

+МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, МЕТОДЫ АНАЛИЗА. ЛЕКЦИЯ 2

О.В.Руденко

Обсуждается ряд моделей нелинейной акустики (НА), представляющих интерес и для других разделов физики нелинейных волн. Приводятся точные решения, имеющие физический смысл. Описываются некоторые способы их нахождения или угадывания. На примерах показана связь «нестрогих» подходов с корректным математическим анализом нелинейных моделей на основе их симметрий, которому были посвящены две последующие лекции В.Ф.Ковалева и Д.В.Ширкова. Для привязки к содержанию этих лекций обсуждался смысл принципа априорного использования симметрий.

Среди примеров: модели и решения для бегущих и стоячих волн, волновых пучков, возбуждения нелинейных волн, нелинейных статистических задач, течений в акустическом поле, кинетики ударных волн. Рассматривались, в частности, дифференциальные уравнения высоких порядков и функциональные уравнения.

Начнем с «базовой» модели НА – уравнения Бюргерса (УБ), описывающего недиспергирующие волны в диссипативной среде:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (1)$$

Здесь $\theta = \omega(t - x/c)$, $V = u/u_0$ – время в системе координат, «бегущей» вместе с волной со скоростью звука и нормированное возмущение колебательной скорости или давления. Расстояние z измерено в единицах длин образования разрыва; Γ – обратное акустическое число Рейнольдса (число Гольдберга) – отношение характерных «нелинейной» и «диссипативной» длин [1]. Общее решение уравнения УБ (1) имеет сложную структуру и не всегда удобно для анализа конкретных задач. Помимо тривиальных частных решений, получаемых из стационарного решения

$$\partial V / \partial z = 0, \quad V = \tanh[(\theta - \theta_0) / 2\Gamma] \quad (2)$$

(это ударная волна с конечной шириной фронта) путем сдвигов вдоль z, θ, V , полезными оказались другие, «нетривиальные» точные решения. «Решение Хохлова» [2]

$$V = \frac{1}{1+z} \left[-\theta + \pi \tanh \frac{\pi \theta}{2\Gamma(1+z)} \right], \quad -\pi < \theta < \pi \quad (3)$$

описывает один период пилообразной волны в области существования развитых ударных фронтов. Формула была фактически «угадана» в 1960 году. Она получается также методом сращиваемых асимптотических разложений; при этом 1-е приближение дает точное решение.

Автомодельное решение УБ [3]

$$V = \sqrt{\frac{4\Gamma}{\pi z}} \frac{\exp(-\theta^2 / 4\Gamma z)}{C + \operatorname{erf}(\theta / \sqrt{4\Gamma z})}, \quad (4)$$

описывает однополярный импульс с крутым передним фронтом; оно получается из инвариантности (1) относительно преобразования

$$V \rightarrow V/C, \quad z \rightarrow C^2 z, \quad \theta \rightarrow C\theta. \quad (5)$$

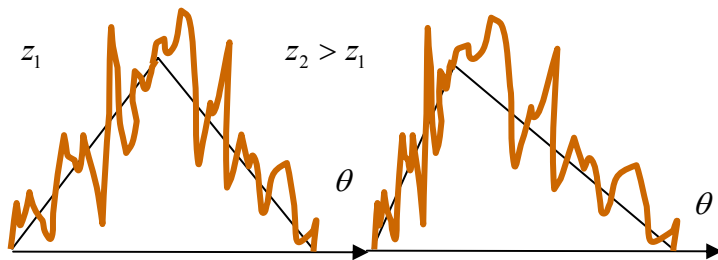
Соответственно, конструируя подстановку

$$V = z^{-1/2} Q(z^{-1/2}\theta), \quad (6)$$

инвариантную относительно (5), удается свести (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению и найти решение (4). Нетривиально и угаданное С.Н.Гурбатовым [4] преобразование: если функция $V = \Phi(z, \theta)$ есть точное решение УБ, то точным решением будет также

$$V = \frac{1}{1-z/z_0} \Phi\left(\frac{z}{1-z/z_0}, \frac{\theta}{1-z/z_0}\right) + \frac{\theta/z_0}{1-z/z_0}. \quad (7)$$

Рис.1



Эта формула описывает, например, взаимодействие ВЧ шума и НЧ сигнала [5]. С увеличением расстояния z частота шума на переднем фронте регулярной волны растет, на заднем – уменьшается (рис.1).

Однако рассказанная история «угадывания» точных результатов свидетельствует о недостаточной известности методов теории групп Ли применительно к решению дифференциальных уравнений [6, 7].

Покажем, как эти результаты получаются регулярными методами. Изменяя нормировку переменных, запишем УБ в самой простой форме

$$u_x = uu_t + u_{tt}. \quad (8)$$

Инфинитезимальные симметрии [6, 7] УБ образуют 5-мерную алгебру Ли, «натянутую» на линейно независимые операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad (9)$$

$$X_4 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + tx \frac{\partial}{\partial t} - (t + xu) \frac{\partial}{\partial u}$$

Техника нахождения операторов (9) стандартна; существуют даже компьютерные программы для их вычисления.

При известной симметрии инвариантное решение **УБ** получается так. Вычисляются два независимых инварианта как решения уравнения $X(J) = 0$: $J_1 = \lambda(t, x)$, $J_2 = \mu(t, x, u)$. Затем один из инвариантов выражается как функция другого, $\mu = \phi(\lambda)$. Далее разрешенное относительно u выражение подставляется в УБ. В результате получается уравнение для функции одной переменной $\phi(\lambda)$. Эта процедура уменьшает число независимых переменных на единицу. Решения, инвариантные относительно группы растяжений, генерируемой оператором X_4 , часто называют автомодельными. В этом случае уравнение $X(J) = 0$ имеет вид

$$X_4(J) = 2x \frac{\partial J}{\partial x} + t \frac{\partial J}{\partial t} - u \frac{\partial J}{\partial u} = 0. \quad (10)$$

Его характеристическая система и инварианты таковы:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dt}{t} = -\frac{du}{u}; \quad \lambda = \frac{t}{\sqrt{x}}, \quad \mu = \sqrt{x}u. \quad (11)$$

Следовательно, инвариантное решение нужно искать в виде:

$$u = x^{-1/2} \Phi(\lambda), \quad \lambda = x^{-1/2} t. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (8), получаем обыкновенное уравнение

$$\Phi'' + \Phi\Phi' + 0.5(\lambda\Phi' + \Phi) = 0 \quad (13)$$

и находим его точное решение

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi x}} \frac{\exp(-t^2/4x)}{C + \operatorname{erf}(t/2\sqrt{x})}, \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-s^2) ds \quad (14)$$

Формула (14) совпадает с (4). Для обобщенного УБ (его коэффициенты зависят от координат) автомодельные решения найдены в работе [8].

Для проективной группы, генерируемой оператором X_5 , получаем

$$X_5(J) = x^2 \frac{\partial J}{\partial x} + tx \frac{\partial J}{\partial t} - (t + xu) \frac{\partial J}{\partial u} = 0. \quad (15)$$

Характеристическая система и два инварианта имеют вид

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{tx} = -\frac{du}{t + xu}; \quad \lambda = \frac{t}{x}, \quad \mu = t + xu \quad (16)$$

Следовательно, инвариантное решение нужно искать в форме

$$u = -\frac{t}{x} + \frac{1}{x} \Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{t}{x}. \quad (17)$$

Подставляя это выражение в УБ, получим для $\Phi(\lambda)$ уравнение $\Phi'' + \Phi\Phi' = 0$, из которого сразу находим решение Хохлова (3):

$$u = \frac{1}{x} \left[-t + \pi \tanh \left(C + \frac{\pi t}{2x} \right) \right]. \quad (18)$$

Используя проективное преобразование, из любого известного решения $u = \Phi(t, x)$ УБ удастся получить однопараметрическое семейство новых решений

$$u = \frac{ax}{1-at} + \frac{1}{1-at} \Phi\left(\frac{t}{1-at}, \frac{x}{1-at}\right). \quad (19)$$

Формула (19) отличается от (7) лишь обозначениями. Если применить преобразование (19) к стационарному решению УБ, получается ряд новых нестационарных решений, в том числе (18) [9].

Решения можно найти не только из основных симметрий (9), но и из их линейных комбинаций. Рассмотрим, к примеру, оператор

$$X_1 + X_5 = (1+x^2) \frac{\partial}{\partial x} + tx \frac{\partial}{\partial t} - (t+xu) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (20)$$

Решая характеристическое уравнение, находим инвариантную форму

$$u = -\frac{tx}{1+t^2} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{\sqrt{1+t^2}} \quad (21)$$

и соответствующее новое точное решение УБ [9]:

$$\Phi = 2 \frac{d}{d\lambda} \ln \left[\sqrt{\lambda} J_{1/4} \left(\frac{\lambda^2}{4} \right) + C \sqrt{\lambda} Y_{1/4} \left(\frac{\lambda^2}{4} \right) \right]. \quad (22)$$

Несмотря на мощь групповых методов, они в ряде случаев **трудны для нахождения** точных решений, которые **проще** получить другими способами. Такая ситуация типична для уравнений с низкой симметрией.

Иногда точные решения для таких уравнений удастся найти, понижая их порядок. Приведем примеры.

Пример 1.1. Нелинейное уравнение 2-го порядка для бегущих волн

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(p - \frac{\varepsilon}{c^2 \rho} p^2 \right) \quad (23)$$

точно сводится к паре уравнений 1-го порядка:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \pm \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon}{c^2 \rho} p} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (24)$$

Это легко проверить. Дифференцируя уравнение (24) по переменной x и заменяя производные по x в правой части производными по времени, получим исходное уравнение (23). Решить (24) гораздо проще, чем (23). Его особое решение, вычисляемое методом характеристик, имеет вид

$$p = \Phi \left(t \pm \frac{x}{c} \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon}{c^2 \rho} p} \right). \quad (25)$$

Оно описывает нелинейные волны, бегущие вправо или влево (в зависимости от знака) вдоль оси x .

Пример 1.2. Рассмотрим теперь уравнение 4-го порядка [10]:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = -R \frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4}, \quad (26)$$

которое продолжает серию замечательных уравнений: УБ (1) – 2-й порядок, КдВ – 3-й порядок. Для волн в рассеивающей среде

$$R = \frac{x_{nonl}}{x_{scat}} = \frac{8 \langle \mu^2 \rangle a^3}{c^4} \frac{\omega_0^3 c^3 \rho}{\varepsilon p_0} \quad (27)$$

есть отношение характерных масштабов нелинейности и рассеяния, $\langle \mu^2 \rangle$ - средний квадрат флуктуаций показателя преломления, a - радиус корреляции, ε - нелинейный параметр, p_0 - амплитуда волны давления.

Уравнение для стационарных волн и одно из его решений имеют вид:

$$R \frac{d^4 V}{d\theta^4} = V \frac{dV}{d\theta}, \quad \theta = \left(\frac{40}{9} R \right)^{1/3} \int_0^V \frac{dy}{(1-y^2)^{2/3}}. \quad (28)$$

Формула (28) получена так. Уравнению 4-го порядка сопоставлялось уравнение 1-го порядка $dV/d\theta = f(V)$, правая часть которого неизвестна.

Путем цепочки преобразований находилось уравнение 4-го порядка, из которого определялась функция $f(V)$. Нетрудно повторить эти преобразования,

$$\text{если } f(V) \text{ известна: } \frac{dV}{d\theta} = \left(\frac{9}{40R} \right)^{1/3} (1-V^2)^{2/3}, \quad \frac{d^2 V}{d\theta^2} = -\frac{4}{3} \left(\frac{9}{40R} \right)^{2/3} V(1-V^2)^{1/3}, \quad \frac{d^3 V}{d\theta^3} = \dots \quad (29)$$

Другое решение - ограниченная стационарная волна - описывает ударный фронт с быстро затухающими осцилляциями [10]. В отличие от осцилляций на фронте решения КдВБ, связанных с дисперсией, здесь колебания вызваны «явлением Фурье» - «обрезанием» высших гармоник, образующих фронт.

Еще один способ, известный на примере УБ – нахождение линеаризующей замены переменных. Эти замены часто «угадываются», но и находятся методами теории групп Ли. Примеры таких, в общем-то, исключительных моделей, приводятся ниже.

Пример 2.1. Неоднородное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \Delta \frac{\partial U}{\partial \xi} - \pi \varepsilon U \frac{\partial U}{\partial \xi} - D \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = F(\xi) \quad (30)$$

используется в разнообразных задачах, например, для описания лазерного возбуждения интенсивного гиперзвука [11], обтекания тел и нагретых зон транзвуковым потоком газа [12], нелинейных стоячих волн [13]. В последней задаче T - «медленное» время, описывающее эволюцию поля, ξ - «быстрое» время, описывающее осцилляции, D - параметр диссипации, Δ - расстройка от резонанса, $F(\xi)$ задает колебания одной из стенок резонатора. Уравнение (30) линеаризуется той же подстановкой Хорфа-Коула (Флорина), что и обычное УБ (1):

$$U = \frac{2D}{\pi \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln W, \quad \frac{\partial W}{\partial T} + \Delta \frac{\partial W}{\partial \xi} - D \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2} q D \cos \xi \cdot W. \quad (31)$$

Здесь, для определенности, $F = -(M/2) \cdot \sin \xi$. Интересно, что средняя за период интенсивность волны выражается через собственное число λ_0 функции Матье ce_0 [11]:

$$\overline{U^2} = -\left(\frac{D}{\pi \varepsilon}\right)^2 \cdot \lambda_0\left(q = \frac{\pi \varepsilon M}{2D^2}\right), \quad U = \frac{2D}{\pi \varepsilon} \frac{d}{d\xi} \ln ce_0\left(\frac{\xi}{2}, q\right). \quad (32)$$

Резонансная кривая для положительного пикового давления в профиле волны имеет конечный (из-за нелинейного затухания) максимум, сдвинутый в область $\Delta > 0$ на величину порядка \sqrt{M} . Точно также, при нелинейном обтекании тел максимум коэффициента сопротивления оказывается конечным и сдвинутым в сверхзвуковую область [12].

Пример 2.2. Уравнение для волновых пучков в кубично нелинейных недиспергирующих средах [14]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p^2 \frac{\partial p}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} p \quad (33)$$

используется, в частности, для описания дифракции сильно искаженных волн и их самофокусировки (СФ). Если дифракция слабая, гармоническая волна превращается в пилообразную, каждый период которой имеет трапецевидную форму и содержит два ударных фронта: сжатия и разрежения. В приближении нелинейной геометрической акустики уравнение (33) сводится к системе

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) (I \cdot V) = -\alpha \omega \gamma I^2, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} = \gamma c \frac{\partial I}{\partial r} \quad (34)$$

(Только для Ред.: уравнение (34) исправлено – был пропущен член!)

для средней интенсивности $I = \langle p^2 \rangle$ и наклона лучей $V = \partial \psi / \partial r$ к оси пучка. Первое линейризуется заменой $I = B^{-1}$; для параболического волнового фронта

$$\psi(x, r, t) = \varphi(x, t) + \frac{r^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln f(x, t) \quad (35)$$

решение имеет вид

$$I = \frac{1}{f^2(x)} I_0 \left(\frac{r}{af} \right) \left[1 + \alpha \omega \gamma I_0 \left(\frac{r}{af} \right) \int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')} \right]^{-1} \quad (36)$$

Функция f , которая описывает изменение амплитуды волны и ширины пучка, удовлетворяет сложному нелинейному уравнению

$$f^3 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{2x_d x_s} \left[1 + \frac{\alpha}{x_s} \int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')} \right]^{-2} = \frac{1}{x_d^2}. \quad (37)$$

Граничные условия при $x = 0$: $f = 1$, $df/dx = R^{-1}$, где R - радиус кривизны фронта. Если правая часть (37) равна нулю, эта задача Коши имеет точное решение

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{R} + \delta_1 \frac{x}{x_s}\right)^{\frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{R} - \delta_2 \frac{x}{x_s}\right)^{\frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}}, \quad \delta_{1,2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2x_s/x_d} \pm \alpha}{2}. \quad (38)$$

Оно получено так. Вначале угадано точное частное решение $f = \exp(-x/\alpha x_d)$ которое затем обобщено (38) с помощью «линзового преобразования», использующего свойство симметрии уравнения (33). Недостаток решения (38) в том, что описываемый им пучок самофокусируется в точку на расстоянии $x_{sf} = (\delta_2/x_s - 1/R)^{-1}$. Для устранения сингулярности нужно учесть дифракцию, т.е. правую часть (37). Удивительно, что и в этом случае есть точное решение. Его удается найти, линеаризуя (37) заменой переменных

$$q = f^{-1}, \quad \xi x_d = x_s / \alpha + \int_0^x f^{-2}(x') dx', \quad \frac{d^2 q}{d\xi^2} + \left(1 - \alpha^{-2}(x_s/x_d) \frac{1}{\xi^2}\right) \cdot q = 0. \quad (39)$$

Решение линейного уравнения дается цилиндрическими функциями

$$f(\xi) = \frac{\xi^{-1/2}}{C_1 J_\nu(\xi) + C_2 Y_\nu(\xi)}, \quad \nu = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2x_s}{\alpha^2 x_d}}. \quad (40)$$

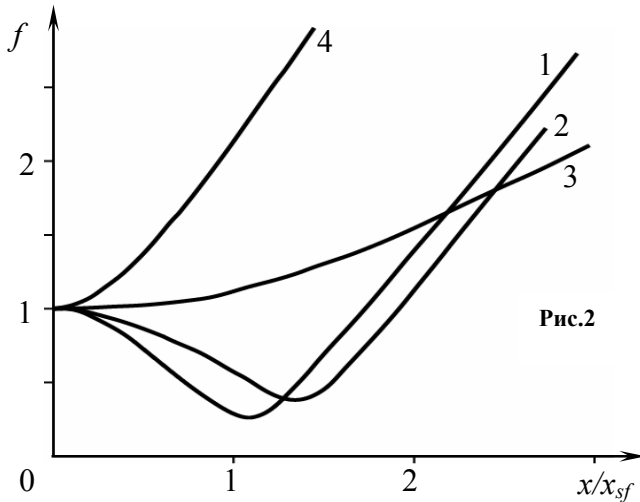


Рис.2

Кривые 1-4 на рис.2 соответствуют параметру $x_s/x_d = 0.01, 0.1, 0.5, 2$. При слабой дифракции пучок заметно сужается (кривые 1 и 2), а при сильной дифракции СФ не проявляется (кривые 3 и 4). В отсутствие дисперсии СФ не приводит к сильному росту амплитуды. Пучок заметно сужается и имеет нелинейную перетяжку, но фактор усиления невелик из-за принципиально неустранимого поглощения на ударных фронтах «пилы». Наибольшего усиления в фокусе 1.65 удается достичь при отношении длин нелинейности и дифракции, равном 0.06.

Обсудим теперь модели, которые удалось не линеаризовать, но существенно упростить и получить точные решения.

Пример 3.1. Рассмотрим ансамбль слабых ударных волн (рис.3), имеющих случайное расположение и «амплитуду». Каждой «ступеньке» сопоставим частицу, масса и скорость которой даются формулами

$$m_i = u_{i+1} - u_i, \quad v_i = -(\varepsilon / c^2) \cdot (u_{i+1} + u_i) \quad (41)$$

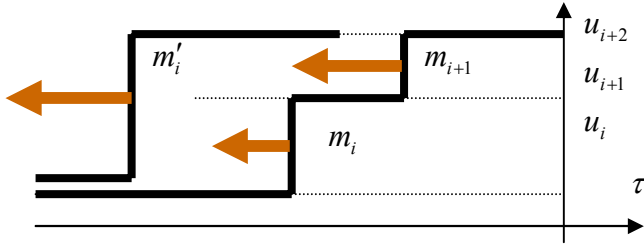


Рис.3

При слиянии двух ступенек образуется третья; при этом сохраняются «масса» и «импульс»:

$$m'_i = m_i + m_{i+1}, \quad m'_i v'_i = m_i v_i + m_{i+1} v_{i+1}. \quad (42)$$

Аналогия с неупругими частицами позволяет получить кинетическое уравнение [15]

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2c^2} (m + \langle m \rangle) \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2c^2} [*], \quad (43)$$

$$[*] \equiv m \int_0^m G(x, t, \xi) \cdot G(x, 0, m - \xi) \cdot d\xi - (m - \langle m \rangle) \cdot G \cdot \int_0^\infty G(x, 0, \xi) \cdot d\xi.$$

Здесь G - вероятность того, что промежуток времени между двумя соседними разрывами равен t и величина 2-го из них равна m . Нелинейные члены (43) образуют интеграл столкновений. Совершая замену переменной и преобразуя новую функцию по Лапласу

$$G = \frac{1}{t_0} \exp\left(-\frac{t}{t_0} - \frac{\varepsilon x}{c^2 t_0} m\right) \cdot F(x, t, m), \quad f = \int_0^\infty F \exp(-sm) dm, \quad (44)$$

получим уравнение типа простых волн, которое решается точно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c^2 t_0} f \frac{\partial f}{\partial s} = 0. \quad (45)$$

Аналогичный подход применим к пилообразной волне – ансамблю треугольных ударных импульсов со случайными пиковым значением и длительностью. Нелинейное затухание эквивалентно «испарению» (потерям «массы») частиц между их соударениями.

Пример 3.2. Систему уравнений нелинейной геометрической акустики

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial T} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \frac{u}{2} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0, \quad (47)$$

где $\alpha = \partial \psi / \partial y$, $\beta = \partial \psi / \partial z$ - наклоны лучей, удается свести [16] к точно решаемому уравнению простых волн

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{2} \frac{d}{dx} \ln S - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial T} = 0 \quad (48)$$

путем перехода к лагранжевым координатам $\xi = y - \alpha x$, $\eta = z - \beta x$, где S - якобиан. При этом переменные ξ, η становятся параметрами: по ним производных нет. Заметим также, что из уравнения переноса (46) удается исключить время, считая профиль пилообразным. После этого его удается линеаризовать.

Пример 3.3. В нелинейном резонаторе нужно рассматривать две встречные, искажающиеся и взаимодействующие волны. Но для периодических во времени возмущений можно ограничиться суперпозицией: учесть «самовоздействие», а «перекрестными» (нерезонансными) взаимодействиями пренебречь [13]. При этом поле в резонаторе описывается нелинейным функциональным уравнением

$$F \left[\omega t + kL - \frac{\varepsilon}{c} kLF \right] - F \left[\omega t - kL + \frac{\varepsilon}{c} kLF \right] = A \sin(\omega t), \quad (49)$$

в котором F - неизвестная. Однако в практически интересном случае, когда длина резонатора мала по сравнению с нелинейной длиной, частота близка к частоте одной из мод, а затухание на длине L резонатора мало, (49) сводится к точно решаемому уравнению (30).

Обсудим в заключение подход к решению нелинейных уравнений путем «погружения» в класс более общих (и сложных) моделей [9]. Опыт, казалось бы, противоречит идее усложнения: «Чтобы упростить задачу, мы должны до известных пределов идеализировать свойства системы, сделать ряд упрощающих предположений...» (А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин. Теория колебаний). Но за внешними различиями скрыто единство двух подходов. Ясно, что более симметричная модель должна иметь больше точных решений. Как добиться большей симметрии? Можно идти по традиционному пути упрощения, «отсекая» элементы модели, нарушающие ее симметрию (пренебрегая некоторыми членами уравнения или как-то видоизменяя их). С другой стороны, можно «достроить» модель до более симметричной путем ее усложнения. Если сложная модель допускает подходящее точное решение, упрощения можно произвести в конечных формулах.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial t} \right] = -\beta u, \quad (50)$$

моделирующее нелинейные процессы с низкочастотной дисперсией (в том числе дифрагирующие пучки). Это уравнение допускает 3-мерную алгебру Ли с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (51)$$

Класс инвариантно-групповых решений ограничен бегущими волнами, (они строятся с помощью генераторов переноса X_1, X_2) и автомодельными решениями (генератор растяжения X_3). Поэтому, используя идею погружения, рассмотрим обобщающую модель

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - Q(x, u) \frac{\partial u}{\partial t} \right] = F(x, u). \quad (52) \text{Чтобы}$$

установить вид функций Q, F , при которых (52) обогащается симметриями и, следовательно, нетривиальными точными решениями, нужно воспользоваться понятием алгебры эквивалентности, провести вычисления с помощью инфинитезимальной техники Ли (при этом Q, F рассматриваются как новые независимые переменные наряду с физическими переменными t, x, u). С помощью теоремы Н.Х.Ибрагимова о проекциях была найдена конкретная форма (52):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \Phi_1 \left(\frac{u}{x-k} \right) \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{1}{x-k} \Phi_2 \left(\frac{u}{x-k} \right) \quad (53)$$

и показано, что (53) допускает, наряду с очевидным генератором переноса по времени, дополнительный оператор

$$X' = t \frac{\partial}{\partial t} + (x-k) \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (54)$$

Частный случай линейных функций Φ_1, Φ_2 дает точное решение для сфокусированных волновых пучков в квадратично нелинейной среде.

Пример 4.2. Уравнение Ирншоу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^{-2\varepsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0 \quad (55) \text{в}$$

лагранжевом представлении описывает одномерное движение сжимаемого газа. Оно линеаризуется преобразованием годографа $x = v_\xi, y = v_t, \xi = X(x, y), t = u(x, y)$; теперь координата и время - функции новых независимых переменных - первых производных от искомой функции. Линейное уравнение и его упрощенная (для малых чисел Маха) версия имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 (1+x)^{-2\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx c^2 [1 - 2\varepsilon x] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

(56) Однако (56) не богато симметриями и точно не решается. Зато более общее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \psi^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (57)$$

имеет максимально широкую группу симметрии при $\psi = [l + s x]^2$. Решая (57), полагая $l=1, s = \varepsilon/2$ и разлагая в ряд по малым x , найдем точное решение (56) (см.[9]).

Спасибо В.Ф.Ковалеву за полезные обсуждения и замечания.

Литература

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн (2-е изд.). М.: Наука, 1990.
3. Руденко О.В., Солуян С.И. Некоторые нестационарные задачи теории волн конечной амплитуды в диссипативных средах // ДАН. 1970. Т.190 №4. С.815-818.
4. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Якушкин И.Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН. 1983. Т.141, С. 221-255.5. Руденко О.В. Взаимодействия интенсивных шумовых волн // УФН. 1986. Т.149. №3. С.413-447.
6. Ибрагимов Н.Х. Алгебра группового анализа // Математика, Кибернетика. 1989. № 8. С. 1-47; Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений // Математика, Кибернетика. 1991. № 7. С. 1-47.
7. Ibragimov N.H. (ed.), CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Boca Raton, Florida: CRC Press. V.1: Symmetries, exact solutions and conservation laws, 1994. V.2: Applications in engineering and physical sciences, 1995. VI.3: New trends in theoretical developments and computational methods, 1996.
8. Enflo B.O., Rudenko O.V. To the Theory of Generalized Burgers' Equations // Acta Acustica. 2002. V.88.P155-162.
9. Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В. Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн // Акуст. журн. 2004. Т.50. № 4. С.406-419. Руденко О.В., Робсман В.А. Уравнение нелинейных волн в рассеивающей среде // ДАН. 2002. Т.384. №6. С.755-759.
11. Руденко О.В. О возможности генерации мощного гиперзвука с помощью лазерного излучения // Письма ЖЭТФ. 1974. Т 20. №7. С.445-448.
12. Карабутов А.А., Руденко О.В. Модифицированный метод Хохлова для исследования нестационарных трансзвуковых течений сжимаемого газа ДАН СССР. 1979. Т.248 №5. С.1082-1085.
13. Enflo B.O., Hedberg C.M., Rudenko O.V. Resonant properties of a nonlinear dissipative layer excited by a vibrating boundary: Q-factor and frequency response. // J. Acoust. Soc. America. 2005. V.117. No.2. P.601-612.
14. Руденко О.В., Сапожников О.А. Явления самовоздействия пучков волн, содержащих ударные фронты. УФН. 2004. Т.174. №9. С.973-989.
15. Руденко О.В., Хохлова В.А.. Кинетика одномерных пилообразных волн // Акуст. журн. 1991. Т. 37, № 1.
16. Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К. Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2006.