любом $y\ge1$, получаем

$$A_1>\frac{\pi}{y^3}-\frac{2\sqrt{\pi}}{y^3}R_{2.5}(y)=\frac{\pi}{y^3}\Big(1-\frac{2R_{2.5}(y)}{\sqrt{\pi}}\Big)\,. \tag{5.45}$$

Оценим сверху $R_{2.5}(y)$ при $y\ge\sqrt{48}$. Имеем

$$R_{2.5}(y)=\int_y^\infty t^{1.5}e^{-t}\,dt\,\le\int_y^\infty\frac{t^{2.5}e^{-t}}{y}\,dt\le\frac{a(y)}{y}\,, \tag{5.46}$$

где $a(y)=\max_{t\ge y}\Big(t^{2.5}e^{-t/2}\Big)\int_y^\infty e^{-t/2}\,dt$. Но $y\ge5$, поэтому $\max_{t\ge y}\Big(t^{2.5}e^{-t/2}\Big)=y^{2.5}e^{-y/2}$. Следовательно,

$$a(y)\le y^{2.5}e^{-y/2}\int_y^\infty e^{-t/2}=2y^{2.5}e^{-y}\le2\max_{y\ge\sqrt{48}}y^{2.5}e^{-y}=2\cdot48^{5/4}e^{-\sqrt{48}}=96\cdot48^{1/4}e^{-\sqrt{48}}<0.265\,.$$

Отсюда и (5.45)–(5.46) заключаем, что

$$A_1>\frac{\pi}{y^3}\Big(1-\frac{0.3}{y}\Big)\quad\forall\,y\ge\sqrt{48}\,. \tag{5.47}$$

Оценим снизу A_2. Имеем

$$A_2=\Big(\int_0^1\tau^{2.5}e^{-y\tau}\,d\tau\Big)\Big(\int_0^1\tau^{-0.5}e^{-y\tau}\,d\tau\Big)-\Big(\int_0^1\tau^{1.5}e^{-y\tau}\,d\tau\Big)\Big(\int_0^1\tau^{0.5}e^{-y\tau}\,d\tau\Big).$$

Поэтому

$$A_2>\Big(\frac{\Gamma(3.5)}{y^{3.5}}-\frac{R_{3.5}(y)}{y^{3.5}}\Big)\Big(\frac{\Gamma(0.5)}{y^{0.5}}-\frac{R_{0.5}(y)}{y^{0.5}}\Big)-\frac{\Gamma(2.5)}{y^{2.5}}\frac{\Gamma(1.5)}{y^{1.5}}=$$

$$\frac{\Gamma(3.5)\Gamma(0.5)}{y^4}\Big(1-\frac{R_{3.5}(y)}{\Gamma(3.5)}\Big)\Big(1-\frac{R_{0.5}(y)}{\Gamma(0.5)}\Big)-\frac{\Gamma(2.5)\Gamma(1.5)}{y^4}=\frac{1}{y^4}\Big(\frac{15\pi}{8}(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)-\frac{3\pi}{8}\Big)\,,$$

где

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\Gamma(3.5)}\int_y^\infty t^{2.5}e^{-t}\,dt\,,\qquad\varepsilon_2=\frac{1}{\Gamma(0.5)}\int_y^\infty t^{-0.5}e^{-t}\,dt\,.$$

При $y\ge\sqrt{48}$ имеем

$$\varepsilon_1=\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\int_y^\infty t^{2.5}e^{-t}\,dt\,\le\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\max_{t\ge y}\Big(t^{2.5}e^{-t/2}\Big)\int_y^\infty e^{-t/2}\,dt\,=\frac{8}{15\sqrt{\pi}}y^{2.5}e^{-y/2}\cdot2e^{-y/2}=$$

$$\frac{16y^{2.5}e^{-y}}{15\sqrt{\pi}}\le\frac{16\cdot48^{5/4}e^{-\sqrt{48}}}{15\sqrt{\pi}}=\frac{256\cdot48^{1/4}e^{-\sqrt{48}}}{5\sqrt{\pi}}=51.2 48^{1/4}e^{-\sqrt{48}}\pi^{-0.5}<0.08\,,$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_y^\infty t^{-0.5}e^{-t}\,dt\,<\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\int_y^\infty e^{-t}\,dt\,=\frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi y}}\le\frac{e^{-\sqrt{48}}}{\sqrt{\pi}}48^{-1/4}<0.01\,.$$

Следовательно, $A_2>1.3\pi y^{-4}$ при $y\ge\sqrt{48}$. Учитывая (5.47), имеем

$$A_1+A_2>\frac{\pi}{y^3}\Big(1+\frac{1}{y}\Big)\qquad\text{при}\quad y>\sqrt{48}\,,$$

что вместе с (5.43) доказывает последнее в (5.40) неравенство, а потому и неравенство (5.19).

§ 6 О реконструкции по граничным данным всех существенно различных нелинейностей в уравнениях математической физики

Изложенная в §2 конструкция естественным образом распространяется на

i) краевые задачи в области $\omega \subset \mathbb{R}^n$ для систем уравнений

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{|\alpha| \le 2} \rho_{jk}(x) f_{jk\alpha}\Big(\frac{\partial^{|\alpha|}\mathbf{u}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\Big) = 0\,, \qquad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_K) \tag{6.1}$$

эллиптического типа, в которых функции $f_{jk\alpha}$ для некоторых (или всех) индексов j, k, α являются искомыми, и на соответствующие системе (6.1)

ii) начально-краевые задачи в цилиндре $\omega \times (0, t_*)$ для систем эволюционных уравнений, таких, например, как система уравнений (0.5).

Реконструкция всех "существенно различных" искомых функций $f_{jk\alpha}$ по приближенным данным ∇u на границе γ области ω и, соответственно, на $\gamma \times (0, t_*)$ осуществляется по следующей схеме.

1). Выбирается компактное подмножество $\mathcal{F}$ в некотором нормированном пространстве X искомых функций $f_{jk\alpha}$.

2). Берется (определяемый аналогично (2.31)) мульти-параметр $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_K)$ с ненулевыми компонентами и осуществляется переход к факторизованной функции

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{u} \stackrel{def}{=} (\sigma_1 u_1, \ldots, \sigma_K u_K)\,.$$

Если в качестве краевого условия фигурирует однородное условие Дирихде, то в случае рассмотрения краевой задачи для системы (6.1) функция $\mathbf{v}$ есть решение однородной задачи Дирихле для системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{|\alpha| \le 2} \rho_j(x) g_{jk\alpha}\Big(\frac{\partial^{|\alpha|}\mathbf{v}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\Big) = 0, \qquad \text{где} \qquad g_{jk\alpha}(t_1, \ldots, t_K) = f_{jk\alpha}(t_1/\sigma_1, \ldots, t_K/\sigma_K)\,.$$

Аналогичное утверждение справедливо в случае рассмотрения начально-краевой задачи.

При этом

$$\frac{\partial v_k}{\partial \nu}\Big|_\gamma = \sigma_k \Phi_k\,, \quad \text{где} \qquad \Phi_k = \frac{\partial u_k}{\partial \nu}\Big|_\gamma.$$

3) Формулой

$$\varkappa_k \stackrel{def}{=} \frac{\partial v_k}{\partial \nu}\Big|_{s_R} \Big/ \frac{\partial v_k}{\partial \nu}\Big|_{s_\rho}$$

вводятся функции $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_K$, параметризованные точками $s_R \in \gamma$ и $s_\rho \in \gamma$. Устанавливаются леммы, аналогичные леммам 2.1–2.4, т.е. устанавливаются серии необходимых условий и критерии, характеризующие искомые нелинейности $f_{jk\alpha} \in \mathcal{F}$.

4) Осуществляется отсев тех функций $f_{jk\alpha} \in \mathcal{F}$, которые не удовлетворяют обозначенным необходимым условиям и формируется множество $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ функций, им удовлетворяющим.

5) Из множества $\mathcal{F}_0$ выбираются все искомые существенно различные функции $f_{jk\alpha}$.

§ Список литературы

[1] В.К. Андреев, О.В. Капцов, В.В. Пухначев, А.А. Родионов (1994) *Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике.* "Наука", Новосибирск.

[2] С.И. Безродных, В.И. Власов, А.С. Демидов (2008) О числе решений обратной задачи для уравнения $\Delta u = au + b \ge 0$ в выпуклой области. *Матем. заметки*

[3] А.Д. Валиев, А.С. Демидов (1997) О неотрицательных тригонометрических полиномах с фиксированным средним, проходящих через заданные точки. *Матем. заметки*, **62**, № 3, 468–471.

[4] А.С. Демидов (2000) Об обратной задаче для уравнения Грэда–Шафранова с аффинной правой частью. *УМН* **55**, вып. 6, 131–132.

[5] А.С. Демидов (2007) О реконструкции полиномиальных нелинейностей в уравнениях математической физики. *Intern. Confer. "Diff. Equations & Related Topics" dedicated to I.G. Petrovskii. Book of Abstracts, Moscow*, 73–74.

[6] А.С. Демидов, Л.Е. Захаров (1974) Прямая и обратная задачи в теории равновесия плазмы. *УМН* **29**, вып. 6, 203.

[7] Ю.А. Дубинский (1976) Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. *Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Современные проблемы математики* **9**, 5–130.

[8] И.Н. Зверев, Н.Н. Смирнов (1987) *Газодинамика горения.* Изд-во МГУ.

[9] А.Н. Колмогоров, В.М. Тихомиров (1959) ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. УМН, Том 14, №2, 3–86.

[10] Д.П. Костомаров, Ф.С. Зайцев, А.С. Демидов (2008) Анализ качества решения обратной задачи для уравнения равновесия тороидальной плазмы. *Доклады РАН.*

[11] Р.Курант (1962) *Уравнения с частными производными*, "Мир", Москва.

[12] Ю. Люк (1980) *Специальные математические функции и их аппроксимации.* "Мир", Москва.

[13] Г. Полиа, Г. Сеге (1956) *Задачи и теоремы из анализа.* ГИТТЛ, Москва.

[14] А.Д. Полянин, В.Ф.Зайцев (2002) *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения.* "Физматлит", Москва.

[15] В.М. Тихомиров (1976) *Некоторые вопросы теории приближений.* Изд-во МГУ.

[16] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский (1972) *Уравнения математической физики.* "Наука", Москва.

[17] E. Beretta, M. Vogelius (1991) An inverse problem originating from magnethohydrodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **115**, 137–152.

[18] E. Beretta, M. Vogelius (1992) An inverse problem originating from magnethohydrodynamics, II. The case of the Grad–Shafranov equation. *Indiana Univ. Math. J.* **41**, 1081–1118.

[19] E. Beretta, M. Vogelius (1995) An inverse problem originating from magnethohydrodynamics, III. Domains wiyh corners of arbitrary angles. *Asymptotic Analysis* **11**, 289–315.

[20] J. Blum, H. Buvat (2002) An inverse problem in plasma physics: the identification of the current density profile in a tokamak. *Large-Scale Optimisation with Applications. Part I: Optimization in Inverse Problems and Design* Editors: L.T. Biegler, T.F. Coleman, A.R. Conn, F.N. Santosa), Springer. (www.inria.fr/rapportsactivite/RA2002/idopt/bibliographie.html).

[21] A.S. Demidov (1977) Sur la perturbation "singulière" dans un problème à frontière libre. Proceedings of the Conference "Singular Perturbations and Boundary Layer Theory" held in Lyon, 1976, *Lect. Notes in Math.* **594**, 123–130.

[22] A.S. Demidov, M. Moussaoui (2004) An inverse problem originating from magnetohydrodynamics. *Inverse Problems* **20**, 137–154.

[23] A.S. Demidov, V.V. Petrova, V.M. Silantiev (1996) On inverse and direct free boundary problems in the theory of plasma equilibrium in a Tokamak. *C.R. Acad. Sci. Paris* **323** Série I, 353–358.

[24] S.I. Pokhozhaev (2007) Nonlinear Variational Problems via the Fibering Method. *Steklov Mathematical Institute.*

[25] V.D. Pustovitov (2001) Magnetic diagnostics: General principles and the problem of reconstruction of plasma current and pressure profiles in toroidal systems. *Nuclear Fusion* **41**, № 6, 721–730.

[26] M. Vogelius (1994) An inverse problem for the equation $\Delta u = -cu - d$. *Ann. Inst. Fourier* **44**, 1181–1209.

[27] L.E. Zakharov (2007) The theory of variances of equilibrium reconstruction. (http://w3.pppl.gov/~zakharov).