ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ, 2009, том 43, № 5, с. 547–566

УДК 533+532+517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ КОМПОНЕНТ СКОРОСТИ ОТ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2009 г. С. Н. Аристов, Д. В. Князев, А. Д. Полянин*

Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь

**Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 09.04.2009 г.

Рассматривается широкий класс двумерных и трехмерных стационарных и нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Считается, что компоненты скорости жидкости линейно зависят от двух пространственных координат. Трехмерные уравнения Навье–Стокса в данном случае сводятся к замкнутой определяющей системе, состоящей из шести уравнений с частными производными третьего и второго порядков. Дан краткий обзор известных точных решений этой системы и соответствующих течений жидкости (течения Куэтта–Пуазейля, Экмана, Стокса, Кармана и др.). Описаны случаи сведения определяющей системы к одному или двум уравнениям. Получено много новых точных решений двумерных и трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, содержащих произвольные функции и произвольные параметры. Описаны периодические (как по пространственной координате, так и по времени) и некоторые другие решения, которые выражаются в терминах элементарных функций. Исследуются вопросы о нелинейной устойчивости решений. Рассмотрен ряд новых гидродинамических задач. Дана общая физическая интерпретация и классификация решений.

ВВЕДЕНИЕ

Точные решения уравнений Навье–Стокса способствуют лучшему пониманию качественных особенностей стационарных и нестационарных течений (устойчивость, неединственность, режимы с обострением и др.). Они позволяют оценить область применимости упрощенных гидродинамических моделей (невязкая жидкость, ползущие течения, пограничный слой и др.) и незаменимы для тестирования соответствующих численных, асимптотических и приближенных аналитических методов (важно отметить, что для тестирования можно использовать даже те решения, которые не допускают ясной физической интерпретации). Точные решения уравнений гидродинамики используются для математического моделирования многих процессов химической и нефтехимической технологии [1, 2], включая процессы конвективного массо- и теплопереноса, и различных природных явлений. Точные решения уравнений Навье–Стокса имеют большое прикладное значение, в качестве наглядных примеров достаточно вспомнить формулу Пуазейля, которая широко используется для описания течений в трубах, вискозиметр Куэтта, решение Кармана (которое является основой теории вращающегося дискового электрода Левича) и др. Простые решения часто применяются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории конвективного тепло- и массопереноса, химической технологии, гидро- и аэродинамике и др. [3–6]).

Поиск точных решений уравнений Навье–Стокса, в силу их нелинейности, является весьма сложной задачей. Все точные решения уравнений Навье–Стокса (наиболее полный, но далеко не исчерпывающий, перечень точных решений дан в [7–9]) путем подходящего выбора декартовой системы координат удобно разбить на три категории (простейшая классификация, основанная на функциональной структуре компонент скорости жидкости): 1) решения, линейные по части пространственных переменных (таких решений известно больше всего); 2) решения, описывающие конические течения, в которых скорость убывает обратно пропорционально расстоянию от начала координат; 3) другие решения.

Замечание. Плоские течения (все величины зависят от x, y, t) при такой классификации попадают в первую категорию, поскольку компоненты скорости могут быть представлены в виде функций, линейных по z:

$$V_i = V_{i0}(x,y,t) + V_{i1}(x,y,t)z, \quad i = 1,2, V_{s3} = 0,$$

при $V_{i1}(x, y, t) \equiv 0$ (вырожденный случай).

В данной статье с единых позиций описан широкий класс известных и новых точных решений стационарных и нестационарных (двумерных и трехмерных) уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных. В рассматриваемом случае уравнения Навье–Стокса сводятся к замкнутой определяющей системе, состоящей из шести уравнений с частными производными третьего и второго порядков. В эти уравнения входят только две независимые переменные, поэтому они проще исходных уравнений Навье-Стокса (в которые входят четыре независимые переменные). Данный класс решений охватывает значительную часть решений из первой категории (здесь используется описанная выше классификация).

Замечание. В литературе встречаются и другие классификации точных решений уравнений Навье–Стокса [7–11]. Например, две простейшие классификации, основанные на числе независимых переменных, выглядят так: 1) стационарные и нестационарные решения [9]; 2) двумерные (плоские, осесимметричные и др.) и трехмерные решения [10, 11]. Указанные классификации легко можно объединить. О групповой классификации решений уравнений Навье–Стокса см. [7, 12].

Под точными решениями уравнений Навье–Стокса понимаются следующие решения: 1) решения, которые выражаются через элементарные функции; 2) решения, которые выражаются в виде квадратур; 3) решения, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (системами обыкновенных дифференциальных уравнений); 4) решения, которые выражаются через решения линейных уравнений с частными производными (линейных интегральных уравнений);

Далее основное внимание будет уделено решениям из пп. 1 и 2.

Вырожденными (невязкими) решениями уравнений Навье–Стокса будем называть решения, которые одновременно удовлетворяют и уравнениям Эйлера для идеальной жидкости (т.е. уравнениям (1) при $\nu = 0$). Вырожденные решения далее, как правило, не рассматриваются.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Трехмерные нестационарные движения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_i}{\partial x} + V_2\frac{\partial V_i}{\partial y} + V_3\frac{\partial V_i}{\partial z} = -\nabla_i P + \nu\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 0, \quad i = 1,2,3.$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты, t – время, V_1, V_2, V_3 – компоненты скорости жидкости, P – давление, отнесенное к постоянной плотности и включающее в себя потенциал массовых сил, ν – коэффициент кинематической вязкости, $\nabla_1 P = \partial P/\partial x$, $\nabla_2 P = \partial P/\partial y$, $\nabla_3 P = \partial P/\partial z$.

Ниже описаны общие свойства решений уравнений Навье–Стокса, которые являются следствием соответствующего группового анализа [7, 12] и позволяют “размножать” точные решения.

Пусть $\bar V_1(x, y, z, t)$, $\bar V_2(x, y, z, t)$, $\bar V_3(x, y, z, t)$, $\bar P(x, y, z, t)$ – некоторое решение уравнений Навье–Стокса (1). Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Набор функций

$$V_i = A\bar V_i(Ax + B_1, Ay + B_2, Az + B_3, A^2 t + B_4),\quad i = 1,2,3,$$
$$P = A^2\bar P(Ax + B_1, Ay + B_2, Az + B_3, A^2 t + B_4) + C,$$

где A, B_1, B_2, B_3, B_4, C – произвольные постоянные, также дает решение уравнений (1) (это свойство является следствием инвариантности уравнений относительно сдвига на произвольные константы по всем независимым переменным и инвариантности уравнений относительно согласованного растяжения по независимым и зависимым переменным).

2. Набор функций

$$V_1 = \bar V_1(X, Y, z, t)\cos\alpha - \bar V_2(X, Y, z, t)\sin\alpha,$$
$$V_2 = \bar V_1(X, Y, z, t)\sin\alpha + \bar V_2(X, Y, z, t)\cos\alpha,$$
$$V_3 = \bar V_3(X, Y, z, t),\quad P = \bar P(X, Y, z, t),$$
$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\quad Y = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

где α – произвольная постоянная, также дает решение уравнений (1) (это свойство является следствием инвариантности уравнений относительно поворота системы координат вокруг оси z на произвольный угол α в плоскости x, y при согласованном повороте компонент скоростей; аналогичные формулы получаются путем поворотов в других плоскостях).

3. Набор функций

$$\begin{aligned} V_1 &= \bar V_1(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t) + x_0',\\ V_2 &= \bar V_2(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t) + y_0',\\ V_3 &= \bar V_3(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t) + z_0',\\ P &= \bar P(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t) - x_0''x - y_0''y - z_0''z + p_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $z = z_0(t)$, $p = p_0(t)$ – произвольные функции времени (штрихи обозначают производные по t), также дает решение уравнений (1) (это свойство является следствием инвариантности уравнений при переходе в систему координат, начало которой движется по закону $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $z = z_0(t)$, а оси перемещаются параллельно исходным осям; при этом давление согласованно изменяется).

4. Для плоских двумерных течений величины (величины V_1, V_2, P не зависят от z, $V_3 \equiv 0$) компоненты скорости могут быть выражены через функцию тока: $V_1 = \partial\Psi/\partial y$, $V_2 = -\partial\Psi/\partial x$. В этом случае набор функций

$$V_1 = \bar{V}_1(X,Y,t)\cos(\omega t) - \bar{V}_2(X,Y,t)\sin(\omega t) - \omega Y,$$

$$V_2 = \bar{V}_1(X,Y,t)\sin(\omega t) + \bar{V}_2(X,Y,t)\cos(\omega t) - \omega X,$$

$$P = \bar{P}(X,Y,t) - 2\omega\bar{\Psi}(X,Y,t) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

$$X = x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t),$$

$$Y = y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t),$$

где ω – произвольная постоянная также будет давать решение уравнений (1) (это свойство является следствием инвариантности уравнений относительно вращающейся системы координат вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω при согласованном вращении компонент скоростей и подходящем изменении давления).

Свойства 3 и 4 позволяют с помощью стационарных решений получать некоторые нестационарные решения.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ КОМПОНЕНТ СКОРОСТИ ОТ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Структура решений. Определяющая система уравнений. Система уравнений (1) допускает широкий класс точных решений с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных следующего вида:

$$V_i = f_i(z,t)x + g_i(z,t)y + h_i(z,t), \quad i = 1,2; \qquad V_3 = F(z,t). \tag{3}$$

Исходная идея искать точные решения уравнений Навье–Стокса в форме (3), по-видимому, принадлежит Линю [13] (см. также [14]). В результате подстановки выражений (3) в уравнения (1) с последующим исключением давления возникают полиномиальные выражения первой степени по координатам x и y вида $A_n x + B_n y + C_n = 0$, коэффициенты которых A_n, B_n, C_n зависят только от переменных z и t и выражаются через функции f_i, g_i, h_i, F и их производные. Приравняв A_n, B_n, C_n нулю, получаем переопределенную систему уравнений для f_i, g_i, h_i, F. Анализ этой системы в итоге дает следующее представление для компонент скорости и давления:

$$V_1 = U + \left(w - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}\right)x + vy,$$

$$V_2 = V + ux - \left(w + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}\right)y, \quad V_3 = F,$$

$$P = p_0 - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{2}y^2 - \gamma xy - \varepsilon x - \delta y - \frac{1}{2}F^2 - \int\frac{\partial F}{\partial t}dz + \nu\frac{\partial F}{\partial z}, \tag{4}$$

где p_0, α, β, γ, ε, δ – произвольные функции времени t, задающие поперечное распределение давления, U, V, F, u, v, w – неизвестные функции, зависящие от координаты z и времени t.

Выражения для составляющих скорости и давления (4) редуцируют уравнения гидродинамики (1) к системе шести уравнений относительно шести неизвестных U, V, F, u, v, w, содержащей в качестве параметров пять произвольных функции времени α, β, γ, ε, δ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + 2(uv + w^2) - (\alpha + \beta),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + F\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \gamma, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + F\frac{\partial w}{\partial z} - w\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F\frac{\partial U}{\partial z} - U\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} - w\right) + vV = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\frac{\partial V}{\partial z} - V\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} + w\right) + uU = \nu\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \delta.$$

Отметим, что при $\varepsilon = \delta = \gamma = 0$ (α, β – любые) структура точного решения (4) и система (5) из других соображений (путем исследования одного класса частично инвариантных решений) были получены соответственно в работах [15, 16].

Определяющая система уравнений (5) является предметом дальнейшего анализа. Сразу отметим, что первые четыре уравнения (5) составляют замкнутую подсистему, которая решается независимо от двух последних уравнений.

Преобразование, сохраняющее вид системы (5). Если $F_0(z, t)$, $u_0(z, t)$, $v_0(z, t)$, $w_0(z, t)$, $U_0(z, t)$, $V_0(z, t)$ – некоторое решение системы (5), то набор функций

Схема классификации течений, описываемых системой (5), основанная на структуре компонент скоростей жидкости. Неизвестные u, v, w, U, V, F в общем случае зависят от координаты z и времени t.

$$
\begin{aligned}
F &= F_0(z + \psi(t)) - \psi_t(t), \quad u = u_0(z + \psi(t), t),\\
v &= v_0(z + \psi(t), t), \quad w = w_0(z + \psi(t), t), \qquad (6)\\
U &= U_0(z + \psi(t), t), \quad V = V_0(z + \psi(t), t),
\end{aligned}
$$

тоже будет давать решение системы (5).

В частности, стационарное решение $F_0(z)$, $u_0(z)$, $v_0(z)$, $w_0(z)$, $U_0(z)$, $V_0(z)$, которое описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (5) при $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, $\delta = \text{const}$, $\partial/\partial t = 0$, порождает соответствующее нестационарное решение (6) полной системы (5). При этом периодические функции $\psi(t)$ в (6) будут задавать периодическое решение системы (5).

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ $U = V = 0$

Будем рассматривать течения вязкой несжимаемой жидкости, когда вектор скорости жидкости на оси z направлен вдоль этой оси. Вблизи оси z поперечные компоненты скорости малы и их можно разложить в ряд Тейлора по поперечным координатам x и y. Если в компонентах скорости ограничиться главными членами разложения по x и y, то можно получить представление (3) при $h_i = 0$, откуда следует (4) при $U = V = 0$.

Любые течения жидкости, имеющие две плоскости симметрии, допускают представление вида (4) при $U = V = 0$ в окрестности линии пересечения этих плоскостей (в используемых обозначениях линия пересечения плоскостей задает ось z). К таким течениям относятся осесимметричные течения, комбинации осесимметричных течений с вращением вокруг оси z (в частности, течения кармановского типа), плоские течения, симметричные относительно прямой линии, течения в прямолинейных непроницаемых и пористых трубах с эллиптическим и прямоугольным сечением, струи жидкости, вытекающие из отверстий эллиптической и прямоугольной формы и т.д.

Указанное свойство точных решений уравнений Навье–Стокса вида (4) позволяет их также использовать для приближенного описания значительно более широкого класса течений.

На рисунке приведена схема дальнейшего исследования и классификации течений, описываемых системой (5).

СЛОИСТЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ($F \equiv 0$)

В рамках класса точных решений (4) рассмотрим течения жидкости, в которых вектор скорости параллелен плоскости xy. Полагая в (5) $V_3 = F = 0$, получим переопределенную систему

$$
\begin{gathered}
2(uv + w^2) = \alpha + \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma, \\
\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \gamma, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\alpha - \beta}{2}, \\
\frac{\partial U}{\partial t} + wU + vV = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon, \\
\frac{\partial V}{\partial t} + uU - wV = \nu\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \delta.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Не останавливаясь на общем анализе совместности системы (7), приведем несколько физически содержательных примеров ее нетривиальной разрешимости.

Однонаправленные потоки. “Лишнее” первое уравнение системы (7) и три следующих будут тождественно удовлетворены, если принять, что $u = v = w = \alpha = \beta = \gamma = 0$. Поскольку при сделанных предположениях вектор скорости перестает зависеть от переменных x, y, то поворотом системы координат всегда можно добиться его коллинеарности оси x, т.е., не ограничивая общности, можно считать, что $V = \delta = 0$. В результате имеем

$$V_1 = U(t,z), \quad V_2 = V_3 = 0, \quad P = p_0 - \varepsilon x, \tag{8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon. \tag{9}$$

Система (8), (9) содержит в качестве своих решений ряд классических напорных и сдвиговых течений.

1. Плоское течение Куэтта–Пуазейля [17–19]. Вязкая жидкость, заключенная между плоскостями $z = \pm h$, стационарно движется вдоль оси x под действием заданного градиента давления, равного $-\varepsilon$, и сдвига, вызываемого движением плоскости $z = h$ с постоянной скоростью U_0. Решение этой задачи, удовлетворяющее условиям прилипания (т.е. к (9) добавляются граничные условия: $U(h) = U_0$, $U(-h) = 0$), дается формулой

$$U = \frac{\varepsilon h^2}{2\nu}\left(1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) + \frac{U_0}{2}\left(1 + \frac{z}{h}\right). \tag{10}$$

Общую постановку задачи о течении жидкости в цилиндрических трубах произвольного поперечного сечения можно найти во многих книгах (см., например, [2, 4]).

2. Первая задача Стокса [20]. В начальный момент времени плоскость $z = 0$, над которой покоится вязкая жидкость, внезапно начинается двигаться с постоянной скоростью U_0 в направлении оси x (в этом случае в уравнении (9) полагается $\varepsilon = 0$ и добавляются условия: $U(t, 0) = U_0$, $U(0, z) = 0$). Эволюция возмущения, внесенного в среду таким способом, происходит по автомодельному закону

$$U = U_0\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi}\exp(-\eta)^2 d\eta\right), \quad \xi = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}. \tag{11}$$

3. Вторая задача Стокса [20]. Плоскость $z = 0$ совершает гармонические колебания вдоль оси x с частотой ω и амплитудой U_0/ω по закону $x(t, 0) = (U_0/\omega)\sin(\omega t)$ (в этом случае в уравнении (9) полагается $\varepsilon = 0$ и добавляются условия: $U(t, 0) = U_0\cos(\omega t)$, $U(t, \infty) = 0$). В результате в жидкости также возникает колебательное движение со скоростью

$$U = U_0\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}z\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}z\right). \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, что с удалением от колеблющейся плоскости скорость движения экспоненциально быстро падает и при этом, по линейному закону, происходит сдвиг фазы колебаний. Таким образом, колеблющаяся плоскость вовлекает в движение тонкий слой непосредственно прилегающей к ней жидкости.

Течения во вращающейся жидкости. Пусть вязкая жидкость вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z. Анализ переопределенной системы (7) показывает, что на фоне этого вращения может происходить однородное по переменным x, y течение со скоростью $(U, V, 0)$. Иными словами, приняв, что $u = \Omega$, $v = -\Omega$, $\alpha = \beta = -\Omega^2/2$, $w = \gamma = 0$, из (4) и (7) получим

$$
\begin{gathered}
V_1 = U - \Omega y, \quad V_2 = V + \Omega x, \quad V_3 = 0, \\
P = p_0 - \varepsilon x - \delta y + \frac{\Omega^2}{4}(x^2 + y^2).
\end{gathered} \tag{13}
$$

Здесь неизвестные U и V удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \Omega V = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \Omega U = \nu\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \delta. \tag{14}$$

Из (13) и (14) видно, что центробежная сила, возникающая в результате вращения жидкости, уравновешивается линейной по переменным x, y частью градиента давления. Пространственно однородная часть градиента давления связана с существованием вторичного течения со скоростью $(U, V, 0)$.

В общем случае преобразование зависимых переменных

$$
\begin{gathered}
U = \bar{U}\cos(\Omega t) + \bar{V}\sin(\Omega t) + \frac{\delta}{\Omega}, \\
V = -\bar{U}\sin(\Omega t) + \bar{V}\cos(\Omega t) - \frac{\varepsilon}{\Omega}
\end{gathered}
$$

приводит систему (14) к двум независимым уравнениям теплопроводности

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2}.$$

В стационарном случае общее решение системы (14) имеет вид

$$\begin{aligned} V &= (C_1 \operatorname{ch}(\omega z) + C_2 \operatorname{sh}(\omega z)) \cos(\omega z) + \\ &+ (C_3 \operatorname{ch}(\omega z) + C_4 \operatorname{sh}(\omega z)) \sin(\omega z) + \frac{\varepsilon}{\Omega}, \\ U &= (C_4 \operatorname{ch}(\omega z) + C_3 \operatorname{sh}(\omega z)) \cos(\omega z) - \\ &- (C_2 \operatorname{ch}(\omega z) + C_1 \operatorname{sh}(\omega z)) \sin(\omega z) + \frac{\delta}{\Omega}, \end{aligned} \qquad (15)$$

где $\omega = \sqrt{|\Omega|/(2\nu)}$ – постоянная с размерностью обратной длине, C_i – константы интегрирования ($i = 1, 2, 3, 4$), определяемые, в зависимости от постановки задачи, при помощи граничных и других дополнительных условий. Рассмотрим конкретные примеры.

1. Слой Экмана [21]. На большом расстоянии от плоскости $z = 0$, вращающейся вместе с жидкостью с угловой скоростью Ω, дует постоянный ветер $(U_0, V_0, 0)$ (т.е. V и U в формулах (15) должны удовлетворять граничным условиям: $U(0) = V(0) = 0$, $U(\infty) = U_0$, $V(\infty) = V_0$). В результате у плоскости в слое толщиной порядка ω^{-1} возникает течение вида (13), описываемое соотношениями

$$\begin{aligned} U &= U_0 - (U_0 \cos(\omega z) + V_0 \sin(\omega z)) \exp(-\omega z), \\ \delta &= \Omega U_0, \\ V &= V_0 - (V_0 \cos(\omega z) - U_0 \sin(\omega z)) \exp(-\omega z), \\ \varepsilon &= \Omega V_0. \end{aligned}$$

2. Напорное течение во вращающемся слое [22]. В слое жидкости, твердые границы которого $z = 0$, $z = h$ вращаются с постоянной угловой скоростью Ω относительно оси z, поддерживается однородный продольный градиент давления $(-\varepsilon, -\delta, 0)$ (линейная по x, y часть градиента, как отмечалось ранее, уравновешивает центробежную силу). В результате возникает сдвиговое течение с вектором скорости $(U, V, 0)$, вычисляемым по формулам (15), в которых константы интегрирования, найденные исходя из граничных условий $U(0) = U(h) = V(0) = V(h) = 0$, равны

$$C_1 = -\frac{\varepsilon}{\Omega},$$

$$C_2 = \frac{(\delta \sin(\omega h) + \varepsilon \operatorname{sh}(\omega h))(\operatorname{ch}(\omega h) - \cos(\omega h))}{\Omega(\sin^2(\omega h) + \operatorname{sh}^2(\omega h))},$$

$$C_4 = -\frac{\delta}{\Omega},$$

$$C_3 = \frac{(\delta \operatorname{sh}(\omega h) - \varepsilon \sin(\omega h))(\operatorname{ch}(\omega h) - \cos(\omega h))}{\Omega(\sin^2(\omega h) + \operatorname{sh}^2(\omega h))}.$$

3. Течение между плоскостями, вращающимися относительно разных осей [23]. Плоскости $z = 0$ и $z = h$ вращаются с угловой скоростью Ω относительно осей, проходящих через точки $x = 0$, $y = 0$ и $x = x_0$, $y = y_0$ соответственно, приводя в движение заключенную между ними жидкость. Постоянные интегрирования в (15), согласно граничным условиям $U(0) = V(0) = 0$, $U(h) = \Omega y_0$, $V(h) = -\Omega x_0$ (для простоты считаем, что $\varepsilon = \delta = 0$), равны

$$C_2 = \Omega \frac{y_0 \operatorname{sh}(\omega h) \cos(\omega h) + x_0 \operatorname{ch}(\omega h) \sin(\omega h)}{\sin^2(\omega h) + \operatorname{sh}^2(\omega h)},$$

$$C_1 = 0,$$

$$C_3 = \Omega \frac{y_0 \operatorname{ch}(\omega h) \sin(\omega h) - x_0 \operatorname{sh}(\omega h) \cos(\omega h)}{\sin^2(\omega h) + \operatorname{sh}^2(\omega h)},$$

$$C_4 = 0.$$

Это решение может быть использовано в качестве модели течения в ортогональном реометре, применяемом для определения реологических свойств, в том числе неньютоновских сред.

Течение между дисками, вращающимися с различными скоростями относительно разных осей, рассматривалось в рамках класса (4) в работе [24].

Три вышеприведенных решения дают простые примеры закрученных потоков с искривленной осью вращения – линией, состоящей из точек, в которых компоненты скорости обращаются в нуль ($V_1 = V_2 = 0$).

ПЛОСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Будем рассматривать течения вязкой жидкости вида (4), такие, что картина движения остается неизменной в любой плоскости параллельной плоскости $y = 0$. Следовательно, гидродинамические величины в (4) не зависят от y, и движение в направлении этой оси отсутствует ($V_2 = 0$). Таким образом, полагая в (4) $u = v = V = \beta = \delta = \gamma = 0$, $w = -F_z/2$, получим

$$\begin{aligned} V_1 &= U - x\frac{\partial F}{\partial z}, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = F, \\ P &= p_0 - \frac{\alpha}{2}x^2 - \varepsilon x - \frac{1}{2}F^2 - \int \frac{\partial F}{\partial t} dz + \nu \frac{\partial F}{\partial z}. \end{aligned} \qquad (16)$$

Здесь неизвестные F и U удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} - \alpha, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F\frac{\partial U}{\partial z} - U\frac{\partial F}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon, \qquad (18)$$

первое из которых изолировано, а второе пассивно в том смысле, что его решение следует искать после того как решено (17). Среди решений уравнения (18) имеется тривиальное $U = \varepsilon = 0$ и решение

$$U = n\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{dn}{dt},$$

где F удовлетворяет (17), а функция времени n подчиняется уравнению $d^2n/dt^2 = \alpha n + \varepsilon$.

Приведем некоторые точные решения нелинейного уравнения (17):

$$F = a(t) + b(t)z, \quad b'_t - b^2 + \alpha = 0; \tag{19}$$

$$F = a'_t(t) + \frac{6\nu}{a(t) - z}, \quad \alpha = 0; \tag{20}$$

$$\begin{gathered} F = a(t)\exp(\lambda(t)z) + b(t)\exp(-\lambda(t)z) + \\ + c(t)z + d(t), \\ \lambda'_t + c\lambda = 0, \quad c'_t - c^2 + 4\lambda^2 ab + \alpha = 0, \\ a'_t + (\lambda d - \nu\lambda^2 - 3c)a = 0, \\ b'_t - (\lambda d + \nu\lambda^2 + 3c)b = 0; \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} F = \frac{a'_t(t)}{\omega(t)} + b(t)z + c(t)\cos(\omega(t)z - a(t)), \\ \omega'_t + b\omega = 0, \quad c'_t + (\nu\omega^2 - 3b)c = 0, \\ b'_t - b^2 - \omega^2c^2 + \alpha = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

В решениях (19)–(20) функция $a(t)$ может быть выбрана произвольно. Некоторые другие точные решения уравнения (17) будут рассмотрены далее (см. также [9, 25, 26]).

Замечание. Для решения (19) соответствующее уравнение (18) может быть сведено к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами [9].

Течения вблизи застойной точки. Застойной или критической называется точка, в которой скорость обращается в нуль. Поле скорости плоского потенциального течения в окрестности застойной точки является частным случаем (16) и может быть представлен в виде [5]

$$V_1 = -ax, \quad V_3 = az, \quad a = \text{const} \quad (V_2 = 0). \tag{23}$$

Формулы (16) и уравнения (17)–(18) можно использовать для изучения течения вблизи критической точки с учетом сил вязкого трения. Интерес к таким исследованиям связан с задачами обтекания твердых тел и теории пограничного слоя.

Впервые течение между критической точкой и твердой стенкой изучалось Хименцем [27] в следующей постановке: вязкая жидкость стационарно натекает на твердую плоскость, расположенную перпендикулярно оси z, вдали от плоскости распределение скорости набегающего потока имеет вид (23). Последнее означает, что застойная точка располагается на оси z и набегающий поток ортогонален плоскости ($U \equiv 0$). В данном случае функция $F = F(z)$ удовлетворяет уравнению (17), а требование прилипания жидкости на твердой стенке $z = 0$ и предельные соотношения (23) на бесконечности приводят к граничным условиям

$$F(0) = F'_z(0) = 0; \quad F'_z(\infty) = a. \tag{24}$$

Решение краевой задачи (17), (24) не выражается в элементарных функциях. Приближенный и численный анализ этой задачи [6] показывает, что у твердой стенки образуется пограничный слой, имеющий постоянную толщину порядка $\sqrt{a/\nu}$.

В качестве примера течения с застойной точкой, описываемого решением уравнения (17) ($U = 0$), выражающимся в элементарных функциях, рассмотрим течение перед плоскостью, движущейся в направлении своей нормали по закону $z = Z(t)$. На плоскости выполняются условия прилипания, а далеко перед ней – условия (23):

$$\begin{gathered} z = Z(t)\colon\ F = Z'_t, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0; \\ z \longrightarrow \infty\colon\ F \longrightarrow c(t)z. \end{gathered} \tag{25}$$

Решение данной задачи можно представить в виде (21), если плоскость движется по закону

$$Z = \frac{\nu}{2F_0}\sqrt{1+\tau}\ln(1+\tau), \quad \tau = \frac{6F_0^2}{\nu}t, \tag{26}$$

где F_0 – начальная скорость плоскости ($F_0 > 0$). Подставив выражение (21) в граничные условия (25) и учитывая зависимость (26), имеем $a(t) = d(t) = 0$. В итоге находим скорость жидкости

$$F = F_0^2\left(\frac{3z}{\nu(1+\tau)} + \exp\left(-\frac{3F_0z}{\nu\sqrt{1+\tau}}\right)\right). \tag{27}$$

Решение (27) описывает затухающее движение жидкости перед замедляющейся плоскостью.

Плоское стационарное течение с застойной точкой на плоскости, наклоненной к набегающему потоку под некоторым углом ($U \neq 0$), исследовано в [28–30].

Точное решение (21) может быть использовано для описания разрушающихся за конечное время течений в застойной зоне у проницаемой плоскости. Подробнее разрушающиеся течения обсуждаются в обзоре [7] в связи с задачей о симметричной деформации плоской полосы вязкой жидкости с двумя свободными границами. Частные решения этой задачи можно представить в виде (22). Различные постановки и решения задач о движении жидкости вблизи застойной точки описаны в обзорах [31–33].

Течения около растягивающейся или сжимающейся плоскости. Пусть плоскость, расположенная перпендикулярно оси z, растягивается ($A < 0$) или сжимается ($A > 0$) по закону

$$V_1 = -A(t)x, \tag{28}$$

где $A = A(t)$ – заданная функция времени или константа. Тогда вблизи этой плоскости возникнет движение жидкости, которое может быть описано выражениями (16). Граничные условия вида (28) нетипичны для гидродинамики, но могут использоваться для описания течений, происходящих вблизи деформирующихся, например, в процессе экструзии, поверхностей. Приведем два простых примера, относящихся к движениям этого типа.

1. Установившееся течение вблизи сжимающейся плоскости [34]. Рассмотрим течение жидкости в полубесконечном слое $z > 0$, индуцируемое стационарным деформированием плоскости $z = 0$ по закону (28). В этом случае стационарное уравнение (17) для скорости $F = F(z)$ дополняется граничными условиями: $F(0) = 0$, $F'_z = -A$, $F'_z(\infty) = 0$. Решение данной задачи является частным случаем решения (21) и имеет вид

$$F = \sqrt{\nu A}\left(\exp\left(-\sqrt{\frac{A}{\nu}}z\right) - 1\right). \quad (29)$$

2. Неустановившееся течение вблизи деформирующейся плоскости. Течение жидкости в полубесконечном слое $z > 0$, индуцируемое нестационарным деформированием плоскости $z = 0$ по закону (28), где

$$A(t) = \frac{\nu\lambda^2 B}{B - \exp(-\nu\lambda^2 t)}, \quad (30)$$

также описывается решением вида (21) при $a(t) = c(t) = 0$:

$$F = \frac{A(t)}{\lambda}(e^{-\lambda z} - 1), \quad \lambda = \text{const} > 0. \quad (31)$$

Видно, что любым отрицательным значениям постоянной B и $B > 1$ соответствует сжатие плоскости, а при ее растяжении $(0 < B < 1)$ решение (31) за конечное время становится сингулярным.

Формулы (16) и уравнения (17)–(18) могут быть использованы для описания течений вязкой жидкости в каналах со сжимающимися и растягивающимися стенками. Соответствующие задачи при $U = 0$ (ось x параллельна оси канала) исследованы в [34, 35].

Течения в плоских каналах с проницаемыми стенками. Плоскопараллельное течение вязкой жидкости в канале со стенками равной проницаемости и в присутствии продольного градиента давления, в рамках класса точных решений (16) ($U = 0$, ось x параллельна оси канала), впервые было рассмотрено Берманом [36]. Им было получено асимптотическое разложение решения при малых числах Рейнольдса, построенных по ширине канала и скорости подвода/отвода массы жидкости через проницаемые боковые стенки. Дальнейшие численные и асимптотические исследования течений в каналах с проницаемыми границами проводились рядом авторов, были построены асимптотические разложения для симметричных вдувов и отсосов большой интенсивности, а также численно изучены режимы с несимметричным расходом жидкости через границы [37]. Подробное изложение результатов этих исследований и ссылки на литературу можно найти в книге [38].

Отметим, что решения вида (22) можно использовать для описания некоторых нестационарных течений в канале с пористыми стенками, через которые жидкость подается или отводится по специальному закону.

ВРАЩАТЕЛЬНО–СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ТИПА КАРМАНА

Вращательно-симметричные течения представляют собой нелинейную суперпозицию соосных осесимметричных и чисто вращательных движений жидкости. Определяющие соотношения для таких течений получаются в результате подстановки в (4) и (5) величин $w = U = V = \varepsilon = \delta = \gamma = 0$, $v = -u$, $\alpha = \beta$:

$$V_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}x - uy, \quad V_2 = ux - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}y, \quad V_3 = F,$$
$$P = p_0 - \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}F^2 - \int\frac{\partial F}{\partial t}dz + \nu\frac{\partial F}{\partial z}, \quad (32)$$

где искомые функции F и u удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} - 2u^2 - 2\alpha, \quad (33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (34)$$

При помощи класса решений вида (32), записанного в цилиндрической системе координат, Карманом [39] была исследована задача о стационарном течении вязкой жидкости, вызываемом вращением плоскости с угловой скоростью Ω. Жидкость, прилегающая к плоскости, уносится в радиальном направлении центробежными силами, возникающими в результате вращения. При этом, вследствие закона сохранения массы, формируется компенсирующий поток, направленный к плоскости вдоль оси вращения, со скоростью, стремящейся к $V_3 = -0.886\sqrt{\nu\Omega}$ при $z \longrightarrow \infty$. Описанный принцип организации направленного движения жидкости лежит в основе действия центробежных насосов, дисковых мешалок, дисковых электродов (применяемых в качестве датчиков в электрохимии) и многих других технических устройств. Радиальное и азимутальное движение в задаче Кармана почти полностью заключено в слое толщины порядка $\sqrt{\nu\Omega}$, прилегающем к вращающемуся диску. Задача, в некотором смысле обратная кармановской, о движении вблизи неподвижного диска, вызванного вращением жидкости на бесконечности, изучена в работе [40].

Отличительными чертами течений типа (32) являются множественность стационарных решений и их изолированность друг от друга. Особенно ярко эти свойства проявляются в задаче о течении жидкости между двумя плоскостями, соосно вращающимися с угловыми скоростями $\Omega_1 \le \Omega_2 \ne 0$. По-видимому, впервые эта задача была сформулирована в работе [41]. Проведя качественный анализ, Бэтчелор пришел к заключению, что почти во всем слое между плоскостями жидкость вращается как твердое тело, а вблизи плоскостей образуются пограничные слои. Иной вывод получил Стюартсон [42]. В результате изучения движения жидкости между неподвижной и вращающейся плоскостями, а также при вращении плоскостей в разных направлениях, он заключил, что в ядре вращение практически отсутствует, локализуясь в пограничных слоях вблизи подвижных плоскостей. Дальнейшие исследования показали существование обоих режимов. Более того, было установлено [43, 44], что с ростом числа Рейнольдса появляются все новые решения все более сложной структуры. Подробный анализ результатов исследования задачи Бэтчелора–Стюартсона можно найти в [7], там же обсуждаются и другие течения, описываемые классом Кармана, в том числе и задача об эволюции слоя жидкости со свободной границей на вращающейся плоскости [45, 46].

В силу нелинейности системы (33), (34) вышеупомянутые и многие другие задачи решаются, в основном, с помощью приближенных и численных методов. Тем не менее, при изучении отдельных типов движений жидкости могут оказаться полезными точные решения уравнений (33), (34):

$$\begin{gathered} F = az^2 + b(t)z + c(t), \quad u = 0, \\ b'_t - \frac{b^2}{2} + 2ac + 2\alpha = 0; \end{gathered} \tag{35}$$

$$F = a'_t(t) + \frac{4\nu}{a(t) - z}, \quad u = 0, \quad \alpha = 0; \tag{36}$$

$$\begin{gathered} F = a(t) + b(t)z + c(t)\sin(\omega(t)z + \theta(t)), \\ u = A(t) + B(t)\sin(\omega(t)z + \theta(t)), \end{gathered} \tag{37}$$

$$A'_t - bA = 0, \; \omega'_t + b\omega = 0, \quad c'_t + (\nu\omega^2 - 2b)c = 0,$$

$$B = \pm\frac{\omega c}{2}, \quad A = \pm\frac{1}{2}(\theta'_t + \omega a),$$

$$b'_t - \frac{b^2}{2} + 2(A^2 - B^2 + \alpha) = 0.$$

1. Стационарное течение между радиально сжимающейся и растягивающейся плоскостями. Пусть непроницаемая плоскость, заданная уравнением $z = z_1$, радиально сжимается по закону $V_r = -Ar$, а плоскость, заданная уравнением $z = z_2$, радиально растягивается с той же самой, по абсолютной величине, скоростью. Используя представление (32), находим граничные условия для вертикальной компоненты скорости: $F(z_1) = 0$, $F'_z(z_1) = 2A$; $F(z_2) = 0$, $F'_z(z_2) = -2A$. Движение жидкости между плоскостями описывается формулой вида (35):

$$F = -\frac{2A}{h}(z - z_1)(z - z_2), \tag{38}$$

где $h = z_2 - z_1$ – расстояние между плоскостями. Параметр α, входящий в уравнение (33), находится путем сопоставления (35) и (38).

Заметим, что плоскость $z = h/2$, расположенная по середине между плоскостями, нерастяжима, но проницаема, поэтому (35) описывает также течение между проницаемой и сжимающейся (растягивающейся) плоскостью.

Другие стационарные аналоги решения (35) описаны в работах [47, 48].

2. *Симметричное растекание слоя жидкости под действием термокапиллярной силы.* На плоскую свободную границу $z = h(t)$ слоя жидкости, лежащего на твердой подложке $z = 0$, действует радиально направленная термокапиллярная сила $\nabla\tau = (\tau_0 x, \tau_0 y, 0)$ ($\tau_0 = \mathrm{const} > 0$), вызывающая растекание слоя по подложке со стационарным распределением скорости

$$V_1 = \tau_0 xz, \quad V_2 = \tau_0 yz, \quad V_3 = F = -\frac{\tau_0}{\nu}z^2$$

и нестационарным законом перемещения свободной границы

$$h(t) = \frac{\nu h_0}{\nu + \tau_0 h_0 t}.$$

Здесь h_0 – толщина слоя в начальный момент времени $t = 0$.

При таком способе инициирования движения препятствующий растеканию радиальный градиент давления не возникает ($\alpha = 0$), в силу условий на свободной границе [5] (на подложке выполняются условия прилипания):

$$\begin{gathered} \sigma_{zz}(t,h) = P_g(t), \quad \sigma_{xz}(t,h) = \frac{\partial\tau}{\partial x}, \\ \sigma_{yz}(t,h) = \frac{\partial\tau}{\partial y}, \quad \frac{dh}{dt} = F(t,h). \end{gathered} \tag{39}$$

Здесь σ_{zz}, σ_{xz}, σ_{yz} – компоненты тензора вязких напряжений, $P_g(t)$ – заданное давление вне слоя, которое, без ограничения общности, можно считать равным нулю, поскольку давление определяется с точностью до произвольной функции $p_0(t)$.

Замечание. Термокапиллярная сила возникает из-за неоднородной зависимости коэффициента поверхностного натяжения τ от температуры T. Часто эта зависимость принимается линейной:

$$\tau = \bar{\tau} - \sigma T, \tag{40}$$

где температурный коэффициент поверхностного натяжения σ, как правило, является положительной постоянной. Соответствующая термокапиллярная сила

$$\nabla\tau = \left(-\sigma\frac{\partial T}{\partial x}, -\sigma\frac{\partial T}{\partial y}, 0\right) = (\tau_0 x, \tau_0 y, 0) \tag{41}$$

может быть создана локальным нагревом пятна свободной поверхности радиуса R пассивной примесью с однородной плотностью объемного тепловыделения Q, происходящего, например, вследствие химических реакций (или нагрева с помощью излучения). При этом температура пассивной примеси, а вместе с ней и свободной поверхности, удовлетворяющая уравнению Пуассона $\Delta T = -Q$, распределена по закону

$$T = T_0\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right), \tag{42}$$

где $T_0 = QR^2/4$ – максимальная температура в центре пятна (температура вне пятна принята за нуль).

При помощи (39)–(42) нетрудно связать положительную постоянную τ_0 с величинами σ, T_0 и R:

$$\tau_0 = \frac{2\sigma T_0}{R^2}.$$

3. Течение вблизи радиально сжимающейся плоскости. Плоскость $z = 0$, покрытая жидкостью (при $z > 0$), радиально сжимается со скоростью $V_r = -A(t)r$. Возникающее течение можно описать с помощью (36), если взять функцию $A(t) = [4(t_* - t)]^{-1}$, где $t \in [0, t_*)$. В результате получим

$$F = \frac{4\nu z}{a(t)[a(t) + z]}, \quad a^2(t) = 8\nu(t_* - t). \tag{43}$$

Если жидкость удаляется от плоскости в положительном направлении оси z ($a(t) > 0$), то нормальная составляющая градиента давления на его поверхности $P'_z = -8\nu^2/a^3$ отрицательна. Необходимо отметить, что в стационарном случае решение (36) переходит в частный случай известной задачи о затопленной струе жидкости, сформулированной и решенной Ландау [5].

4. Закрученное течение вязкой жидкости вблизи твердой границы. Рассмотрим цилиндрический стакан, в котором жидкость вблизи свободной границы приведена во вращение. В этом случае в жидкости возникает полоидальная циркуляция, а вблизи центра формируется нисходящий поток, увлекающий частицы пассивной примеси к стенкам стакана, что традиционно объясняется влиянием центробежных сил. Вследствие условий прилипания на дне стакана такое движение, очевидно, будет затухать. Если ограничиться анализом ситуации только вблизи центральной части дна стакана, задачу можно решать в рамках рассматриваемого класса решений. А именно для решения (37) потребуем выполнения условий прилипания на плоскости $z = 0$: $F(0, t) = F_z(0, t) = u(0, t) = 0$. В результате получим

$$F = \frac{\nu}{3\omega^2}(\omega^3 + \omega_0^3)[\omega z - \sin(\omega z)],$$

$$u = \mp\frac{\nu}{6\omega}(\omega^3 + \omega_0^3)\sin(\omega z),$$

$$\omega'_t + \frac{\nu}{3}(\omega^3 + \omega_0^3) = 0,$$

где ω_0 – произвольная константа интегрирования.

Последнее уравнение интегрируется в квадратурах. Его общее решение содержит две (при $\omega_0 \neq 0$) монотонные ветви, стремящиеся к общему пределу $\omega = -\omega_0$ при $t \longrightarrow \infty$. Движение при этом затухает, но происходит это специфическим образом. При пересечении функцией $\omega = \omega(t)$, принадлежащей одной из ветвей, нуля полоидальная циркуляция не только меняет знак (F меняет знак), но и интенсифицируется (несложно подобрать начальные данные таким образом, чтобы в момент достижения максимума она была намного больше начальной). Это качественно совпадает с реальным явлением в стакане, когда чаинки практически мгновенно собираются в центре стакана в некоторый момент времени после прекращения начального размешивания. Факт наличия двух различных состояний равновесия в данной задаче при учете эффекта прилипания на боковых стенках стакана, но без учета трения на дне был доказан ранее в работе [49], с использованием другого класса точных решений уравнений Навье–Стокса.

Заметим, что если положить коэффициент вязкости равным нулю, решение рассматриваемой задачи типа (37) по-прежнему существует, что является достаточно редким примером решений уравнений Эйлера, удовлетворяющих условиям прилипания.

Решения вида (37) позволяют изучать некоторые специальные режимы течений между подвижными плоскостями, на которых выполняются условия прилипания.

ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Обратимся теперь к общему случаю решений с линейной зависимостью скорости течения от двух координат (4), (5). Основная идея дальнейшего анализа состоит в том, чтобы из системы (5) выделить одно изолированное уравнение для продольной компоненты скорости $V_3 = F$.

Сведение первых четырех уравнений системы (5) к одному уравнению. Рассмотрим сначала специальный класс точных решений, который описывается одним уравнением. В уравнениях (5) положим

$$u = m\frac{\partial F}{\partial z} + A, \quad v = n\frac{\partial F}{\partial z} + B, \quad w = k\frac{\partial F}{\partial z} + C, \tag{44}$$

где m, n, k, A, B, C – искомые функции времени t. Потребуем, чтобы первые четыре уравнения (5) для F, u, v, w совпали после подстановки в них (44). В результате для определения искомых функций получим нелинейную систему, состоящую из одного алгебраического уравнения и шести обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$mn + k^2 = \frac{1}{4}, \tag{45}$$

$$\frac{A - m'_t}{m} = \frac{B - n'_t}{n} = \frac{C - k'_t}{k} = a(An + Bm + 2Ck), \tag{46}$$

$$\frac{\gamma - A'_t}{m} = \frac{\gamma - B'_t}{n} = \frac{\alpha - \beta - 2C'_t}{2k} = -\alpha - \beta + 2AB + 2C^2. \tag{47}$$

Это система содержит семь уравнений для девяти функций – шести функций m, n, k, A, B, C из (44) и трех функций α, β, γ из (5) (в данном случае они также считаются искомыми). Можно показать, что последнее уравнение в (46) является следствием трех других уравнений (45)–(47). Поэтому три искомые функции в системе (45)–(47), вообще говоря, можно выбрать произвольно.

Первые четыре уравнения системы (5) с учетом (45)–(47) сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + q\frac{\partial F}{\partial z} + p, \tag{48}$$

где функции $p = p(t)$ и $q = q(t)$ определяются соотношениями

$$p = \frac{\gamma - A'_t}{m}, \quad q = \frac{A - m'_t}{m}. \tag{49}$$

При построении решений системы (45)–(47) следует различать два случая.

Решение системы (45)–(47) при $m = n$. В этом случае общее решение системы (45)–(47) можно представить в виде

$$\begin{gathered} m = n = \frac{1}{2}\sin\varphi, \quad k = \frac{1}{2}\cos\varphi, \\ A = B = \frac{1}{2}(q\sin\varphi + \varphi'_t\cos\varphi), \\ C = \frac{1}{2}(q\cos\varphi - \varphi'_t\sin\varphi), \\ \alpha = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}(\varphi'_t)^2 - \frac{p}{2}(1 - \cos\varphi) + C'_t, \\ \beta = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}(\varphi'_t)^2 - \frac{p}{2}(1 + \cos\varphi) - C'_t, \\ \gamma = \frac{p}{2}\sin\varphi + A'_t, \end{gathered} \tag{50}$$

где $p(t)$, $q(t)$, $\varphi(t)$ – произвольные функции. Для удобства свободные функции p и q в (50) выбраны так, что в результате преобразования (44), (50) первые четыре уравнения системы (5) приводятся к одному уравнению (48) с этими же функциями $p = p(t)$, $q = q(t)$.

Таким образом, доказано важное утверждение. Любое решение уравнения (48) для любых функций $p = p(t)$ и $q = q(t)$ порождает точное решение уравнений Навье – Стокса (1). Это решение описывается функцией $F = F(z, t)$ и формулами (4), (44), (50).

Решение системы (45)–(47) при $m \neq n$. В этом случае общее решение системы (45)–(47) можно получить следующим образом. Функции $m = m(t)$, $k = k(t)$, $q = q(t)$ задаются произвольно при условии $m^2 + k^2 \neq 1/4$. Остальные функции, входящие в систему (45)–(47) и уравнение (48), вычисляются последовательно по формулам

$$\begin{gathered} n = \frac{1 - 4k^2}{4m}, \quad A = mq + m'_t, \quad B = nq + n'_t, \\ C = kq + k'_t, \quad p = \frac{A'_t - B'_t}{n - m}, \\ \alpha = AB + C^2 + C'_t - \frac{p}{2}(1 - 2k), \\ \beta = AB + C^2 - C'_t - \frac{p}{2}(1 + 2k), \quad \gamma = pm + A'_t. \end{gathered} \tag{51}$$

В данном случае коэффициент $p = p(t)$ в уравнении (48) определяется через функции $m = m(t)$, $k = k(t)$, $q = q(t)$ и их производные (а не задается произвольно, как было в случае $m = n$). Попытка задать непосредственно зависимость $p = p(t)$ вместо задания функции m (или k) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции m (или k) с произвольной функцией $q(t)$.

Рассмотрим, как надо выбрать функцию $q = q(t)$, чтобы выполнялось равенство $p = 0$. Из выражения для p в (51) имеем $A = B + s_0$, где s_0 – произвольная постоянная. Отсюда, учитывая формулы (51) для функций A, B, n, находим функцию q:

$$q = \frac{4s_0m - 8(mm'_t + kk'_t)}{4(m^2 + k^2)} + \frac{m'_t}{m} \quad (\text{при } p = 0). \tag{52}$$

Общее свойство и точные решения уравнения (48). Общее свойство уравнения (48): если $F_0(z, t)$ – некоторое его решение, то функция

$$F = F_0(z + \psi(t), t) - \psi'_t(t), \tag{53}$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция, также будет решением уравнения (48).

При $q \neq 0$ уравнение (48) имеет следующие точные решения (опущено вырожденное решение, линейное по координате z):

$$F = -6\nu k \operatorname{th}[k(z - \lambda t) + A] + \lambda, \quad p = 0, \quad q = 8\nu k^2; \tag{54}$$

$$F = 6\nu k \operatorname{tg}[k(z - \lambda t) + A] + \lambda, \quad p = 0, \quad q = -8\nu k^2; \tag{55}$$

$$\begin{gathered} F = \omega(t)z + \frac{\xi(t)}{\theta(t)}\sin[\theta(t)z + a], \\ \theta'_t = -\omega\theta, \quad \omega'_t = \omega^2 + q(t)\omega + p(t) + \xi^2, \\ \xi'_t = [2\omega - \nu\theta^2 + q(t)]\xi; \end{gathered} \tag{56}$$

$$\begin{gathered} F = \frac{a(t)}{\theta(t)}\exp[-\theta(t)z] + b(t) + c(t)z, \\ \theta'_t = -c\theta, \quad a'_t = (\nu\theta^2 + q + 2c + b\theta)a, \\ c'_t = c^2 + qc + p; \end{gathered} \tag{57}$$

$$\begin{gathered} F = \omega(t)z + \frac{\xi(t)}{\theta(t)}[Ae^{\theta(t)z} + Be^{-\theta(t)z}], \\ \theta'_t = -\omega\theta, \quad \omega'_t = \omega^2 + q(t)\omega + p(t) - 4AB\xi^2, \\ \xi'_t = [2\omega + \nu\theta^2 + q(t)]\xi; \end{gathered} \tag{58}$$

$$\begin{gathered} F = a'_t(t) + b(t)[z - a(t)] - \frac{6\nu}{z - a(t)}, \\ q = -4b, \quad p = b'_t + 3b^2. \end{gathered} \tag{59}$$

Здесь A, B, k, λ – произвольные постоянные; в (56)–(58) входят функции, которые описываются соответствующими системами обыкновенных дифференциальных уравнений, причем несколько функций можно выбрать произвольно; в решение (59) входят две произвольные функции $a(t)$ и $b(t)$. Еще несколько точных решений уравнения (48) приведено далее.

Отметим, что свойство (53) позволяет обобщить решения (54), (55), (58), добавив в них произвольную функцию.

Положив в (56) $\omega = 0$, $\theta = \text{const}$, $\xi(t)$ – периодическая функция, получим решение, периодическое как по времени t, так и по пространственной координате z.

Пример. Рассмотрим стационарный случай решения (56). В формулах (50), (56) положим

$$\varphi = 0, \quad \xi = -(a_1 + a_2), \quad q = \nu\theta^2 = 2a_1, \quad p = -\xi^2, \quad \theta = \sqrt{2a_1/\nu}.$$

В результате с помощью выражений (4), (44) получим решение

$$V_1 = a_1x, \quad V_2 = [(a_1 + a_2)\cos(\theta z) - a_1]y, \quad V_3 = -\frac{a_1 + a_2}{\theta}\sin(\theta z),$$

которое описывает трехмерное течение слоя жидкости между двумя плоскими упругими пленками (положение пленок определяется значениями $z = 0$ и $z = 2\pi/\theta$), поверхности которых растягиваются по закону $V_1 = a_1x$, $V_2 = a_2y$.

Сведение первых четырех уравнений системы (5) к двум уравнениям. Первый случай. Полагая

$$u = a^2G, \quad v = -b^2G, \quad w = abG, \quad \alpha = \beta, \quad \gamma = 0, \tag{60}$$

где a, b – произвольные постоянные, сведем первые четыре уравнения системы (5) к изолированному уравнению для продольной скорости F и дополнительному уравнению для функции $G = G(z, t)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} - 2\alpha, \tag{61}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + F\frac{\partial G}{\partial z} - G\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}. \tag{62}$$

Видно, что уравнение (61) совпадает с уравнением (33) для случая незакрученного течения кармановского типа при $u = 0$, а (62) совпадает с уравнением (34) для азимутальной компоненты скорости. Поэтому приведенные ранее точные решения (35), (36) применимы для описания трехмерных течений.

Система (61)–(62) имеет точные решения

$$F = az^2 + b(t)z + c(t), \quad G = A(t)z^2 + B(t) + C(t),$$
$$b'_t - \frac{b^2}{2} + 2ac + 2\alpha = 0, \quad A'_t + b(t)A - aB = 0,$$

$$B'_t + 2c(t)A - 2aC = 0, \quad C'_t + c(t)B - b(t)C = 2\nu A;$$
$$F = a'_t(t) + \frac{4\nu}{a(t)-z}, \quad \alpha = 0,$$
$$G = |z-a(t)|^{-3/2}[C_1\sin(\mu\ln|z-a(t)|) + $$
$$+ C_2\cos(\mu\ln|z-a(t)|)], \quad \mu = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пусть $F = F(z)$ – стационарное решение уравнения (61). Тогда уравнение (62) допускает нестационарное решение экспоненциального типа

$$G(t,z) = e^{-\omega t}r(z), \quad Fr'_z - rF'_z = \nu r''_{zz} + \omega r, \qquad (63)$$

где ω – произвольная постоянная, и периодическое решение

$$G(t,z) = \sin(\omega t)g(z) + \cos(\omega t)h(z), \qquad (64)$$

где функции $g = g(z)$ и $h = h(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} Fg'_z - gF'_z &= \nu g''_{zz} + \omega h, \\ Fh'_z - hF'_z &= \nu h''_{zz} - \omega g. \end{aligned} \qquad (65)$$

Решения (64), полученные для разных значений $\omega = \omega_1, \ldots, \omega = \omega_n$ (для одной и той же $F = F(z)$), в силу линейности уравнения (62), можно складывать.

Уравнение (62) для стационарной продольной компоненты скорости $F(z)$ имеет также более сложное решение вида $G(t, z) = e^{\mu t}[\sin(\omega t)g(z) + \cos(\omega t)h(z)]$.

Свойство (6) (функции G, r, g, h преобразуются как u) позволяет обобщить приведенные выше формулы (63)–(65).

Сведение первых четырех уравнений системы (5) к двум уравнениям. Второй случай. В уравнениях (5) положим

$$u = \frac{1}{2}\sin\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial z} + q\right) + a^2G,$$
$$v = \frac{1}{2}\sin\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial z} + q\right) - b^2G,$$
$$w = \frac{1}{2}\cos\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial z} + q\right) + abG,$$
$$\alpha = \frac{q^2}{4} - \frac{p}{2}(1-\cos\varphi) + \frac{q'_t}{2}\cos\varphi,$$
$$\beta = \frac{q^2}{4} - \frac{p}{2}(1+\cos\varphi) - \frac{q'_t}{2}\cos\varphi,$$
$$\gamma = \frac{1}{2}(p + q'_t)\sin\varphi,$$

где $p = p(t)$, $q = q(t)$ – произвольные функции, a, b – произвольные постоянные, $G = G(z, t)$ – искомая функция, φ – константа, определяемая из трансцендентного уравнения

$$(a^2 - b^2)\sin\varphi + 2ab\cos\varphi = 0.$$

В результате первые четыре уравнения системы (5) сводятся к двум уравнениям

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + q\frac{\partial F}{\partial z} + p, \qquad (66)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + F\frac{\partial G}{\partial z} - G\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}. \qquad (67)$$

Уравнение (66) совпадает с ранее рассмотренным уравнением (48) и имеет точные решения (54)–(59). Стационарный вариант уравнения (66) рассматривался в работе [50].

Уравнение (66) имеет решение (59). При $b(t) = 0$ соответствующее уравнение (67) преобразованием

$$G = \zeta^{-3}\Psi(\zeta,t), \quad \zeta = z - a(t),$$

приводится к классическому уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}.$$

Пусть $F = F(z, t)$ – решение уравнения (66). Тогда уравнение (67) имеет решение

$$G = A\frac{\partial F}{\partial z} + A'_t + Aq, \qquad (68)$$

где функция $A = A(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$A''_{tt} + qA'_t + (p + q'_t)A = 0. \qquad (69)$$

Вопросы нелинейной устойчивости решений системы (66)–(67). Рассмотрим теперь подробнее задачи со стационарной продольной компонентой скорости, что соответствует $F = F(z)$, $p = \mathrm{const}$, $q = \mathrm{const}$. В этом случае решение уравнения (69) зависит от знака дискриминанта $\Delta = q^2 - 4p$:

$$A(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{qt}{2}\right)\left[C_1\exp\left(\dfrac{t\sqrt{\Delta}}{2}\right) + C_2\exp\left(-\dfrac{t\sqrt{\Delta}}{2}\right)\right] \\ \text{при } \Delta > 0, \\ \exp\left(-\dfrac{qt}{2}\right)\left[C_1\sin\left(\dfrac{t\sqrt{|\Delta|}}{2}\right) + C_2\cos\left(-\dfrac{t\sqrt{|\Delta|}}{2}\right)\right] \\ \text{при } \Delta < 0, \\ \exp\left(-\dfrac{qt}{2}\right)(C_1t + C_2) \\ \text{при } \Delta = 0, \end{cases} \qquad (70)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

При $q < 0$ (p – любое) и $p < 0$ (q – любое) решения (68) и (70) экспоненциально растут при $t \longrightarrow \infty$. Поэтому указанные значения параметров определяют область абсолютной неустойчивости системы (66)–(67) для любого ограниченного стационарного профиля продольной компоненты скорости $F(z)$ (отличного от константы). Точка $p = q = 0$ также относится к области неустойчивости системы (66)–(67).

При $q = 0$, $p > 0$ решение (70), а следовательно и решение (68), являются периодическими. Совместное выполнение неравенств $p \ge 0$, $q \ge 0$ ($|p| + |q| \ne 0$) определяет область условной устойчивости рассматриваемых решений.

Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о нелинейной неустойчивости, поскольку все приведенные решения являются точными (а не линеаризованными, как это имеет место в теории линейной устойчивости).

Все приведенные выше выводы по устойчивости и неустойчивости, а также формулы (68)–(70), остаются справедливыми для любых нестационарных решений $F = F(t, z)$ уравнения (66) при $p = \text{const}$, $q = \text{const}$.

Замечание 1. Аналогичным образом с помощью уравнения (69) можно исследовать на устойчивость нестационарные решения уравнения (66) при переменных $p = p(t)$, $q = q(t)$.

Замечание 2. Пусть $F = F(t, z)$ – стационарное решение уравнения (66). Тогда уравнение (67) допускает нестационарное точное решение экспоненциального типа (63), а также периодическое решение вида (64)–(65).

Некоторые другие точные решения системы (66)–(67) приведены далее.

Трехмерное течение при $u = v = w = 0$. Полагая в (4)–(5) $u = v = w = 0$, $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$, получим достаточно простое трехмерное течение вида

$$V_1 = U - \frac{x}{2}\frac{\partial F}{\partial z}, \quad V_2 = V - \frac{y}{2}\frac{\partial F}{\partial z}, \quad V_3 = F,$$
$$P = p_0 - \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) - \varepsilon x - \delta y - \frac{1}{2}F^2 - \int \frac{\partial F}{\partial t}dz + \nu\frac{\partial F}{\partial z}, \tag{71}$$

где функции U, V, F описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} - 2\alpha,$$
$$\frac{\partial U}{\partial t} + F\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{U}{2}\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon, \tag{72}$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{V}{2}\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \delta.$$

Напомним, что величины p_0, α, ε, δ могут зависеть от времени. Отметим, что даже при $V = \delta = 0$ рассматриваемое течение остается трехмерным.

Последние два аналогичных уравнения в (72) не зависят друг от друга. Поэтому можно ограничиться анализом первых двух уравнений (72).

Пусть $F = F(z, t)$ – некоторое решение первого уравнения (72). Тогда второе уравнение (72) имеет решение

$$U = s(t)\frac{\partial F}{\partial z} + 2s'_t(t). \tag{73}$$

где функция $s = s(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$s''_{tt} + \alpha(t)s - \frac{\varepsilon(t)}{2} = 0. \tag{74}$$

Первое уравнение (72) совпадает с уравнением (33) (при $u = 0$) и с уравнением (61). Поэтому приведенные ранее точные решения (35) и (36) являются решениями первого уравнения (72). Формулы (73) и (74) позволяют построить соответствующие решения второго уравнения (72).

Пусть $F = F(z)$ – стационарное решение первого уравнения (71). Тогда второе уравнение (71) допускает точное нестационарное решение экспоненциального типа (63), а также периодическое решение вида (64)–(65).

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ СКОРОСТИ *F*. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Линейные преобразования уравнения для компоненты скорости *F*. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - m\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + q(t)\frac{\partial F}{\partial z} + p(t), \tag{75}$$

которое при $m = 1$ совпадает с (48) и (66) (при $q(t) = 0$ см. также (17)), а при $m = 1/2$ и $q(t) = 0$ совпадает с уравнением (61) (см. также (33) при $u = 0$). При $m = 1$ обе функции $p(t)$ и $q(t)$ могут выбираться произвольно.

Общее свойство уравнения (75): если $F_0(z, t)$ – некоторое его решение, то функция (53), где $\psi(t)$ – произвольная функция, также будет решением уравнения (75).

Линейное преобразование относительно искомых функций

$$F = a(t)f(\tau, \xi) + b(t)z + c(t),$$
$$\xi = \lambda(t)z + \sigma(t), \quad \tau = \int \lambda^2(t)dt + C_0, \tag{76}$$

где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, $\sigma = \sigma(t)$ – произвольные функции, приводит уравнение (75) к виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \xi} + [\tilde{a}f + \tilde{b}\xi + \tilde{c}]\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - m\tilde{a}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 =$$
$$= \nu\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \tilde{q}\frac{\partial f}{\partial \xi} + \tilde{p}, \tag{77}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\tilde{a}(\tau) = \frac{a}{\lambda}, \quad \tilde{b}(\tau) = \frac{1}{\lambda^3}(b\lambda + \lambda_t'),$$
$$\tilde{c}(\tau) = \frac{1}{\lambda^3}(c\lambda^2 - b\lambda\sigma + \lambda\sigma_t' - \sigma\lambda_t'),$$
$$\tilde{q}(\tau) = \frac{1}{a\lambda^3}\left[aq\lambda + 2mab\lambda - \frac{d(a\lambda)}{dt}\right], \tag{78}$$
$$\tilde{p}(\tau) = \frac{1}{a\lambda^3}(p + bq + mb^2 - b_t').$$

Аргументы функций в левых частях равенств – τ, а в правых частях равенств – t; переменные τ и t связаны последним соотношением (76).

Наличие в (75)–(78) большого числа (от пяти до семи) произвольных функций позволяет строить различные точные решения уравнения (75).

Пример 1. Полагая в (77) $f = 1$, $f = \xi^{-1}$, $f = e^{\xi}$, $f = \sin\xi$, путем подбора произвольных функций и параметра m можно получить все решения (19)–(22), (35)–(36), (56)–(59).

Пример 2. Уравнение (77) имеет стационарные решения

$$f(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^{\xi}}, \tag{79}$$

которые, с учетом (79), приводят к новым точным решениям исходного уравнения (75) следующего вида:

$$F(z,t) = \frac{a(t)}{1 \pm \exp[\lambda(t)z + \sigma(t)]} + b(t)z + c(t). \tag{80}$$

Решению (79) соответствуют следующие коэффициенты в уравнении (77):

$$\tilde{a} = \frac{6\nu}{2-m}, \quad \tilde{b} = 0, \quad \tilde{c} = -\frac{3\nu}{2-m},$$
$$\tilde{p} = 0, \quad \tilde{q} = \frac{1+m}{2-m}\nu.$$

Подставив эти выражения в (78), можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функциональных коэффициентов решения (80) (при $m = 1$ в этой системе две функции могут быть выбраны произвольно).

Пример 3. Полагая далее

$$\tilde{a} = C_1, \ \tilde{b} = C_2, \ \tilde{c} = C_3, \ \tilde{p} = C_4, \ \tilde{q} = C_5, \tag{81}$$

где C_n – произвольные постоянные, получаем из (77) обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f = f(\xi)$. В этом случае соотношения (78) при условии (81) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функциональных коэффициентов преобразования (76). При $m = 1$ в уравнении (75) и преобразовании (76) при ограничениях (78)–(81) две функции можно задать произвольно. Стационарное решение $f = f(\xi)$ уравнения (77) порождает нестационарное решение типа обобщенной бегущей волны (76) исходного уравнения (75).

Пример 4. Положим теперь

$$\tilde{a} = C_1\tau^{-\frac{k+1}{2}}, \quad \tilde{b} = C_2\tau^{-1}, \quad \tilde{c} = C_3\tau^{-\frac{1}{2}},$$
$$\tilde{q} = C_4\tau^{-1}, \quad \tilde{p} = C_5\tau^{\frac{k-3}{2}}, \quad \tau = \int\lambda^2(t)dt + C_0, \tag{82}$$

где k, C_n – произвольные постоянные. В этом случае уравнение (82) допускает автомодельное решение вида

$$f = \tau^{k/2}h(\zeta), \quad \zeta = \xi\tau^{-1/2},$$

где функция $h = h(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{k-1}{2} - C_4\right)h_\zeta' + \left[C_1h + \left(C_2 - \frac{1}{2}\right)\zeta + C_3\right]h_{\zeta\zeta}'' - $$
$$- mC_1(h_\zeta')^2 = \nu h_{\zeta\zeta\zeta}''' + C_5. \tag{83}$$

Подставив (82) в (78), получим систему интегродифференциальных уравнений для определения функциональных параметров исходного уравнения (75) и преобразования (76). Отметим, что замена $\lambda = \sqrt{\varphi_t'}$ позволяет с учетом равенства $\tau = \varphi(t) + C_0$ прийти к стандартной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанное решение не является автомодельным и содержит две произвольные функции.

Пример 5. Возьмем значения $\tilde{a} = 1$, $\tilde{b} = \tilde{c} = 0$. Из первых трех соотношений (78) получим

$$\lambda = a, \quad b = -a_t'/a, \quad c = -\sigma_t'/a, \tag{84}$$

а два последних соотношения (78) принимают вид

$$\tilde{q}(\tau) = \frac{1}{a^2}\left[q(t) - 2(m+1)\frac{a_t'}{a}\right], \quad \tau = \int a^2(t)dt + C_0,$$
$$\tilde{p}(\tau) = \frac{1}{a^4}\left[p(t) - \frac{a_t'}{a}q(t) + (m-1)\left(\frac{a_t'}{a}\right)^2 + \frac{a_{tt}''}{a}\right]. \tag{85}$$

Таким образом, преобразование (76), в которое надо подставить соотношения (84), приводит уравнение (75) к уравнению аналогичного вида (77) с коэффициентами (85). Формулы (84) и (85) содержат две произвольные функции $a = a(t)$ и $\sigma = \sigma(t)$; кроме того, при $m = 1$ в уравнении (75) функции $p(t)$, $q(t)$ также могут быть произвольными. Выбирая функции $a(t)$, $\sigma(t)$, $p(t)$, $q(t)$ подходящим образом, можно строить и размножать точные решения исходного уравнения.

В частности, при

$$q(t) = 2(m+1)\frac{a_t'}{a}, \quad p(t) = (m+3)\left(\frac{a_t'}{a}\right)^2 - \frac{a_{tt}''}{a}, \tag{86}$$

где $a = a(t)$ – произвольная функция, формулы (85) дают нулевые значения $\tilde{q} = \tilde{p} = 0$, и уравнение (77) приводится к автономному виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\tau\partial\xi} + f\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} - m\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 f}{\partial\xi^3}.$$

Любое стационарное решение этого уравнения $f = f(\xi)$ порождает нестационарное решение (76), (84) уравнения (75) с коэффициентами (86).

Линейные преобразования системы уравнений (75), (67). Рассмотрим систему (75), (67), которая обобщает систему (66)–(67) и при $m = 1$, $q = 0$ переходит в систему (61)–(62). Сделаем линейное преобразование искомых функций, состоящее из преобразования (76) и преобразования

$$G = s(t)g(\tau,\xi), \quad \xi = \lambda(t)z + \sigma(t), \quad \tau = \int\lambda^2(t)dt + C_0. \tag{87}$$

В результате получим уравнение (77) для функции f и следующее уравнение для функции g:

$$\frac{\partial g}{\partial\tau} + (\tilde{a}f + \tilde{b}\xi + \tilde{c})\frac{\partial g}{\partial\xi} - \tilde{a}g\frac{\partial f}{\partial\xi} + \tilde{s}g = \nu\frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2}. \tag{88}$$

Здесь выражения для функциональных коэффициентов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ приведены в (78), а $\tilde{s}$ определяется по формуле

$$\tilde{s} = \frac{1}{s\lambda^2}(s'_t - bs). \tag{89}$$

Уравнения (77), (88) и соотношения (78), (89) позволяют с помощью формул (76), (87) строить точные решения системы (75), (67) или (66)–(67).

Пример 6. Накладывая на коэффициенты условия (81) и $\tilde{s} = C_6$, получим из (77), (88) систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$. Соотношения (78), (89) при условиях (81) и $\tilde{s} = C_6$ дают систему обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющую найти функциональные коэффициенты в формулах (76), (87). Полученное таким образом решение типа обобщенной бегущей волны при $m = 1$ будет содержать две произвольные функции.

Пример 7. Добавим теперь к (82) соотношение $s = C_6\tau^{-1}$. В этом случае система уравнений (77), (88) допускает автомодельное решение

$$f = t^{k/2}h(\zeta), \quad g = \tau^{\mu}r(\zeta), \quad \zeta = \xi\tau^{-1/2},$$

где μ – произвольная постоянная, функция $h(\zeta)$ удовлетворяет уравнению (83), а функция $r(\zeta)$ – уравнению

$$\left[C_1 h + \left(C_2 - \frac{1}{2}\right)\zeta + C_3\right]r'_\zeta - C_1 r h'_\zeta + (C_6 + \mu)r = \nu r''_{\zeta\zeta}.$$

Соотношения (78), (89) вместе с условиями (82) и $\tilde{s} = C_6\tau^{-1}$ дают уравнения для определения функциональных коэффициентов в решении (76)–(87) (отметим, что это неавтомодельное решение).

Нелинейное преобразование типа Крокко. Обозначим

$$\eta = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \tag{90}$$

Перенесем член mF_z^2 (здесь и далее используется также сокращенная запись производных) в правую часть уравнения (75), затем поделим обе части полученного выражения на $F_{zz} = \Phi$ и продифференцируем по z. Учитывая (90), имеем

$$\frac{\Phi_t}{\Phi} - \frac{F_{zt}\Phi_z}{\Phi^2} + \eta = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\nu\Phi_z + m\eta^2 + q(t)\eta + p(t)}{\Phi}. \tag{91}$$

Перейдем в (91) от старых переменных t, z, $F = F(z, t)$ к новым переменным t, η, $\Phi = \Phi(t, \eta)$, где η и Φ определяются по формулам (90). Производные при переходе от старых к новым переменным преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\eta} = F_{zz}\frac{\partial}{\partial\eta} = \Phi\frac{\partial}{\partial\eta},$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial t} + F_{tz}\frac{\partial}{\partial\eta}.$$

В результате (91) сводится к уравнению второго порядка

$$\frac{\eta}{\Phi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Phi} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{m\eta^2 + q\eta + p}{\Phi}\right) + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (m\eta^2 + q\eta + p)\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = [(2m-1)\eta + q]\Phi + \nu\Phi^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}. \tag{92}$$

Отметим, что в вырожденном случае (невязкая жидкость, $\nu = 0$) исходное нелинейное уравнение второго порядка (75) сводится к линейному уравнению первого порядка (92), которое можно полностью проинтегрировать методом характеристик.

Если известно решение исходного уравнения (75), то формулы (90) дают параметрическую форму решения уравнения (92).

Пусть $\Phi = \Phi(\eta, t)$ – некоторое решение уравнения (92). Тогда соответствующее решение исходного уравнения (75) также можно представить в параметрической форме

$$z = \int\frac{ds}{\Phi(s,t)} + \psi(t), \quad F = \int\frac{s\,ds}{\Phi(s,t)} - \psi'_t(t),$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция (при интегрировании t рассматривается как параметр).

Рассмотрим теперь опять систему (75), (67), которая обобщает систему (66)–(67) и при $m = 1$, $q = 0$ переходит в систему (61)–(62). Считая, что $F_{zz} \neq 0$, перейдем от переменных x, t к новым переменным t, η, согласно (90). Уравнение (75) преобразуется в уравнение (92), а уравнение (67) – в уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (m\eta^2 + q\eta + p)\frac{\partial G}{\partial \eta} - \eta G = \nu\Phi^2\frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}. \quad (93)$$

Далее считаем, что $p = \text{const}$, $q = \text{const}$. Уравнение (75) в этом случае имеет точное решение типа бегущей волны $F = F(kz - \lambda t)$. Этому решению соответствует стационарное решение уравнения (92): $\Phi = \Phi(\eta)$. Уравнение (93) имеет соответствующее нестационарное решение с разделяющимися переменными $G(t, \eta) = e^{\mu t}g(\eta)$, где функция $g(\eta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(m\eta^2 + q\eta + p)g'_\eta + (\mu - \eta)g = \nu\Phi^2(\eta)g''_{\eta\eta}.$$

При $m = 1/2$, $q = 0$ точному решению вида $F = az^2 + b(t)z + c(t)$ уравнения (75) соответствует $\Phi = 2a = \text{const}$. Уравнение (93) в этом случае также допускает нестационарное решение с разделяющимися переменными вида $G(t, \eta) = e^{\mu t}g(\eta)$.

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ (5)

Решения типа бегущей волны. Справедливо следующее утверждение. Пусть функции $F_0(z)$, $u_0(z)$, $v_0(z)$, $w_0(z)$, $U_0(z)$, $V_0(z)$ определяют общее решение стационарной системы (5) при $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, $\delta = \text{const}$, $\partial/\partial t = 0$. Тогда все решения типа бегущей волны нестационарной системы (5) при $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, $\delta = \text{const}$ описываются формулами

$$\begin{aligned} &F = F_0(z - \lambda t) + \lambda, \quad u = u_0(z - \lambda t), \\ &v = v_0(z - \lambda t), \quad w = w_0(z - \lambda t), \\ &U = U_0(z - \lambda t), \quad V = V_0(z - \lambda t), \end{aligned} \quad (94)$$

где λ – произвольная постоянная.

Из формулы (94) следует, что если функция $F_0(z)$, определяющая стационарное решение, стремится к нулю при $z \longrightarrow \infty$, то соответствующая бегущая волна, распространяющаяся вправо со скоростью $\lambda > 0$, описывается функцией F, которая стремится к λ при $z \longrightarrow \infty$.

Автомодельные решения. Для определяющих функций

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{t^2}, \quad \beta = \frac{\beta_0}{t^2}, \quad \gamma = \frac{\gamma_0}{t^2}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{t^2}, \quad \delta = \frac{\delta_0}{t^2}, \quad (95)$$

где α_0, β_0, γ_0, ε_0, δ_0 – произвольные постоянные, система (5) допускает автомодельное решение вида

$$\begin{aligned} &F = \frac{1}{\sqrt{t}}f(\zeta), \quad u = \frac{1}{t}g_1(\zeta), \quad v = \frac{1}{t}g_2(\zeta), \\ &w = \frac{1}{t}g_3(\zeta), \ U = \frac{1}{t}h_1(\zeta), \ V = \frac{1}{t}h_2(\zeta), \ \zeta = \frac{z}{\sqrt{t}}, \end{aligned} \quad (96)$$

где функции $f(\zeta)$, $g_n(\zeta)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &-f' - \left(\frac{\zeta}{2} - f\right)f'' - \frac{1}{2}(f')^2 = \\ &= -(\alpha_0 + \beta_0) + \nu f''' + 2(g_1g_2 + g_3^2), \\ &\left(f - \frac{\zeta}{2}\right)g'_1 - (f' + 1)g_1 = \nu g''_1 + \gamma_0, \\ &\left(f - \frac{\zeta}{2}\right)g'_2 - (f' + 1)g_2 = \nu g''_2 + \gamma_0, \\ &\left(f - \frac{\zeta}{2}\right)g'_3 - (f' + 1)g_3 = \nu g''_3 + \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}, \\ &\left(f - \frac{\zeta}{2}\right)h'_1 - \left(\frac{f'}{2} - g_3 + 1\right)h_1 + g_2h_2 = \nu h''_1 + \varepsilon_0, \\ &\left(f - \frac{\zeta}{2}\right)h'_2 - \left(\frac{f'}{2} + g_3 + 1\right)h_2 + g_1h_1 = \nu h''_2 + \delta_0. \end{aligned} \quad (97)$$

При $\gamma_0 = \varepsilon_0 = \delta_0 = 0$ решение (95)–(97) было получено в [16].

Отметим, что сделав сдвиг по времени $t \longrightarrow t + C$, в (95), (96) можно избежать сингулярной особенности в решении при $t = 0$.

Решения типа обобщенной бегущей волны и обобщенные автомодельные решения. Используя линейное преобразование искомых функций

$$\begin{aligned} &F = a(t)f(\tau,\xi) + b(t)x + c(t), \ \xi = \lambda(t)z + \sigma(t), \\ &\tau = \int\lambda^2(t)dt, \ u = s(t)\varphi_1(\tau,\xi), \\ &v = s(t)\varphi_2(\tau,\xi), \ w = s(t)\varphi_3(\tau,\xi), \\ &U = r(t)\psi_1(\tau,\xi), \ V = r(t)\psi_2(\tau,\xi), \end{aligned}$$

можно путем подходящего выбора функциональных параметров $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\lambda(t)$, $\sigma(t)$, $s(t)$, $r(t)$ привести систему (5) к виду, допускающему решения типа бегущей волны и автомодельные решения в переменных ξ, τ. Эти решения при возвращении к исходным переменным x, t преобразуются в решения типа обобщенной бегущей волны и обобщенные автомодельные решения. Подробная процедура получения этих решений, ввиду ее громоздкости, в статье не приводится (эта процедура была детально описана в предыдущем разделе для случая одного уравнения (75) и системы двух уравнений (75), (67)).

Решение, содержащее десять произвольных функций. Система из первых четырех уравнений (5) допускает точное решение

$$F = a(t)z + b(t), \quad u = u(t),$$
$$v = u(t) + C\exp\left(\int a(t)dt\right), \quad w = w(t), \tag{98}$$

где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $u = u(t)$, $w = w(t)$ – произвольные функции, через которые выражаются входящие в (4) свободные функции

$$\alpha = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a'_t + uv + w^2 - aw + w'_t,$$
$$\beta = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a'_t + uv + w^2 + aw - w'_t, \tag{99}$$
$$\gamma = u'_t - au.$$

Подставим (98) в два последних уравнения системы (5), а затем сделаем преобразование зависимых переменных по формулам

$$U = \varphi_1(t)R(z,t) + \varphi_2(t)S(z,t) + \varphi_0(t),$$
$$V = \psi_1(t)R(z,t) + \psi_2(t)S(z,t) + \psi_0(t), \tag{100}$$

где пары функций $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ являются линейно независимыми (фундаментальными) решениями однородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = \left(\frac{a}{2} - w\right)\varphi - v\psi, \quad \psi'_t = \left(\frac{a}{2} + w\right)\psi - u\varphi, \tag{101}$$

а функции $\varphi_0 = \varphi_0(t)$, $\psi_0 = \psi_0(t)$ являются частными решениями неоднородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \left(\frac{a}{2} - w\right)\varphi_0 - v\psi_0 + \varepsilon,$$
$$\frac{d\psi_0}{dt} = \left(\frac{a}{2} + w\right)\psi_0 - u\varphi_0 + \delta. \tag{102}$$

В результате преобразования (100)–(102) последние два уравнения (5) приводятся к двум независимым линейным уравнениям одинакового вида

$$\frac{\partial R}{\partial t} + (az + b)\frac{\partial R}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 R}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + (az + b)\frac{\partial S}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}. \tag{103}$$

Преобразование независимых переменных [51, с. 128]

$$\tau = \int A^2(t)dt + C_1, \quad \zeta = A(t)z + \int A(t)b(t)dt + C_2,$$
$$A(t) = C_3\exp\left(\int a(t)dt\right), \tag{104}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные, приводит линейные уравнения с переменными коэффициентами (103) к линейным уравнениям теплопроводности

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = \nu\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial \tau} = \nu\frac{\partial^2 S}{\partial \zeta^2}. \tag{105}$$

Замечание 1. Формулы (5), (98)–(105) описывают точное решение уравнений Навье–Стокса, которое содержит десять (двенадцать) произвольных функций – шесть функций времени a, b, u, w, ε, δ и по две произвольные функции дают решения двух уравнений теплопроводности (105), если рассматривать их на полубесконечном интервале ζ (если уравнения (105) рассматривать на конечном отрезке ζ, то решение каждого из них дает по три произвольные функции).

Замечание 2. Для построения фундаментальной системы решений однородной системы (101) достаточно знать ее одно нетривиальное частное решение. Решение неоднородной системы (102) можно выразить через фундаментальные решения однородной системы (101).

КЛАССИФИКАЦИЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ

Течения, описываемые формулами (4), удобно трактовать как нелинейную суперпозицию поступательного (неоднородного) течения по оси z и линейного сдвигового течения специального вида. В окрестности точки $z = z_0$, лежащей на оси, компоненты скорости жидкости с учетом (4) можно представить в виде

$$V_k = H_k + G_{km}X_m;$$
$$H_1 = U, \quad H_2 = V, \quad H_3 = F,$$
$$G_{11} = -\frac{1}{2}F_z + w, \quad G_{12} = v, \quad G_{23} = u,$$
$$G_{22} = -\frac{1}{2}F_z - w, \tag{106}$$
$$G_{11} = G_{23} = G_{31} = G_{32} = 0, \quad G_{33} = F_z,$$
$$X_1 = x, \quad X_2 = y, \quad X_3 = z - z_0.$$

Здесь $k, m = 1, 2, 3$; G_{km} – компоненты матрицы сдвига; по повторяющемуся индексу m ведется суммирование; F_z – частная производная по z. Все величины в (106) берутся при $z = z_0$. Равенство нулю суммы диагональных элементов $G_{11} + G_{22} + G_{33} = 0$ является следствием несжимаемости жидкости.

Любая матрица $\|G_{km}\|$ может быть представлена в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц

Классификация осевых течений, описываемых формулами (4) при $U = V = 0$

Тип течения	Искомые функции	Функции, определяющие давление
Осесимметричное течение	$u = v = w = 0$	$\alpha = \beta$, $\varepsilon = \delta = \gamma = 0$
Комбинация осесимметричного течения и вращения вокруг оси z	$w = 0$, $v = -u$	$\alpha = \beta$, $\varepsilon = \delta = \gamma = 0$
Чисто деформационное течение (без вращения)	$u = v$	α, β, γ – любые
Общее осевое течение	$u \neq v$	α, β, γ – любые

$$\|G_{km}\| = \|E_{km}\| + \|\Omega_{km}\|,$$
$$E_{km} = E_{mk} = \frac{1}{2}(G_{km} + G_{mk}), \tag{107}$$
$$\Omega_{km} = -\Omega_{mk} = \frac{1}{2}(G_{km} - G_{mk}).$$

В свою очередь, симметричную матрицу $\|E_{km}\|$ (ее в данном случае можно отождествить с тензором скоростей деформации) путем поворота системы координат можно привести к диагональному виду с элементами E_1, E_2, E_3, которые являются корнями кубического уравнения для λ: $\det\|E_{km} - \lambda\delta_{km}\| = 0$, где δ_{km} – символ Кронекера.

Для данного течения (106) диагональные элементы, определяющие интенсивность растягивающего (сжимающего) движения вдоль соответствующих осей, вычисляются по формулам

$$E_{1,2} = -\frac{1}{2}F_z \pm \frac{1}{2}\sqrt{4w^2 + (u + v)^2}, \quad E_3 = F_z. \tag{108}$$

Разбиение матрицы коэффициентов сдвига $\|G_{km}\|$ на симметричную и антисимметричную части (107) соответствует представлению поля скоростей линейного сдвигового течения жидкости в виде суперпозиции линейного деформационного течения с коэффициентами растяжения по главным осям E_1, E_2, E_3 и вращения жидкости как твердого тела с угловой скоростью $\vec{\omega} = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21})$.

Для данного течения (106) имеем $\Omega_{32} = \Omega_{13} = 0$ и жидкость вращается вокруг оси z с угловой скоростью

$$\Omega_{21} = \frac{1}{2}(u - v). \tag{109}$$

Нетрудно показать, что формулы (108) и (109) остаются справедливыми для любой точки (x_0, y_0, z_0) рассматриваемого течения (4).

Анализ формул (108) и (109) позволяет выделить несколько характерных типов течений, указанных в классификационной таблице.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00553, № 08-08-00530, № 07-01-96003-р_урал_а, № 09-01-00343).

ОБОЗНАЧЕНИЯ

F – продольная компонента скорости жидкости;

P – давление, отнесенное к постоянной плотности жидкости;

V_1, V_2, V_3 – компоненты скорости жидкости,

t – время;

x, y, z – декартовы координаты;

u, v, w, U, V – искомые функции в системе (5);

a, b, c, m, n, k, A, B, C – постоянные или функциональные параметры решений системы (5);

p, q – функциональные параметры уравнений (48), (75);

f, g, G – искомые функции в уравнениях (62), (67), (75) и их следствиях;

α, β, γ, ε, δ – функциональные параметры системы (5);

ν – кинематическая вязкость жидкости;

λ, θ, ξ, ζ, ψ, ω – постоянные или функциональные параметры решений уравнения (48) и системы (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кутепов А.М., Полянин А.Д. и др.* Химическая гидродинамика. М.: Бюро Квантум, 1996. 336 с.
2. *Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A.* Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. London: Taylor & Francis, 2002. 406 p.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
4. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Физматгиз. 1963, ч. II, 727 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 733 с.
6. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 711 с.
7. *Пухначев В.В.* Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. № 6. С. 3–76.
8. *Drazin P.G. and Riley N.* The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 196 p.
9. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC Press, 2004. 840 p.
10. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom, A.P.* Nonclassical symmetry reductions of the two-dimensional incom-

pressible Navier–Stokes equations // Studies in Applied Mathematics. 1999. V. 103. P. 183–240.

11. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom, A.P.* Nonclassical symmetry reductions of the three-dimensional incompressible Navier–Stokes equations // J. of Physics A: Math. and General. 1998. V. 31. P. 7965–7980.
12. *Ibragimov N.H.* CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, V. 2. Boca Raton: CRC Press, 1995. 546 p.
13. *Lin C.C.* Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 391–395.
14. *Сидоров А.Ф.* О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикл. механика и техн. физика. 1989. № 2. С. 34–40.
15. *Мелешко С.В., Пухначев В.В.* Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье–Стокса // Прикл. мех. и техн. физика. 1999. № 2. С. 24–33.
16. *Meleshko S.V.* A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations // Nonlinear Dynamics. 2004. V. 36. № 1. P. 47–68.
17. *Hagen G.* Über die Bewegung des Wasser in engen zylindrischen Röhren // Pogg. Ann. 1839. V. 46. P. 423–442.
18. *Poiseuille J.* Récherches experimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes Rendus. 1840. V. 11. P. 961–967, P. 1041–1048; 1841. V. 12. P. 112–115.
19. *Couette M.* Ètudes sur le frottement des liquides // Ann. Chim. Phys. 1890. T. 21. 433–510.
20. *Stokes G.G.* On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // Camb. Philo. Trans. 1851. V. 9. P. 8–106.
21. *Ekman V.W.* On the influence of the earth's rotation on ocean currents // Ark. Mat. Astron. Fys. 1905. V. 2. P. 1–5.
22. *Berker R.A* new solution of the Navier-Stokes equations for the motion of a fluid contained between parallel plates rotating about the same axis // Arch. Mech. Stosow. 1979. V. 31. № 2. P. 265–280.
23. *Berker R.* An exact solution of the Navier-Stokes equation: the vortex with curvilinear axis // Int. J. Engn. Sci. 1981. V. 20. №. 2. P. 217–230.
24. *Lai C.-Y., Rajagopal K.R., Szeri A.Z.* Asymmetric flow between parallel rotating disks // J. Fluid Mech. 1984. V. 446. P. 203–225.
25. *Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье–Стокса с обобщенным разделением переменных // Доклады РАН. 2001. Т. 380. № 4. С. 491–496.
26. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Уравнения нестационарного пограничного слоя: Общие преобразования и точные решения // Теорет. основы хим. технологии. 2001. Т. 35. № 6. С. 563–573.
27. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder // Dinglers Polytech. J. 1911, V. 326, P. 321–324.
28. *Stuart J.T.* The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity // J. Aerosp. Sci. 1959. V. 26. P. 124–125.
29. *Tamada K.* Two-dimensional stagnation point flow impinging obliquely on a plane wall // J. Phys. Soc. Jap. 1979. V. 46. P. 310–311.
30. *Dorrepaal J. M.* An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation point flow in two dimensions // J. Fluid Mech. 1986. V. 163. P. 141–147.
31. *Wang C.Y.* Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations // Appl. Mech. Rew. 1989. V. 42. № 11. P. 269–282.
32. *Wang C.Y.* Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 159–177.
33. *Wang C.Y.* Exact solutions of the Navier-Stokes equations – the generalized Beltrami flows, review extension // Acta Mechanica. 1990. V. 81. P. 69–74.
34. *Crane L.J.* Flow past a stretching plate // ZAMP. 1970. V. 21. P. 645–647.
35. *Brady J.F., Acrivos A.* Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow // J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 127–150.
36. *Berman A.S.* Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. 1953. V. 24. P. 1232–1235.
37. *Terrill R.M., Shrestha G.M.* Laminar flow through parallel and uniformly porous walls of different permeability // ZAMP. 1965. V. 16. P. 470–482.
38. *Новиков П.А., Любин Л.Я.* Гидродинамика щелевых систем. Минск: Наука и техника. 1988. 344 с.
39. *von Karman T.* Uber laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921. V. 1. P. 233–252.
40. *Bödewadt U. T.* Die Drehstromung uber festem Grunde // ZAMM. 1940. V. 20. P. 241–253.
41. *Batchelor G.K.* Note on class of solutions of the Navir-Stokes equations representing steady rotationally – symmetric flow // Q. J. Mech. Appl. Math. 1951. V. 4. P. 29–41.
42. *Stewartson K.* On the flow between two rotating coaxial disks // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953. V. 5. P. 333–341.
43. *Holodniok M., Kubicek M., Hlavacek V.* Computation of the flow between two rotating coaxial disk: multiplicity of steady-state solutions // J. Fluid Mech. 1981.V. 108. P. 227–240.
44. *Brady J.F., Durlofsky L.* On rotating disk flow // J. Fluid Mech. 1987. V. 175. P. 363–394.
45. *Watson L.T., Wang C.Y.* Deceleration of a rotating disc in a viscous fluid // Phys. Fluids. 1979. V. 22. P. 2267–2269.
46. *Лаврентьева О.М.* Течение вязкой жидкости в слое на вращающейся плоскости // ПМТФ. 1989. № 5. С. 41–48.
47. *Agrawal H.L.* A new exact solution of the equations of viscous motion with axial symmetry // Q. J. Mech. Appl. Math. 1957. V. 10. P. 42–44.
48. *Terrill R.M., Cornish J.P.* Radial flow of a viscous, incompressible fluid between two stationary uniformly porous discs // ZAMP. 1973. V. 24. P. 676–688.
49. *Аристов С.Н.* Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Доклады РАН. 2001. Т. 377. № 4. С. 477–480.
50. *Aristov S. N., Gitman I. M.* Viscous flow between two moving parallel disks. Exact solutions and stability analysis // J. Fluid Mech. 2002. V. 464. P. 209–215.
51. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.