ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 427, № 1, с. 35–40

МЕХАНИКА

УДК 533+532+517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

© 2009 г. С. Н. Аристов, А. Д. Полянин

Представлено академиком А.Г. Куликовским 04.02.2009 г.

Поступило 10.02.2009 г.

Описаны новые классы точных решений трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, содержащие произвольные функции и произвольные параметры. Получены различные периодические и другие решения, которые выражаются через элементарные функции. Дана общая физическая интерпретация и классификация решений.

Автомодельные, инвариантные, частично инвариантные, с обобщенным разделением переменных и некоторые другие точные решения уравнений Навье–Стокса рассматривались, например, в [1–15]. Далее термин "точные решения" используется в соответствии с определением, данным в книге [14, с. 10].

РАССМАТРИВАЕМЫЙ КЛАСС ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Трехмерные нестационарные движения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial x} + V_2\frac{\partial V_1}{\partial y} + V_3\frac{\partial V_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_2}{\partial x} + V_2\frac{\partial V_2}{\partial y} + V_3\frac{\partial V_2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_3}{\partial x} + V_2\frac{\partial V_3}{\partial y} + V_3\frac{\partial V_3}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты, t – время, V_1, V_2, V_3 – компоненты скорости жидкости, P – давление, ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости. При записи уравнений (1)–(4) считалось, что массовые силы потенциальны и включены в давление.

Будем рассматривать течение вязкой несжимаемой жидкости, когда вектор скорости жидкости на оси z направлен вдоль этой оси. Вблизи оси z поперечные компоненты скорости малы и их можно разложить в ряд Тейлора по поперечным координатам x и y. Если в компонентах скорости ограничиться главными членами разложения по x и y, то после соответствующего анализа можно получить следующее представление для искомых величин:

$$V_1 = x\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} + w\right) + yv, \quad V_2 = xu - y\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} + w\right),$$
$$V_3 = F, \tag{5}$$
$$\frac{P}{\rho} = p_0 - \frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{1}{2}\beta y^2 - \gamma xy - \frac{1}{2}F^2 + \nu\frac{\partial F}{\partial z} - \int\frac{\partial F}{\partial t}dz,$$

где p_0, α, β, γ – произвольные функции времени t, задающие поперечное распределение давления, F, u, v, w – неизвестные функции, зависящие от координаты z и t.

Подстановка выражений (5) в уравнение Навье–Стокса (3) и уравнение неразрывности (4) приводит к тождествам, а уравнения (1) и (2) принимают вид $A_n x + B_n y = 0$ ($n = 1, 2$), где A_n и B_n пред-

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской Академии наук, Пермь

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва

ставляют собой некоторые дифференциальные выражения, зависящие от переменных z и t. Расщепление по переменным x и y приводит к четырем уравнениям $A_n = 0$, $B_n = 0$ ($n = 1, 2$), которые можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= -(\alpha + \beta) + \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + 2(uv + w^2), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial F}{\partial z} = \gamma + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + F\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial F}{\partial z} = \gamma + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + F\frac{\partial w}{\partial z} - w\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\alpha - \beta}{2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Важно подчеркнуть, что решение (5) в силу уравнений (6)–(9) точно удовлетворяет уравнениям движения вязкой жидкости (1)–(4).

При $\gamma = 0$ структура точного решения (5) и система (6)–(9) из других соображений были получены в работе [12] путем исследования одного класса частично инвариантных решений (случай $\alpha = \beta = \gamma = 0$ рассматривался в [7]). В [12] проведена групповая классификация системы (6)–(9) при $\gamma = 0$, которая привела к выделению двух видов зависимостей определяющих функций от времени: 1) α, β постоянны, 2) α, β пропорциональны t^{-2} (этим зависимостям соответствуют точные решения уравнений Навье–Стокса достаточно простой структуры).

В данной работе получены новые классы точных решений системы (6)–(9), когда определяющие функции α, β, γ содержат функциональный произвол. Основная идея последующего анализа состоит в том, чтобы из системы (6)–(9) выделить одно изолированное уравнение для продольной компоненты скорости $V_3 = F$.

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ (6)–(9) К ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим сначала специальный класс точных решений, который описывается одним уравнением.

В уравнениях (6)–(9) положим

$$u = m\frac{\partial F}{\partial z} + A, \quad v = n\frac{\partial F}{\partial z} + B, \quad w = k\frac{\partial F}{\partial z} + C, \tag{10}$$

где m, n, k, A, B, C – искомые функции времени t. Потребуем, чтобы четыре уравнения (6)–(9) совпали после подстановки в них (10). В результате для определения искомых функций получим нелинейную систему, состоящую из одного алгебраического уравнения и шести обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$mn + k^2 = \frac{1}{4}, \tag{11}$$

$$\frac{A - m'}{m} = \frac{B - n'}{n} = \frac{C - k'}{k} = 2(An + Bm + 2Ck), \tag{12}$$

$$\frac{\gamma - A'}{m} = \frac{\gamma - B'}{n} = \frac{\alpha - \beta - 2C'}{2k} =$$

$$= -\alpha - \beta + 2AB + 2C^2. \tag{13}$$

Это система содержит семь уравнений для девяти функций – шести функций m, n, k, A, B, C из (10) и трех функций α, β, γ из (6)–(9) (в данном случае они также считаются искомыми). Можно показать, что последнее уравнение в (12) является следствием трех других уравнений (11), (12). Поэтому три искомые функции в системе (11), (13), вообще говоря, можно выбрать произвольно.

Система (6)–(9) с учетом (10)–(13) сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + q\frac{\partial F}{\partial z} + p, \tag{14}$$

где функции $p = p(t)$ и $q = q(t)$ определяются соотношениями

$$p = \frac{\gamma - A'}{m}, \quad q = \frac{A - m'}{m}. \tag{15}$$

Общее свойство уравнения (14): если $F_0(z, t)$ – некоторое его решение, то функция

$$F = F_0(z + \psi(t), t) - \psi'_t(t), \tag{16}$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция, также будет решением уравнения (14).

При построении решений системы (11)–(13) следует различать два случая.

С л у ч а й $m = n$. В этом случае общее решение системы (11)–(13) можно представить в виде

$$\begin{gathered} m = n = \frac{1}{2}\sin\varphi, \quad k = \frac{1}{2}\cos\varphi, \\ A = B = \frac{1}{2}(q\sin\varphi + \varphi'_t\cos\varphi), \\ C = \frac{1}{2}(q\cos\varphi - \varphi'_t\sin\varphi), \\ \alpha = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}(\varphi'_t)^2 - \frac{1}{2}p(1 - \cos\varphi) + C'_t, \\ \beta = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}(\varphi'_t)^2 - \frac{1}{2}p(1 + \cos\varphi) - C'_t, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}p\sin\varphi + A'_t,$$

где $p = p(t)$, $q = q(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ – произвольные функции. Для удобства свободные функции p и q в (17) выбраны так, что в результате преобразования (10), (17) система (6)–(9) приводится к одному уравнению (14) с этими же функциями $p = p(t)$ и $q = q(t)$.

Таким образом доказано важное утверждение. Любое решение уравнения (14) для любых функций $p = p(t)$ и $q = q(t)$ порождает точное решение уравнений Навье–Стокса (1)–(4). Это решение описывается функцией $F = F(z, t)$ и формулами (5), (10), (17).

С л у ч а й $m \neq n$. В этом случае общее решение системы (11)–(13) можно получить следующим образом. Функции $m = m(t)$, $k = k(t)$, $q = q(t)$ задаются произвольно при условии $m^2 + k^2 \neq \frac{1}{4}$. Остальные функции, входящие в систему (11)–(13) и уравнение (14), вычисляются последовательно по формулам

$$n = \frac{1-4k^2}{4m},$$

$$A = mq + m'_t, \quad B = nq + n'_t, \quad C = kq + k'_t,$$

$$p = \frac{A'_t - B'_t}{n-m}, \quad \alpha = AB + C^2 + C'_t - \frac{1}{2}p(1-2k), \tag{18}$$

$$\beta = AB + C^2 - C'_t - \frac{1}{2}p(1+2k), \quad \gamma = pm + A'_t.$$

В данном случае коэффициент $p = p(t)$ в уравнении (14) определяется через функции $m = m(t)$, $k = k(t)$ и $q = q(t)$ и их производные (а не задается произвольно, как было в случае $m = n$). Попытка задать непосредственно зависимость $p = p(t)$ вместо задания функции m (или k) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции m (или k) с произвольной функцией $q = q(t)$.

Рассмотрим, как надо выбрать функцию $q = q(t)$, чтобы выполнялось тождество $p \equiv 0$. Из выражения для p в (18) имеем $A = B + s_0$, где s_0 – произвольная постоянная. Отсюда, учитывая формулы (18) для функций A, B, n, находим функцию

$$q = \frac{4s_0m - 8(mm'_t + kk'_t)}{4(m^2+k^2)-1} + \frac{m'_t}{m} \quad \text{при} \quad p = 0. \tag{19}$$

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (14) ПРИ РАЗЛИЧНЫХ $p = p(t)$ И $q = q(t)$

1°. Периодические решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$F = a(t)\sin(\sigma z + B),$$

$$a(t) = C\exp[-\nu\sigma^2 t + \int q(t)dt], \tag{20}$$

$$p = -\sigma^2 a^2(t), \quad q = q(t) \text{ – произвольная функция},$$

где B, C, σ – произвольные постоянные. Положив в (20) $q(t) = \nu\sigma^2 + \varphi'_t(t)$, где $\varphi(t)$ – периодическая функция, получим решение, периодическое по обоим аргументам z и t.

П р и м е р. Рассмотрим стационарный случай. В формулах (17), (20) положим

$$\varphi = 0, \quad a = -\frac{a_1+a_2}{\sigma}, \quad q = \nu\sigma^2 = 2a_1,$$

$$p = -a^2\sigma^2, \quad \sigma = \left(\frac{2a_1}{\nu}\right)^{1/2}.$$

В результате с помощью выражений (5), (10) получим решение

$$V_1 = a_1x, \quad V_2 = [(a_1+a_2)\cos(\sigma z) - a_1]y,$$

$$V_3 = -\frac{a_1+a_2}{\sigma}\sin(\sigma z),$$

которое описывает трехмерное течение слоя жидкости между двумя плоскими упругими пленками $\left(\text{положение пленок определяется значениями } z = 0 \text{ и } z = \frac{2\pi}{\sigma}\right)$, поверхности которых растягиваются по закону $V_1 = a_1x$, $V_2 = a_2y$.

2°. Решения с обобщенным разделением переменных экспоненциального вида по z:

$$F = a(t)e^{-\sigma z} + b(t), \quad p = 0,$$

$$q = \frac{a'_t}{a} - \sigma b - \sigma^2\nu, \tag{21}$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$ – произвольные функции. Выбрав в качестве $a(t)$ и $b(t)$ периодические функции, получим периодическое решение по времени.

Формулы (20) и (21) вместе с соотношениями (5), (10), (17) определяют два класса решений уравнений Навье–Стокса, зависящих от нескольких произвольных функций.

3°. Решение (21) можно представить в следующем виде:

$$F = a_0\exp[-\sigma z + \sigma^2\nu t + \int(q+\sigma b)dt] + b(t),$$

$$p = 0, \tag{22}$$

где $b = b(t)$ и $q = q(t)$ – произвольные функции, a_0 – произвольная постоянная. Формула (22) с помощью соотношений (5), (18) при $p = 0$ и (19) определяет новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса.

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$F = a(t)(C_1e^{\sigma z} + C_2e^{-\sigma z}), \quad p = 4C_1C_2\sigma^2a^2(t),$$

$$q = \frac{a'_t}{a} - \sigma^2\nu,$$

где $a = a(t)$ – произвольная функция, C_1, C_2, σ – произвольные постоянные.

5°. Монотонное решение типа бегущей волны:

$$F = -6\nu\sigma\,\mathrm{th}[\sigma(z - \lambda t) + B] + \lambda,$$

$$p = 0, \quad q = 8\nu\sigma^2.$$

6°. Точное решение с функциональным разделением переменных:

$$F = \frac{a(t)}{\lambda(t)}\exp[-\lambda(t)z] + b(t) + c(t)z,$$

где функции $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $\lambda = \lambda(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\lambda'_t = -c\lambda, \quad a'_t = (\nu\lambda^2 + q + 2c + b\lambda)a,$$

$$c'_t = c^2 + qc + p.$$

Здесь три из шести функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\lambda(t)$, $p(t)$, $q(t)$ можно задать произвольно.

7°. Точное решение с функциональным разделением переменных:

$$F = \omega(t)z + \frac{\xi(t)}{\theta(t)}\sin[\theta(t)z + a], \tag{23}$$

где a – произвольная постоянная, а функции $\omega = \omega(t)$, $\xi = \xi(t)$, $\theta = \theta(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\theta'_t = -\omega\theta, \quad \omega'_t = \omega^2 + q(t)\omega + p(t) + \xi^2, \quad \xi'_t = [2\omega - \nu\theta^2 + q(t)]\xi. \tag{24}$$

В этой системе можно считать заданными (произвольным образом) функции $\theta(t)$ и $\xi(t)$. Тогда функции $\omega(t)$, $p(t)$, $q(t)$ определяются элементарно (без квадратур). Периодическим функциям $\theta(t)$ и $\xi(t)$ соответствует периодическое решение (23).

8°. Точное решение с функциональным разделением переменных:

$$F = \omega(t)z + \frac{\xi(t)}{\theta(t)}[C_1e^{\theta(t)z} + C_2e^{-\theta(t)z}], \tag{25}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, а функции $\omega = \omega(t)$, $\xi = \xi(t)$, $\theta = \theta(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\theta'_t = -\omega\theta, \quad \omega'_t = \omega^2 + q(t)\omega + p(t) - 4C_1C_2\xi^2, \quad \xi'_t = [2\omega + \nu\theta^2 + q(t)]\xi. \tag{26}$$

З а м е ч а н и е. Другие точные решения уравнения (14) при $q = 0$ см. в [8, 13, 15].

4. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ (6)–(9) К ДВУМ УРАВНЕНИЯМ

Опишем два случая сведения системы (6)–(9) к одному изолированному нелинейному уравнению для продольной скорости F и второму уравнению для определения новой вспомогательной функции.

П е р в ы й с л у ч а й. Полагая

$$u = a^2G, \quad v = -b^2G, \quad w = abG, \quad \alpha = \beta, \quad \gamma = 0, \tag{27}$$

где a, b – произвольные постоянные, сведем систему (6)–(9) к изолированному уравнению для продольной скорости F и дополнительному уравнению для функции $G = G(z, t)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = -2\alpha + \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + F\frac{\partial G}{\partial z} - G\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}. \tag{29}$$

В т о р о й с л у ч а й. В уравнениях (6)–(9) положим

$$\begin{gathered} u = \frac{1}{2}\sin\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial z} + q\right) + a^2\Theta, \\ v = \frac{1}{2}\sin\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial z} + q\right) - b^2\Theta, \\ w = \frac{1}{2}\cos\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial z} + q\right) + ab\Theta, \\ \alpha = \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}q'_t\cos\varphi, \\ \beta = \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p(1 + \cos\varphi) - \frac{1}{2}q'_t\cos\varphi, \\ \gamma = \frac{1}{2}p\sin\varphi + \frac{1}{2}q'_t\sin\varphi, \end{gathered} \tag{30}$$

где $p = p(t)$, $q = q(t)$ – произвольные функции, a, b – произвольные постоянные, $\Theta = \Theta(z, t)$ – искомая функция, φ – константа, определяемая из трансцендентного уравнения

$$(a^2 - b^2)\sin\varphi + 2ab\cos\varphi = 0. \tag{31}$$

В результате система (6)–(9) сводится к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + q\frac{\partial F}{\partial z} + p, \qquad (32)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + F\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}. \qquad (33)$$

Нелинейное уравнение (32) для функции F совпадает с уравнением (14) и может рассматриваться независимо (его некоторые точные решения были описаны ранее), а уравнение (33) линейно относительно искомой функции Θ.

Для стационарных решений уравнений (32) и (28) (при постоянных p, q и α) нестационарные уравнения (33) и (29) являются линейными уравнениями с разделяющимися переменными, решения которых можно искать с помощью преобразования Лапласа по времени.

Уравнение (32) (и уравнение (28)) допускает очевидное вырожденное решение $F = a(t)z + b(t)$; в этом случае соответствующее уравнение (33) (и уравнение (29)) можно свести к линейному уравнению теплопроводности.

Система (28)–(29) для произвольной функции $\alpha = \alpha(t)$ имеет решение вида

$$F = az^2 + b(t)z + \frac{1}{4a}[b^2(t) - 2b_t'(t) - 4\alpha(t)],$$

$$w = A(t)z^2 + B(t)z + C(t),$$

где a – произвольная постоянная ($a \neq 0$), $b(t)$ – произвольная функция, а функции $A = A(t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая здесь не приводится.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ

Любые течения жидкости, имеющие две плоскости симметрии, допускают представление вида (5) в окрестности линии пересечения этих плоскостей (в используемых обозначениях линия пересечения плоскостей задает ось z). К таким течениям относятся осесимметричные течения, комбинации осесимметричных течений с вращением вокруг оси z (в частности, течения кармановского типа), плоские течения, симметричные относительно прямой линии, течения в прямолинейных непроницаемых и пористых трубах с эллиптическим и прямоугольным сечением, струи жидкости, вытекающие из отверстий эллиптической и прямоугольной формы, и т.д. (см. также [10, 11]).

Осевые течения, описываемые формулами (5), удобно трактовать как нелинейную суперпозицию поступательного (неоднородного) течения по си z и линейного сдвигового течения специального вида. В окрестности точки $z = z_0$, лежащей на оси, компоненты скорости жидкости с учетом (5) можно представить в виде

$$V_k = F\delta_{k3} + G_{km}X_m,$$

$$G_{11} = -\frac{1}{2}F_z + w, \quad G_{12} = v, \quad G_{21} = u,$$

$$G_{22} = -\frac{1}{2}F_z - w, \qquad (34)$$

$$G_{13} = G_{23} = G_{31} = G_{32} = 0, \quad G_{33} = F_z,$$

$$X_1 = x, \quad X_2 = y, \quad X_3 = z - z_0.$$

Здесь $k, m = 1, 2, 3$; G_{km} – компоненты матрицы сдвига; по повторяющемуся индексу m ведется суммирование; δ_{km} – символ Кронекера; F_z – частная производная по z. Все величины в (34) берутся при $z = z_0$. Равенство нулю суммы диагональных элементов $G_{11} + G_{22} + G_{33} = 0$ является следствием несжимаемости жидкости.

Любая матрица $\|G_{km}\|$ может быть представлена в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц

$$\|G_{km}\| = \|E_{km}\| + \|\Omega_{km}\|,$$

$$E_{km} = E_{mk} = \frac{1}{2}(G_{km} + G_{mk}), \qquad (35)$$

$$\Omega_{km} = -\Omega_{mk} = \frac{1}{2}(G_{km} - G_{mk}).$$

В свою очередь симметричную матрицу $\|E_{km}\|$ (ее в данном случае можно отождествить с тензором скоростей деформации) путем поворота системы координат можно привести к диагональному виду с элементами E_1, E_2, E_3, которые являются корнями кубического уравнения для λ: $\det\|E_{km} - \lambda\delta_{km}\| = 0$.

Для данного течения (34) диагональные элементы, определяющие интенсивность растягивающего (сжимающего) движения вдоль соответствующих осей, вычисляются по формулам

$$E_{1,2} = -\frac{1}{2}F_z \pm \frac{1}{2}\sqrt{4w^2 + (u+v)^2}, \quad E_3 = F_z. \qquad (36)$$

Разбиение матрицы коэффициентов сдвига $\|G_{km}\|$ на симметричную и антисимметричную части (35) соответствует представлению поля скоростей линейного сдвигового течения жидкости в виде суперпозиции линейного деформационного течения с коэффициентами растяжения по главным осям E_1, E_2, E_3 и вращения жидкости как твердого тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21})$.

Таблица 1. Классификация осевых течений, описываемых формулами (5)

Тип течения	Искомые функции	Функции, входящие в давление
Осесимметричное	$u = v = w = 0$	$\alpha = \beta$, $\gamma = 0$
Комбинация осесимметричного течения и вращения вокруг оси z	$w = 0$, $v = -u$	$\alpha = \beta$, $\gamma = 0$
Чисто деформационное (без вращения)	$u = v$	α, β, γ – любые
Общее осевое	$u \neq v$	α, β, γ – любые

Для данного течения (34) имеем $\Omega_{32} = \Omega_{13} = 0$ и жидкость вращается вокруг оси z с угловой скоростью

$$\Omega_{21} = \frac{1}{2}(u - v). \tag{37}$$

Нетрудно показать, что формулы (36) и (37) остаются справедливыми для любой точки (x_0, y_0, z_0) рассматриваемого течения (5).

Анализ формул (36), (37) позволяет выделить несколько характерных типов течений, указанных в классификационной табл. 1.

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Пусть $V_1(x, y, z, t)$, $V_2(x, y, z, t)$, $V_3(x, y, z, t)$, $P(x, y, z, t)$ – некоторое решение уравнений Навье–Стокса (1)–(4). Тогда набор функций

$$\begin{aligned}
\bar{V}_1 &= V_1(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t) + x_0', \\
\bar{V}_2 &= V_2(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t) + y_0', \\
\bar{V}_3 &= V_3(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t) + z_0', \\
\bar{P} &= P(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t) - \\
&\quad - \rho(x_0''x + y_0''y + z_0''z),
\end{aligned} \tag{38}$$

где $x_0 = x_0(t)$, $y_0 = y_0(t)$, $z_0 = z_0(t)$ – произвольные функции (штрихи обозначают производные по t), также будет давать решение уравнений (1)–(4) [4, 15]. Комбинация формул (5) и (38) при $z_0 = 0$ определяет точное решение уравнений Навье–Стокса, которое можно трактовать как обобщенное осевое течение с осью z, движущейся по плоскости x, y по закону $x_0 = x_0(t)$, $y_0 = y_0(t)$. Указанное решение можно использовать для математического моделирования разрушительных атмосферных явлений типа смерчей и торнадо.

Авторы благодарят А.Н. Осипцова за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01–08–00553, 08–08–00530 и 07–01–96003-р_урал_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пухначев В.В.* // ПМТФ. 1960. № 1. С. 83–90.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
3. *Fushchich W.I., Shtelen W.M., Slavutsky S.L.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1991. V. 24. P. 971–984.
4. *Ibragimov N.H.* CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 1995. V. 2.
5. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Basson A.P.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V. 31. P. 7965–7980.
6. *Ludlow D.K., Clarkson P.A., Basson A.P.* // Stud. Appl. Math. 1999. V. 103. P. 183–240.
7. *Мелешко С.В., Пухначев В.В.* // ПМТФ. 1999. № 2. С. 24–33.
8. *Полянин А.Д.* // ДАН. 2001. Т. 380. № 4. С. 491–496.
9. *Aristov S.N., Gitman I.M.* // J. Fluid Mech. 2002. V. 464. P. 209–215.
10. *Hewitt R.E., Duck P.W., Al-Azhari M.* // Fluid Dyn. Res. 2002. V. 33. P. 17–39.
11. *Dauenhauer E.C., Majdalani J.* // Phys. Fluids. 2003. V. 15. P. 1485–1495.
12. *Meleshko S.V.* // Nonlin. Dyn. 2004. V. 36. № 1. P. 47–68.
13. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton: Chapman & Hall; CRC Press, 2004.
14. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
15. *Пухначев В.В.* // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 1. С. 6–76.