ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Зайцев В.Ф., Линчук Л.В.

Российский государственный педагогический
университет им. А.И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru
e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru

Хорошо известно, что групповой анализ является эффективным инструментом для исследования и интегрирования дифференциальных уравнений. Для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) наличие допускаемой алгебры достаточной размерности приводит не только к понижению порядка, но и к интегрированию, т.е. к отысканию общего решения (см., например, [1]). С уравнениями в частных производных (УрЧП) ситуация намного сложнее: классические алгоритмы приводят не к понижению порядка, а к понижению размерности [2]. При этом мы находим не общее, а некоторый класс частных решений, зато найденные решения инвариантны относительно допускаемых групп, что существенно повышает их прикладную зна́чимость.

Тем не менее ряд технологий, разработанных для ОДУ (в том числе теоремы о факторизации) можно с успехом применять и для УрЧП. Как было показано в [3], УрЧП 2-го порядка

$$u_{xx} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}) \tag{1}$$

можно представить в виде факторсистемы

$$\begin{cases} w = w(x, y, u, u_x, u_y), \\ w_x = G(x, y, w, w_y) \end{cases} \tag{2}$$

с помощью оператора

$$X = A\partial_u, \tag{3}$$

где нелокальная переменная A определяется правилами дифференцирования

$$D_x A = \alpha(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy})A, \quad D_y A = \beta(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy})A.$$

В такой формулировке эта задача достаточно сложно решается, так как зависимость функций α и β практически от всех производных, входящих в уравнение (1), не даёт возможность расщепить определяющее уравнение и найти искомый оператор. Но практика показывает, что если всё же удалось найти допускаемый оператор, то в результате мы находим целый класс операторов, среди которых либо много "пустых", т.е. не дающих никакой факторизации, либо много таких, которые порождают одну и ту же факторсистему. Поэтому естественным образом возникает задача поиска условий на структуру коэффициентов α и β, при которых мы бы находили все факторсистемы, но не получали "лишних" операторов.

Если допускаемый оператор найден, то для построения факторсистемы (2) нам нужно найти его дифференциальный инвариант 1-го порядка из уравнения

$$w_u + \alpha w_{u_x} + \beta w_{u_y} = 0. \tag{4}$$

Воспользуемся требованием того, что этот инвариант должен быть один (теоретически их может быть два). Продифференцировав уравнение (4) по переменным u_{xy} и u_{yy}, получим ещё два уравнения

$$\alpha_{u_{xy}} w_{u_x} + \beta_{u_{xy}} w_{u_y} = 0, \tag{5}$$

$$\alpha_{u_{yy}} w_{u_x} + \beta_{u_{yy}} w_{u_y} = 0. \tag{6}$$

Во-первых, хотя бы один из коэффициентов $\alpha_{u_{xy}}$, $\beta_{u_{xy}}$, $\alpha_{u_{yy}}$, $\beta_{u_{yy}}$ должен быть отличен от нуля, иначе допускаемый оператор будет иметь два дифференциальных инварианта 1-го порядка. А во-вторых, из трёх уравнений (4)-(6) должно остаться только два, которые образуют замкнутую систему. Предположим, для определённости $\alpha_{u_{xy}} \neq 0$. Тогда, так как w_u отсутствует в уравнениях (5) и (6), то уравнение (6) должно быть "лишним", а эта ситуация возникает только если

$$\alpha_{u_{xy}} \beta_{u_{yy}} - \alpha_{u_{yy}} \beta_{u_{xy}} = 0. \tag{7}$$

Следовательно, искомый инвариант удовлетворяет системе

$$\left\{ \begin{array}{l} w_u + \alpha w_{u_x} + \beta w_{u_y} = 0, \\ \alpha_{u_{xy}} w_{u_x} + \beta_{u_{xy}} w_{u_y} = 0, \end{array} \right. \tag{8}$$

причём

$$\frac{\beta_{u_{xy}}}{\alpha_{u_{xy}}} = -\frac{w_{u_x}}{w_{u_y}},$$

а значит, это отношение не зависит от вторых производных. Пусть

$$\beta_{u_{xy}} = \gamma_1(x, y, u, u_x, u_y)\alpha_{u_{xy}}.$$

Заметим, что $\gamma_1 \neq 0$, так как иначе из уравнения 6 следовало бы, что $w_{u_x} = 0$, но для построения искомой факторсистемы инвариант w должен зависеть от производной u_x. Тогда

$$\beta = \gamma_1(x, y, u, u_x, u_y)\alpha + \varphi(x, y, u, u_x, u_y, u_{yy}).$$

Подставляя это выражения для β в (7), получаем

$$\alpha_{u_{xy}} \varphi_{u_{yy}} = 0.$$

Поэтому φ не зависит от u_{yy}. Таким образом, необходимым условием на структуру коэффициентов в правилах дифференцирования нелокальной переменной A будет соотношение

$$\beta = \gamma_1(x, y, u, u_x, u_y)\alpha + \gamma_2(x, y, u, u_x, u_y).$$

В результате система (8) преобразуется к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} w_u + \alpha w_{u_x} + (\gamma_1 \alpha + \gamma_2) w_{u_y} = 0, \\ \alpha_{u_{xy}} w_{u_x} + \gamma_1 \alpha_{u_{xy}} w_{u_y} = 0 \end{array} \right.$$

и может быть упрощена

$$\begin{cases} w_u + \gamma_2 w_{u_y} = 0, \\ w_{u_x} + \gamma_1 w_{u_y} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

а условие полноты этой системы

$$\gamma_{2u_x} - \gamma_{1u} - \gamma_{1u_y}\gamma_2 + \gamma_1\gamma_{2u_y} = 0$$

является дополнительным ограничением на коэффициенты α и β.

Заметим, что система (9) не зависит от α. А это значит, что так как факторизация полностью определяется дифференциальным инвариантом 1-го порядка найденным из этой системы, то α является несущественным коэффициентом. В этом можно также убедиться и другим способом: если разрешить второе уравнение системы (2) относительно u_{xx} (в результате мы получим исходное уравнение (1)), то окажется, что оно допускает оператор (3) при любом коэффициенте α при заданных γ_1 и γ_2. На α нужно наложить лишь единственное ограничение: этот коэффициент должен зависеть хотя бы от одной второй производной. Зависимость от этой производной позволяет расщепить уравнение (4) на два независимых уравнения, которые гарантируют нам вместе наличие ровно одного дифференциального инварианта 1-го порядка. В этом фактически и заключается смысл коэффициента α. Таким образом, например, можно положить $\alpha = u_{xy}$ и тем самым существенно упростить задачу построения факторсистемы вида (2) с помощью оператора (3).

Из системы (9), задав γ_1 и γ_2, мы можем получить любой дифференциальный инвариант 1-го порядка, кроме инварианта, независящего от u_y. Произвольный инвариант этого класса может быть получен, например, при $\beta = u_{yy}$ и $\alpha = \gamma(x, y, u, u_x)$, где $\gamma(x, y, u, u_x)$ – некоторая функция.

Поэтому можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Если УрЧП 2-го порядка (1) имеет факторсистему (2), то оно допускает оператор (3), правила дифференцирования нелокальной переменной A в котором определяются соотношениями либо

$$D_xA = u_{xy}A, \quad D_yA = (\gamma_1(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + \gamma_2(x, y, u, u_x, u_y))A, \tag{10}$$

где $\gamma_1 \neq 0$ и γ_2 удовлетворяют уравнению

$$\gamma_{2u_x} - \gamma_{1u} - \gamma_{1u_y}\gamma_2 + \gamma_1\gamma_{2u_y} = 0,$$

либо

$$D_xA = \gamma(x, y, u, u_x)A, \quad D_yA = u_{yy}A. \tag{11}$$

Попробуем теперь получить условия на вид правой части уравнения (1), которые позволять нам оценить применимость этого метода для построения факторсистем вида (2). Для этого сначала составим определяющее уравнение с использованием оператора, правила дифференцирования нелокальной переменной A задаются соотношениями (10)

$$A\left[F_y + u_{xy}F_{u_y} + (\gamma_1 u_{xy} + \gamma_2)F_{u_y} - u_{xxy} + \right.$$
$$\left. + u_{xyy}F_{u_{yy}} + D_y(\gamma_1 u_{xy} + \gamma_2)F_{u_{yy}}\right]\Big|_{u_{xx}=F,\, D_y(D_xA)=D_x(D_yA)} = 0.$$

Условия $u_{xx} = F$, $D_y(D_x A) = D_x(D_y A)$ означают, что из соотношений

$$u_{xx} = F, \quad u_{xxx} = D_x(F), \quad u_{xxy} = D_y(F), \quad u_{xyy} = D_x(\gamma_1 u_{xy} + \gamma_2) \tag{12}$$

мы выражаем какие-то из производных и подставляем их в соответствующее выражение. Здесь возникает 3 случая

1. $F_{u_{yy}} \neq 0$. Тогда мы выражаем из равенств (12) $u_{xx}, u_{xxy}, u_{xxx}, u_{yyy}$ и после их подстановки определяющее уравнение принимает вид

$$(\gamma_1 F_{u_{xy}} + \gamma_1^2 F_{u_{yy}} - 1)u_{xyy} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

где $\Phi(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy})$ – некоторая функция, независящая от u_{xyy} (из-за громоздкости выражения мы её не приводим). Но тогда

$$\gamma_1 F_{u_{xy}} + \gamma_1^2 F_{u_{yy}} - 1 = 0$$

и

$$F = \frac{u_{xy}}{\gamma_1} + \Psi(x, y, u, u_x, u_y, u_{yy} - \gamma_1 u_{xy}). \tag{13}$$

Пример 1. Рассматривая операторы вида (3), правила дифференцирования нелокальной переменной A в которых определяются равенствами (10), можно решить обратную задачу группового анализа для класса уравнений

$$u_{xx} = u_{yy} + f_2(x, y, u, u_x)u_y^2 + f_1(x, y, u, u_x)u_y + f_0(x, y, u, u_x).$$

Результатом является подкласс уравнений имеющий пяти функциональный произвол: две функции, зависящие от x, y, u, и три функции, зависящие только от x и y. В виду громоздкости структуры этого подкласса мы приведём лишь его небольшую часть: уравнение

$$u_{xx} = u_{yy} + \frac{1}{u}u_y^2 - \left(\frac{4u}{2\alpha_3 + u^2}u_x + \frac{2\alpha_{3y} + 2\alpha_{3x} + 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1 u^2}{2\alpha_3 + u^2}\right)u_y + \\ + \frac{3u^2 - 2\alpha_3}{u(2\alpha_3 + u^2)}u_x^2 + \frac{2\alpha_{3y} + 2\alpha_{3x} + 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1 u^2}{2\alpha_3 + u^2}u_x + \frac{\alpha_2(2\alpha_3 + u^2)}{u},$$

где $\alpha_i = \alpha_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$ – произвольные функции своих аргументов. Это уравнение с помощью оператора

$$X = A\partial_u, \quad D_x A = u_{xy}, \quad D_y A = \left(u_{xy} + (u_x - u_y)\frac{2\alpha_3 - u^2}{u(2\alpha_3 + u^2)}\right)A$$

факторизуется следующим образом

$$\begin{cases} w = \dfrac{(u_x - u_y)u}{2\alpha_3 + u^2}, \\ w_x + w_y = 2w^2 + \alpha_1 w + \alpha_2. \end{cases}$$

2. $F_{u_{yy}} = 0$ и $F_{u_{xy}} \neq \frac{1}{\gamma_1}$. Этой случай не возможен. Покажем это. Последнее уравнение факторсистемы (2) можно записать в виде

$$w_x + w_u u_x + w_{u_x} u_{xx} + w_{u_y} u_{xy} = G\left(x, y, w, w_y + w_u u_y + w_{u_x} u_{xy} + w_{u_y} u_{yy}\right).$$

Исходное уравнение (1) можно получить из данного, разрешив его относительно u_{xx}, а, учитывая, что $F_{u_{yy}} = 0$, то G не должна зависеть от своей последней переменной. Поэтому уравнение (1) должно иметь структуру

$$u_{xx} = \frac{-w_x - w_u u_x - w_{u_y} u_{xy} + G(x, y, w)}{w_{u_x}} \equiv F.$$

Значит,
$$F_{u_{xy}} = -\frac{w_{u_y}}{w_{u_x}} = -\frac{1}{\gamma_1},$$
а это противоречит условию.

3. $F_{u_{yy}} = 0$ и $F_{u_{xy}} = \frac{1}{\gamma_1}$. В этом случае из определяющего уравнения дополнительные условия на правую часть уравнения F получить нельзя (результат зависит от конкретных выражений для γ_1 и γ_2), но из условий этого пункта видно, что

$$F = \frac{u_{xy}}{\gamma_1} + \Psi(x, y, u, u_x, u_y).$$

Пример 2. Уравнение

$$q_{u_x} u_{xx} = s\mathrm{e}^{p_1} u_{xy} - q_u u_x + p_{1x} q - q_x + p_2,$$

где $s = s(y) \neq 0$, $p_1 = p_1(x, y)$, $p_2 = p_2(x, y)$, $q = q(x, y, u, u_x)$ – произвольные функции своих аргументов, с помощью оператора (3), правила дифференцирования нелокальной переменной A в котором задаются соотношениями
$$D_x A = u_{xy} A, \quad D_y A = \frac{q_{u_x} u_{xy} + q_u}{s\mathrm{e}^{p_1}} A,$$

факторизуется следующим образом

$$\begin{cases} w = s\mathrm{e}^{p_1} u_y - q, \\ w_x - p_{1x} w + p_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если УрЧП 2-го порядка (1) факторизуется по типу (2) и $w_{u_y} \neq 0$, то его правая часть F должна содержать вторую производную u_{xy} либо u_{yy}. Если F зависит от производной u_{yy}, то она должна иметь структуру (13). В частности, если F зависит от u_{yy} и не зависит от u_{xy}, то он а должна быть линейна по u_{yy}.

Пусть теперь правила дифференцирования нелокальной переменной A задаются соотношениями (11). В этом случае, составляя аналогично определяющую систему, получаем условие $F_{u_{yy}} = 0$ (это условие достаточно легко следует из того факта, что в этом случае, как было показано выше, дифференциальный инвариант не зависит от u_y, тогда второе уравнение факторсистемы (2), а следовательно, и исходное уравнение (1) не может содержать u_{yy}). Второе ограничение на структуру правой части уравнения (1) состоит в связи между производными u_y и u_{xy}, а именно:

$$F = \Psi(x, y, u, u_x, u_{xy} - \gamma u_y).$$

Остальные ограничения содержатся в уравнении, оставшемся от определяющей системы:

$$(\gamma_{u_x} v + \gamma_y)\Psi_v + \gamma\Psi_{u_x} + \Psi_u - \gamma_{u_x}\Psi - \gamma_u u_x - \gamma_x - \gamma^2 = 0,$$

где $v = u_{xy} - \gamma u_y$.

Пример 3. Исследуем возможность факторизации уравнения

$$uu_{xx} = C_1 uu_{xy} + C_2 u_x u_y + f(x, y)u_x^2$$

по типу (2) при условии, что дифференциальный инвариант 1-го порядка не зависит от u_y. Решая определяющую систему, приходим к выводу, что $C_1 \neq 0$ и при этом возможно 2 случая

1. $C_2 = -C_1$. Тогда для соответствующего уравнения

   $$uu_{xx} = C_1(uu_{xy} - u_x u_y) + f(x, y)u_x^2$$

   факторсистема имеет вид

   $$\begin{cases} w = u_x u^{-1}, \\ C_1 w_y - w_x + (f(x, y) - 1)w^2 = 0, \end{cases}$$

2. $C_2 \neq -C_1$, $f(x, y) = -C_2/C_1$. Тогда исходное уравнение принимает вид

   $$uu_{xx} = C_1 uu_{xy} + C_2 u_x u_y - \frac{C_2}{C_1}\, u_x^2,$$

   а факторсистема имеет структуру

   $$\begin{cases} w = u^{C_2/C_1} u_x, \\ C_1 w_y - w_x = 0. \end{cases}$$

Аналогичная техника может быть применена и для уравнений 2-го порядка, разрешенных относительно других старших производных, а также для уравнений более высоких порядков.

Литература

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

[2] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: Физматлит, 2005.

[3] Линчук Л.В. Факторизация обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных // Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2006”. – СПб.: БАН, 2005. – С.108-115.

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ – НОВЫЙ ПОДХОД

Линчук Л.В., Зайцев В.Ф.

Российский государственный педагогический
университет им. А.И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru
e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru

В ряде работ последних лет (см., например, [1]) был предложен новый универсальный подход к поиску симметрий дифференциальных уравнений, в котором инфинитезимальный оператор задается не явной формулой, а **правилами дифференцирования**, которые представляют собой систему уравнений в полных производных (для обыкновенных дифференциальных уравнений) и в полных частных производных (для уравнений в частных производных). Сама по себе идея метода органично вытекает из эволюции представлений решений уравнения – от “квадратур” до “специальных функций” (т.е. решений линейных уравнений с переменными коэффициентами, не представимых в квадратурах). В самом деле, здесь координаты инфинитезимального оператора не представимы элементарными функциями или квадратурами (как в случае введенных раньше нелокальных операторов) – “нелокальные переменные”, от которых зависят координаты канонического оператора, являются решениями линейных уравнений с переменными коэффициентами в полных производных. Эти переменные, в принципе, можно представить в виде рядов (вспомним определения специальных функций).

Легко видеть, что предлагаемый подход полностью содержит в себе как классические методы, так и метод, использующий нелокальные операторы – координаты любого допускаемого оператора являются решениями линейных уравнений в полных производных, но не любое такое решение представимо в виде полного интеграла или суперпозиции полных интегралов. Мы уже не говорим о том, что в ряде случаев даже наличие решения в виде полного интеграла не гарантирует упрощение исходного уравнения.

Как было показано в [2], если УрЧП 2-го порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{1}$$

допускает оператор

$$X = A\partial_u, \tag{2}$$

где нелокальная переменная A определяется правилами дифференцирования

$$D_xA = \alpha(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})A, \quad D_yA = \beta(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})A,$$

имеющий один дифференциальный инвариант 1-го порядка, то уравнение (1) может быть факторизовано, и как следствие, мы можем либо понизить его порядок, либо даже проинтегрировать его. Если допускаемый оператор (2) имеет два дифференциальных инварианта 1-го порядка v и w, то получающаяся факторсистема

$$\begin{cases} v = v(x, y, u, u_x, u_y), \\ w = w(x, y, u, u_x, u_y), \\ G(x, y, w, v, w_x, w_y, v_x, v_y) = 0 \end{cases}$$

в большинстве случаев не позволяет нам упростить процесс поиска решения исходного уравнения (1), так как внешнее уравнение факторсистемы является недоопределённым. Поэтому возникает естественный вопрос: а нельзя ли использовать найденные инварианты v и w, чтобы найти хотя бы частное решение уравнения (1)? Оказывается, что в некоторых частных случаях эта задача разрешима.

Пусть уравнение (1) имеет факторсистему следующего вида:

$$\begin{cases} v = v(x, y, u, u_x, u_y), \\ w = w(x, y, u, u_x, u_y), \\ v_x^k w_x^{-k} v_y^n w_y^{-n} + H(w) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

Мы можем использовать алгоритм, аналогичный применяемому в случае известных инвариантов допускаемых точечных операторов [3]. Будем искать частное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$v = R(w). \tag{4}$$

Для этого нужно вычислить полные производные D_x и D_y соотношения (4) и подставить результат в последнее уравнение факторсистемы (3), рассматриваемом уже как уравнение относительно функции $u = u(x, y)$ (по сути – это исходное уравнение (1)). В результате получается соотношение вида

$$K\left[(R'_w)^{k+n} + H(w)\right] = 0,$$

где K – некоторое выражение. Таким образом, если $R = R(w)$ является решением уравнения

$$(R'_w)^{k+n} + H(w) = 0,$$

т.е.

$$R(w) = \int [-H(w)]^{1/(k+n)}\, dw, \tag{5}$$

то соотношение (4) определяет частное решение уравнения (1).

Заметим, что в двух случаях внешнее уравнение факторсистемы (3) может быть проинтегрировано и тем самым мы можем понизить порядок исходного уравнения (1):

$$k = \pm 1,\ n = 0 \Rightarrow v = \int H(w)^{\pm 1}\, dw + \varphi(x, y, u, u_y)$$

$$k = 0, n = \pm 1 \Rightarrow v = \int H(w)^{\pm 1}\, dw + \psi(x, y, u, u_x)$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение Калоджеро

$$uu_{xx} - u_{xy} + u_x^2 + u_x = 0. \tag{6}$$

Это уравнение имеет факторсистему

$$\begin{cases} v = u - u_y, \\ w = uu_x, \\ v_x + w_x = 0, \end{cases}$$

В этом случае, очевидно, внешнее уравнение интегрируется, поэтому мы можем понизить порядок исходного уравнения:

$$u - u_y + uu_x = \varphi(y). \tag{7}$$

С другой стороны, можно попробовать найти частное решение указанным выше методом. Так как $H(w) = 1$, $k = 1$, $n = 0$, то по формуле (5)

$$R(w) = -w + C,$$

следовательно, частное решение уравнения Калоджеро (6) удовлетворяет уравнению (4)

$$v = -w + C$$

т.е.

$$u - u_y + uu_x = C. \tag{8}$$

Можно заметить, что это – частный случай уравнения (7). Уравнение (8), а следовательно, и уравнение (6), имеют решения: если $C \neq 0$

$$y = \ln\left[\omega\left(\frac{u(x,y) - C}{C} \cdot \exp\frac{u(x,y) - C}{C}\right)\right] + F\left[u(x,y) + x + C\ln(u(x,y) - C)\right],$$

где $\omega = \omega(t)$ – решение уравнения $w(t)\mathrm{e}^{\omega(t)} = t$; если $C = 0$

$$y = \ln(-u(x,y)) + F(u(x,y) + x),$$

F – произвольная функция своих аргументов.

Пример 2. Уравнение

$$u^2 u_x u_{yy} - uu_{xx} + uu_y^2 u_x - u_x^2 = 0 \tag{9}$$

имеет факторсистему

$$\begin{cases} v = uu_y, \\ w = uu_x, \\ wv_x v_y - w_x w_y = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения факторсистемы видно, что $k = n = 1$, $H(w) = -w^{-1}$. Тогда частное решение уравнения (9) должно удовлетворять уравнению 1-го порядка (4), где

$$R'(w)^2 = \frac{1}{w} \quad \Rightarrow \quad R(w) = \pm 2\sqrt{w} + C,$$

т.е.

$$uu_y = \pm 2\sqrt{uu_x} + C.$$

Это уравнение имеет решение

$$u(x,y) = \pm\sqrt{c_1x + (-2\sqrt{2c_1} + 2C)y + c_2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Обозначив $-2\sqrt{2c_1} + 2C = c_3$, решение уравнения (9) можно записать в виде

$$u(x,y) = \pm\sqrt{c_1x + c_3y + c_2}, \quad c_1, c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что, в отличие от классического метода поиска решений, инвариантных относительно допускаемой группы, мы принципиально можем найти не одно решение, а большой класс. При наличии точечного оператора мы можем понизить размерность уравнения (если исходное уравнение имело 2 независимые переменные, мы получаем обыкновенное уравнение, имеющее решение с n-константным произволом). В нашем же случае для такого же уравнения решения удовлетворяют уравнению в частных производных первого порядка. Его решения имеют функциональный произвол.

Приведенные примеры представляют собой лишь элементарную иллюстрацию предложенного подхода. Совершенно очевидно, что точные решения могут быть получены и для значительно более сложных уравнений. Особенно перспективно применение этого метода для решения разнообразных обратных задач. Тем не менее заметим, что несмотря на универсальность подхода, его применение технически достаточно трудоемко.

Литература

[1] Линчук Л.В. Факторизация обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных // Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2006”. – СПб.: БАН, 2006. – С.108-115.

[2] Зайцев В.Ф., Линчук Л.В. Факторизация уравнений в частных производных второго порядка // Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2007”. – см. настоящий сборник.

[3] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: Физматлит, 2005.