В. Ф. ЗАЙЦЕВ, А. Д. ПОЛЯНИН

СПРАВОЧНИК
ПО НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

МОСКВА
«ФАКТОРИАЛ»
1997

ББК 22.1
З-17
УДК 517.9(083)

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. **Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям.** — М.: «Факториал», 1997. — 512 с. — ISBN 5-88688-012-7.

Данная книга является наиболее полным справочником по точным решениям нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций. Описаны новые интегрируемые уравнения. В целом в книге рассмотрено в семь раз больше нелинейных уравнений второго, третьего и более высоких порядков, чем в известном «Справочнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям» Э. Камке.

Приведены некоторые точные решения уравнений нелинейной механики и теоретической физики (которые встречаются в задачах теплопроводности, массопереноса, теории упругости, гидродинамики, теории колебаний, теории горения, теории химических реакторов и др.)

Справочник предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в области математики, механики и физики.

Табл. 21. Ил. 4. Библиогр. 25 назв.

Справочное издание

ЗАЙЦЕВ Валентин Федорович
ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич

СПРАВОЧНИК ПО НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Компьютерная верстка *А. И. Журов*

ISBN 5-88688-012-7

32. $(Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + ay + bx + m)y'_x =$
$= By^2 + 2Ak^2xy + k(-Ak^2 + Bk + C)x^2 + aky + bkx + s.$

Замена $y = z + kx$ приводит к уравнению Риккати для $x = x(z)$:
$[(B - Ak)z^2 + s - mk]x'_z = (Ak^2 + 2Bk + C)x^2 + [2(Ak + B)z + ak + b]x + Az^2 + az + m.$

33. $[A(\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2) + (A\delta + 2\alpha)y + (A\varepsilon + \beta)x + A\sigma + \delta]y'_x +$
$+ B(\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2) + (B\delta + \beta)y + (B\varepsilon + 2\gamma)x + B\sigma + \varepsilon = 0.$

Решение: $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \sigma = C\exp(-Ay - Bx).$

34. $(\alpha Ay^2 - 2\beta Axy + Bx^2 + \alpha\beta^2 A - \alpha^2 B)y'_x = Cy^2 + 2Bxy +$
$+ Dx^2 - 2\beta(\beta A + C)y - 2(\alpha D + \beta B)x + \alpha^2 D + \beta^2(2\beta A + C).$

Преобразование $x = w + \alpha$, $y = \xi w + \beta$ приводит к линейному уравнению:
$$[-\alpha A\xi^3 + (2\beta A + C)\xi^2 + B\xi + D]w'_\xi = (\alpha A\xi^2 - 2\beta A\xi + B)w + 2(\alpha B - \beta^2 A).$$

35. $(A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{11}x^2 + A_2y + A_1x + A_0)y'_x =$
$= B_{22}y^2 + k(2A_{22}k + A_{12} - 2B_{22})xy +$
$+ k(-A_{22}k^2 + B_{22}k + A_{11})x^2 + B_2y + k(A_2k + A_1 - B_2)x + B_0.$

Замена $y = z + kx$ приводит к уравнению Риккати для $x = x(z)$:
$$[(B_{22} - A_{22}k)z^2 + (B_2 - A_2k)z + B_0 - A_0k]x'_z =$$
$$= (A_{22}k^2 + A_{12}k + A_{11})x^2 + [(2A_{22}k + A_{12})z + A_2k + A_1]x + A_{22}z^2 + A_2z + A_0.$$

36. $(A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{11}x^2 + A_2y + A_1x + A_0)y'_x =$
$= B_{22}y^2 + B_{12}xy + B_{11}x^2 + B_2y + B_1x + B_0.$

Здесь A_{ij}, B_{ij}, A_1 — произвольные параметры, а остальные коэффициенты определяются соотношениями
$$A_2 = -A_{12}\alpha - 2A_{22}\beta,$$
$$A_0 = -A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 - A_1\alpha,$$
$$B_2 = (2A_{11} - B_{12})\alpha + (A_{12} - 2B_{22})\beta + A_1,$$
$$B_1 = -2B_{11}\alpha - B_{12}\beta,$$
$$B_0 = B_{11}\alpha^2 + (B_{12} - 2A_{11})\alpha\beta + (B_{22} - A_{12})\beta^2 - A_1\beta$$
(α, β — произвольные параметры).

Преобразование $x = w + \alpha$, $y = \xi w + \beta$ приводит к линейному уравнению:
$$[-A_{22}\xi^3 + (B_{22} - A_{12})\xi^2 + (B_{12} - A_{11})\xi + B_{11}]w'_\xi = (A_{22}\xi^2 + A_{12}\xi + A_{11})w + k,$$
где $k = 2A_{11}\alpha + A_{12}\beta + A_1$.

1.4.5. Уравнения вида* $(A_3y^3 + A_2xy^2 + A_1x^2y + A_0x^3 + a_1y + a_0x)y'_x = B_3y^3 + B_2xy^2 + B_1x^2y + B_0x^3 + b_1y + b_0x$

1. $(y^3 - x^2y + ay + bx)y'_x = xy^2 - x^3 + by + ax.$

Решение в параметрическом виде ($b \neq 0$):
$$x = C^{-1}t|t|^{\frac{a-b}{2b}}e^{-t} + \tfrac{1}{2}bC|t|^{-\frac{a-b}{2b}}e^t, \quad y = C^{-1}t|t|^{\frac{a-b}{2b}}e^{-t} - \tfrac{1}{2}bC|t|^{-\frac{a-b}{2b}}e^t.$$

* Этот раздел написан А. И. Журовым

2. $(y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + ay)y'_x = -y^3 + xy^2 + x^2y - x^3 + ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x = C^{-1}\operatorname{sign} t\, e^{-1/t} + \tfrac{1}{8}aC|t|e^{1/t}, \quad y = C^{-1}\operatorname{sign} t\, e^{-1/t} - \tfrac{1}{8}aC|t|e^{1/t}.$$

3. $(y^3 + xy^2 - x^2y - x^3 + ay + bx)y'_x = -y^3 - xy^2 + x^2y + x^3 + by + ax.$

Решение в параметрическом виде ($a \neq -b$):

$$x = t + C|t|^{\frac{b-a}{b+a}} \exp\Bigl(-\frac{4t^2}{a+b}\Bigr), \quad y = t - C|t|^{\frac{b-a}{b+a}} \exp\Bigl(-\frac{4t^2}{a+b}\Bigr).$$

4. $(y^3 + xy^2 - 2x^2y + 2ay + ax)y'_x = -y^3 + xy^2 + 4x^2y - 4x^3 - ay + 4ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x = C^{-1}t^{-1}e^{-1/t} + \tfrac{1}{3}aCt^2e^{1/t}, \quad y = C^{-1}t^{-1}e^{-1/t} - \tfrac{2}{3}aCt^2e^{1/t}.$$

5. $(y^3 + xy^2 - 5x^2y + 3x^3 + ay + ax)y'_x =$
$= -3y^3 - 3xy^2 + 15x^2y - 9x^3 - ay + 3ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x = C^{-1}\operatorname{sign} t\, e^{-1/t} + \frac{a}{32}C|t|e^{1/t}, \quad y = C^{-1}\operatorname{sign} t\, e^{-1/t} - \frac{3a}{32}C|t|e^{1/t}.$$

6. $(y^3 + 2xy^2 - x^2y - 2x^3 + 2ay + ax)y'_x = 2xy^2 + 2x^2y - 4x^3 - ay + 4ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x = C^{-1}t|t|e^{-1/t} - \tfrac{1}{3}aC|t|^{-1}e^{1/t}, \quad y = C^{-1}t|t|e^{-1/t} + \tfrac{2}{3}aC|t|^{-1}e^{1/t}.$$

7. $(y^3 - 3x^2y + 2x^3 + 2ay + ax)y'_x = -2y^3 + 6x^2y - 4x^3 - ay + 4ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x = C^{-1}\operatorname{sign} t\, e^{-1/t} + \tfrac{1}{9}aC|t|e^{1/t}, \quad y = C^{-1}\operatorname{sign} t\, e^{-1/t} - \tfrac{2}{9}aC|t|e^{1/t}.$$

8. $(y^3 + 3xy^2 - 4x^3 + ay + bx)y'_x = -2y^3 - 6xy^2 + 8x^3 + (b-a)y + 2ax.$

Решение в параметрическом виде ($a \neq -b$):

$$x = t + C|t|^{\frac{b-2a}{b+a}} \exp\Bigl[-\frac{27\,t^2}{2(a+b)}\Bigr], \quad y = t - 2C|t|^{\frac{b-2a}{b+a}} \exp\Bigl[-\frac{27\,t^2}{2(a+b)}\Bigr].$$

9. $(y^3 + 3xy^2 - x^2y - 3x^3 + ay + bx)y'_x =$
$= -y^3 + xy^2 + 9x^2y - 9x^3 - (2a-b)y + 3ax.$

Решение в параметрическом виде ($a \neq b$):

$$x = C^{-1}t|t|^{-\frac{3a-b}{2(a-b)}} e^{-t} - \frac{a-b}{16}C|t|^{\frac{3a-b}{2(a-b)}} e^{t},$$
$$y = C^{-1}t|t|^{-\frac{3a-b}{2(a-b)}} e^{-t} + \frac{3(a-b)}{16}C|t|^{\frac{3a-b}{2(a-b)}} e^{t}.$$

10. $(y^3+3xy^2+3x^2y+x^3+ay-ax)y'_x=-y^3-3xy^2-3x^2y-x^3+ay-ax.$

Решение в параметрическом виде ($a<0$):

$$x=Ct\pm\frac{C^2}{\sqrt{-a}}\sqrt{2t^4+1},\quad y=Ct\mp\frac{C^2}{\sqrt{-a}}\sqrt{2t^4+1}.$$

11. $(y^3+3xy^2+3x^2y+x^3+ay+bx)y'_x=-y^3-3xy^2-3x^2y-x^3+by+ax.$

Решение в параметрическом виде ($b\neq-2a$):

$$x=Ct+C^3\biggl(|t|^{\frac{b-a}{a+b}}+\frac{4t^3}{2a+b}\biggr),\quad y=Ct-C^3\biggl(|t|^{\frac{b-a}{a+b}}+\frac{4t^3}{2a+b}\biggr).$$

12. $(y^3-4xy^2+4x^2y+ay-ax)y'_x=3y^3-14xy^2+20x^2y-8x^3+2ay-2ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x=t+Ct^2\exp\Bigl(-\frac{a}{2t^2}\Bigr),\quad y=t+2Ct^2\exp\Bigl(-\frac{a}{2t^2}\Bigr).$$

13. $(y^3-4xy^2+5x^2y-2x^3+2ay-3ax)y'_x=$
$=2y^3-8xy^2+10x^2y-4x^3+3ay-4ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x=C^{-1}\operatorname{sign}t\,e^{-1/t}+aC|t|e^{1/t},\quad y=C^{-1}\operatorname{sign}t\,e^{-1/t}+2aC|t|e^{1/t}.$$

14. $(y^3-5xy^2+7x^2y-3x^3+ay-2ax)y'_x=$
$=3y^3-15xy^2+21x^2y-9x^3+2ay-3ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x=C^{-1}\operatorname{sign}t\,e^{-1/t}+\tfrac{1}{8}aC|t|e^{1/t},\quad y=C^{-1}\operatorname{sign}t\,e^{-1/t}+\tfrac{3}{8}aC|t|e^{1/t}.$$

15. $(y^3-5xy^2+8x^2y-4x^3+ay+bx)y'_x=$
$=2y^3-10xy^2+16x^2y-8x^3+(3a+b)y-2ax.$

Решение в параметрическом виде ($a\neq-b$):

$$x=t+C|t|^{\frac{2a+b}{a+b}}\exp\biggl[\frac{t^2}{2(a+b)}\biggr],\quad y=t+2C|t|^{\frac{2a+b}{a+b}}\exp\biggl[\frac{t^2}{2(a+b)}\biggr].$$

16. $(y^3+5xy^2+3x^2y-9x^3+ay+bx)y'_x=$
$=-3y^3-15xy^2-9x^2y+27x^3+(b-2a)y+3ax.$

Решение в параметрическом виде ($a\neq-b$):

$$x=t+C|t|^{\frac{b-3a}{b+a}}\exp\Bigl(-\frac{32\,t^2}{a+b}\Bigr),\quad y=t-3C|t|^{\frac{b-3a}{b+a}}\exp\Bigl(-\frac{32\,t^2}{a+b}\Bigr).$$

17. $(y^3-6xy^2+11x^2y-6x^3+ay+bx)y'_x=$
$=2y^3-11xy^2+18x^2y-9x^3+(4a+b)y-3ax.$

Решение в параметрическом виде ($a\neq-\frac{1}{2}b$):

$$x=C^{-1}t|t|^{-\frac{3a+b}{4a+2b}}e^{-t}-(a+\tfrac{1}{2}b)C|t|^{\frac{3a+b}{4a+2b}}e^{t},$$
$$y=C^{-1}t|t|^{-\frac{3a+b}{4a+2b}}e^{-t}-3(a+\tfrac{1}{2}b)C|t|^{\frac{3a+b}{4a+2b}}e^{t}.$$

18. $(y^3 - 6xy^2 + 12x^2y - 8x^3 + ay - ax)y'_x =$
$= 2y^3 - 12xy^2 + 24x^2y - 16x^3 + ay - ax.$

Решение в параметрическом виде ($a < 0$):

$$x = Ct \pm \frac{C^2}{2\sqrt{-a}}\sqrt{2t^4+1}, \quad y = Ct \pm \frac{C^2}{\sqrt{-a}}\sqrt{2t^4+1}.$$

19. $(2y^3 - 3xy^2 + x^2y + ay + bx)y'_x = y^3 - xy^2 + (a+b)y.$

Решение в параметрическом виде ($a \neq -2b$):

$$x = C^{-1}t|t|^{-\frac{b}{a+2b}}e^{-t} + (a+2b)C|t|^{\frac{b}{a+2b}}e^t, \quad y = C^{-1}t|t|^{-\frac{b}{a+2b}}e^{-t}.$$

20. $(2y^3 + 3xy^2 - 3x^2y - 2x^3 + ay + bx)y'_x =$
$= -y^3 + 3xy^2 + 6x^2y - 8x^3 - (a-b)y + 2ax.$

Решение в параметрическом виде ($a \neq 2b$):

$$x = C^{-1}t|t|^{-\frac{2a-b}{a-2b}}e^{-t} - \frac{a-2b}{27}C|t|^{\frac{2a-b}{a-2b}}e^t,$$
$$y = C^{-1}t|t|^{-\frac{2a-b}{a-2b}}e^{-t} + \frac{2(a-2b)}{27}C|t|^{\frac{2a-b}{a-2b}}e^t.$$

21. $(2y^3 - 9xy^2 + 13x^2y - 6x^3 + ay + bx)y'_x =$
$= 3y^3 - 13xy^2 + 18x^2y - 8x^3 + (3a+b)y - 2ax.$

Решение в параметрическом виде ($a \neq -\frac{2}{3}b$):

$$x = C^{-1}t|t|^{-\frac{2a+b}{3a+2b}}e^{-t} - (3a+2b)C|t|^{\frac{2a+b}{3a+2b}}e^t,$$
$$y = C^{-1}t|t|^{-\frac{2a+b}{3a+2b}}e^{-t} - 2(3a+2b)C|t|^{\frac{2a+b}{3a+2b}}e^t.$$

22. $(3y^3 - xy^2 - 3x^2y + x^3 + ay)y'_x = -y^3 + 3xy^2 + x^2y - 3x^3 + ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x = C^{-1}t^{-1}e^{-1/t} + \tfrac{1}{8}aCt^2e^{1/t}, \quad y = C^{-1}t^{-1}e^{-1/t} - \tfrac{1}{8}aCt^2e^{1/t}.$$

23. $(3y^3 + xy^2 - 3x^2y - x^3 + ay)y'_x = y^3 + 3xy^2 - x^2y - 3x^3 + ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x = C^{-1}t|t|e^{-1/t} - \tfrac{1}{8}aC|t|^{-1}e^{1/t}, \quad y = C^{-1}t|t|e^{-1/t} + \tfrac{1}{8}aC|t|^{-1}e^{1/t}.$$

24. $(xy^2 - 2kx^2y + k^2x^3 + ay - ax)y'_x = y^3 - 2kxy^2 + k^2x^2y + kay - kax.$

Решение в параметрическом виде ($k \neq 1$):

$$x = t + C|t|\exp\Big[-\frac{a}{2(k-1)t^2}\Big], \quad y = t + kC|t|\exp\Big[-\frac{a}{2(k-1)t^2}\Big].$$

25. $(y^3 - 3kxy^2 + 3k^2x^2y - k^3x^3 - ay + ax)y'_x =$
$= ky^3 - 3k^2xy^2 + 3k^3x^2y - k^4x^3 - ay + ax.$

Решение в параметрическом виде ($a > 0$, $k \neq 1$):

$$x = Ct \pm C^2\frac{k-1}{2\sqrt{a}}\sqrt{2t^2+1}, \quad y = Ct \pm C^2\frac{k(k-1)}{2\sqrt{a}}\sqrt{2t^2+1}.$$

26. $\boldsymbol{(y^3 - 3kxy^2 + 3k^2x^2y - k^3x^3 + ay + bx)y'_x =}$
$\boldsymbol{= ky^3 - 3k^2xy^2 + 3k^3x^2y - k^4x^3 + [(k+1)a + b]y - kax.}$

Решение в параметрическом виде ($b \neq \frac{1}{2}(k-3)a$, $k \neq 1$):

$$x = Ct + C^3\left[|t|^{\frac{ka+b}{a+b}} + \frac{(k-1)^3}{(k-3)a-2b}t^3\right], \quad y = Ct + kC^3\left[|t|^{\frac{ka+b}{a+b}} + \frac{(k-1)^3}{(k-3)a-2b}t^3\right].$$

27. $\boldsymbol{[y^3 - (k+2)xy^2 + (2k+1)x^2y - kx^3 + 2ay - (k+1)ax]y'_x =}$
$\boldsymbol{= ky^3 - k(k+2)xy^2 + k(2k+1)x^2y - k^2x^3 + (k+1)ay - 2kax.}$

Решение в параметрическом виде ($k \neq 1$):

$$x = C^{-1}\operatorname{sign} t\, e^{-1/t} + \frac{aC}{(k-1)^2}|t|e^{1/t}, \quad y = C^{-1}\operatorname{sign} t\, e^{-1/t} + \frac{akC}{(k-1)^2}|t|e^{1/t}.$$

28. $\boldsymbol{[y^3 - (k+2)xy^2 - k(k-4)x^2y + k^2(k-2)x^3 + ay - ax]y'_x =}$
$\boldsymbol{= (2k-1)y^3 - k(4k-1)xy^2 + k^2(2k+1)x^2y - k^3x^3 + kay - kax.}$

Решение в параметрическом виде ($k \neq 1$):

$$x = t + Ct^2\exp\left[-\frac{a}{2(k-1)^2t^2}\right], \quad y = t + kCt^2\exp\left[-\frac{a}{2(k-1)^2t^2}\right].$$

29. $\boldsymbol{[y^3 - (2k+1)xy^2 + k(k+2)x^2y - k^2x^3 + ay + bx]y'_x =}$
$\boldsymbol{= ky^3 - k(2k+1)xy^2 + k^2(k+2)x^2y - k^3x^3 + [(k+1)a + b]y - kax.}$

Решение в параметрическом виде ($a \neq -b$, $k \neq 1$):

$$x = t + C|t|^{\frac{ka+b}{a+b}}\exp\left[\frac{(k-1)^3}{2(a+b)}t^2\right], \quad y = t + kC|t|^{\frac{ka+b}{a+b}}\exp\left[\frac{(k-1)^3}{2(a+b)}t^2\right].$$

30. $\boldsymbol{(Ay^3 + xy^2 - Ax^2y - x^3 + ay + bx)y'_x = y^3 + Axy^2 - x^2y - Ax^3 + by + ax.}$

1°. $b \neq 0$. Решение в параметрическом виде:

$$x = C^{-1}t|t|^{\frac{a-b}{2b}}|t+1|^{\frac{bA-a}{2b}} - \tfrac{1}{4}bC|t|^{\frac{b-a}{2b}}|t+1|^{\frac{a-bA}{2b}},$$
$$y = C^{-1}t|t|^{\frac{a-b}{2b}}|t+1|^{\frac{bA-a}{2b}} + \tfrac{1}{4}bC|t|^{\frac{b-a}{2b}}|t+1|^{\frac{a-bA}{2b}}.$$

2°. $b = 0$. Решение в параметрическом виде:

$$x = C^{-1}t|t|^{\frac{A-1}{2}}e^{-1/t} - \tfrac{1}{8}aC|t|^{\frac{1-A}{2}}e^{1/t}, \quad y = C^{-1}t|t|^{\frac{A-1}{2}}e^{-1/t} + \tfrac{1}{8}aC|t|^{\frac{1-A}{2}}e^{1/t}.$$

31. $\boldsymbol{(A_3y^3 + A_2xy^2 + A_1x^2y + A_0x^3 + ax)y'_x =}$
$\boldsymbol{= B_3y^3 + B_2xy^2 + B_1x^2y + B_0x^3 + ay.}$

Частный случай уравнения 1.7.1.12а. Преобразование $t = y/x$, $u = x^2$ приводит к линейному уравнению:

$$[P_B(t) - tP_A(t)]u'_t = 2P_A(t)u + 2a,$$

где $P_A(t) = A_3t^3 + A_2t^2 + A_1t + A_0$, $P_B(t) = B_3t^3 + B_2t^2 + B_1t + B_0$.

32. $[Ay^3+(A+2)xy^2-(A-4)x^2y-(A-2)x^3+ay-ax]y'_x =$
$= -(A-2)y^3-(A-4)xy^2+(A+2)x^2y+Ax^3-ay+ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x = t + C|t|^{1-A}\exp\Bigl(\frac{a}{8t^2}\Bigr),\quad y = t - C|t|^{1-A}\exp\Bigl(\frac{a}{8t^2}\Bigr).$$

33. $[Ay^3+3(A+1)xy^2+12x^2y-4(A-3)x^3+ay-ax]y'_x =$
$= -(2A-3)y^3-6(A-2)xy^2+12x^2y+8Ax^3-2ay+2ax.$

Решение в параметрическом виде:

$$x = t + C|t|^{1-A}\exp\Bigl(\frac{a}{18t^2}\Bigr),\quad y = t - 2C|t|^{1-A}\exp\Bigl(\frac{a}{18t^2}\Bigr).$$

1.5. Нелинейные уравнения вида $f(x,y)y'_x = g(x,y)$, содержащие произвольные параметры

1.5.1. Уравнения, содержащие степенные функции

1. $y'_x = A\sqrt{y} + Bx^{-1/2}.$

Замена $w = (2/A)\sqrt{y}$ приводит к уравнению Абеля вида 1.3.1.32: $ww'_x = w + 2BA^{-2}x^{-1/2}$.

2. $y'_x = A\sqrt{y} + Bx^{-1}.$

Пусть $A = \pm 2a^{-1}\sqrt{b}$, $B = \mp 4b$ $(b > 0)$.

Решение в параметрическом виде:

$$x = af(\tau),\qquad y = b[2\tau \pm f(\tau)]^2,$$

где $f(\tau) = \exp(\mp\tau^2)\Bigl[\int \exp(\mp\tau^2)\,d\tau + C\Bigr]^{-1}$.

3. $y'_x = A\sqrt{y} + Bx^{-2}.$

Замена $w = 2A^{-1}\sqrt{y}$ приводит к уравнению Абеля вида 1.3.1.33: $ww'_x = w + 2BA^{-2}x^{-2}$.

4. $y'_x = a\sqrt{y} + bx + cx^m.$

Замена $w = 2a^{-1}\sqrt{y}$ приводит к уравнению Абеля второго рода: $ww'_x = w + 2a^{-2}(bx + cx^m)$, которое рассматривается в разд. 1.3.1.

5. $y'_x = ay^n + bx^{\frac{n}{1-n}}.$

Решение:

$$\int \frac{dw}{aw^n + \frac{1}{1-n}w + b} = \ln|x| + C,\qquad \text{где}\quad w = yx^{\frac{1}{n-1}}.$$