ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 377, № 4, с. 477–480

МЕХАНИКА

УДК 532.526

СТАЦИОНАРНЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ВИХРЬ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2001 г. С. Н. Аристов

Представлено академиком Л.В. Овсянниковым 30.08.2000 г.

Поступило 26.09.2000 г.

Локализованные вихревые течения очень широко распространены в природе и легко возбуждаются в самых разнообразных условиях. Их масштабы варьируются от вихрей, возникающих при размешивании чая в стакане, до смерчей и тропических циклонов. Несмотря на длинную историю изучения подобных вихрей многие детали их устройства до сих пор остаются неясными. В данной работе в рамках нового класса точных решений уравнений Навье–Стокса предпринята попытка описания стационарного цилиндрического вихря в вязкой жидкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное осесимметричное течение несжимаемой жидкости внутри неограниченного цилиндра. На боковой границе цилиндра заданы условия прилипания, а одно из поперечных сечений закрыто непроницаемой перегородкой. Требуется определить скорость и давление при условии, что вдали от перегородки жидкость приводится в состояние вращения.

Полагая движение стационарным и осесимметричным, уравнения Навье–Стокса запишем в виде [1]:

$$V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial rV_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right),$$

$$V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$V_r\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}+V_z\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}+\frac{V_rV_\varphi}{r} = \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial rV_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rV_r}{\partial r}+\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

где V_φ, V_z, V_r – компоненты скорости в цилиндрической системе координат, P – давление, деленное на плотность, ν – коэффициент вязкости.

Решение уравнений (1) будем искать в следующем виде:

$$V_r = \frac{\nu}{r}U(x),\quad V_z = -\frac{2\nu z}{R^2}\frac{\partial U}{\partial x},\quad V_\varphi = \frac{\nu z}{Rr}\sqrt{2}V(x),$$
$$P = P_0+\frac{2\nu^2}{R^2}\left(B(x)-2\frac{z^2}{R^2}G(x)\right), \tag{2}$$

где U, V, B, G – неизвестные функции безразмерной координаты $x = \frac{r^2}{R^2}$, R, P_0 – радиус цилиндра и внешнее давление, нулевое значение продольной координаты соответствует непроницаемой перегородке.

Подставляя (2) в уравнения (1) и группируя слагаемые при одинаковых степенях продольной координаты, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$2(xU'')' = 2G+UU''-U'U', \tag{3}$$

$$2xV'' = UV'-VU', \tag{4}$$

$$4x^2G' = -V^2, \tag{5}$$

$$B = U'-\frac{U^2}{4x}, \tag{6}$$

где штрихом обозначена производная по координате x. Вследствие (2) условие несжимаемости выполняется автоматически, а соотношения (5), (6) следуют из уравнения для радиальной компоненты скорости, причем (5) определяет баланс между центробежной силой и частью градиента давления. Согласно (6) и (3) давление определяется в явном виде после нахождения компонент скорости. Уравнения (3)–(5) образуют изолирован-

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской Академии наук, Пермь

ную систему, которая описывает взаимное влияние полоидальной и азимутальной циркуляций, что позволяет причислить течения данного типа к самоиндуцированным вихрям. Для формулировки граничных условий положим, что на боковой границе заданы условия прилипания и на оси цилиндра все гидродинамические поля регулярны, что приводит к следующим условиям:

$$x = 0: U = V = 0, \quad U'' = G - \frac{U'U'}{2}, \qquad (7)$$
$$x = 1: U = U' = V = 0.$$

Таким образом, имеем следующую задачу: найти возможные решения уравнений (3)–(5), удовлетворяющие граничным условиям (7).

2. АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Анализ уравнений (3)–(5) уместно начать с изучения идеальной жидкости. Для этого достаточно в уравнениях (3)–(6) опустить линейные слагаемые, что соответствует преобладанию инерционных эффектов над вязкими. Подставляя (3) в (5), после некоторых тождественных преобразований получим

$$2G = -UU'' + U'U',$$

$$B = -\frac{U^2}{4x},$$

$$UV' = VU',$$

$$\frac{V^2}{2x^2} = U^2\left(\frac{U''}{U}\right)'.$$

Последние два уравнения имеют очевидные интегралы, совпадающие с линейным вариантом уравнений Греда–Шафранова, а именно:

$$V = \alpha U, \quad U'' = \left(\beta - \frac{\alpha^2}{2x}\right)U, \qquad (8)$$

где α, β – произвольные постоянные. Исследование уравнения (8) показало, что оно не имеет решений, удовлетворяющих условиям (7), но обладает локализованными решениями, затухающими на бесконечности. Причем одно из них, при $\beta = \dfrac{\alpha^4}{16}$, выражается через аналитические функции

$$U = Ax\exp\left(-\frac{\alpha^2 x}{4}\right), \quad G = \frac{U^2}{2x^2}, \quad B = -\frac{U^2}{4x}. \qquad (9)$$

Характерной особенностью данного решения является то, что давление немонотонно зависит от расстояния до оси цилиндрического вихря. Указанный одноячеистый режим сменяется многоячеистым при других значениях параметра β. Здесь важно отметить, что направление полоидальной циркуляции может быть произвольным в соответствии с обратимостью уравнений Эйлера.

В случае вязкой жидкости решения находились численно с использованием метода Рунге–Кутта. Все необходимые производные на оси цилиндра вычислялись с использованием системы (3)–(5), что приводило к задаче Коши с тремя произвольными параметрами, в качестве которых выступали производные от компонент скорости $U'(0)$, $V'(0)$ и давление $G(0)$. При этом уравнения интегрировались до точки, где радиальная скорость равнялась нулю, и затем задача пересчитывалась с использованием следующего преобразования, не меняющего вид исходных уравнений:

$$x = \varepsilon^2 x, \quad V = \varepsilon^{-1}V, \quad G = \varepsilon^{-4}G, \quad B = \varepsilon^{-2}B, \quad U = U,$$

где ε – произвольное число и для переменных оставлены прежние обозначения. Наличие указанного преобразования позволило ограничиться анализом двухпараметрической задачи, результаты решения которой приведены на рис. 1, 2. В качестве числа Рейнольдса можно использовать средний момент импульса в некотором сечении цилиндра или величину вертикального градиента давления на оси цилиндра. В этом случае цифры у кривых соответствуют последовательному увеличению числа Рейнольдса. Для описания полученных результатов удобно принять непроницаемую перегородку за дно стакана и обсуждать течения в области положительных значений продольной координаты.

Первому типу решений соответствуют следующие значения параметров задачи Коши: $U'(0) = 17.657$; $V'(0) = 0$; $G(0) = 43.581$. В этом случае жидкость не вращается, и причиной движения необходимо считать струю жидкости, направленную вдоль оси к дну стакана, причем жидкость на оси движется в направлении увеличения давления. Профили компонент давления и радиальной скорости отмечены на графиках цифрой *1*. Данный режим, вероятно, не представляет большого интереса и был известен ранее, так как при отсутствии вращения данная задача совпадает с постановкой задачи о течении в пористой трубе [2, 3].

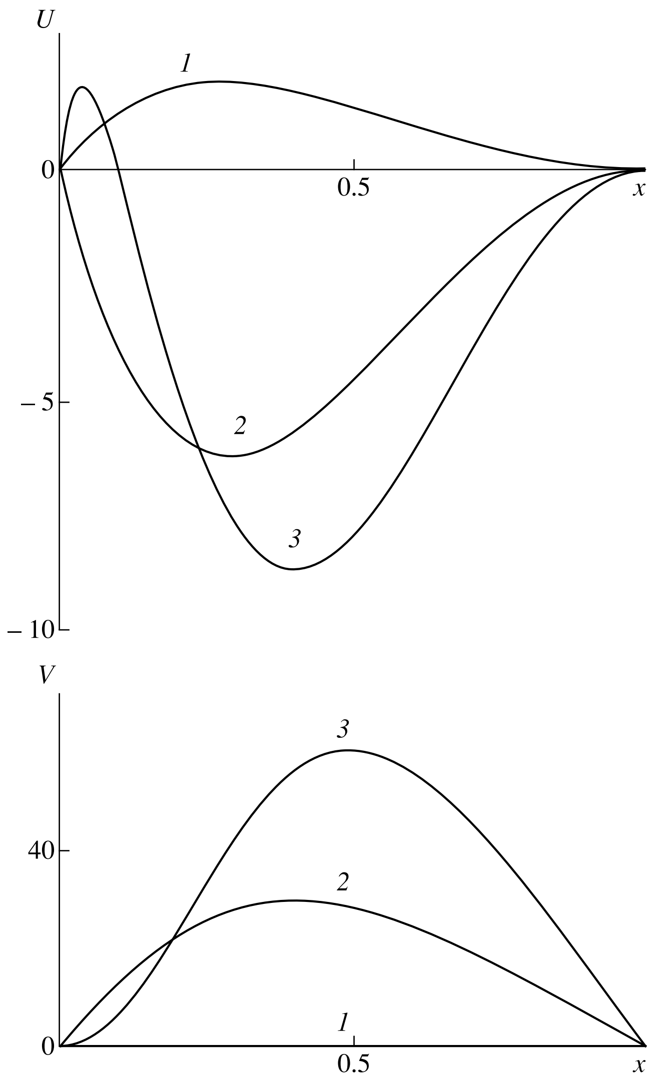

Рис. 1. Зависимости компонент скорости от безразмерной координаты для трех различных режимов движения жидкости.

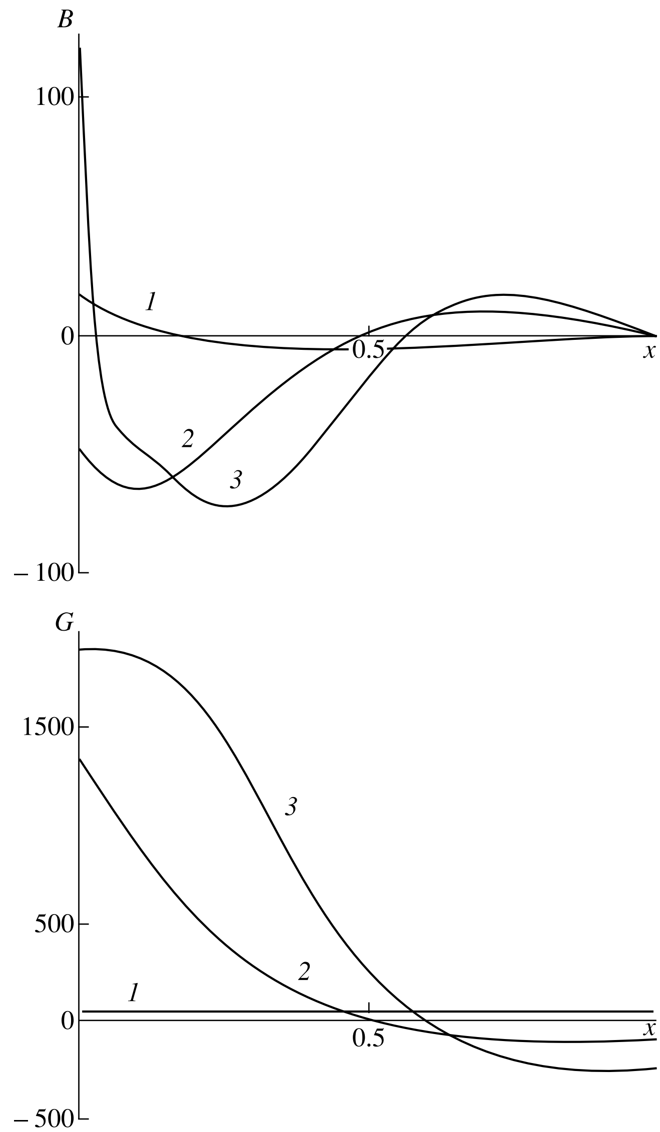

Рис. 2. Зависимости компонент давления от безразмерной координаты для трех различных режимов движения жидкости.

Во втором случае (кривые *2*; $U'(0) = -47.756$; $V'(0) = 136.719$; $G(0) = 1342.790$) жидкость движется вдоль оси вверх от дна стакана, т.е. в противоположном по сравнению с не вращающейся жидкостью направлении, при этом азимутальная скорость вблизи оси почти линейно зависит от радиальной координаты. На оси давление убывает при удалении от дна стакана, а на стенке давление, соответственно, увеличивается. Таким образом и вблизи оси, и вблизи боковой поверхности жидкость движется в направлении уменьшения давления.

При дальнейшем увеличении скорости вращения решение существует при следующем наборе параметров: $U'(0) = 121.501$; $V'(0) = 22.089$; $G(0) = 1891.178$. При этом в цилиндре образуется центральная зона, где жидкость движется по направлению к перегородке и внешняя область, где течение направлено от стенок цилиндра к его оси (см. кривые *3*). Наличие двухъячеистой полоидальной циркуляции является характерной особенностью мощных атмосферных вихрей, и в нашем случае такому режиму течения соответствует максимальное число Рейнольдса. При дальнейшем увеличении параметра $G(0)$ решений, вследствие недостаточной точности выбранного метода, найти не удалось.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные решения качественно правильно описывают течения, наблюдающиеся при размешивании чая в стакане. Известно, что при вынужденном вращении жидкости вблизи свободной поверхности у дна стакана формируется вертикальная мощная струя, благодаря которой чаинки поднимаются вверх. При увеличении скорости вращения жидкости на оси образуется воронка, в которой жидкость опускается, что характерно и для мощных атмосферных вихрей. Приведенные результаты очевидно не исчерпывают всех возможных задач, изучение которых возможно в рамках указанного выше нового класса точных решений.

Работа частично финансировалась Российским фондом фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц У.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. *Wang C.Y.* // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 159–177.
3. *Goldshtik M.A.* // Annu. Rev. Fluid Mech. 1990. V. 22. P. 441–472.