А.Д. Полянин, И.К. Шингарева, Неклассические симметрии и редукции алгебраических уравнений и систем уравнений,
Математическое образование, 2024, № 2 (110), с. 22–34.

Неклассические симметрии и редукции алгебраических уравнений и систем уравнений

А. Д. Полянин, И. К. Шингарева

Рассматриваются неклассические симметрии и редукции алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Описаны преобразования, сохраняющие вид некоторых алгебраических уравнений, а также преобразования, понижающие порядок этих уравнений. Показано, что отдельные алгебраические уравнения, имеющие "скрытые" симметрии, путем введения новой дополнительной переменной могут сводиться к классическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Установлено, что симметрические системы алгебраических уравнений смешанного типа, состоящие из симметрических и антисимметрических многочленов, можно преобразовать к более простым системам. Излагается метод решения неклассических симметрических систем двух алгебраических уравнений, которые меняются местами при перестановке неизвестных. Исследуются алгебраические уравнения, содержащие вторую итерацию заданного многочлена, которые сводятся к неклассическим симметрическим системам уравнений. Приведены примеры нетривиальных алгебраических уравнений шестой и девятой степени, содержащих свободные параметры, которые допускают решения в радикалах. Описаны иррациональные уравнения, которые путем введения двух новых переменных сводятся к симметрическим системам алгебраических уравнений.

1. Введение

Алгебраическим уравнением n-й степени называется уравнение с одним неизвестным x вида

$$P_n(x) = 0, \tag{1}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

Решением (корнем) уравнения (1) называется число x_*, удовлетворяющее условию $P_n(x_*) = 0$. Решить уравнение (1) означает найти все его решения.

На протяжении столетий основной задачей алгебры считалась разработка методов решения алгебраических уравнений. С древних времен известны формулы для решения алгебраических уравнений первой и второй степени.

В XVI веке итальянские математики С. дель Ферро, Н. Тарталья, Дж. Кардано, Л. Феррари получили формулы для решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Исторические сведения об этом можно найти в [1–3] (см. также [4–11], где описаны различные способы представления решений указанных уравнений).

Замечание 1. Значительно раньше, в XI веке, О. Хайям, выдающийся поэт, философ и ученый, написал "Трактат о доказательствах задач алгебры и алмукабалы", где изложил геометрический метод решения алгебраических уравнений третьей степени, имеющих положительные корни, с помощью конических сечений (см. [2, 12]). Позже, в XVII веке, теория решения кубических уравнений, основанная на конических сечениях, была развита Р. Декартом и другими учеными, которые не были знакомы с трудами О. Хайяма.

В период с XVI по начало XIX века для алгебраических уравнений степени выше четвертой неоднократно предпринимались попытки представления *решения в радикалах*, т. е. в виде выражения, содержащего только коэффициенты алгебраического уравнения и операции сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня целой степени. Однако эти попытки оказались безуспешными в общем случае.

В XIX веке П. Руффини, Н. Абель, Э. Галуа установили, что в общем случае решение алгебраических уравнений степени выше четвертой не может быть выражено в радикалах [2, 13] (см. также [4, 6, 14, 15]).

Важно отметить, что решение отдельных алгебраических уравнений пятой степени и выше можно выразить в радикалах. Некоторые такие уравнения можно найти в справочнике [15], где помимо решений в радикалах приводятся также решения, которые выражаются в терминах специальных функций (для алгебраических уравнений пятой степени см. также [14]).

Далее будут рассматриваться алгебраические уравнения и системы алгебраических уравнений, которые обладают теми или иными свойствами симметрии, что позволяет их значительно упрощать.

2. Простейшие симметрии и преобразования, понижающие порядок алгебраических уравнений

1°. Под *симметриями* математического уравнения понимаются преобразования, сохраняющие вид рассматриваемого уравнения. Редукция — способ преобразования математического уравнения к более простому или более удобному (с какой-либо точки зрения) для анализа и решения виду.

Рассмотрим алгебраическое уравнение четной степени $2n$:

$$P_{2n}(x) = 0, \tag{2}$$

которое может содержать младшие члены с нечетными степенями.

Утверждение 1. *Пусть левая часть уравнения* (2) *для некоторого* λ *и любого* x *тождественно удовлетворяет соотношению* $P_{2n}(x) = P_{2n}(\lambda - x)$. *Тогда исходное уравнение с помощью подстановки* $z = (x - \frac{1}{2}\lambda)^2$ *сводится к более простому алгебраическому уравнению степени* n.

Утверждение 1 нетрудно доказать, используя соотношения

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \tfrac{1}{2}[P_{2n}(x) + P_{2n}(\lambda - x)] = \\ &= \tfrac{1}{2}\big[P_{2n}\big(\tfrac{1}{2}\lambda + y\big) + P_{2n}\big(\tfrac{1}{2}\lambda - y\big)\big], \qquad y = x - \tfrac{1}{2}\lambda. \end{aligned} \tag{3}$$

Из (3) следует, что уравнение (2), записанное в терминах новой переменной y, не меняется при замене y на $-y$. Поэтому его левую часть можно представить в виде линейной комбинации только четных степеней y. Далее делается замена $z = y^2$ (z — инвариант преобразования $\bar{y} = -y$), понижающая вдвое порядок уравнения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(x + a)^{2n} + (x + b)^{2n} - c = 0, \tag{4}$$

которое является частным случаем уравнения (2).

Нетрудно проверить, что левая часть (4) не изменится, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение после возведения в степень $2n$ выражений в его левой части и подстановки $z = [x + \frac{1}{2}(a + b)]^2$ сводится к уравнению степени n.

2°. Рассмотрим теперь алгебраическое уравнение нечетной степени $2n + 1$:

$$P_{2n+1}(x) = 0. \tag{5}$$

Утверждение 2. *Пусть левая часть уравнения* (5) *для некоторого* λ *тождественно удовлетворяет соотношению* $P_{2n+1}(x) = -P_{2n+1}(\lambda - x)$. *Тогда исходное уравнение имеет корень* $x = \frac{1}{2}\lambda$ *и его левая часть может быть представлена в виде*

$$P_{2n+1}(x) = (x - \tfrac{1}{2}\lambda)Q_{2n}(x), \tag{6}$$

где многочлен четной степени $Q_{2n}(x)$ тождественно удовлетворяет соотношению $Q_{2n}(x) = Q_{2n}(\lambda - x)$. В силу утверждения 1 уравнение $Q_{2n}(x) = 0$ с помощью подстановки $z = (x - \frac{1}{2}\lambda)^2$ сводится к более простому алгебраическому уравнению степени n.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(x+a)^{2n+1} + (x+b)^{2n+1} + c(2x+a+b) = 0, \tag{7}$$

которое является частным случаем уравнения (5).

Нетрудно проверить, что знак левой части (7) изменится на противоположный, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2}(a+b)$ и его левая часть может быть представлена в виде (6).

3. Симметрические системы алгебраических уравнений

1°. Сначала дадим некоторые определения и кратко опишем изложенные в [16] наиболее важные факты, касающиеся симметрических систем алгебраических уравнений, которые нам понадобятся далее для изложения оригинальной части статьи.

Многочлен $P_s(x,y)$ от двух переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при перестановке аргументов: $P_s(x,y) = P_s(y,x)$. В терминах преобразований симметрический многочлен определяется как многочлен, сохраняющий вид при преобразовании $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$.

Простейшие симметрические многочлены

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy \tag{8}$$

называются *элементарными*. Эти многочлены являются простейшими алгебраическими инвариантами, которые не меняются при перестановке аргументов.

Обозначим

$$s_n = x^n + y^n, \tag{9}$$

где n — целое положительное число.

Справедлива рекуррентная формула

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2},$$

которая дает возможность последовательно выражать суммы степеней вида (9) через элементарные многочлены. Более удобной является формула Варинга [16]:

$$\frac{1}{k}s_k = \frac{1}{k}\sigma_1^k - \frac{(k-2)!}{1!\,(k-2)!}\sigma_1^{k-2}\sigma_2 + \frac{(k-3)!}{2!\,(k-4)!}\sigma_1^{k-4}\sigma_2^2 - \frac{(k-4)!}{3!\,(k-6)!}\sigma_1^{k-6}\sigma_2^3 + \cdots,$$

которая позволяет в явном виде сразу получать искомое представление для суммы степеней.

Утверждение 3 *(фундаментальная теорема о симметрических многочленах). Любой симметрический многочлен от двух переменных может быть единственным образом выражен через элементарные многочлены* (8).

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [16].

Для решения систем двух алгебраических уравнений

$$P_s(x,y) = 0, \qquad Q_s(x,y) = 0, \tag{10}$$

где P_s и Q_s — симметрические многочлены, полезно в качестве новых переменных использовать элементарные симметрические многочлены (8), что приводит к упрощению исходной системы. Система

(10) не меняется при перестановке аргументов $x \rightleftarrows y$. Поэтому подобные системы обладают следующим свойством: если система имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0$, $y = x_0$.

Если σ_1 и σ_2 — решение преобразованной системы, то искомые величины x и y определяются из простой системы (8), решение которой сводится к квадратному уравнению

$$x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2 = 0. \tag{11}$$

Системы уравнений вида (10) и родственные алгебраические системы с тремя и более неизвестными, уравнения которых не меняются при любой перестановке аргументов, будем называть *классическими симметрическими системами алгебраических уравнений* (или кратко *симметрическими системами алгебраических уравнений*).

Для наглядности на рис. 1 изображена принципиальная схема решения симметрических систем алгебраических уравнений, основанная на использовании инвариантов (8) в качестве новых переменных.

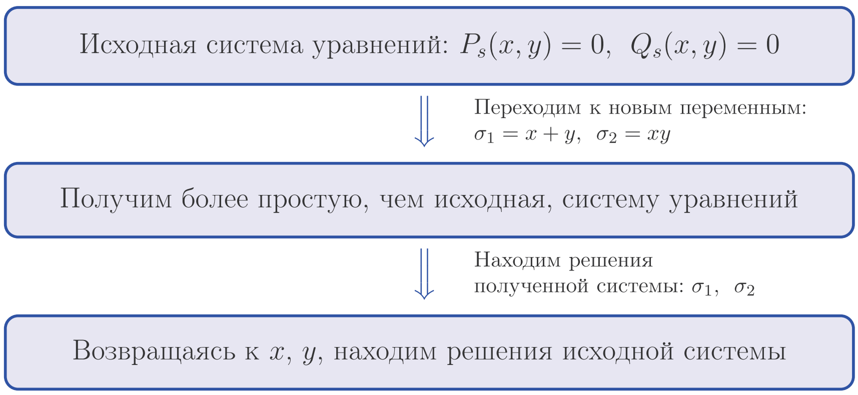

Рис. 1. Схема решения классических симметрических систем алгебраических уравнений.

2°. Отдельные алгебраические уравнения имеют "скрытые" (неочевидные, неявные) симметрии и путем введения новой дополнительной переменной могут сводиться к симметрическим системам алгебраических уравнений. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 3. Рассмотрим алгебраическое уравнение шестого порядка

$$(a - x^2)^3 = (b - x^3)^2, \tag{12}$$

которое содержит два свободных параметра a и b и в развернутом виде может быть записано в виде

$$2x^6 - 3ax^4 - 2bx^3 + 3a^2x^2 + b^2 - a^3 = 0. \tag{13}$$

Уравнение (12) и эквивалентное ему уравнение (13) очевидными симметриями не обладают. Покажем, что уравнение (12) сводится к алгебраической симметрической системе

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^3 + y^3 = b. \tag{14}$$

Действительно, прямое исключение из системы (14) дополнительной переменной y приводит к уравнению (12).

Система (14) решается путем перехода к новым к переменным (8). Учитывая соотношения

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$

получим более простую систему

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a, \quad \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = b.$$

Исключив σ_2, приходим к кубическому уравнению

$$\sigma_1^3 - 3a\sigma_1 + 2b = 0. \tag{15}$$

Поскольку корни любого кубического уравнения можно выразить в радикалах (см., например, [4, 5]), таким образом конструктивно доказано, что все корни двухпараметрического уравнения шестой степени (12) можно выразить в радикалах.

Замечание 2. Симметрические системы алгебраических уравнений с тремя и более неизвестными, сохраняющие вид при перестановках переменных, и методы их решения рассматриваются в книге [16]. В этой книге также показано, как симметрические многочлены могут использоваться для доказательств неравенств и для решения некоторых иррациональных уравнений.

4. Симметрические системы алгебраических уравнений смешанного типа

1°. Многочлен $Q_a(x, y)$ от двух переменных называется *антисимметрическим*, если он меняет знак при перестановке аргументов, т. е. $Q_a(x, y) = -Q_a(y, x)$.

Два основных свойства антисимметрических многогочленов [16]:

$$\begin{aligned} &1. \qquad Q_a(x, x) = 0, \\ &2. \qquad Q_a(x, y) = (x - y)R_s(x, y), \end{aligned} \tag{16}$$

где $R_s(x, y)$ — симметрический многогочлен.

2°. Рассмотрим симметрическую систему алгебраических уравнений смешанного типа

$$P_s(x, y) = 0, \quad Q_a(x, y) = 0, \tag{17}$$

в которой первый многогочлен $P_s(x, y)$ является симметрическим, а второй многогочлен $Q_a(x, y)$ — антисимметрическим. При перестановке аргументов $x \rightleftarrows y$ первое уравнение системы (17) не меняется, а левая часть второго уравнения меняет знак на противоположный (после умножения на -1 это уравнение переходит в исходное уравнение). Поэтому подобные системы обладают следующим свойством: если система (17) имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0$, $y = x_0$.

В силу второго свойства (16) систему (17) можно представить в виде

$$P_s(x, y) = 0, \quad (x - y)R_s(x, y) = 0. \tag{18}$$

Второму уравнению (18) можно удовлетворить, приравняв нулю любой из двух сомножителей в его левой части. Поэтому система (17) распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} &P_s(x, x) = 0, \qquad y = x; \\ &P_s(x, y) = 0, \qquad R_s(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Вторая подсистема (19) является симметрической и может быть решена методом, описанным в разделе 3.

Пример 4. Рассмотрим двухпараметрическую смешанную алгебраическую систему вида (17):

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^3 + by = y^3 + bx. \tag{20}$$

Перенеся в (20) все члены в левую часть уравнений, получим частный случай системы (17) при

$$P_s(x,y) = x^2 + y^2 - a, \quad Q_a(x,y) = x^3 - y^3 + b(y-x).$$

Второе уравнение (20) можно представить в виде произведения

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 - b) = 0.$$

Поэтому исходная система (20) распадается на две простые подсистемы

$$\begin{aligned} 2x^2 - a = 0, &\quad y = x; \\ x^2 + y^2 - a = 0, &\quad x^2 + xy + y^2 - b = 0, \end{aligned}$$

решение которых элементарно.

Замечание 3. В некоторых случаях система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными, состоящая из несимметрических уравнений, может быть сведена к симметрической системе вида (10) путем введения новых неизвестных с помощью преобразования масштабирования вида $x = \mu\bar{x}$, $y = \lambda\bar{y}$, где μ и λ — искомые параметры.

5. Неклассические симметрические системы алгебраических уравнений

Рассмотрим теперь систему алгебраических уравнений специального вида

$$P(x,y) + Q_s(x,y) = 0, \quad P(y,x) + Q_s(x,y) = 0, \tag{21}$$

где $P(x,y)$ — некоторый заданный многочлен от двух переменных, а $Q_s(x,y)$ — симметрический многочлен. При перестановке аргументов уравнения (21) меняются местами. Такие системы будем называть *неклассическими симметрическими системами алгебраических уравнений.*

Решение системы уравнений (21) можно свести к решению более простой симметрической системы и решению одного независимого уравнения. Для этого, сначала, почленно сложив оба уравнения, получим уравнение

$$P(x,y) + P(y,x) + 2Q_s(x,y) = 0, \tag{22}$$

которое не меняется при перестановке аргументов. Затем, вычитая из первого уравнения (21) второе уравнение, имеем

$$P(x,y) - P(y,x) = 0. \tag{23}$$

Легко проверить, что в левой части уравнения (23) стоит антисимметрический многочлен. В силу второго свойства (16) справедливо представление

$$P(x,y) - P(y,x) = (x-y)R_s(x,y), \tag{24}$$

где $R_s(x,y)$ — симметрический многочлен от двух переменных. Поэтому уравнение (23) можно записать в виде

$$(x-y)R_s(x,y) = 0. \tag{25}$$

Таким образом, исходная система (21) эквивалентна системе, состоящей из двух уравнений (22) и (25). Уравнению (25) можно удовлетворить, приравняв нулю любой из двух сомножителей в его левой части. В результате система (22) и (25) распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} P(x,y) + P(y,x) + 2Q_s(x,y) = 0, &\quad y = x; \\ P(x,y) + P(y,x) + 2Q_s(x,y) = 0, &\quad R_s(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Первая подсистема (26) упрощается после подстановки $y = x$ из второго уравнения и может быть записана в виде

$$P(x, x) + Q_s(x, x) = 0, \qquad y = x.$$

Вторая подсистема (26) является симметрической и может быть решена методом, описанным в разделе 3.

Для наглядности на рис. 2 изображена принципиальная схема решения неклассических симметрических систем алгебраических уравнений.

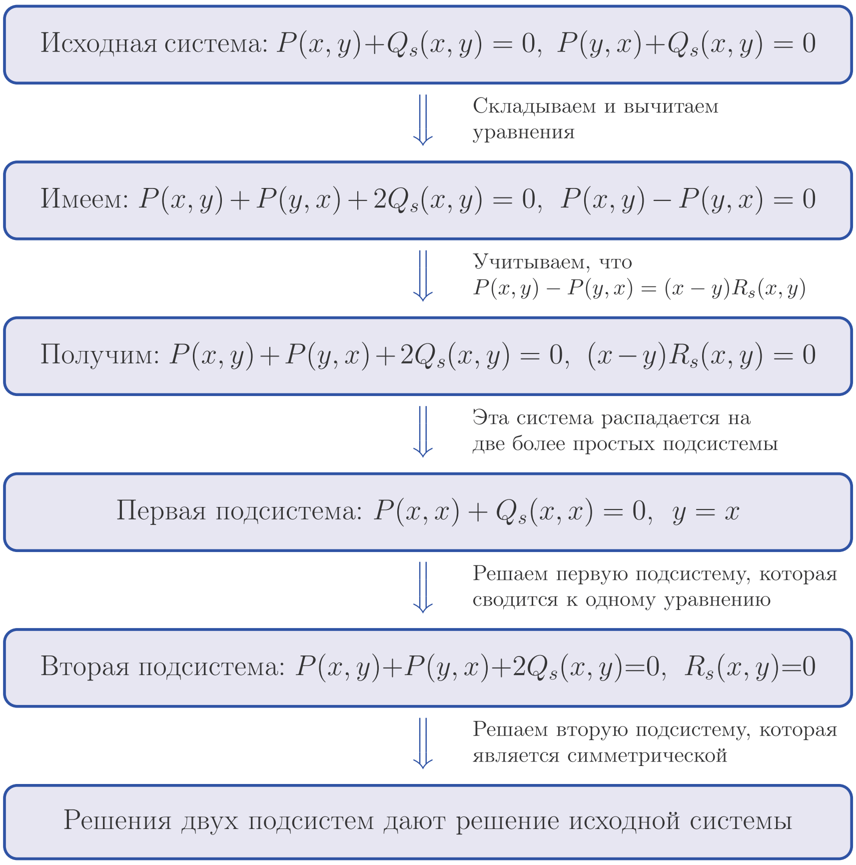

Рис. 2. Схема решения неклассических симметрических систем алгебраических уравнений.

Пример 5. Рассмотрим трехпараметрическую алгебраическую систему вида (21):

$$x = ax^2 + by^2 + c, \qquad y = ay^2 + bx^2 + c, \tag{27}$$

где $a \neq \pm b$. Перенеся в (27) все члены в правую часть уравнений, получим частный случай системы (21) при

$$P(x, y) = ax^2 - x + by^2 + c, \qquad Q_s(x, y) \equiv 0.$$

Складывая и вычитая почленно уравнения системы (27), приходим к эквивалентной системе уравнений

$$(a + b)(x^2 + y^2) - (x + y) + 2c = 0, \quad (x - y)[(a - b)(x + y) - 1] = 0,$$

которая распадается на две простые подсистемы

$$(a + b)x^2 - x + c = 0, \quad y = x; \quad (a + b)(x^2 + y^2) - (x + y) = 0, \quad (a - b)(x + y) - 1 = 0.$$

Решение этих подсистем ввиду элементарности опускается.

6. Алгебраические уравнения, которые сводятся к неклассическим симметрическим системам

1°. К системам типа (21) при $Q_s(x,y) \equiv 0$ сводятся алгебраические уравнения вида

$$f(f(x)) = x, \tag{28}$$

в левой части которых стоит вторая итерация заданного многочлена $f(x)$. Корни более простого уравнения $f(x) = x$ являются также корнями исходного уравнения (28) (это свойство имеет место и для более сложных трансцендентных уравнений, когда $f(x)$ — любая заданная непрерывная функция).

Введение новой переменной $y = f(x)$ позволяет из уравнения (28) получить эквивалентную алгебраическую систему

$$y = f(x), \quad x = f(y), \tag{29}$$

которая является частным случаем системы (21) (после переноса всех членов уравнений (29) в левую часть) и решается методом, описанным в разд. 5.

Пример 6. Рассмотрим алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(x^2 + a)^2 + a = x, \tag{30}$$

которое содержит свободный параметр a и может быть представлено в виде уравнения (28) при $f(x) = x^2 + a$.

Уравнение (30) путем введения новой переменной $y = x^2 + a$ сводится к неклассической симметрической системе вида (21):

$$y = x^2 + a, \quad x = y^2 + a. \tag{31}$$

Складывая и вычитая уравнения (31), как описано в разд. 5, после элементарных преобразований и разложения редуцированного уравнения на множители имеем

$$x^2 + y^2 - x - y + 2a = 0, \quad (y - x)(x + y + 1) = 0. \tag{32}$$

Приравняв далее нулю сомножители в левой части второго уравнения (32), в итоге получим два независимых квадратных уравнения

$$x^2 - x + a = 0, \quad y = x; \quad x^2 + x + a + 1 = 0, \quad y = -x - 1,$$

которые определяют четыре корня x исходного уравнения (30).

Пример 7. Рассмотрим более сложное алгебраическое уравнение девятой степени вида (28) при $f(x) = x^3 + a$:

$$(x^3 + a)^3 + a = x. \tag{33}$$

Это уравнение содержит свободный параметр a и сводится к неклассической симметрической системе

$$y = x^3 + a, \quad x = y^3 + a. \tag{34}$$

Складывая и вычитая уравнения (34), как описано в разд. 5, после элементарных преобразований приходим к эквивалентной системе уравнений

$$x^3 + y^3 - x - y + 2a = 0, \quad (y - x)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0,$$

которая распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{gathered} x^3 - x + a = 0, \quad y = x; \\ x^3 + y^3 - x - y + 2a = 0, \quad x^2 + xy + y^2 + 1 = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Решения первой подсистемы (35) определяются корнями кубического уравнения, которое позволяет найти три корня исходного уравнения (33). Для решения второй системы (35), которая является симметрической и определяет оставшиеся шесть корней уравнения (33), введем новые переменные по формулам (8). В результате получим более простую систему

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1 + 2a = 0, \qquad \sigma_1^2 - \sigma_2 + 1 = 0. \tag{36}$$

Исключив отсюда σ_2, приходим к кубическому уравнению для σ_1:

$$\sigma_1^3 + 2\sigma_1 - a = 0. \tag{37}$$

Корни этого уравнения и равенство $\sigma_2 = \sigma_1^2 + 1$, которое следует из второго уравнения (36), дают три пары действительных или комплексных чисел σ_{1k}, σ_{2k} ($k = 1, 2, 3$). Подставив эти числа в квадратное уравнение (11), можно найти шесть корней исходного уравнения (33).

Поскольку корни любого кубического уравнения можно выразить в радикалах, таким образом конструктивно доказано, что все корни однопараметрического уравнения девятой степени (33) можно выразить в радикалах.

Замечание 4. Если нас интересуют только действительные корни алгебраического уравнения (33), то вторую систему (35) надо отбросить, поскольку в этом случае имеет место неравенство $x^2 + xy + y^2 + 1 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 > 0$.

2°. Покажем, что алгебраические уравнения вида

$$f(af(x) + x + ab) + f(x) + 2b = 0, \tag{38}$$

где $f(x)$— заданный многочлен, a и b — свободные параметры, обладают скрытой симметрией и сводятся к системам типа (21) при $Q_s(x, y) \equiv 0$. Отметим, что корни более простого уравнения $f(x) = -b$ являются также корнями исходного уравнения (38) (это свойство имеет место и для более сложных трансцендентных уравнений, когда $f(x)$ — любая заданная непрерывная функция).

Положим

$$y = af(x) + x + ab. \tag{39}$$

В результате уравнение (38) принимает вид

$$f(y) + f(x) + 2b = 0. \tag{40}$$

Исключив из (39) и (40) функцию $f(x)$, получим соотношение

$$x = af(y) + y + ab. \tag{41}$$

Уравнения (39) и (41) образуют систему вида (21):

$$y = af(x) + x + ab, \qquad x = af(y) + y + ab. \tag{42}$$

Пример 8. Рассмотрим однопараметрическое алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(x^2 + x + b)^2 + x^2 + 2b = 0, \tag{43}$$

которое является частным случаем уравнения (38) (при $f(x) = x^2$, $a = 1$) и сводится к неклассической симметрической системе

$$y = x^2 + x + b, \qquad x = y^2 + y + b. \tag{44}$$

Складывая и вычитая уравнения (44), получим эквивалентную систему уравнений, которую можно представить в виде

$$x^2 + y^2 + 2b = 0, \qquad (y - x)(x + y + 2) = 0. \tag{45}$$

Приравняв нулю сомножители в левой части второго уравнения, после элементарных преобразований в итоге для переменной x приходим к двум независимым квадратным уравнениям

$$x^2 + b = 0, \qquad y = x;$$
$$x^2 + 2x + b + 2 = 0, \qquad y = -x - 2.$$

Эти уравнения имеют корни

$$x_1 = -\sqrt{-b}, \quad x_2 = \sqrt{-b}, \quad x_3 = -1 - \sqrt{-b-1}, \quad x_4 = -1 + \sqrt{-b-1},$$

которые и определяют искомые решения исходного уравнения (43).

Пример 9. Можно показать, что однопараметрическое алгебраическое уравнение девятой степени

$$(x^3 + x + b)^3 + x^3 + 2b = 0,$$

которое является частным случаем уравнения (38) (при $f(x) = x^3$, $a = 1$), разрешимо в радикалах.

Замечание 5. Более сложную алгебраическую систему, которая получается из (21) формальной заменой симметрического многочлена $Q_s(x, y)$ на произвольный многочлен $Q(x, y)$, можно упростить, вычитая одно уравнение системы из другого. В результате приходим к уравнению вида (25), которое далее следует рассмотреть вместе с одним из уравнений исходной системы.

7. Алгебраические системы специального вида, которые распадаются на более простые подсистемы

Важным свойством системы (21) является то, что ее уравнения совпадают при $y = x$. Рассмотрим более общую алгебраическую систему двух уравнений

$$P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0, \tag{46}$$

где многочлены от двух переменных $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ для некоторых постоянных λ и μ удовлетворяют условию

$$P(x, \lambda x) \equiv \mu Q(x, \lambda x). \tag{47}$$

Из (47) следует, что имеет место представление

$$P(x, y) - \mu Q(x, y) = (y - \lambda x) R(x, y), \tag{48}$$

где $R(x, y)$ — некоторый многочлен.

Вместо системы (46) рассмотрим эквивалентную систему, оставив первое уравнение и заменив второе уравнение на линейную комбинацию уравнений $P(x, y) - \mu Q(x, y) = 0$. Учитывая представление (48), получим систему

$$P(x, y) = 0, \qquad (y - \lambda x) R(x, y) = 0, \tag{49}$$

которая распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} &P(x, y) = 0, \qquad y = \lambda x; \\ &P(x, y) = 0, \qquad R(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Для наглядности на рис. 3 изображена схема решения системы алгебраических уравнений (46) при условии (47).

Рис. 3. Схема решения системы алгебраических уравнений (46) при условии (47).

Пример 10. Рассмотрим алгебраическую систему

$$ax^2+by^2+x+c=0, \qquad (a+b)x^2-y+c=0, \tag{51}$$

являющуюся частным случаем системы вида (46), которая удовлетворяет условию (47) при $\lambda=-1$ и $\mu=1$.

Оставив первое уравнение и заменив второе уравнение на разность уравнений, получим эквивалентную систему, которую можно представить в виде

$$ax^2+by^2+x+c=0, \qquad (x+y)[b(y-x)+1]=0.$$

Эта система распадается на две простые подсистемы

$$\begin{aligned} &ax^2+by^2+x+c=0, \qquad y=-x;\\ &ax^2+by^2+x+c=0, \qquad b(y-x)+1=0, \end{aligned}$$

каждая из которых после исключения y сводится к квадратному уравнению для x.

8. Иррациональные уравнения, которые сводятся к симметрическим системам

Иррациональные уравнения вида

$$P_s\left(\sqrt[n]{a-x},\, \sqrt[n]{b+x}\right) = 0, \tag{52}$$

где $P_s(y,z)$ — симметрический многочлен, n — натуральное число, a и b — свободные параметры, путем введения новых переменных

$$y = \sqrt[n]{a-x}, \quad z = \sqrt[n]{b+x} \tag{53}$$

сводятся к симметрической системе алгебраических уравнений

$$P_s(y,z) = 0, \quad y^n + z^n = a + b.$$

Замечание 6. Если n — четное число, то перед любым корнем в (52)–(53) может стоять также знак минус. Для иллюстрации сказанного рассмотрим конкретный пример.

Пример 11. Трехпараметрические иррациональные уравнения вида

$$\sqrt[4]{a-x} \pm \sqrt[4]{b+x} = c$$

путем введение новых переменных

$$y = \sqrt[4]{a-x}, \quad z = \pm\sqrt[4]{b+x}$$

сводятся к симметрической системе алгебраических уравнений

$$y + z = c, \quad y^4 + z^4 = a + b,$$

которая решается стандартным способом, описанным в разделе 3. .

9. Краткие выводы

В данной статье рассматриваются неклассические симметрии и редукции алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Описаны преобразования, понижающие порядок некоторых алгебраических уравнений. Показано, что путем введения новой дополнительной переменной, некоторые алгебраические уравнения, имеющие "скрытые" симметрии, можно преобразовать к классическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Приведены примеры нетривиальных алгебраических уравнений шестой и девятой степени, содержащие один или несколько свободных параметров, которые можно разрешить в радикалах. Показано, что неклассические симметрические системы двух алгебраических уравнений, которые меняются местами при перестановке неизвестных, можно свести к более простым симметрическим системам и одному независимому уравнению. Установлено, что некоторые уравнения специального вида, содержащие вторую итерацию заданного многочлена, можно преобразовать к неклассическим симметрическим системам алгебраических уравнений.

Литература

[1] Turnbull H.W. Theory of Equations. - Edinburgh: Oliver and Boyd, 1947.

[2] Van der Waerden B.L. A History of Algebra: From Al-Khwarizmi to Emmy Noether. - Berlin: Springer, 1985.

[3] Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках, 3-е изд. - М: МЦНМО, 2001.

[4] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - М.: Наука, 1980.

[5] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1984.

[6] Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. - Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

[7] Yacoub M.D., Fraidenraich G. A solution to the quartic equation // The Mathematical Gazette. - 2012. - Vol. 96. - No. 536. - pp. 271-275.

[8] Tehrani F.T., Leversha G. A simple approach to solving cubic equations // The Mathematical Gazette. - 2016. - Vol. 100. - No. 548. - pp. 225-232.

[9] Cháves-Pichardo M., Martínez-Crus M.A., Trejo-Martínez A., Vega-Crus A.B., Arenas-Resendis T. On the practicality of the analytical solutions for all third- and fourth-degree algebraic equations with real coefficients // Mathematics. - 2023. - Vol. 11. - No. 6. - 1447.

[10] Белов А.Я. Об одном способе решать уравнения четвертой степени // Математическое образование. - 2023. - № 3(107). - С. 24-26.

[11] Собиров Б. Способ решения уравнений 4-й степени с помощью симметрии // Математическое образование. - 2023. - № 3(107). - С. 35-37.

[12] Siadat V.M., Tholen A. Omar Khayyam: Geometric Algebra and Cubic Equations // Math Horizons. - 2021. - Vol. 28. - No. 1. - P. 12-15.

[13] Struik D.J. (ed.) A Source Book in Mathematics: 1200–1800. - Princeton: Princeton University Press, 1986.

[14] King R.B. Beyond the Quartic Equation. Boston: Birkhäuser, 1996.

[15] Polyanin A.D. Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. - Boca Raton: CRC Press, 2024.

[16] Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре, 2-е изд. - М.: Наука, 2002.

Полянин Андрей Дмитриевич
главный научный сотрудник
Института проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва,
доктор физ.-мат. наук, профессор.

E-mail: polyanin@ipmnet.ru

Шингарева Инна Константиновна
Department of Mathematics, University of Sonora,
Sonora, Mexico,
кандидат физ.-мат. наук, профессор.

E-mail: inna.shingareva@unison.mx