

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Затопленная струя Ландау: точные решения,
их смысл и приложения

Г.И. Броман, О.В. Руденко

Рассказывается о точных решениях уравнений гидродинамики, обобщающих решение Ландау о затопленной струе. Показано, как получить точные решения для невязких сред и учесть влияние вязкости в пограничном слое с помощью введения параболических координат. Обсуждается использование точных решений в прикладных задачах технической гидродинамики и акустики. Приводятся исторические факты, связанные с открытием класса точных решений и анализом их физического смысла.

PACS numbers: 43.25.Nm, 47.10.ad, **47.10.-g**, 47.15.Uv, 47.60.Kz

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201001f.0097

Содержание

1. Введение (97).
 2. Математическая модель (97).
 3. Решения для идеальной жидкости (98).
 4. Решения для вязкой жидкости (99).
 5. О приложениях к гидродинамике (101).
 6. О приложениях к акустике (102).
 7. Об истории проблемы (103).
- Список литературы (104).

1. Введение

Точные решения нелинейных уравнений гидродинамики найдены для немногих задач. Особое место среди них занимает решение Ландау о затопленной струе вязкой несжимаемой жидкости [1–3], бьющей из точечного отверстия в неограниченную среду. Многие из тех, кто повторил расчёты, были очарованы красотой и внутренней симметрией задачи. Действительно, удаётся упростить безнадёжно сложную (на первый взгляд) систему нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и найти решение, имеющее физический смысл. Это, безусловно, один из наиболее ярких результатов математической физики. Важность точных решений сохранилась и в наш компьютерный век. Известно, что для численного анализа реальных громоздких задач часто используются алгоритмы, кото-

рые очень желательно протестировать на точных аналитических решениях.

Решение Ландау является частным. Поэтому существует ряд ограничений на область его применимости. Главное из них — обращение решения в нуль при исчезающе малой вязкости. Иными словами, решение годится только для сильно вязких сред и не содержит предельного перехода к идеальной жидкости. Второе ограничение состоит в равенстве нулю полного потока жидкости, бьющей из отверстия. Это означает, что источник сообщает среде лишь импульс, а масса струи формируется за счёт притекания к оси окрестной жидкости. Однако от уникальных частных решений нельзя требовать, чтобы они описывали все возможные ситуации.

Иногда возникают неожиданные приложения. Так, было показано, что решение Ландау хорошо соответствует эксперименту по возбуждению "акустического ветра", в котором жидкость приводится в движение радиационным давлением интенсивной акустической волны [4]. В разделах 5, 6 приложения точных решений обсуждаются более подробно.

Вместе с тем решение Ландау допускает существенные обобщения. В частности, имеются точные формулы, описывающие течения жидкости с произвольным значением вязкости. Эти формулы содержат в себе описание течения идеальной жидкости и струи Ландау как некоторые предельные случаи.

2. Математическая модель

Исходными являются уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости:

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} = -\nabla\frac{p}{\rho_0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{u} — вектор скорости жидкости, ν — кинематическая вязкость, p — давление, ρ_0 — плотность. Течение считается цилиндрически симметричным относительно оси z ; его параметры не зависят от полярного угла. В

Г.И. Броман (G.I. Broman). Blekinge Institute of Technology, SE-371 79 Karlskrona, Sweden
E-mail: goran.broman@bth.se
О.В. Руденко. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Воробьёвы горы, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 939-29-36
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Статья поступила 5 октября 2009 г.

цилиндрической системе координат для компонент скорости $\mathbf{u} = (u \equiv u_r, w \equiv u_z)$ уравнения (1) запишутся так:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho_0} \right), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} - v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Уравнения (2)–(4) не изменят своего вида, если провести преобразование

$$u \rightarrow \frac{u}{C}, \quad w \rightarrow \frac{w}{C}, \quad p \rightarrow \frac{p}{C^2}, \quad z \rightarrow Cz, \quad r \rightarrow Cr. \quad (5)$$

Здесь C — произвольная константа. Инвариантность системы уравнений (2)–(4) относительно растяжения переменных (5) позволяет искать её решение в форме, также сохраняющейся при изменении масштабов (5):

$$u = \frac{1}{z} U \left(\frac{r}{z} \right), \quad w = \frac{1}{z} W \left(\frac{r}{z} \right), \quad - \frac{p}{\rho_0} = \frac{1}{z^2} P \left(\frac{r}{z} \right). \quad (6)$$

Инвариантные свойства уравнений гидродинамики, анализ которых проведён методами теории групп, подробно описаны в работах [5–8].

Подставляя (6) в уравнения (2)–(4) с частными производными, удаётся свести их к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций U , W , P , зависящих от одной переменной $\xi = r/z$:

$$U \frac{dU}{d\xi} - W \frac{d}{d\xi} (\xi U) - v \left[(1 + \xi^2) \frac{d^2 U}{d\xi^2} + \frac{1 + 4\xi^2}{\xi} \frac{dU}{d\xi} - \frac{1 - 2\xi^2}{\xi^2} U \right] = \frac{dP}{d\xi}, \quad (7)$$

$$U \frac{dW}{d\xi} - W \frac{d}{d\xi} (\xi W) - v \left[(1 + \xi^2) \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{1 + 4\xi^2}{\xi} \frac{dW}{d\xi} + 2W \right] = - \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 P), \quad (8)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi U) = \frac{d}{d\xi} (\xi W). \quad (9)$$

Нелинейная система трёх уравнений (7)–(9) замечательна тем, что имеет точное общее решение, которое в частных случаях удаётся использовать для анализа струй, а также течений в суживающихся (сопла) и расширяющихся (диффузоры) каналах.

3. Решения для идеальной жидкости

Положим в системе (7)–(9) вязкость равной нулю:

$$U \frac{dU}{d\xi} - W \frac{d}{d\xi} (\xi U) = \frac{dP}{d\xi}, \quad (10)$$

$$U \frac{dW}{d\xi} - W \frac{d}{d\xi} (\xi W) = - \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 P), \quad (11)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi U) = \frac{d}{d\xi} (\xi W). \quad (12)$$

Уравнения (10)–(12) решаются точно. Вначале приведём два независимых интеграла этой системы:

$$U^2 - (\xi W)^2 - 2P = C_1, \quad (13)$$

$$(U - \xi W)^2 - 2(1 + \xi^2) P = C_2, \quad (14)$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования. Справедливость выражения (13) нетрудно проверить: дифференцируя его и пользуясь уравнением непрерывности (12), получим первое уравнение движения (10). Правильность второго интеграла проверяется аналогично: после дифференцирования (14) и вычитания затем из него уравнения (10) приходим к уравнению (11). Заметим, что интегралы (13), (14) могут быть использованы для проверки точности численных расчётов.

Теперь удобно исключить из интегралов (13) и (14) переменную P :

$$(1 + \xi^2)^2 W^2 - (\xi U + W)^2 = (C_2 - C_1) - C_1 \xi^2. \quad (15)$$

Решая (15) совместно с наиболее простым уравнением (12) системы (10)–(12), можно найти общее решение этой системы. Уравнение (12) удобно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{d\xi} [(1 + \xi^2) W - (\xi U + W)] = \xi W. \quad (16)$$

Для определённости будем считать, что правая часть интеграла (15) положительна, и обозначим её как

$$f^2 = (C_2 - C_1) - C_1 \xi^2. \quad (17)$$

При этом (15) тождественно удовлетворяется, если положить

$$\begin{aligned} \xi U + W &= f \sinh X(\xi), \\ (1 + \xi^2) W &= f \cosh X(\xi), \end{aligned} \quad (18)$$

где $X(\xi)$ — новая неизвестная функция.

Подставляя (18) в уравнение непрерывности (16), удаётся привести последнее к линейному относительно $\exp(-2X)$ уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \exp(-2X) + \left(2 \frac{d}{d\xi} \ln f - \frac{\xi}{1 + \xi^2} \right) \exp(-2X) &= \\ &= \frac{\xi}{1 + \xi^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Решая (19), находим

$$\exp(-X) = \frac{1}{f} \sqrt{C_3 \sqrt{1 + \xi^2} - C_1(1 + \xi^2) - C_2}. \quad (20)$$

Здесь C_3 — третья константа интегрирования. Таким образом, общее решение уравнений (10)–(12) имеет вид

$$W = \frac{C_3 - 2C_1 \sqrt{1 + \xi^2}}{2\sqrt{1 + \xi^2} \sqrt{C_3 \sqrt{1 + \xi^2} - C_1(1 + \xi^2) - C_2}}, \quad (21)$$

$$U = \frac{2(C_1 + C_2)\sqrt{1 + \xi^2} - C_3(2 + \xi^2)}{2\xi\sqrt{1 + \xi^2}\sqrt{C_3\sqrt{1 + \xi^2} - C_1(1 + \xi^2)} - C_2}, \quad (22)$$

$$2P = U^2 - (\xi W)^2 - C_1. \quad (23)$$

Заметим, что даже в наиболее полных справочниках (см., например, [9]) это решение не приводится.

Константы можно выбрать так, чтобы, например, выполнялись граничные условия, обусловленные цилиндрической симметрией течения:

$$U(0) = 0, \quad 0 < |W(0)| < \infty. \quad (24)$$

Условия (24) означают, что радиальная компонента скорости на оси должна обращаться в нуль, а осевая компонента скорости должна принимать отличное от нуля конечное значение. Нетрудно проверить, что эти условия будут выполнены, если конкретизировать константы следующим образом: $C_1 = C_2 = -D^2$, $C_3 = -2D^2$. При этом останется одна независимая постоянная D , а соответствующее частное решение, получаемое из (21)–(23), примет вид

$$W = \frac{D}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad U = \frac{D}{\xi\sqrt{1 + \xi^2}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - 1 \right), \\ P = \frac{D^2}{\xi^2\sqrt{1 + \xi^2}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - 1 \right). \quad (25)$$

Легко видеть, что решение (25) в пределе $\xi \rightarrow 0$ удовлетворяет граничным условиям (24). При удалении от оси (когда $\xi \rightarrow \infty$) обе компоненты скорости обращаются в нуль.

Зная поле скоростей (25), можно рассчитать форму линий тока

$$\frac{dr}{u} = \frac{dz}{w}, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{U}{W} = \frac{1}{\xi} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - 1 \right). \quad (26)$$

Интегрируя уравнение (26), найдём

$$r = r_0 \sqrt{1 + \frac{2}{r_0} z}. \quad (27)$$

Здесь r_0 — радиус трубки в сечении $z = 0$. На рисунке 1 сплошными кривыми изображены линии тока в области

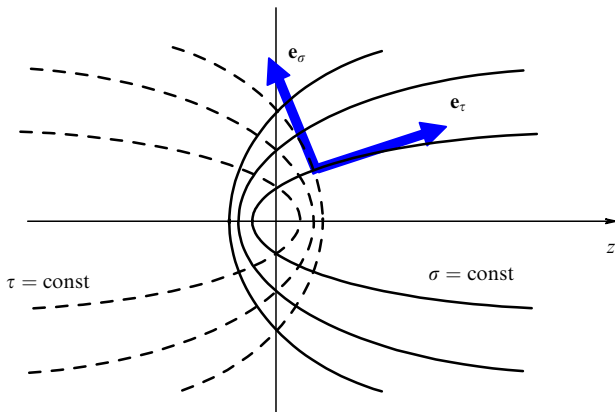


Рис. 1. Линии тока (27) (сплошные кривые) и привязанная к ним параболическая система координат (σ, τ) (см. раздел 5, формулу (58)). Поверхности $\sigma = \text{const}$ совпадают с трубками тока. Осевые сечения поверхностей $\tau = \text{const}$ изображены штриховыми кривыми.

$z > 0$ для значений константы $r_0 = 0,5, 1, 1,5$. Если рассматривать сужающуюся трубку тока, моделирующую сопло, в котором жидкость течёт справа налево, то в формулах (25) следует положить $D < 0$. При $D > 0$ трубка тока расширяется и моделирует диффузор. Во всех случаях нормальная компонента скорости на стенке обращается в нуль, но тангенциальная компонента не равна нулю, поскольку в решениях (21)–(23) и (25) не учтена вязкость.

4. Решения для вязкой жидкости

Хорошо известно одно частное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7)–(9), учитывающее вязкость:

$$U = 2v\xi \frac{A - \sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{1 + \xi^2} \left(A\sqrt{1 + \xi^2} - 1 \right)^2}, \\ W = 2v \frac{A + A(1 + \xi^2) - 2\sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{1 + \xi^2} \left(A\sqrt{1 + \xi^2} - 1 \right)^2}, \quad P = -\frac{2v}{\xi} U. \quad (28)$$

Здесь A — константа. Это решение оказывается "физически правильным". Оно удовлетворяет граничным условиям (24) на оси:

$$\frac{U(0)}{2v} = \frac{\xi}{A - 1}, \quad \frac{W(0)}{2v} = \frac{2}{A - 1}. \quad (29)$$

Кроме того, течение (28) исчезает вдали от оси, при $\xi \rightarrow \infty$. Решение (28) было найдено Ландау для уравнений (1), записанных в сферической системе координат:

$$-v \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (RU_R) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U_R}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{R^2} \frac{\partial U_R}{\partial \theta} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{R^2} U_R - \frac{2 \cot \theta}{R^2} U_\theta \right] + \\ + U_R \frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{U_\theta}{R} \frac{\partial U_R}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{R} = -\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{p}{\rho_0} \right), \quad (30)$$

$$-v \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (RU_\theta) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{R^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial U_R}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} U_\theta \right] + \\ + U_R \frac{\partial U_\theta}{\partial R} + \frac{U_\theta}{R} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_R U_\theta}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho_0} \right), \quad (31)$$

$$\frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{R} U_R + \frac{\cot \theta}{R} U_\theta = 0. \quad (32)$$

Здесь компоненты скорости и давления зависят от радиуса R и азимутального угла θ , а зависимость от полярного угла отсутствует. Очевидно, что инвариантность уравнений относительно преобразований (5) означает, что решение системы (30)–(32) можно искать также в другой форме, эквивалентной (6):

$$U_R = \frac{\varphi(\theta)}{R}, \quad U_\theta = \frac{f(\theta)}{R}, \quad -\frac{p}{\rho_0} = \frac{\chi(\theta)}{R^2}. \quad (33)$$

При этом (30)–(32) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v(\varphi'' + \varphi' \cot \theta) - f\varphi' + \varphi^2 + f^2 &= 2\chi, \\ v\varphi' - ff' + \chi' &= 0, \\ f' + f \cot \theta + \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной θ . Второе уравнение (34) интегрируется, что позволяет исключить переменную χ в первом из уравнений (34):

$$\begin{aligned} v(\varphi'' + \varphi' \cot \theta) - f\varphi' + \varphi^2 + 2v\varphi &= A_1, \\ f' + f \cot \theta + \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Ландау полагал константу A_1 равной нулю. Однако и при $A_1 \neq 0$ систему (35) удаётся два раза проинтегрировать. Это можно сделать, вычитая из первого уравнения (35) второе, умноженное на φ . При этом система (35) упрощается:

$$\begin{aligned} v(\varphi' \sin \theta)' - (f\varphi \sin \theta)' + 2v\varphi \sin \theta &= A_1 \sin \theta, \\ \varphi \sin \theta &= -(f \sin \theta)'. \end{aligned} \quad (36)$$

Удобно перейти к новым переменным:

$$\Phi = \varphi \sin \theta, \quad F = f \sin \theta. \quad (37)$$

Второе из уравнений (36) принимает простую форму $\Phi = -F'$, что позволяет свести первое уравнение системы (36) к уравнению первого порядка [10, 11]:

$$\begin{aligned} 2v(F' \sin \theta - 2F \cos \theta) - F^2 &= \\ &= -A_1 \cos^2 \theta + 2A_2 \cos \theta + 2A_3. \end{aligned} \quad (38)$$

Вычисляя F , нетрудно найти компоненты скорости:

$$U_R = \frac{1}{R} \frac{dF}{d\zeta}, \quad U_\theta = \frac{1}{R} \frac{F}{\sin \theta}, \quad \zeta \equiv \cos \theta, \quad (39)$$

и уравнение для линий тока:

$$\frac{dR}{RU_R} = \frac{d\theta}{U_\theta}, \quad \frac{dR}{R} = \frac{\Phi}{F} d\theta = -d \ln F. \quad (40)$$

Интегрируя (40), придём к простому выражению:

$$R(\theta) = \frac{B}{F(\theta)}. \quad (41)$$

Здесь различным значениям константы B отвечают разные линии тока.

Таким образом, для анализа структуры течения нужно найти функцию F . Это можно сделать, решив уравнение (38) непосредственно или линеаризовав его с помощью замены

$$F = 2v(1 - \zeta^2) \frac{d}{d\zeta} \ln V, \quad \zeta \equiv \cos \theta. \quad (42)$$

Соответствующее линейное уравнение второго порядка имеет вид

$$4v^2(1 - \zeta^2)^2 \frac{d^2 V}{d\zeta^2} = (A_1 \zeta^2 - 2A_2 \zeta - 2A_3) V. \quad (43)$$

Его общее решение выражается через гипергеометрические функции [12].

Решение Ландау соответствует равенству нулю всех трёх констант: $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, в уравнении (43) или (38). Интегрируя в этом случае, например, (43) и преобразуя переменные в обратном порядке, получим

$$V = G(\zeta - A), \quad F = 2v \frac{1 - \zeta^2}{\zeta - A}, \quad f = -2v \frac{\sin \theta}{A - \cos \theta}. \quad (44)$$

Здесь G, A — константы. Последнее выражение совпадает с формулой (23,18) из книги [3]. Рассмотрим вначале случай идеальной среды, положив в (38) $v = 0$:

$$\begin{aligned} F &= -\sqrt{A_1 \cos^2 \theta - 2A_2 \cos \theta - 2A_3}, \\ U_R &= \frac{1}{R} \frac{A_2 - A_1 \cos \theta}{\sqrt{A_1 \cos^2 \theta - 2A_2 \cos \theta - 2A_3}}, \\ U_\theta &= -\frac{\sqrt{A_1 \cos^2 \theta - 2A_2 \cos \theta - 2A_3}}{R \sin \theta}. \end{aligned} \quad (45)$$

В выражении для функции F взят знак "минус", для того чтобы привести рассматриваемое частное решение уравнения (38) к виду (21)–(23). Действительно, переходя от сферических координат к цилиндрическим, например для компоненты скорости

$$u_z = \frac{W(\xi)}{z} = U_R \cos \theta - U_\theta \sin \theta, \quad (46)$$

где $R = z\sqrt{1 + \xi^2}$, $\sin \theta = \xi/\sqrt{1 + \xi^2}$, придём к выражению

$$W = -\frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \frac{A_2 + 2A_3 \sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{A_1 - 2A_2 \sqrt{1 + \xi^2} - 2A_3(1 + \xi^2)}}, \quad (47)$$

которое отличается от (21) лишь обозначением констант: $A_1 = -C_2$, $-2A_2 = C_3$, $2A_3 = C_1$. Таким образом, уравнение (38) позволяет получить общее решение для невязкой среды.

Как было показано выше, частное решение, отвечающее дополнительным условиям (24) для осесимметричного течения идеальной жидкости, получается при значениях констант $C_1 = C_2 = -D^2$, $C_3 = -2D^2$. Интересно проанализировать именно этот случай и для среды с вязкостью. Полагая $A_1 = D^2$, $A_2 = D^2$, $2A_3 = -D^2$ в уравнении (43), приведём его к виду

$$(1 + \zeta)^2 \frac{d^2 V}{d\zeta^2} = \frac{D^2}{4v^2} V. \quad (48)$$

Уравнение (48) сводится к автономному уравнению заменой $1 + \zeta = \exp(t)$. Решая его и совершая преобразование (42), найдём соответствующее решение уравнения (38):

$$F = v(1 - \zeta) \left[1 + \gamma \frac{(1 + \zeta)^2 + G}{(1 + \zeta)^2 - G} \right], \quad \gamma \equiv \sqrt{1 + \frac{D^2}{v^2}}. \quad (49)$$

Здесь γ — константа, зависящая от отношения D/v , которое имеет смысл числа Рейнольдса; G — постоянная интегрирования. В предельном случае идеальной среды ($v \rightarrow 0$) из (49) получается прежнее решение (25), а при

малых числа Рейнольдса ($\nu \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 1$) — решение Ландау (44), в котором константа $G = A + 1$. Конечно, наиболее интересен промежуточный случай, в котором числа Рейнольдса произвольны.

Обратим внимание на то, что более общее (по сравнению с решением Ландау) выражение (49) может описывать ненулевой выход массы из точечного источника. Действительно, поток массы через сферическую поверхность радиуса R равен

$$Q = 2\pi\rho R^2 \int_0^\pi U_R \sin\theta d\theta = 2\pi\rho R [F(0) - F(\pi)]. \quad (50)$$

Отсюда следует, что поток массы для решения Ландау (44) равен нулю, поскольку $F(0) = F(\pi) = 0$. В других случаях это не так. Например, для невязкой среды из (49) следует $F = D(1 - \zeta)$ и поэтому в формуле (50) разность $F(0) - F(\pi) = 2D$. При произвольной вязкости из (49), (50) следует

$$Q = 4\pi\rho R\nu \left(\sqrt{1 + \frac{D^2}{\nu^2}} - 1 \right). \quad (51)$$

Однако выражение (51) получено в предположении об отсутствии особенностей подынтегральной функции в формуле (50) в области $0 < \theta \leq \pi$, что справедливо не при всех значениях констант G , γ в решении (49).

Интересная структура течения реализуется, когда константы связаны соотношением $G = -(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$. Линии тока (41) для этого случая показаны на рис. 2. В правом полупространстве линии приходят из бесконечности (при $\theta = \pi/2$) и уходят в бесконечность (при $\theta = 0$). Интеграл (50) в пределах $0 < \theta < \pi/2$ равен нулю, т.е. источники массы в этой области отсутствуют. Если теперь картину течения зеркально отразить относительно вертикальной оси, то скачка скорости не возникнет. При этом получится течение типа "двусторонней" затопленной струи (см. рис. 2, $\gamma = 2$). По аналогии с трактовой струей Ландау можно сказать, что течение на рис. 2 возникает при наличии точечного источника, сообщающего среде равные потоки импульса в сторону положительных и отрицательных z , но не вносящего массу в эти области.

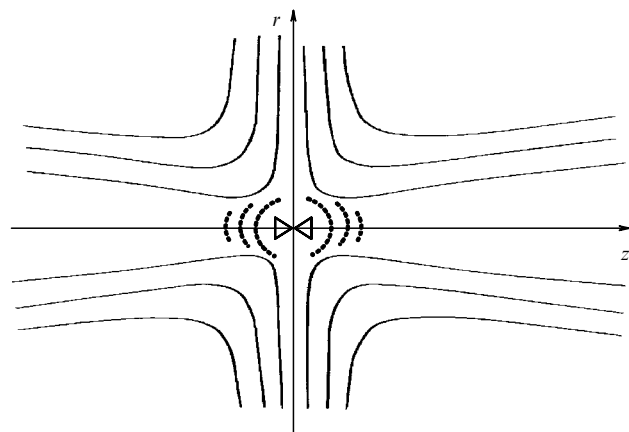


Рис. 2. Линии тока (сплошные кривые) для "двусторонней" струи или акустического течения, вызванного излучением двух противоположно направленных ультразвуковых волн. Излучатели схематически изображены треугольниками, а фронты волн, бегущих из начала координат, — штриховыми кривыми.

Заметим, что линии тока (41) при $\theta = 0$ уходят на бесконечность, какими бы ни были константы G , γ в решении (49). Исключением является значение $G = 2^\gamma$, при котором линия тока пересекается с осью z в точке $R_1 = B/(4\nu)$. Другой точкой пересечения с осью z будет $R_2 = B/[2\nu(\gamma - 1)]$. Таким образом, в случае $G = 2^\gamma$ получаются замкнутые линии тока. Если, кроме того, положить $\gamma = 3$, то получим течение с сохраняющейся полной массой. Однако в таком течении появляются источники и стоки массы, распределённые вдоль оси z .

5. О приложениях к гидродинамике

Часто говорят, что решение типа затопленной струи Ландау — это красивый математический результат, не имеющий отношения к реальным объектам. В этом разделе и разделе 6 указаны некоторые приложения точных решений к гидродинамике и акустике.

Одна из задач связана с оптимизацией работы высокотехнологичных и экологически чистых устройств — водоструйных резательных машин [13]. Струя, истекающая со скоростью $200 - 1000$ м с⁻¹, формируется в сужающемся сопле, на входе которого создаётся давление $200 - 500$ МПа. Оптимальная форма сопла должна уменьшить потери давления и повысить порог перехода от ламинарного течения к турбулентному. Последний режим приводит к появлению флуктуаций на выходе, которые нежелательны. Развитие неустойчивостей сокращает расстояния от среза сопла до объекта, на которых струя не дробится и возможно эффективное резание.

Для течений с конечными числами Рейнольдса, реализующихся в камерах высокого давления, хорошим приближением вдали от стенок оказывается решение (25), описывающее течение идеальной жидкости. Если форма сопла совпадает с формой трубки тока (27), то стенки не должны вносить заметных возмущений в поток. Об учёте вязкости в тонком пограничном слое сказано ниже. Решения для струй сильно вязкой жидкости, очевидно, в этой задаче неприменимы; для них неправомерно считать равной нулю касательную к стенке компоненту скорости.

Запишем решение (25) в исходных обозначениях:

$$u = \frac{D}{r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad w = \frac{D}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{\rho}{p_0} \frac{D^2}{r^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (52)$$

Здесь p_0 — давление при $z \rightarrow \infty$. Константа D должна быть отрицательной, для того чтобы течение было сходящимся (направленным в сторону уменьшающихся значений z (см. рис. 1)). Эта константа пропорциональна полному потоку массы через поперечное сечение сопла:

$$Q = -\rho \int_0^{r(z)} w 2\pi r dr = 2\pi\rho r_0 |D|. \quad (53)$$

Здесь $r(z)$ — радиус совпадающей с поверхностью сопла трубки тока (27). Видно, что поток конечен и одинаков в любом сечении, поскольку жидкость несжимаема. Положения выходного и входного сечений сопла обозначим как z_1 , z_2 . Очевидно, что между ними не должна находиться особая точка $z = 0$, поэтому $0 < z_1 < z < z_2$. Соответствующие радиусы сечений сопла равны r_1 , r_2 .

Координата выходного сечения определяется из условия равенства p (52) атмосферному давлению или приближённо нулю, поскольку давление в камере очень велико:

$$p(0, z_1) = 0, z_1 = |D| \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}. \quad (54)$$

Давление во входном сечении $z_2 = z_1 + L$, где L — длина сопла, близко к давлению на бесконечности, поэтому

$$p(0, z_2) = p_0(1 - \kappa^2), \quad z_2 = |D| \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}} \frac{1}{\kappa}. \quad (55)$$

Здесь $\kappa^2 \ll 1$ — неизвестная вспомогательная константа. Несложные преобразования выражений (52)–(55) приводят к следующей формуле для входного давления, создающего необходимый расход массы при данных геометрических параметрах сопла:

$$p_0 = \frac{Q^2}{2\pi^2\rho} (r_1^2 - r_0^2)^{-2}, \quad \kappa = \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_2^2 - r_0^2}. \quad (56)$$

Здесь параметр линии тока (27), совпадающей со стенкой, даётся выражением

$$r_0 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2L},$$

а координаты сечений равны

$$z_1 = L \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad z_2 = L \frac{r_2^2 - r_0^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Можно показать, что теория справедлива при выполнении условия

$$2Lr_1 > r_2^2 - r_1^2. \quad (57)$$

Из формулы (57) следует, что камера высокого давления должна быть достаточно длинной. Например, при типичных значениях радиусов $r_1 = 0,125$ мм, $r_2 = 1,6$ мм длина должна составлять $L > 10,2$ мм. В реальных устройствах условие (57) выполняется. Испытания показали, что при меньших длинах камеры скорость струи на выходе резко падает.

Как показало сравнение результатов теории с параметрами машин, производимых компанией "Water Jet Sweden AB" (Роннеби, Швеция), геометрия сопла, определённая при конструировании эмпирически, близка к расчётной. Для одной из машин $r_1 = 0,125$ мм, $r_2 = 1,6$ мм, $L = 20$ мм, расход жидкости $Q = 0,020$ кг с⁻¹, давление $p_0 = 3500$ бар, $\kappa = 0,0045$. Теория даёт неплохое соответствие: $p_0 = 3200$ бар. Различие может быть связано с ошибкой измерений, небольшими утечками в насосной системе, отличием формы реального сопла от идеальной, а также учётом вязкости в пограничном слое у стенок.

Для вязкой жидкости возникает ещё одно граничное условие. Наряду с условием "непротекания" — равенством нулю нормальной к стенке проекции скорости — должна обращаться в нуль и тангенциальная проекция. Учёт вязкости можно провести довольно изящным способом. Обратим внимание на то, что трубка тока (27) и, следовательно, форма сопла являются параболами

дом вращения. Этот факт позволяет ввести ортогональные криволинейные координаты, а именно софокусные параболические координаты (σ, τ) , как показано на рис. 1. Связи новых и прежних цилиндрических координат, а также проекций скорости даются соотношениями [14]

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sigma\tau, \quad z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \quad (58)$$

$$u = \frac{\sigma u_\tau + \tau u_\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}, \quad w = \frac{\tau u_\tau - \sigma u_\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}.$$

Уравнения (1) в параболических координатах имеют вид:

$$u_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} + u_\sigma \frac{\partial u_\tau}{\partial \sigma} + \frac{\sigma u_\tau - \tau u_\sigma}{\sigma^2 + \tau^2} u_\sigma = -\frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{1}{\rho_0} +$$

$$+ \frac{v}{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial \sigma} - \frac{\partial u_\sigma}{\partial \tau} + \frac{\sigma u_\tau - \tau u_\sigma}{\sigma^2 + \tau^2} \right) \right], \quad (59)$$

$$u_\sigma \frac{\partial u_\sigma}{\partial \sigma} + u_\tau \frac{\partial u_\sigma}{\partial \tau} + \frac{\tau u_\sigma - \sigma u_\tau}{\sigma^2 + \tau^2} u_\tau = -\frac{\partial p}{\partial \sigma} \frac{1}{\rho_0} -$$

$$- \frac{v}{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial \sigma} - \frac{\partial u_\sigma}{\partial \tau} + \frac{\sigma u_\tau - \tau u_\sigma}{\sigma^2 + \tau^2} \right) \right],$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma u_\sigma) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau u_\tau) + \frac{\sigma u_\sigma + \tau u_\tau}{\sigma^2 + \tau^2} = 0.$$

Решение (52) принимает, согласно (58), простую форму:

$$u_\sigma = 0, \quad u_\tau = \frac{2D}{\tau\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}. \quad (60)$$

Это решение, как нетрудно проверить, удовлетворяет уравнениям (59) с нулевой вязкостью, а также граничному условию $u_\sigma = 0$. Для того чтобы обобщить результат (60) и получить решение, удовлетворяющее второму граничному условию, нужно решить уравнения (59) численно либо перейти в них к приближению пограничного слоя. В упрощённых уравнениях типа Прандтля решение (60) будет той предельной функцией, к которой должно стремиться "вязкое" решение вдали от стенок.

В заключение этого раздела обратим ещё раз внимание на то, что решение с сингулярностью было здесь использовано для анализа реального течения. Очевидно, что и фрагменты других решений, не содержащие особенностей, можно использовать при описании течений в трубах переменного сечения.

6. О приложениях к акустике

Тот факт, что струя Ландау сообщает среде количество движения, но не вносит массу, позволяет использовать её для описания потоков, вызванных звуком. Акустические течения, наблюдавшиеся ещё Фарадеем [15], сейчас приобрели важное прикладное значение, в частности, для промышленной [16] и медицинской [17] диагностики. Здесь имеются в виду течения, вызванные поглощением акустических волн в однородной среде. При этом импульс, переносимый волной, передаётся среде, вызывая её движение. Для описания акустических течений используются уравнения гидродинамики (1), причём в правую часть уравнения движения вносится дополнительный член — радиационная сила \mathbf{F} [18], зависящая от усреднённых по периоду волны квадратичных комбинаций переменных, описывающих акустическое поле [4].

Автомодельное решение Ландау соответствует акустическому течению в тех случаях, когда волна сильно поглощается — на расстояниях, много меньших характерного размера изменения структуры течения. При этом, как показано в книге [4], константа A в решении (44) связана с интенсивностью волны I соотношением

$$A \left[1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A + 1}{A - 1} \right] = \frac{S}{16\pi v^2} \frac{I}{c_0 \rho_0}, \quad (61)$$

где S — площадь поперечного сечения пучка, c_0 — скорость звука.

Второй случай, когда автомодельная подстановка преобразует уравнения в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, относится к течениям, вызванным нелинейным поглощением сферической пилообразной волны. При этом отличной от нуля оказывается радиальная компонента силы, которая обратно пропорциональна R^3 [4]. Используя обозначение

$$F_R(R, \theta) = \frac{Y}{R^3} \frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2}, \quad \zeta = \cos \theta, \quad (62)$$

можно проделать те же преобразования, что и в разделе 4, и получить уравнение типа Риккати (38)

$$2v \left[(1 - \zeta^2) \frac{dF}{d\zeta} + 2\zeta F \right] + F^2 = A_1 \zeta^2 - 2A_2 \zeta - 2A_3 - 2Y\Psi(\zeta) \quad (63)$$

либо линеаризованное с помощью замены (42) уравнение, аналогичное (43):

$$4v^2 (1 - \zeta^2)^2 \frac{d^2 V}{d\zeta^2} = (A_1 \zeta^2 - 2A_2 \zeta - 2A_3 - 2Y\Psi(\zeta)) V. \quad (64)$$

Константа Y в формулах (62)–(64) зависит от интенсивности звука на оси пучка, частоты, а также линейных и нелинейных акустических параметров среды.

Одно из самых простых решений задачи описывает линии тока (41) такой формы:

$$R(\theta) = \frac{B}{\sin^2 \theta \cos \theta}. \quad (65)$$

Течение (65) может быть реализовано для значения константы $A_1 = 12v^2$ при следующей зависимости радиационной силы от полярного угла:

$$F_R(R, \theta) = \frac{72v^2}{R^3} \cos^2 \theta \left(1 - \frac{5}{6} \cos^2 \theta \right). \quad (66)$$

Линии тока (65) и характеристика направленности (66) изображены на рис. 3.

Ещё одна группа "акустических" задач связана с управлением струйными течениями. Воздействие звука на струи в соплах и диффузорах может повлиять на их устойчивость и, следовательно, на условия их практического применения. Использование точных решений нелинейных уравнений гидродинамики открывает принципиальную возможность отдельного изучения других нелинейностей, ответственных за взаимодействия типа "звук – звук" в движущейся среде и "звук – течение" [4].

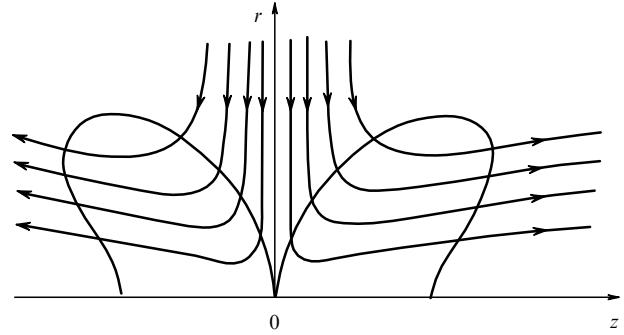


Рис. 3. Акустическое течение, индуцированное радиационной силой с характеристикой направленности в форме "бабочки".

7. Об истории проблемы

Задача о затопленной струе Ландау имеет непростую историю. Можно проследить три практически независимых друг от друга направления исследований. Первая группа — это работы, выполненные в духе математиков и механиков [10–12]; вторая — работы физиков-теоретиков [1–3, 19]; третья — публикации зарубежных специалистов [20–23].

В 1934 г. Н.А. Слѣзкин [10] исходил из нелинейного уравнения четвёртого порядка для функции тока, записанного в цилиндрической системе координат. К одному такому уравнению, как известно, сводится система уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости (1). Это уравнение в частных производных, в свою очередь, было сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое удалось трижды проинтегрировать и получить уравнение первого порядка типа Риккати (38). Затем это уравнение было линеаризовано и приведено к виду (43). Приоритетная работа [10] занимает две неполные страницы и не содержит решений полученных уравнений и тем более их физического анализа. В книге [11], опубликованной в 1955 г. и получившей гриф учебника для университетов, Н.А. Слѣзкин также приводит в основном математические преобразования [11, § 12, с. 150–154], но при этом указывает: "Простейшее решение дифференциального уравнения... было получено Ландау и истолковано как решение, отвечающее затопленной струе".

В 1944 г. Л.Д. Ландау опубликовал знаменитую работу [1], в которой ограничился частным (с точки зрения математики) решением, но имеющим наибольший физический смысл. Это решение было детально проанализировано, и сегодня оно приводится во многих учебниках, в том числе в курсе теоретической физики [3]. О работе Н.И. Слѣзкина, конечно, Л.Д. Ландау в то время не знал: *Учёные записки МГУ* даже в 1940-е годы являлись труднодоступными и не относились к числу научных журналов, популярных среди физиков. Ссылка на работу [10] в курсе [3] была сделана.

В 1950 г. В.И. Яцев опубликовал работу [12], выполненную по предложению Ю.Б. Румера. В этой работе получены те же уравнения, что и в заметке [10]. Для линеаризованного уравнения типа (43) выписано явное общее решение через гипергеометрические функции. Кроме того, вычислены компоненты тензора плотности потока импульса через постоянные интегрирования, а также выведены уравнения для линий тока. Получены

решение Ландау и ещё одно новое решение, которое, по мнению автора, "не имеет физического смысла". Имеется сноска: "После передачи рукописи в печать я получил от Л.Д. Ландау сообщение о работе Слэзкина [10], в которой автор другим путём пришёл к этому же уравнению".

В 1952 г. уже сам Ю.Б. Румер обратился к задаче о затопленной струе [19]. Его целью было устранить дефект решения Ландау — равенство нулю массы жидкости, бьющей из отверстия. С этой целью искалось приближённое решение уравнений (30)–(32) в виде разложения по степеням $1/R$. Реально удалось учесть члены порядка $1/R^2$, т.е. поправки к точному представлению (33). Решая новые уравнения, удалось найти поправку к решению Ландау и тем самым вычислить расход массы.

В 1951–1952 гг. Сквайр (H.V. Squire) опубликовал работы [20, 21], в которых изложил процедуру сведения уравнений (1) к линейному уравнению, нашёл и проанализировал течение Ландау и учёл распределение температуры в потоке; это важно для задач истечения нагретых струй, образующихся при горении в камере. Видимо, о работах Слэзкина, Ландау, Яцеева и Румера автор не знал, поскольку ссылок на них нет ни в статьях [20, 21], ни в более позднем обзоре [22].

В недавно появившейся монографии [23] эта история излагается так: "Яцеев (1950) получил общее решение уравнения, впервые выведенного Слэзкинским (1934). Приложение к круглой струе обсуждено Ландау (1944) и затем более детально — Сквайром (1951, 1952, 1955)".

Авторы благодарят за полезную информацию и дискуссии А.Г. Куликовского, С.В. Нестерова, А.Д. Полянина, В.В. Пухначева и А.В. Уварова.

Работа поддержана Фондом знаний Швеции, компанией "Water Jet Sweden" и Технологическим институтом Блекинге, а также РФФИ.

Список литературы

1. Ландау Л Д *ДАН СССР* **43** 299 (1944)
2. Ландау Л Д *Собрание трудов* Т. 2 (Под ред. Е М Лифшица, И М Халатникова) (М.: Наука, 1969)
3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
4. Руденко О В, Солюян С И *Теоретические основы нелинейной акустики* (М.: Наука, 1975) [Rudenko O V, Soluyan S I *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (New York: Consultants Bureau, 1977)]
5. Пухначев В В *Успехи механики* (1) 6 (2006)
6. Andreev V K et al. *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics* (Dordrecht: Kluwer Acad., 1999)
7. Ovsiannikov L V *Group Analysis of Differential Equations* (New York: Academic Press, 1982)
8. Ibragimov N H *Selected Works Vols 1–3* (Karlskrona: ALGA Publ., 2006–2008)
9. Polyanin A D, Zaitsev V F *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations* (Boca Raton: CRC Press, 1995); <http://eqworld.ipmnet.ru/>
10. Слэзкин Н А *Ученые записки МГУ* (2) 89 (1934)
11. Слэзкин Н А *Динамика вязкой несжимаемой жидкости* (М.: Гостехтеориздат, 1955)
12. Яцеев В И *ЖЭТФ* **20** 1031 (1950)
13. Momber A W, Kovacevic R *Principles of Abrasive Water Jet Machining* (London: Springer, 1998)
14. Madelung E *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers (Mathematical Tools for the Physicist)* (New York: Dover Publ., 1943)
15. Faraday M *Philos. Trans. R. Soc. London* **121** 299 (1831)
16. Руденко О В *УФН* **176** 77 (2006) [Rudenko O V *Phys. Usp.* **49** 69 (2006)]
17. Руденко О В *УФН* **177** 374 (2007) [Rudenko O V *Phys. Usp.* **50** 359 (2007)]
18. Rayleigh *Philos. Mag.* **3** 338 (1902)
19. Румер Ю Б *Прикл. мат. мех.* **16** 255 (1952)
20. Squire H V *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **4** 321 (1951)
21. Squire H V *Philos. Mag. Ser. 7* **43** 942 (1952)
22. Squire H V, in *50 Jahre Grenzschichtforschung* (Eds H Görtler, W Tollmien) (Braunschweig: F. Vieweg, 1955) pp. 47–54
23. Drazin P G, Riley N *The Navier-Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006)

Submerged Landau jet: exact solutions, their meaning and application

G.I. Broman

Blekinge Institute of Technology, SE-371 79 Karlskrona, Sweden

E-mail: goran.broman@bth.se

O.V. Rudenko

M.V. Lomonosov Moscow State University,

Vorob'evy gory, 119991 Moscow, Russian Federation

Tel. (7-495) 939-29 36

E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Exact hydrodynamic solutions generalizing the Landau submerged jet solution are reviewed. It is shown how exact inviscid solutions can be obtained and how boundary layer viscosity can be included by introducing parabolic coordinates. The use of exact solutions in applied hydrodynamics and acoustics is discussed. A historical perspective on the discovery of the class of exact solutions and on the analysis of their physical meaning is presented.

PACS numbers: 43.25.Nm, 47.10.ad, **47.10.**–g, 47.15.Uv, 47.60.Kz

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201001f.0097

Bibliography — 23 references

Received 5 October 2009

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **180** (1) 97–104 (2010)

Physics–Uspekhi **53** (1) (2010)