ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2004, том 394, № 5, с. 1–4

## МЕХАНИКА

УДК: 532.526

# ОБ УРАВНЕНИЯХ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2004 г. С. Н. Аристов, член-корреспондент РАН В. В. Пухначев

Представлено академиком @ 10.01.95 г.

Поступило 27.10.2003 г.

1. Обозначим через $u$, $v$, $w$ проекции вектора скорости на оси $r$, $\theta$, $z$ цилиндрической системы координат, $p$ – давление жидкости. В этих обозначениях уравнения вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил имеют вид

$$u_t + uu_r + wu_z - \frac{v^2}{r} = -p_r + \nu\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u + u_{zz}\right),$$

$$v_t + uv_r + wv_z + \frac{uv}{r} = \nu\left(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{1}{r^2}v + v_{zz}\right),$$

$$w_t + uw_r + ww_z = -p_z + \nu\left(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r - \frac{1}{r^2}w_r + w_{zz}\right), \qquad (1)$$

$$u_r + \frac{u}{r} + w_z = 0.$$

Здесь $\nu$ – кинематический коэффициент вязкости. Плотность жидкости считается равной единице, что не ограничивает общности. Также без потери общности можно считать, что на жидкость действуют потенциальные внешние силы; в этом случае $p$ обозначает модифицированное давление, получающееся из исходного прибавлением потенциала внешних сил.

Как известно [1], систему (1) можно свести к двум уравнениям, связывающим окружную компоненту скорости $v$ и функцию тока $\psi$, которая определяется равенствами

$$u = -\frac{1}{r}\psi_z, \quad v = \frac{1}{r}\psi_r. \qquad (2)$$

Ниже предлагается другая форма записи исследуемых уравнений, основанная на следующем наблюдении. Если подставить в третье уравнение (1) выражения (2), то результирующее равенство можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\psi_t - \frac{1}{r}\psi_r\psi_z - \nu E\psi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rp + \frac{1}{r}\psi_r^2\right) = 0,$$

где символ $E$ обозначает оператор Стокса,

$$E = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Отсюда вытекает существование функции $\Phi$ такой, что

$$p = -\frac{1}{r^2}\psi_r^2 + \frac{1}{r}\Phi_r, \qquad (3)$$

$$\psi_t - \frac{1}{r}\psi_r\psi_z + \Phi_z = \nu E\psi. \qquad (4)$$

Подстановка (2) во второе уравнение системы (1) приводит его к виду

$$J_t - \frac{1}{r}\psi_z J_r + \frac{1}{r}\psi_r J_z = \nu EJ, \qquad (5)$$

где введено обозначение $J = rv$. Теперь продифференцируем соотношения (3) и (4) по $r$ и $z$ соответственно и подставим в первое уравнение (1), в котором функции $u$, $w$ выражены через $\psi$. Мы получим:

$$E\Phi = \frac{1}{r^2}(J^2 + \psi_z^2) + \frac{2}{r}\psi_r E\psi. \qquad (6)$$

Система (4)–(6) и будет объектом данного исследования.

2. Далее $R^+$ обозначает полуплоскость $r > 0$ плоскости $r$, $z$, $\Omega$ – ограниченную область в $R^+$, $\Sigma$ – границу области $\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \Sigma \times (0, T)$. Предположим для простоты, что замыкание $\Omega$ области $\Omega$ не содержит точек оси $z$. Естественная постановка начально-краевой задачи для системы (1) состоит в задании значений функций $u$, $v$, $w$ на нижнем основании $\Omega$ и боковой поверхности $S_T$ цилиндра $Q_T$. Известно, что при надлежащих условиях гладкости входных данных эта задача

*Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской Академии наук, Пермь*

имеет, и притом единственное, классическое решение при любом $T > 0$ [2].

Ниже мы ограничимся случаем, когда на границе области течения выполнены условия прилипания $u = v = w = 0$. В терминах функций $\psi$, $J$ эти условия переписываются в следующем виде:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad (r, z, t) \in S_T, \tag{7}$$

$$\psi = 0, \quad J = 0, \quad (r, z, t) \in S_T, \tag{8}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ обозначает дифференцирование по нормали к кривой $\Sigma$. Для замыкания постановки задачи для системы (4)–(6) требуется задать начальные условия

$$\psi = \psi_0(r, z), \quad (r, z) \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \tag{9}$$

$$J = J_0(r, z), \quad (r, z) \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \tag{10}$$

и краевые условия для функции $\Phi$, использовав при этом условие (7), избыточное для уравнения (4). С этой целью превратим (6) в уравнение четвертого порядка, подействовав на него оператором $E$:

$$E^2\Phi = E\left[\frac{1}{r^2}(J^2 + \psi_z^2) + \frac{2}{r}\psi_r E\psi\right]. \tag{11}$$

Одно краевое условие для (11) следует непосредственно из (6)–(8):

$$E\Phi = 0, \quad (r, z, t) \in S_T. \tag{12}$$

Для получения второго условия применим к обеим частям уравнения (6) операцию $\dfrac{\partial}{\partial n}$ и снова воспользуемся равенствами (7), (8). В результате будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial n}E\Phi = \frac{2}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial n}E\psi, \quad (r, z, t) \in S_T. \tag{13}$$

Окончательная формулировка задачи определения функций $\psi$, $J$, $\Phi$ такова: найти решение системы (4), (5), (11) так, чтобы удовлетворялись условия (8)–(10), (12), (13).

Уравнения (4), (5), (11) образуют слабо связанную систему двух параболических уравнений второго порядка, для которых ставится первая начально-краевая задача и одного линейного эллиптического уравнения четвертого порядка, для которого ставится задача типа Неймана. В этом смысле она похожа на традиционную систему уравнений вращательно-симметричного движения, записанную в терминах $\psi$, $v$ и $\omega = r^{-1}E$. Преимущество новой формы записи состоит в том, что краевые условия для функций $\psi$, $J$ и $\Phi$ оказываются "развязанными", в отличие от традиционного подхода, в котором нахождение граничных значений функции $\omega$ представляет серьезную вычислительную проблему.

В заключение этого раздела отметим, что из соотношений (6), (13) вытекает равенство (7), если выполнено дополнительное условие

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_z}{\partial n}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}E\psi\right)\sin\varphi \neq 0, \quad (r, z, t) \in S_T,$$

где $\varphi$ – угол между осью $z$ и направлением нормали к кривой $\Sigma$. Проверив выполнение последнего условия при $t = 0$, мы можем гарантировать, что оно будет удовлетворено по крайней мере для малых $T > 0$.

3. Как общие уравнения Навье–Стокса, так и уравнения вращательно-симметричного движения обладают богатой группой симметрий [3, 4]. Поскольку переход от уравнений (1) к системе (4)–(6) содержит нелокальные преобразования, то группы, допускаемые обеими системами, не являются изоморфными. Наиболее широкая группа преобразований, допускаемая уравнениями (4)–(6), вычислена С.В. Головиным. Базис соответствующей алгебры Ли образован следующими операторами

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = 2t\partial_t + r\partial_r + z\partial_z + \psi\partial_\psi,$$

$$X_3 = 2\alpha\partial_z + r^2\alpha\partial_\psi + (4\dot{a} - r^2 z\ddot{a})\partial_\Phi,$$

$$X_4 = \beta\partial_\psi - z\dot{\beta}\partial_\Phi, \quad X_5 = \gamma\partial_\Phi, \quad X_6 = r^2\delta\partial_\Phi.$$

Здесь $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ – произвольные (класса $C^\infty$) функции $t$; точка означает дифференцирование по $t$.

Наличие в группе симметрий системы (4)–(6) преобразований, зависящих от произвольных функций времени, позволяет строить инвариантные решения этой системы, обладающие априори функциональным произволом. Приведем один из примеров подобных решений. Рассмотрим группу, порожденную оператором $X_3 + X_4$. Общий вид инвариантного решения относительно данной группы таков:

$$\psi = \frac{z}{2\alpha}(r^2\dot{\alpha} + 2\beta) + f(r, t), \quad J = g(r, t),$$

$$\Phi = \frac{z^2}{2\alpha^2}\left[r^2\left(\dot{\alpha}^2 - \frac{\alpha\ddot{\alpha}}{2}\right) + 2\dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta}\right] + \frac{2\dot{\alpha}z}{\alpha}f + h(r, t). \tag{14}$$

Функции $f$, $g$ и $h$ удовлетворяют рекуррентной системе линейных уравнений

$$f_t - \frac{r^2\dot{\alpha} + 2\beta}{2\alpha r}f_r + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}f = \nu\left(f_{rr} - \frac{1}{r}f_r\right).$$

$$g_t - \frac{r^2\dot{\alpha} + 2\beta}{2\alpha r}g_r = \nu\left(g_{rr} - \frac{1}{r}g_r\right).$$

$$h_{rr} - \frac{1}{r}h_r\left[r^2\left(\alpha^2 - \frac{\alpha\ddot{\alpha}}{2}\right) + 2\dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta}\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[g^2 + \frac{(r^2\dot{\alpha} + 2\beta)^2}{4\dot{\alpha}}\right] + \frac{2}{r}f_r\left(f_{rr} - \frac{1}{r}f_r\right).$$

Решение (14) обобщает в двух направлениях известный вихрь Бюргерса [5]. Во-первых, описываемое им движение является нестационарным, а во-вторых, при $\beta \neq 0$ поле скоростей имеет особенность на оси симметрии, порожденную равномерно распределенным источником с линейной плотностью $-\frac{\beta}{2\pi\alpha}$, произвольно зависящей от времени. Заметим, что классическое решение Бюргерса имеет нетривиальную теоретико-групповую природу: оно не является инвариантным решением системы (1), но может быть получено как инвариантное решение некоторой частично инвариантной подмодели этой системы. Между тем, использование уравнений (4)–(6) позволяет получить решение Бюргерса и его обобщения достаточно простым способом.

4. Множество точных решений системы (4)–(6) не исчерпывается ее инвариантными решениями. Одно из них (стационарный цилиндрический вихрь) построено в работе [6]. В этом решении компоненты $v$, $w$ вектора скорости пропорциональны $z$, а компонента $u$ не зависит от $z$. Теоретико-групповая природа данного решения выяснена в [7]. Исходя из уравнений (4)–(6), нетрудно получить обобщение решения [6] на нестационарный случай, причем зависимость функций $v$, $w$ от $z$ может быть неоднородной. Для этого достаточно положить

$$\psi = Az + B, \quad J = Cz + D, \quad \Phi = Fz^2 + Gz + H,$$

где $A$, $B$, $C$, $D$, $F$, $G$, $H$ – функции переменных $r$ и $t$. При этом уравнения для $A$, $C$, $F$ образуют замкнутую квазилинейную систему:

$$A_r - \frac{1}{r}AA_r + 2F = \nu\left(A_{rr} - \frac{1}{r}A_r\right),$$

$$C_t - \frac{1}{r}AC_r + \frac{1}{r}A_rC = \nu\left(C_{rr} - \frac{1}{r}C_r\right), \tag{15}$$

$$F_{rr} - \frac{1}{r}F_r = \frac{1}{r^2}C^2 + \frac{2}{r}A_r\left(A_{rr} - \frac{1}{r}A_r\right).$$

При известных $A$, $C$ и $F$ функции $B$, $D$, $G$. $H$ определяются из системы линейных уравнений, которая здесь не записана (отметим, что последняя всегда имеет решение, в котором функции $B$, $D$ и $G$ равны нулю, а уравнение для функции $H$ решается в квадратурах).

Важное свойство системы (15) состоит в том, что она наследует часть групповых свойств порождающей системы (4)–(6). В частности, ею допускается оператор растяжения

$$X_7 = 2t\partial_t + r\partial_r - C\partial_c - 2F\partial_F.$$

Инвариантному решению системы (15) относительно оператора $X_7$ соответствует новое автомодельное решение уравнений (1) вида

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}\bar{u}(\xi), \quad v = \frac{z}{t}\bar{v}(\xi), \quad w = \frac{z}{t}\bar{w}(\xi),$$
$$p = \frac{z^2}{t^2}\bar{p}(\xi) + \frac{1}{t}\bar{q}(\xi), \tag{16}$$

где $\xi = r(\nu t)^{-1/2}$. Исследование решения (16) выходит за рамки данного сообщения.

5. Предположим, что решение системы (4)–(6) определено в области $\Pi_T = R^+ \times (0, T)$ и удовлетворяет условиям $\psi \to 0$ при $\rho = \sqrt{r^2 + z^2} \to \infty$ и

$$\frac{|\nabla\psi|}{r}, \quad |E\psi|, \quad \frac{|J|}{r} \leq C_1(1 + \rho)^{-m} \tag{17}$$

с некоторыми постоянными $m$, $2 < m \leq 4$ и $C_1 = C_1(T) > 0$. Основываясь на результатах работ [8, 9] (см. также цитируемую в них литературу) и используя вращательную симметрию поля скоростей, можно показать, что неравенства (17) будут выполнены в области $\Pi_T$ при некотором $T > 0$, если они справедливы при $t = 0$ с некоторой постоянной $C_0 > 0$.

Оценки (17) позволяют получить следующее представление для регулярного на оси $z$ решения $\Phi$ уравнения (6) и его производных:

$$\Phi = \frac{C_2r^2}{\rho^3} + O\left(\frac{r^2}{\rho^4}\right), \quad \Phi_z = -\frac{3C_2r^2z}{\rho^5} + O\left(\frac{r^2}{\rho^5}\right),$$
$$\Phi_r = \frac{C_2r(2z^2 - r^2)}{\rho^5} + O\left(\frac{r}{\rho^4}\right), \tag{18}$$

где $C_2 = \text{const} > 0$. Неравенства (18) означают, что решение неоднородного уравнения (6) с быстро убывающей правой частью при больших $\rho$ ведет себя так же, как фундаментальное решение – $r^2(4\pi\rho^3)^{-1}$ уравнения $E\Phi = 0$ с особенностью в начале координат. Применим неравенства (17), (18) к получению интегральных тождеств, которым удовлетворяет поле скоростей вращательно-симметричного движения жидкости, заполняющей все пространство.

Запишем уравнение (6) в эквивалентной форме

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\Phi_r - 2\Phi + \psi_z^2 - \psi_r^2) + \frac{\partial}{\partial z}(r\Phi_z - 2\psi_z\psi_r) =$$

$$= r(u^2 + v^2 - 2w^2),$$

где компоненты скорости $u$, $w$ выражаются через $\psi_r$, $\psi_z$ по формулам (2), а $v = r^{-1}J$. Интегрируя полученное соотношение по области $R^+$ и используя оценки (17), (18), мы заключаем:

$$\int_{R^+} (u^2 + v^2 - 2w^2) r dr dz = 0, \quad 0 < t \le T. \qquad (19)$$

Тождество (19) является частным случаем тождеств, полученных в [10] с помощью довольно сложных построений.

Еще одно интересное тождество получается после умножения уравнения (4) на $r$ и интегрирования результата по кругу $\rho < N$, $r > 0$. Предположим, что показатель $m$ в неравенствах (17) лежит в интервале (3, 4], тогда в упомянутом тождестве можно перейти к пределу при $N \to \infty$. Предельное соотношение имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int_{R^+} r\psi dr dz = -\int_{R^+} r^2 uw(dr)dz. \qquad (20)$$

В тождества (19), (20) не входит "лишняя" функция $\Phi$, физический смысл которой не вполне ясен. Они примечательны еще и тем, что не содержат явно коэффициент вязкости $\nu$ и остаются справедливыми в пределе $\nu \to 0$.

Авторы выражают признательность С.В. Головину, предоставившему в их распоряжение результаты вычисления основной группы системы (4)–(6).

Работа поддержана грантами РФФИ № 01-01-00446, РЕ-009 CRDF (С.Н. Аристов), а также грантом РФФИ № 01-01-00782 и стипендией Лондонского математического общества (В.В. Пухначев).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуб Н.А. и др.* Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1987. 272 с.
2. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
3. *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994. 320 с.
4. *Капитанский Л.В.* // ДАН. 1978. Т. 243. № 4. С. 901–904.
5. *Burgers J.M.* // Adv. Appl. Mech. 1948. V. 1. P. 171–199.
6. *Аристов С.Н.* // ДАН. 2001. Т. 377. № 4. С. 477–480.
7. *Головин С.В.* В сб.: Труды международной конференции “Симметрия и дифференциальные уравнения”. Красноярск. 2001. С. 177–180.
8. *Miyakava T.* // Funkc. ekvacioj. 2000. V. 43. №. 3. P. 541–557.
9. *Brandolese L.* // C.R. Acad. Sci. Ser. I. 2001. V. 332. P. 125–30.
10. *Доброхотов С.Ю., Шафаревич А.И.* // Изв. РАН, МЖГ. 1996. № 4. С. 38–42.