Профессор
И.В.Андрианов,
igor_andrianov@inbox.ru

Математические тени физических явлений

«Точность анализа должна соответствовать грубости модели» — так звучит любимая фраза замечательного ученого-механика Я.Г.Пановко. На первый взгляд она представляется тривиальной, однако на опыте мы часто убеждаемся, сколь глубоки «тривиальные истины» и как следование им сократило бы нам «опыты быстротекущей жизни». Итак, обо всем по порядку.

Физическое явление и ее Тень

И.Кант сказал: «В каждой науке столько науки, сколько в ней математики». В советские времена фраза эта набила оскомину (кажется, ее любил К.Маркс, поэтому она полюбилась и нашим философам). Сейчас ее цитируют реже, но все же похожие заявления приходится довольно часто слышать, особенно от чистых математиков. Что, собственно, она означает — например, для физики?

Имеется в виду, что, после того как составлена математическая модель явления, она должна быть подвергнута как можно более строгому математическому анализу, и чем строже анализ, тем более точное описание реальности мы получим. С этой точки зрения физика — просто «недозревшая» математика. На самом деле ситуация значительно интереснее, и, чтобы понять ее, вспомним пьесу Евгения Шварца: отделившаяся от человека Тень начала жить своей жизнью и натворила немало бед. Так и математическая модель физического явления, используемая за пределами своей применимости, может привести к серьезным недоразумениям. Как говорил в таких случаях ведущий советский радиофизик академик Л.И.Мандельштам: «Идеализация мстит за себя». А забыть об исходных предпосылках модели несложно, особенно если эта модель освящена высоким авторитетом чистой математики, доказанными теоремами и прочим. Отсюда недалеко и до беды. Попробуем проиллюстрировать сказанное несколькими примерами.

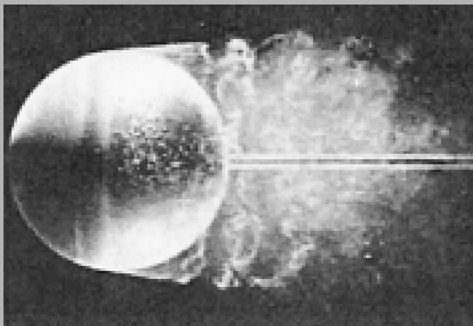
Когда я учил гидродинамику, мне казалось, что она состоит из одних парадоксов. Действительно, посмотрим любой учебник и увидим там «парадокс Эйлера—Д'Аламбера», «парадокс Прандтля», «парадокс Жуковского»... Прекрасная книга американского математика Г.Биркгофа «Гидродинамика: методы, факты, подобие» во многом посвящена именно парадоксам.

Как правило, они связаны как раз с математическими тенями, вздумавшими жить самостоятельной жизнью. Вот, например, парадокс Эйлера—Д'Аламбера. Он заключается в том, что, согласно упрощенным расчетам, шар при равномерном поступательном движении в жидкости не испытывает никакого сопротивления, поскольку давление на шар одинаково со всех сторон. Однако это резко противоречит эксперименту, и, значит, наши упрощения зашли слишком далеко. В основу математической модели положено нечто невозможное, а именно движение без вихрей. На самом же деле вихри постоянно срываются с поверхности шара, изменяя распределение давления по ней и картину течения. Учет этого обстоятельства приводит к новой математической модели, она-то и позволяет получить верный результат.

Не нужно думать, что парадоксы гидродинамики способны приносить только огорчения исследователям. Г.Биркгоф говорил: «Нужно только приветствовать открытие гидродинамических парадоксов, искренне признав неспособность существующей математики (и логики) адекватно отображать сложные и удивительные явления природы. Опыт показывает, что человеческое воображение гораздо более ограниченно, чем ресурсы природы; как писал Паскаль, «воображение скорее устанет постигать, чем природа поставлять».

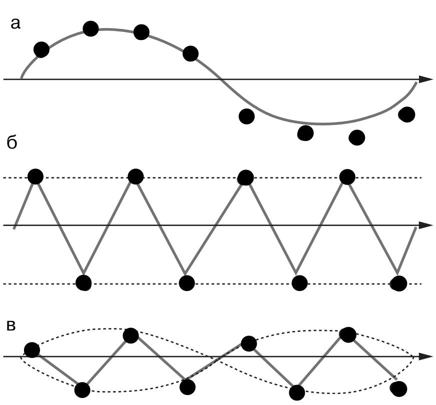
Шарики и пружинки

В механике очень популярна физическая модель: цепочка равных масс, соединенных пружинами одинаковой длины и жесткости. По-видимому, впервые такую модель предложил И.Ньютон в 1686 году для вычисления скорости звука. Он предполагал, что звук распространяется в воздухе так же, как упругая волна распространяется по цепочке



1
Обтекание шара
(Альбом течений жидкости и газа /Сост. и авт. текста М.Ван-Дайк. М.: Мир, 1986)

масс. Полученное Ньютоном значение скорости звука меньше экспериментального; причина в том, что он не учел некоторые термодинамические соображения. П.Лаплас в 1822 году показал: выбрав правильные значения жесткости пружин, удается очень хорошо рассчитать скорость звука. Рассмотренная система — классический пример дискретной физической системы. В то же время в механике, благодаря работам Б.Тейлора (1713) и Л.Эйлера (1748), развивалось представление о непрерывных колеблющихся объектах, например струне. Иначе говоря, речь идет о закрепленном на концах стержне с пренебрежимо малой изгибной жесткостью. Поскольку растянутая цепочка шариков и натянутая струна похожи друг на друга, оставалось сделать маленький, хотя и нетривиальный шаг — установить связь между ними. Это сделал Ж.Лагранж (1759). С тех пор в арсенале механика появились такие приемы, как континуализация — замена дискретной системы непрерывной — и противоположный подход – дискретизация, замена непрерывной системы дискретной. На основе континуализации построена вся механика сплошной среды, на ней же основано представление о жидкости, твердом теле и многом другом. При этом предполагается, что вещества состоят не из дискретных атомов, но их свойства как будто «размазаны» по некоторому объему.



2
Различные формы колебаний цепочки масс
а — плавная форма колебаний, когда на одну полуволну колебаний приходится несколько масс
б — пилообразная форма колебаний, когда все массы колеблются с одинаковой амплитудой
в — близкая к пилообразной форма колебаний

Нетривиальность метода континуализации удачно проиллюстрировал Э.Шредингер: «Допустим, мы рассказали бы древнему греку, что возможно проследить путь отдельной частички жидкости. Он не поверил бы, что ограниченный человеческий ум может дать решение столь запутанной задачи. Дело заключается в том, что мы научились владеть всем процессом с помощью одного дифференциального уравнения».

Естественно, подобная процедура позволяет получить лишь некоторое приближенное по отношению к реальной дискретной системе решение. Какова область его применимости? Нетрудно сообразить, что таким условием служит плавность колебаний, когда их период много больше расстояния между шариками. Чем меньше пространственный период колебаний, тем быстрее растет погрешность полученных таким путем приближенных решений. Казалось бы, все ясно: нужно использовать континуальную модель только для колебаний с большим пространственным периодом и ошибки не случится. На практике же все выглядит по-другому.

Ошибаются и великие

Много лет назад возникла практическая задача — определение напряжений в сцепке вагонов при трогании поезда с места. Пусть локомотив прикладывает некоторое усилие к первому вагону. Что можно сказать об усилиях в сцепке между n-м и (n-1)-м вагонами? В грубом приближении вагоны можно заменить массами, сцепки — пружинами, и тогда возникает задача о движении дискретной системы — цепочки масс. Великий русский механик Н.Е.Жуковский (1919) заменил дискретную систему непрерывной и пришел к задаче о продольных колебаниях конечного стержня, к концу которого приложена сила P. Она допускает изящное математическое решение (ох уж эти изящные математические решения физических задач! Соблазн это), из которого следует, что в процессе движения возникающие в стержне усилия никогда не будут превосходить P. Решение Жуковского многократно повторялось, попало в учебники и справочники, короче, как и положено тени, зажило своей полнокровной жизнью. Однако описанный вывод оказался ошибочным: аналитическое исследование и численные расчеты, проведенные П.Ф.Курчановым, А.Д.Мышкисом и А.М.Филимоновым (1991), его опровергли! В таблице — некоторые результаты расчетов, проведенных в предположении, что приложенная сила равна единице.

Номер вагона	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**$n \to \infty$**
Усилие	1,76	2,06	2,35	2,63	2,91	$P_n \to \infty$

В некоторые моменты времени усилия, возникающие между отдельными вагонами, могут существенно превышать единицу. Более того, при увеличении их числа, что вроде бы должно вести к сближению результатов расчетов в рамках дискретной и непрерывной моделей, это превышение возрастает и стремится к бесконечности! Парадокс?

Вспоминается предупреждение С.Улама: «В обычном способе введения непрерывности многое должно быть подвергнуто критическому рассмотрению и обсуждению. Предельные уравнения молчаливо подразумевают непрерывность и дифференцируемость функций, описывающих движение непрерывной среды, что накладывает различные ограничения. В самом деле: в любой момент можно себе представить две соседние частицы движущимися в противоположные направления с относительной скоростью, не стремящейся к нулю при стремлении к бесконечности количества частиц, в то время как непрерывность решения предельной задачи для сплошной среды исключает такое положение. В некоторых случаях поэтому обычные дифференциальные уравнения гидродинамики могут дать ошибочное описание физического процесса». Еще определеннее высказывались

3
Роттердамский мост

Т.Постон и И.Стюарт: «То, что уравнения механики сплошных сред каким-то чудом в точности описывают усредненное поведение микросистем, составляет привычный догмат веры, но еще никто не доказал этого для реалистичной модели тонкой структуры».

Любопытно, что сейчас в физике регулярно возникают идеи об обусловленности особенностей нашего мира дискретностью пространства-времени. Если так и окажется, это будет еще одним примером того, как математическая тень реальной дискретной структуры оторвалась от своей физической основы и долгое время жила самостоятельной жизнью.

Кубики и матрешки

В следующем примере разговор пойдет о так называемой математической строгости. Точнее, о том, всегда ли математически строгие результаты оказываются правильными. В.И.Арнольд вспоминает, что о своей теории турбулентности великий А.Н.Колмогоров говорил: «Она нестрогая, но правильная, и это — главное». Разумеется, математика — наука строгая, и чисто математические результаты (например, теорема Пифагора) — абсолютные истины в последней инстанции. Однако когда чистые математики начинают применять свои результаты в инженерной практике, держи ухо востро! Вот занятный пример.

Одна из проблем линий электропередач или вант подвесных мостов — колебания под действием ветра при дожде или зимой при низких температурах. В качестве примера можно привести мост Меикониси в порту Нагои или мост Эразма в Роттердаме. В сухую, теплую погоду ванты вполне устойчивы. Сочетание сильного шторма с дождем в 1996-м поставило Роттердамский мост на грань катастрофы из-за колебаний вант с недопустимой амплитудой. Дело в том, что при дожде профиль тросов становится несимметричным, а это приводит к потере устойчивости колебаний (галопированию). То же происходит, если из-за высокой влажности при низких температурах ванты оледеневают или на них налипает снег. Для борьбы с недопустимыми колебаниями нужно вводить демпфирование, а для этого, в свою очередь, требуется составить математическую модель явления. Это весьма непросто — система нелинейна (реакция системы на воздействие непропорциональна его интенсивности), несимметрична, диссипативна (имеет место рассеяние энергии). Анализ экспериментальных результатов показывает, что в рассматриваемом случае мы имеем дело с упругими явлениями. Значит, записывай уравнения теории упругости (а это хорошо развитая теория) и вперед? Однако беда в том, что уравнения получатся очень сложными, трудно их решать, трудно анализировать результаты. Нужны упрощенные модели. Этого добра тоже хватает в механике. Например, если один характерный размер тела много меньше двух других — можно применять теорию пластин (или оболочек, если поверхность сильно искривлена). При двух примерно одинаковых характерных размерах и существенно большем третьем — получается балка, для которой опять-таки есть своя упрощенная модель.

Провода линии электропередачи напоминают гитарные струны. Изгибная жесткость такой струны мала, поэтому уравнение ее колебаний, впервые полученное Ж.Д'Аламбером в середине XVIII века, содержит только два члена, характеризующие силу натяжения и силу инерции. Какова область применимости подобной модели? Возьмем струну и попробуем деформировать ее по одной полуволне синусоиды — для этого практически не нужны никакие усилия. А если по двум полуволнам (так, как это показано на рис. 2а)? Сопротивление нашим усилиям ощутимо нарастает. Значит, пренебрегать изгибной жесткостью можно только до некоего предела, далее следует от модели струны переходить к модели балки, учитывающей изгибные жесткости. Номера гармоник, при которых нужно переходить от модели струны к модели балки, потом к теории упругости, потом, если угодно, к молекулярной теории, определить можно, но только приближенно, то есть по порядку соответствующей величины. Поэтому инженер, ориентируясь на наиболее опасные на практике низшие частоты, ограничится несколькими первыми гармониками, мало заботясь о высших. Как поступает при анализе описанной системы математик? Постулирует модель струны и подвергает ее строгому анализу, принятому в математике. При этом получаются бесконечные системы уравнений, несводимые корректно к конечным. Следовательно, инженерные решения грубо ошибочны! Обсуждая этот «парадокс» с хорошим математиком, я спросил — как можно использовать, скажем, теорию стержней для высоких форм колебаний, когда длина полуволны колебаний сопоставима с ее поперечными размерами. В ответ услышал: «Значит, в данном случае стержень имеет одинаковые размеры по всем направлениям» (!). Тогда я четко осознал разницу в менталитетах физика и математика. Математики воспринимают упрощенные теории, описывающие поведение физических объектов, как некоторые не связанные друг с другом творения чистого разума. Разбросанные на столе резиновые кубики — это упрощенные теории. Взял кубик, на котором написано – «теория пластин», растянул его в одном направлении, сжал в другом — все равно «теория пластин»! Для механика или физика упрощенные теории не существуют поодиночке, а живут семьями, в одном гнезде. Или, если угодно, представляют собой матрешки. Увеличь самую маленькую матрешку в два раза — и она уже заняла место второй по величине матрешки, и так далее. Вот в чем основное отличие мира физических моделей от мира чисто математических зверюшек — это многомасштабные иерархические построения. Тот же математик допытывался у меня: «Так где же четкая грань между моделями струны и балки? Назовите конкретные числа!» – «Да нет их, можно указать только порядок величин». – «Но как же тогда можно что-то анализировать?!»

Конец у этой истории вполне оптимистичен: погрешность приближенных инженерных схем оказалась вполне сопоставимой с точностью исходных гипотез, и их полная ревизия не нужна. Сильные колебания Роттердамского моста устранены при помощи демпферов. Но ходить по нему зимой при сильном ветре все равно не советую – можно простудиться.