А. Д. Полянин, Доклады РАН, 2004, т. 398, № 1, с. 33–37

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ (НЕИНВАРИАНТНЫЕ) РЕШЕНИЯ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ И АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Описан широкий класс нелинейных уравнений математической физики, которые не инвариантны относительно преобразований сдвига независимых переменных, но имеют точные решения типа бегущей волны. Получено точное решение нелинейных уравнений конвективного тепло- и массопереноса в осесимметричном сдвиговом потоке при произвольной зависимости главных коэффициентов теплопроводности от температуры. Описан широкий класс нелинейных уравнений математической физики, которые не инвариантны относительно преобразований растяжения, но имеют автомодельные решения.

1. Введение

Решения типа бегущей волны и автомодельные решения являются наиболее простыми и наиболее распространенннными классами точных решений нелинейных уравнений математической физики. Эти решения часто встречаются в различных областях физики, механики, теории управления и др. [1–11]. Существование решений типа бегущей волны и автомодельных решений обычно связывают с инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований сдвига и преобразований растяжения (сжатия). Далее будет показано, что существуют уравнения не инвариантные относительно указанных преобразований, но имеющие решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Эти решения не могут быть получены методами классического группового анализа дифференциальных уравнений [12–14].

Для простоты будем рассматривать дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными x, y и зависимой переменной w (любая из независимых переменных может играть роль времени).

2. Классические решения типа бегущей волны

Решениями типа бегущей волны называются решения вида [1, 2, 5, 11]

$$w(x,y) = W(z), \quad z = k_1 x + k_2 y, \tag{1}$$

где величина $-k_2/k_1$ играет роль скорости распространения волны (если x играет роль пространственной переменной, а y — роль времени).

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой выражения (1) в исходное уравнение с учетом равенств $w_x = k_1 W'$, $w_y = k_2 W'$ и т. д. (штрих обозначает производную по z).

Решения типа бегущей волны допускают уравнения, которые не зависят явно независимых переменных:

$$F\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), получим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $W(z)$:

$$F\big(W, k_1 W', k_2 W', k_1^2 W'', k_1 k_2 W'', k_2^2 W''\big) = 0,$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Важно отметить, что уравнения вида (2) инвариантны (т. е. сохраняют вид) относительно преобразований сдвига по независимым переменным:

$$x = \bar{x} + C_1, \quad y = \bar{y} + C_2, \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Свойство инвариантности конкретных уравнений относительно преобразований сдвига (3) неразрывно связано с существованием у этих уравнений решений типа бегущей волны (из первого следует второе).

Решение типа бегущей волны (1) будем называть классическим (инвариантным), если рассматриваемое уравнение допускает преобразование сдвига (3).

3. Неклассические решения типа бегущей волны

Условие инвариантности уравнения относительно преобразований (3) не является необходимым условием для существования решений типа бегущий волны (1). Решение типа бегущей волны (1) будем называть неклассическим (неинвариантным), если рассматриваемое уравнение не допускает преобразование сдвига (3).

П р и м е р 1. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$ax\frac{\partial w}{\partial x}+ay\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big]+\frac{\partial}{\partial y}\Big[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\Big]-h(w), \tag{4}$$

где $f(w)$, $g(w)$, $h(w)$ — произвольные функции. Прямой проверкой можно убедится, что уравнение (4) не допускает преобразований сдвига (2), но имеет точное решение типа бегущей волны (1), которое описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$azW'=[\varphi(W)W']'-h(W),\qquad \varphi(W)=k_1^2f(W)+k_2^2g(W).$$

Важно отметить, что уравнение (4) описывает конвективный тепло- и массоперенос с тепловыделением в осесимметричном сдвиговом потоке (с компонентами скорости жидкости $v_x=ax$, $v_y=ay$, $v_z=-2az$, которые удовлетворяют полным уравнениям Навье — Стокса) при произвольной зависимости главных коэффициентов теплопроводности $f(w)$ и $g(w)$ от температуры $w=w(x,y)$.

П р и м е р 2. Уравнение (4) является частным случаем более широкого класса уравнений

$$\begin{gathered}F\Big(w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\\ x\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},xw_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+yw_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)=0\end{gathered} \tag{5}$$

которые не допускают преобразований сдвига (3), но имеют точные решения типа бегущей волны (1). Функция $W(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(W,k_1W',k_2W',zW',k_1^2W'',k_1k_2W'',k_2^2W'',k_1zW'',k_2zW'',z^2W'',k_1k_2zW''\big)=0.$$

4. Классические автомодельные решения

Автомодельными называются решения вида [2, 3, 6]

$$w(x,y)=x^\alpha U(\zeta),\quad \zeta=yx^\beta. \tag{6}$$

Профили этих решений в разные моменты времени получаются одно из другого преобразованием подобия (преобразованиями типа растяжения или сжатия).

Автомодельные решения существуют, если растяжение независимых и зависимой переменных по правилу

$$x=C\bar x,\quad y=C^k\bar y,\quad w=C^m\bar w,\qquad \text{где } C\neq 0 \text{ — произвольная постоянная,} \tag{7}$$

при соответствующем выборе k и m эквивалентно тождественному преобразованию, т. е. исходное уравнение

$$F\Big(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)=0$$

в результате преобразования (7) переходит в точно такое же уравнение

$$F\Big(\bar x,\bar y,\bar w,\frac{\partial \bar w}{\partial \bar x},\frac{\partial \bar w}{\partial \bar y},\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x^2},\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x\partial \bar y},\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar y^2}\Big)=0.$$

На практике поиск автомодельных решений проводится по указанному выше критерию существования — если k и m в (7) найдены, то автомодельные переменные имеют вид (6), где

$$\alpha=m,\quad \beta=-k.$$

Эти равенства следуют из условия, что преобразование растяжения-сжатия (7) должно сохранять вид переменных (6):

$$w=x^\alpha U(\zeta),\ \ \zeta=yx^\beta\quad\Longrightarrow\quad \bar w=\bar x^\alpha U(\bar\zeta),\ \ \bar\zeta=\bar y\bar x^\beta.$$

Метод построения автомодельных решений, основанный на использовании преобразований растяжения-сжатия типа (7), носит название метод подобия [2, 3, 7, 9, 12].

Условие существования преобразования (7), сохраняющего вид рассматриваемого уравнения, является достаточным для существования автомодельного решения.

Автомодельное решение (6) будем называть классическим (инвариантным), если рассматриваемое уравнение допускает преобразование растяжения (7).

5. Неклассические автомодельные решения

Условие инвариантности уравнения относительно преобразований (7) не является необходимым условием для существования автомодельных решений вида (6). Автомодельное решение (6) будем называть неклассическим (неинвариантным), если рассматриваемое уравнение не допускает преобразования растяжения (7).

П р и м е р 3. Уравнение

$$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=(bx^2+ay^2)f(w) \tag{8}$$

имеет автомодельные решение

$$w=w(z),\quad z=xy \qquad\Longrightarrow\quad w''-f(w)=0,$$

но не допускает преобразований вида (7).

Замечание 1. В уравнении (8) a и b могут быть произвольными функциями x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, …

Замечание 2. При $a=\text{const}$, $b=\text{const}$ переход от x, y к новым независимым переменным

$$z=xy,\quad \zeta=\frac{1}{2\sqrt{|ab|}}(bx^2-ay^2)$$

приводит (8) к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\operatorname{sign}(ab)\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}=f(w),$$

которое допускает точное решение типа бегущей волны и в зависимости от знака ab является стационарным уравнением теплопроводности с нелинейным источником (при $ab>0$) или нелинейным уравнением Клейна — Гордона (при $ab<0$).

П р и м е р 4. Широкий класс уравнений

$$F\Bigl(w,x\frac{\partial w}{\partial x},y\frac{\partial w}{\partial y},\frac{a_1w_x^n+b_1w_y^m}{a_1y^n+b_1x^m},\frac{a_2w_{xx}^p+b_2w_{yy}^q}{a_2y^{2p}+b_2x^{2q}},\frac{a_3w_{xx}+b_3w_{yy}}{a_3w_x^2+b_3w_y^2}\Bigr)=0$$

где a_k, b_k — произвольные функции независимых и зависимой переменных и ее производных, также не допускает преобразований вида (7), но имеет автомодельные решения вида $w=w(z)$, $z=xy$.

Опишем два простых метода построения уравнений, допускающих неинвариантные автомодельные решения.

Первый метод. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=F\Bigl(\xi,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial w}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta},\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Bigr), \tag{9}$$

которое допускает простое частное решение вида $u=u(\xi)$, где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{\xi\xi}=F(\xi,u,u'_\xi,0,0,0). \tag{10}$$

(Считается, что для этого уравнения выполнены условия существования решения, в остальном выбор функции F достаточно произволен.)

В уравнении (9) сделаем невырожденное преобразование

$$\xi=x^\alpha y,\quad \eta=\varphi(x,y),\quad u=x^\beta w(x,y),$$

где α и β — некоторые числа, а $\varphi(x,y)$ — некоторая достаточно гладкая функция. В результате получим

$$\Phi\Bigl(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr)=0. \tag{11}$$

Уравнение (11) в общем случае не будет инвариантным относительно преобразований растяжения вида (7). Однако по построению оно будет иметь автомодельное решение вида

$$w=x^{-\beta}u(\xi),\quad \xi=x^\alpha y,$$

где функция $u(\xi)$ описывается уравнением (10).

Замечание 3. В правой части уравнения (9) вместо производных $\frac{\partial w}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ могут стоять соответственно величины $\psi_1(\xi,\eta)\frac{\partial w}{\partial \eta}$, $\psi_2(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, $\psi_3(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, где $\psi_n(\xi,\eta)$ — произвольные функции.

Второй метод. Пусть вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)$$

допускает инвариантное автомодельное решение, соответствующее инфинитизимальному оператору $X = ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y} + cw\frac{\partial}{\partial w}$ [13–15]. Тогда более сложное уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + \\ &+ G\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, L[w]\Big) - \\ &- G\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 0\Big),\end{aligned}$$

где $L[w] = ax\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} - cw$ и $G(x, y, w, \ldots)$ — произвольная функция своих аргументов, будет допускать тоже самое автомодельное решение, которое в общем случае будет неинвариантным.

6. Классические обобщенно-автомодельные решения

Обобщенно-автомодельное решения имеют вид

$$w(x,y) = \varphi(x)u(z), \quad z = \psi(x)y \tag{12}$$

(x и y можно поменять местами). Формула (12) включает в себя как частный случай автомодельные решения (6). Процедура поиска классических обобщенно-автомодельных решений состоит в следующем: после подстановки выражения (12) в рассматриваемое уравнение функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ выбираются таким образом, чтобы функция $u(z)$ удовлетворяла *одному обыкновенному дифференциальному уравнению* (порядок которого совпадает с порядком исходного уравнения с частными производными).

П р и м е р 5. Уравнение ламинарного гидродинамического безградиентного пограничного слоя для функции тока имеет вид [10]

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \tag{13}$$

Процедура, описанная выше, дает два решения вида (12):

$$\begin{aligned} &w = x^{\lambda+1}u(z), \quad z = x^\lambda y \quad \Longrightarrow \quad (2\lambda+1)(u')^2 - (\lambda+1)uu'' = \nu u'''; \\ &w = e^x u(z), \qquad z = e^x y \quad \Longrightarrow \quad 2(u')^2 - uu'' = \nu u''', \end{aligned}$$

где λ — произвольная постоянная (первое решение является автомодельным). Указанные инвариантные решения были получены в [15] с помощью группового анализа.

7. Неклассические обобщенно-автомодельные решения

Процедура поиска неклассических обобщенно-автомодельных решений также основана на поиске решения в виде (12), однако функция $u(z)$ в этом случае удовлетворяет сразу *нескольким обыкновенным дифференциальным уравнениям*.

П р и м е р 6. Уравнение (13) имеет неинвариантное точное решение [10]

$$w(x,y) = xf(y) + g(y), \tag{14}$$

где функции $f = f(y)$ и $g = g(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} (f')^2 - ff'' &= \nu f''', \\ f'g' - fg'' &= \nu g'''. \end{aligned}$$

Решение (14) нельзя получить с помощью процедуры, описанной в разд. 6. Однако его можно записать виде обобщенно-автомодельного решения

$$w(x,y) = g(y)U(\xi), \quad \xi = \psi(y)x, \quad \text{где} \quad \psi(y) = f(y)/g(y).$$

Функция $U(\xi) = \xi + 1$ в данном случае определяется из переопределенной системы уравнений.

Замечание 4. Решение (14) является частным случаем решений с обобщенным и функциональным разделением переменных. Методы построения подобных решений описаны в [10, 11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-02-17281).

Список литературы

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
2. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. М.: Гидрометеоиздат, 1978.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.
4. Черноусько Ф. Л. Автомодельные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции случайных возмущений. // Прикл. матем. и механика, 1971, т. 35, N 2, с. 333–342.
5. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
6. Фаддеев Л. Д. (ред.). Математическая физика: Энциклопедия. М.: Большая российская энциклопедия, 1998.
7. Bluman G. W., Cole, J. D. Similarity Methods for Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1974.
8. Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1989.
9. Ibragimov N. H. (editor). CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
10. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
11. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
12. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
13. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
14. Klimov D. M., Zhuravlev V. Ph. Group-Theoretic Methods in Mechanics and Applied Mathematics. London: Taylor & Francis, 2002.
15. Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. // Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1961, т. 1, N 2, с. 280–294.