

Министерство образования и науки Украины

Приднепровская государственная академия
строительства и архитектуры

И.В. Андрианов, В.В. Данишевский, А.О. Иванков

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК И ПЛАСТИН

Дніпропетровськ
ПДАБА
2010

Министерство образования и науки Украины

Приднепровская государственная академия
строительства и архитектуры

И.В. Андрианов, В.В. Данишевский, А.О. Иванков

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ
КОЛЕБАНИЙ БАЛОК И ПЛАСТИН

Дніпропетровськ
ПДАБА
2010

УДК 539.3
ББК 22.251
А65

А65 Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. – Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. – 216 с.

В монографии рассматриваются асимптотические методы решения задач колебаний балок и пластин. Основное внимание уделено гомотопическому методу возмущений, который основывается на введении искусственного малого параметра. Исследованы линейные колебания конструкций со смешанными граничными условиями, а также нелинейные колебания систем с распределенными параметрами, в которых возникают внутренние резонансы. Для научных работников, инженеров, студентов старших курсов.

В монографії розглядаються асимптотичні методи розв'язання задач коливань балок та пластин. Головну увагу приділено гомотопічному методу збурень, що ґрунтується на введенні штучного малого параметру. Досліджено лінійні коливання конструкцій зі змішаними граничними умовами, а також нелінійні коливання систем з розподіленими параметрами, в яких виникають внутрішні резонанси. Для наукових працівників, інженерів, студентів старших курсів.

ББК 22.251

Рекомендовано до друку Вченою радою Придніпровської державної академії будівництва та архітектури, протокол № 5 від 22 грудня 2009 р.

Рецензенти:

доктор технічних, професор Е.М. Кваша
доктор фізико-математичних наук, професор А.М. Пасічник

ISBN 978-966-323-064-1

© І.В. Андрианов, В.В. Данішевський,
А.О. Иванков, 2010

© Придніпровська державна академія
будівництва та архітектури, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	6
0.1. Методы расчета пластин со сложными граничными условиями	6
0.2. Метод возмущения вида граничных условий	9
0.3. Аппроксимации Паде	12
Глава 1. Собственные колебания балок и пластин	22
1.1. Собственные колебания защемленной балки	22
1.2. Собственные колебания балки со свободными краями	29
1.3. Собственные колебания защемленной прямоугольной пластины	35
1.4. Собственные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными краями, лежащей на упругом основании	41
1.5. Собственные колебания пластины со смешанными граничными условиями «защемление – шарнир»	47
1.6. Сравнение теоретических и экспериментальных данных	55
1.7. Собственные колебания частично защемленной по контуру пластины	57
1.8. Собственные колебания пластины со смешанными граничными условиями «свободный край – подвижная заделка»	64
Глава 2. Нелинейные колебания балок и пластин	70
2.1. Колебания стержня в нелинейно-упругой внешней среде	70
2.2. Колебания балки на нелинейно-упругом основании	81
2.3. Колебания мембраны на нелинейно-упругом основании	84
2.4. Колебания пластины на нелинейно-упругом основании	88
Глава 3. Напряженно-деформированное состояние (НДС) балок и пластин	92
3.1. НДС балки с защемленными торцами	92
3.2. НДС балки со свободными краями	96
3.3. НДС защемленной пластины	99
3.4. НДС пластины со свободными краями	104
3.5. НДС пластины со смешанными граничными условиями «защемление – шарнир»	107

3.6. НДС пластины со смешанными граничными условиями «свободный край – подвижная заделка»	116
Глава 4. Вынужденные колебания балок и пластин	122
4.1. Вынужденные колебания защемленной балки	122
4.2. Вынужденные колебания балки со свободными краями	128
4.3. Вынужденные колебания защемленной пластины	132
4.4. Вынужденные колебания пластины со свободными краями	134
4.5. Вынужденные колебания пластины со смешанными граничными условиями «защемление – шарнир»	139
4.6. Вынужденные колебания пластины со смешанными граничными условиями «свободный край – подвижная заделка»	145
Глава 5. Устойчивость пластин	152
5.1. Устойчивость защемленного стержня	152
5.2. Устойчивость защемленной прямоугольной пластины	155
5.3. Устойчивость прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями «защемление – шарнир»	158
5.4. Сравнение теоретических и экспериментальных данных	169
Глава 6. Некоторые обобщения	171
6.1. Динамика неоднородных конструкций	171
6.2. Метод Ишлинского-Лейбензона	175
6.3. Собственные планарные колебания пластины	182
6.4. Колебания струны с концевой массой и вязким демпфером	187
6.5. Колебания струны с нелинейными граничными условиями	191
6.6. Уменьшение порядка дифференциальных уравнений	199
Литература	202

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее время в механике весьма популярным стал так называемый гомотопический метод возмущений [142, 148, 150–152, 154–157, 163, 164]. Суть его заключается в следующем. В уравнения или в граничные условия вводится параметр ε таким образом, чтобы при значении $\varepsilon = 0$ получалась краевая задача, допускающая простое решение, а при $\varepsilon = 1$ – исходная краевая задача. Далее применяется метод возмущений по ε и в полученном решении принимается $\varepsilon = 1$. В вычислительной математике подобный прием называется методом продолжения по параметру. Разумеется, этот прием не нов; он использовался, например, еще А.М. Ляпуновым [79]. Новым (и на наш взгляд, достаточно удачным) является название, подчеркивающее переход от исходного значения $\varepsilon = 0$ к конечному $\varepsilon = 1$. Как правило, данный подход требует дальнейшего применения метода мероморфного продолжения [58–60, 91–93, 148].

Сочетание гомотопического метода возмущений с аппроксимациями Паде было предложено в работах [9–17, 68, 120–131] и получило дальнейшее развитие в [19–21]. На этих работах и основана наша монография. Пользуемся приятной возможностью выразить признательность за многолетнее сотрудничество Л.В. Курпе, Е.Г. Холод и В.А. Чернецкому.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Методы расчета пластин со сложными граничными условиями

Тонкостенные пластинчатые конструкции находят широкое применение в различных отраслях современной техники. В промышленном и гражданском строительстве это покрытия, перекрытия, рабочие площадки, некоторые виды фундаментов; в машиностроении – элементы технологического оборудования. Указанные конструкции подвергаются разнообразным статическим и динамическим воздействиям, при этом к их прочности и надежности предъявляются все возрастающие требования [8, 37, 38, 41, 43, 46, 48, 56, 70, 96, 103, 112].

В реальных конструкциях граничные условия для пластин часто имеют сложный вид: свободный край, защемление, упругая заделка, а также разного рода смешанные граничные условия. Подобные условия могут предусматриваться конструктивными решениями при проектировании; например, перекрытия часто имеют сложные способы опирания смешанного типа. Следует также отметить возможность появления смешанных граничных условий при соединении элементов строительных конструкций при помощи закладных деталей, а также прерывистым сварным швом. Смешанные граничные условия могут образоваться при опирании пластины на шероховатую поверхность. Наконец, расчет пластин с трещинами или узкими разрезами в некоторых случаях может быть приведен к расчету конструкций со смешанными граничными условиями. Следует также иметь в виду, что расчетная схема конструкции может измениться во время эксплуатации под влиянием внешних воздействий (появление коррозионных или усталостных трещин, разрушение части опорного контура и т.п.). В этом случае возможно появление опирания смешанного типа там, где это первоначально не предусматривалось.

Расчет пластин сводится к интегрированию бигармонических уравнений с различными граничными условиями. Точное решение этой задачи удается получить лишь для нескольких случаев, когда граничные условия не препятствуют разделению пространственных переменных [105–107]. Иначе задачу приходится решать приближенно, чаще всего численно. Наиболее разработанными из приближенных методов являются вариационные – Рэлея-Ритца, Канторовича, Бубнова-Галеркина, Треффтца и их модификации. Эти методы в известной степени удовлетворяют за-

просам практики, их применение позволило решить большое количество задач. К сожалению, эффективность вариационных методов существенно снижается в задачах, имеющих смешанные граничные условия, из-за трудностей в построении координатных функций, которые должны удовлетворять различным граничным условиям на различных участках границы.

Наибольшей универсальностью обладает один из вариантов метода Рэлея-Ритца – метод конечных элементов (МКЭ) [35, 36, 90]. В последнее время он получил наибольшее распространение на практике. Сейчас применяется большое количество разнообразных конечных элементов, способных описать практически любую задачу. Однако, данный подход не лишен недостатков: трудно оценить погрешность метода, возможна неустойчивость счета вблизи точек смены граничных условий и т.п. К тому же МКЭ требует существенных затрат машинного времени.

Метод конечных разностей (МКР) позволил решить некоторые задачи статики и динамики пластин со смешанными граничными условиями различных типов. Однако и в этом случае оценка точности полученных результатов представляет самостоятельную задачу, требующую дополнительного исследования.

Близким по духу МКР является метод коллокаций. Суть его состоит в том, что исходное дифференциальное уравнение равновесия или движения пластины удовлетворяется в отдельных точках внутри области, занимаемой пластиной (точках коллокаций). К некоторым смешанным задачам пластин данный метод был применен, например, в работе [79] для отыскания частот собственных колебаний.

Оригинальный приближенный метод расчета пластин со смешанными граничными условиями предложен В.А.Смирновым [103]. Суть его состоит в том, что пластина представляется в виде набора связанных перекрестных балок. На контуре отсутствует вертикальное перемещение балок. В местах шарнирного опирания моменты на концах балок равны нулю, в местах защемления момент неизвестен и отыскивается при помощи метода сил. Автором предложено решение в матричной форме. В месте смены граничных условий предполагается линейное распределение краевого момента от нуля в месте шарнирного опирания до какой-то конкретной величины в месте защемления. Данным методом решены задачи о расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) и частот собственных колебаний прямоугольных пластин, имеющих смешанные граничные условия типа «защемление-шарнир». Для смешанных граничных условий другого вида расчет существенно усложняется. Остается также открытым вопрос о возможности применения данного метода к определению критических нагрузок при расчете на устойчивость.

Определенной универсальностью обладает метод R-функций. Применению его к задачам теории пластин посвящен ряд монографий и ста-

тей В.Л. Рвачева и его учеников [73, 84, 98-10]. Метод R-функций позволяет определять частоты и формы собственных и вынужденных колебаний, НДС, критические силы и формы потери устойчивости пластин с любым очертанием контура и произвольными граничными условиями.

К расчету пластин со сложными (в том числе и смешанными) граничными условиями может быть применен асимптотический метод В.В. Болотина [32–34]. Основная идея метода заключается в представлении искомого решения в виде суммы двух составляющих: основного во внутренней области, занимаемой пластиной, и корректирующего состояния типа динамического краевого эффекта, локализованного в малой окрестности контура и быстро затухающего при удалении во внутреннюю область. К сожалению, область применения метода ограничена динамическими задачами. Для задач устойчивости метод дает значительную погрешность.

К смешанным задачам теории пластин с успехом применяются методы, связанные с интегральными преобразованиями. Так, например, для полубесконечных пластин с различными вариантами смешанных граничных условий В.И. Швабюком при помощи метода бесконечных интегральных преобразований получены решения задач о расчете НДС [117]; задачи о расчете НДС и собственных колебаний полубесконечных пластин с различными вариантами смешанных граничных условий рассмотрены Н. Zorski в ряде работ [170, 171].

Широкое распространение получил метод интегральных уравнений [108, 109]. Решение в этом случае отыскивается в виде интегрального представления, которое эквивалентно исходной краевой задаче. Полученное интегральное уравнение решается приближенно. Дальнейшим развитием упомянутого выше метода является метод граничных интегральных уравнений. Полученное интегральное уравнение сводится к интегральному уравнению по контуру, что позволяет снизить размерность задачи. Далее интегральное уравнение решается каким-либо численным методом. Если границу контура аппроксимировать конечными элементами, то получается известный метод граничных элементов [116].

Наиболее существенные результаты в решении смешанных задач теории пластин получены методом кратных рядов (или кратных уравнений). Основная идея метода состоит в следующем. Отыскивается общее решение дифференциального уравнения, содержащее набор произвольных постоянных. На каждом отдельном участке смешанных граничных условий эти постоянные выбираются так, чтобы условия удовлетворялись. При этом, если решение представляется в виде ряда Фурье, то получается столько различных рядов, сколько имеется участков смены граничных условий. Если решение отыскивается в виде интеграла Фурье, то получается набор кратных интегральных уравнений. После этого к полученной системе рядов (уравнений) применяется конечное интегральное

преобразование, которое приводит кратные ряды (уравнения) к бесконечной системе линейных алгебраических (интегральных) уравнений, решаемых известными методами. Применение данного подхода к задачам о расчете НДС и колебаний пластин со смешанными граничными условиями рассматривалось в ряде работ А.И. Цейтлиным и Б.Г. Гликманом [45, 111–115], к задачам устойчивости трехслойных пластин со смешанными граничными условиями – С.А. Амбарцумяном [8], к контактным задачам теории упругости и изгиба пластин – В.М. Александровым и его учениками [2–6, 64].

Рассмотренными выше методами удобно пользоваться в случае, когда размеры участков границы с различными условиями закрепления соизмеримы с линейными размерами пластины. Если же эти участки малы, то можно перейти к некоторым осредненным граничным условиям. Методика их построения изложена в монографии В.А. Марченко и Е.Я. Хруслова [83].

Одним из важнейших типов конструкций со сложными граничными условиями являются пластины со свободными краями на упругом основании. Для их расчета Б.Г. Корневым предложен метод компенсирующих нагрузок [70]. Сущность последнего состоит в том, что вместо области, занимаемой пластиной, рассматривают более широкую область (например, всю плоскость) с двумя нагрузками: первая (основная) совпадает с действующей на рассматриваемую пластину нагрузкой, а вторую (компенсирующую) выбирают так, чтобы на контуре удовлетворялись краевые условия. Решение задачи о поведении неограниченной пластины под действием первой нагрузки называется основным, под действием второй – компенсирующим. Сумма решений должна удовлетворить исходному дифференциальному уравнению и всем граничным условиям. В общем случае для определения компенсирующей нагрузки получается интегральное уравнение Фредгольма. В ряде простых случаев можно прийти к системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных.

0.2. Метод возмущения вида граничных условий

Представленные выше численные и полуаналитические методы ориентированы на применение современных вычислительных средств. Их применение на стадии вариантного и оптимального проектирования не всегда удобно из-за больших затрат компьютерного времени. Поэтому весьма актуальна разработка приближенных аналитических методов расчета пластин со сложными граничными условиями, дающих возможность получить простые и наглядные формулы, необходимые при практических

инженерных расчетах, достаточно точных и дающих качественную информацию о поведении пластины, а также провести исследование влияния различных факторов (геометрических и жесткостных характеристик, условий закрепления и т.п.) на поведение конструкций.

Один из возможных подходов к решению этой задачи – метод возмущения вида граничных условий. Этот метод, предложенный А.А. Дородницыным [58, 59] – новый вариант известного метода малого параметра. Основная идея его такова.

Пусть дана краевая задача, описываемая дифференциальным уравнением

$$L(U) = 0 \quad (0.1)$$

и граничными условиями

$$D(U) = 0 \quad \text{на } \partial G, \quad (0.2)$$

где $L(U)$ и $D(U)$ – некоторые дифференциальные операторы, причем

$$D(U) = D_0(U) + \varepsilon D_1(U).$$

Параметр ε вводится изначально или таким образом, чтобы оператор $D_0(U)$ имел наиболее простой вид. Если краевая задача

$$L(U) = 0, \quad D_0(U) = 0 \quad \text{на } \partial G \quad (0.3)$$

легко решается, то решение при возмущенных граничных условиях естественно искать в виде рядов по параметру ε . При этом возникает необходимость рассматривать ряды теории возмущений при $\varepsilon = 1$. Как правило, они оказываются расходящимися, что обуславливается наличием полюсов в круге $r \leq |1|$. Чтобы преодолеть этот недостаток, А.А. Дородницыным было предложено применять аналитическое продолжение [58, 59].

Аналитическое продолжение [27, 28, 72] позволяет решить две фундаментальные задачи: во-первых, определить особые точки функции, основываясь на ее разложении по параметру; во-вторых, вычислить значение функции в любой точке интервала $0 \leq \varepsilon \leq 1$. К сожалению, на этом пути не было получено значительных практических результатов по той причине, что для определения особых точек необходимо иметь высшие приближения ряда теории возмущений или, по крайней мере, их асим-

птотические оценки. В реальных задачах, как правило, это невозможно. Без точного же определения полюсов применить стандартные методы замены параметра при аналитическом продолжении не представляется возможным.

Иногда информацию о положении полюсов искомой функции удается получить из коэффициентов дифференциального оператора $L(U)$, входящего в краевую задачу. Однако для уравнений, которые описывают задачи строительной механики, такие оценки получены не были.

Повысить эффективность аналитического продолжения можно следующим образом. Рассмотрим граничные условия (0.2) в преобразованном виде

$$D_0(U) + [D(U) - D_0(U)] = 0 \quad \text{на } \partial G. \quad (0.4)$$

Введем в рассмотрение новый параметр ε_1 :

$$D_0(U) + \varepsilon_1 [D(U) - D_0(U)] = 0 \quad \text{на } \partial G, \quad (0.5)$$

где α – не равная нулю постоянная. Сравнивая граничные условия (0.4) и (0.5), установим связь между параметрами ε и ε_1 :

$$\varepsilon = \frac{\alpha \varepsilon_1}{1 - (1 - \alpha) \varepsilon_1}. \quad (0.6)$$

Функция (0.6) преобразует круг единичного радиуса плоскости ε_1 в круг радиуса $1/(2 - \alpha)$ с центром в точке $\left(\frac{1 - \alpha}{2 - \alpha}; 0\right)$ плоскости ε . Тогда, если решение краевой задачи (0.1), (0.4) не имеет особенностей внутри круга с центром в точке $(0.5; 0)$ плоскости ε , радиус которого больше $0.5 + \delta$, где δ – сколь угодно малое положительное число, то при достаточно малом $\alpha > 0$ решение краевой задачи при граничных условиях (0.4) будет аналитично по ε_1 при $\varepsilon_1 \leq 1$. Это известный метод суммирования Эйлера [23, 39, 135, 153, 172–176].

Указанный вариант метода возмущения вида граничных условий применялся в ряде исследований А.А. Дородницына, И.А. Меллера [60, 162] и Б.В. Пальцева [91–93] при решении задач динамики вязкой жидкости.

Более общий метод можно получить, считая α зависящим от ε_1 :

$$\varepsilon = \frac{\alpha(\varepsilon_1)\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1 [1 - \alpha(\varepsilon_1)]} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{\alpha\sigma(P)\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1 [1 - \alpha\sigma(P)]},$$

где $\sigma(P)$ – произвольная строго положительная функция, определенная на границе ∂G .

К сожалению, для конкретных задач остается открытым вопрос о выборе эффективного «релаксационного» коэффициента α или функций $\alpha(\varepsilon_1)$ и $\sigma(P)$. К тому же аналитическое продолжение не гарантирует увеличения скорости сходимости ряда и не снимает вопроса о построении высших приближений.

Локальность асимптотических разложений является крупным недостатком метода малого параметра. Преодолеть его за счет увеличения количества членов в ряде возмущения, как правило, не удастся. В реальных задачах «можно вычислить только несколько членов возмущенного решения, обычно не больше, чем два или три... Получающиеся ряды часто медленно сходятся или даже расходятся. Тем не менее, эти несколько членов содержат значительную информацию, из которой исследователь должен извлечь все, что возможно» [39]. Таким образом, разработка методов расширения области применимости асимптотических разложений – практически важная задача. Однако достигнутые в этой области результаты далеки от завершения.

В настоящее время известен ряд подходов к решению данной проблемы. Метод аналитического продолжения подробно описан выше. Основой метода обобщенного суммирования служит переразложение исходных рядов по системе некоторых функций, называемых обобщенно-суммирующими. Указанный подход был предложен Я.Ф. Каюком [66], который разработал различные варианты обобщенного суммирования и выполнил их математическое обоснование. Этот метод успешно применен к решению ряда задач теории упругости, механики сплошной среды и гидроаэродинамики.

0.3. Аппроксимации Паде.

Остановимся на аппроксимациях Паде, позволяющих осуществить в определенном смысле наиболее естественное преобразование степенного ряда в дробно-рациональную функцию.

Дадим определение, следуя [24]. Пусть задан степенной ряд:

где $c_j = 0$ при $j < 0$.

Система (0.11) может быть записана следующим образом:

$$\begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \dots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \dots & c_{L+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_L & c_{L+1} & \dots & c_{L+M-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \dots \\ b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ \dots \\ c_{L+M} \end{vmatrix}. \quad (0.12)$$

Отсюда могут быть найдены коэффициенты b_i .

Коэффициенты a_i находятся теперь из (0.10) путем приравнивания коэффициентов при z^0, z^1, \dots, z^L :

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0, \\ a_L &= c_L + \sum_{i=1}^P b_i c_{L-i}; \end{aligned} \quad (0.13)$$

где $P = \min(L, M)$.

Уравнения (0.12), (0.13) называются уравнениями Паде. В случае, когда система (0.12) разрешима, уравнение Паде определяют коэффициенты числителя и знаменателя АП $f_{[L/M]}(z)$. Функции $f_{[L/M]}(z)$ при различных значениях L и M образуют набор, который принято записывать в виде таблицы, называемой таблицей Паде:

$M \backslash L$	0	1	2	...
0	$f_{[0/0]}(z)$	$f_{[1/0]}(z)$	$f_{[2/0]}(z)$...
1	$f_{[0/1]}(z)$	$f_{[1/1]}(z)$	$f_{[2/1]}(z)$...
2	$f_{[0/2]}(z)$	$f_{[1/2]}(z)$	$f_{[2/2]}(z)$...
...

Первая строка таблицы соответствует набору конечных сумм ряда Маклорена, а первый столбец – набору конечных сумм ряда Лорана. При

равенстве степеней числителя и знаменателя ($L = M$) получаем диагональные АП, получившие наибольшее распространение на практике.

Рассмотрим подробно построение АП на примере функции $f(z) = e^z$, разложение которой в ряд Маклорена таково:

$$f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \dots$$

Построим АП, для которой степени числителя и знаменателя равны единице:

$$f_{[1/1]}(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 + b_1 z}.$$

Уравнение (0.12) в этом случае: $1/2 + b_1 = 0$. Отсюда имеем $b_1 = -1/2$, а из уравнения (0.13) находим $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$. Окончательно получим:

$$f_{[1/1]}(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}.$$

Аналогично строятся АП любого порядка при заданных степенях числителя и знаменателя. Верхний угол таблицы Паде функции e^z приведен в табл. 0.1, где также указаны численные значения и относительные погрешности АП $f_{[L/M]}(z)$ и соответствующего отрезка ряда $f_{L+M}(z)$ в точке $z = 1$.

Чтобы продемонстрировать эффективность метода АП, рассмотрим функцию

$$f(z) = \sqrt{\frac{1+z/2}{1+2z}}. \quad (0.14)$$

Отрезок ряда Маклорена, содержащий первые три члена ряда, имеет вид:

$$f(z) = 1 - \frac{3}{4}z + \frac{39}{32}z^2 + \dots \quad (0.15)$$

АП, построенная по первым трем членам отрезка ряда (0.15), такова:

Таблица 0.1.

$\begin{array}{c} L \\ M \end{array}$	0	1	2
0	$f_{[0 0]}(z) = \frac{1}{1}$ $f_{[0 0]}(1) = f_0(1) = 1$ (-63%)	$f_{[1 0]}(z) = \frac{1+z}{1}$ $f_{[1 0]}(1) = f_1(1) = 2$ (-26%)	$f_{[2 0]}(z) = \frac{2+2z+z^2}{2}$ $f_{[2 0]}(1) = f_2(1) = 2.5$ (-8.0%)
1	$f_{[0 1]}(z) = \frac{1}{1-z}$ $f_{[0 1]}(1) = \infty$ (∞) $f_1(1) = 2$ (-26%)	$f_{[1 1]}(z) = \frac{2+z}{2-z}$ $f_{[1 1]}(1) = 3$ (10%) $f_2(1) = 2.5$ (-8.0%)	$f_{[2 1]}(z) = \frac{6+4z+z^2}{6-2z}$ $f_{[2 1]}(1) = 2.75$ (1.2%) $f_2(1) = 2.667$ (-1.9%)
2	$f_{[0 2]}(z) = \frac{2}{2-2z+z^2}$ $f_{[0 2]}(1) = 2$ (-26%) $f_2(1) = 2.5$ (-8.0%)	$f_{[1 2]}(z) = \frac{6+2z}{6-4z+z^2}$ $f_{[1 2]}(1) = 2.667$ (-1.9%) $f_3(1) = 2.667$ (-1.9%)	$f_{[2 2]}(z) = \frac{12+6z+z^2}{12-6z+z^2}$ $f_{[2 2]}(1) = 2.714$ (-0.15%) $f_4(1) = 2.708$ (-0.38%)

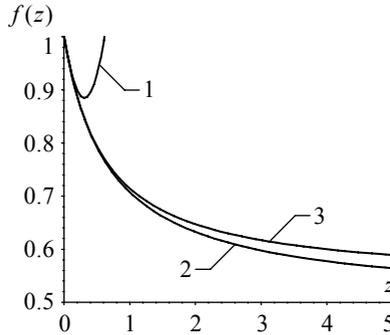


Рис. 0.1. Иллюстрация эффективности метода АП на примере функции $f(z) = \left[\frac{(1+z/2)}{(1+2z)} \right]^{-1}$.

$$f_{[1/1]}(z) = \frac{8+7z}{8+13z}. \quad (0.16)$$

На рис. 0.1 приведены для сравнения графики исходной функции $f(z)$ (0.14) (кривая 1), отрезка ряда (0.15) (кривая 2) и АП (0.16) (кривая 3) при $z \geq 0$.

В частности имеем: $f(\infty) = 1/2$, $f_{[1/1]}(\infty) = 7/13$. Таким образом, при $z \rightarrow \infty$ АП позволяет вычислить значение исходной функции с точностью 8%, в то время как соответствующий отрезок ряда можно использовать только в окрестности нуля.

Отметим некоторые свойства АП [24, 47, 55, 71, 78, 94, 95, 97, 104, 110]:

1. Если АП при выбранных M и L существует, то она единственна.
2. Если последовательность АП сходится к данной функции, то корни ее знаменателя стремятся к полюсам функции. Это позволяет при достаточно большом числе членов ряда определить полюса, а затем выполнить аналитическое продолжение.
3. АП осуществляет мероморфное продолжение заданной степенным рядом функции.
4. АП от обратной функции равна обращению АП самой функции. Это свойство называется двойственностью и более строго формулируется так. Пусть

$$g(z) = [f(z)]^{-1} \quad \text{и} \quad f(0) \neq 0.$$

Тогда

$$g_{[L/M]}(z) = [f_{[L/M]}(z)]^{-1}$$

при условии, что одна из этих аппроксимаций существует.

5. Диагональные АП инвариантны относительно дробно-линейных преобразований аргумента. Пусть есть функция, заданная своим разложением (0.7). Рассмотрим дробно-линейное преобразование $w = az/(1+bz)$ и соответствующую новую функцию $g(w) = f(z)$. Тогда

$$g_{[M/M]}(w) = f_{[M/M]}(z)$$

при условии, что одна из этих АП существует.

6. Диагональные АП инвариантны относительно дробно-линейных преобразований функций. Пусть дана функция (0.7). Положим

$$g(z) = \frac{a + bf(z)}{c + df(z)}.$$

Если $c + df(0) \neq 0$, то

$$g_{[M/M]}(z) = \frac{a + bf_{[M/M]}(z)}{c + df_{[M/M]}(z)}$$

при условии, что АП $f_{[M/M]}(z)$ существует. Следствием этого свойства является то, что бесконечные значения АП можно рассматривать наравне с конечными.

7. АП позволяют получить верхнюю и нижнюю оценки функции. Рассмотрим верхний угол таблицы Паде:

$M \backslash L$	0	1	2	3	...
0	○	● ⋮			...
1		○	● ⋮		...
2			○	● ⋮	...
3				○	...
...

Если АП, обозначенные сплошными кружками, дают верхнюю оценку функции, то АП, обозначенные пустыми кружками – нижнюю. И наоборот, если АП, обозначенные сплошными кружками, дают нижнюю оценку функции, то АП, обозначенные пустыми кружками – верхнюю. Таким образом, значение функции попадает в «вилку» между АП, соединенными пунктирными линиями.

8. Для диагональной АП верна оценка:

$$f_{[M/M-1]}^{\circ}(z) \leq f_{[M/M]}^{\circ}(z) \leq f_{[M/M+1]}^{\circ}(z).$$

9. АП обладает важнейшим свойством автокоррекции [77, 158–161]. Суть его заключается в следующем. Для определения коэффициентов числителя и знаменателя приходится решать системы линейных алгебраических уравнений. Это – некорректная операция, поэтому коэффициенты АП будут определяться с большими погрешностями. Однако при этом погрешность определения коэффициентов числителя и знаменателя в некотором смысле самосогласованна, поэтому точность самой АП при этом сохраняется. В этом радикальное отличие АП от ряда Тейлора, при вычислении которого с ростом числа членов погрешность только нарастает.

Результаты о сходимости АП позволяют лишь повысить достоверность решения (смысл последнего термина подробно обсуждается в [30, 31]). Действительно, на практике можно построить конечное число АП, а все теоремы о сходимости требуют информации о бесконечном их числе.

В определенном смысле наиболее сильной является теорема А.А. Гончара [47, 49, 50, 104]. Суть ее состоит в том, что, если ни одна из диагональных АП $f_{[M/M]}^{\circ}(z)$ не имеет полюсов в круге радиусом R , то последовательность $f_{[M/M]}^{\circ}(z)$ равномерно сходится в этом круге к исходной функции $f(z)$. Более того, из отсутствия полюсов последовательности $f_{[M/M]}^{\circ}(z)$ в круге радиуса R следует и сходимость исходного ряда Тейлора в этом круге.

Поскольку диагональные АП инвариантны относительно дробно-линейных отображений $z \rightarrow z/(az + b)$, теорема верна для любого открытого круга, содержащего точку разложения, и для любой области, являющейся объединением этих кругов.

Существенным недостатком для практики является необходимость проверки всех диагональных АП. Дело в том, что, если в круге радиуса R не имеет полюсов лишь некоторая подпоследовательность последовательности диагональных АП, то равномерная сходимость ее к исходной голоморфной в данном круге функции гарантирована лишь при $r < r_0$,

где $0.583R < r_0 < 0.584R$ [44]. Имеется контрпример, показывающий, что в общем случае $r < r_0$.

Что дают эти теоремы? Предположим, что мы имеем отрезок ряда теории возмущений и хотим оценить его радиус сходимости R . Построим все возможные диагональные АП по известному отрезку ряда. Рассмотрим интервал $[0, \varepsilon_0]$, на котором отрезок ряда и последняя диагональная АП разнятся не более, чем, скажем, на 5%. Если ни одна из предыдущих диагональных АП не имеет на этом интервале полюсов, то весьма достоверно, что $\varepsilon_0 \leq 0.583R$.

Большой положительный опыт применения АП накоплен в физике, теории аппроксимации функций [22, 101, 102, 118–120, 132–134].

Наиболее существенным является то, что процедура построения АП значительно менее трудоемка, чем нахождение высших приближений теории возмущений. К тому же следует добавить, что при помощи АП в некоторых случаях удастся выявить такие эффекты, которые не могут быть найдены при рассмотрении отрезка ряда возмущений.

В заключении следует отметить, что АП распространяется не только на степенные, но и на тригонометрические ряды, а также на разложения по ортогональным полиномам. Например, при помощи тригонометрических АП достигнуты существенные результаты при аппроксимации обобщенных функций и при устранении дефекта сходимости тригонометрических рядов [101, 102, 166].

Задача эффективного аналитического продолжения заданной степенным рядом аналитической функции и локализации ее особенностей непосредственно по коэффициентам этого ряда является классической задачей комплексного анализа. Указанная проблема возникла под влиянием вейерштрассовского подхода к понятию аналитической функции, который основывается на том, что функция задается аналитическим элементом – сходящимся степенным рядом вида (0.7), и ставит своей целью выразить свойства аналитической функции непосредственно в терминах коэффициентов этого ряда.

АП – это локально наилучшие рациональные аппроксимации заданного степенного ряда. Они конструируются непосредственно по его коэффициентам и позволяют осуществлять эффективное аналитическое продолжение этого ряда за пределы его круга сходимости, а их полюсы в определенном смысле локализуют особые точки (в том числе полюсы и их кратности) продолженной функции в соответствующей области сходимости и на ее границе. Последнее свойство АП основано на том, что все их полюсы «свободны» и определяются только условием максимальной касания заданного степенного ряда. Этим АП принципиально отличаются от рациональных аппроксимаций с полностью или частично фиксированными полюсами, в том числе от полиномиальных приближе-

ний, в случае которых все полюсы фиксированы в одной, бесконечно удаленной, точке.

Именно указанное выше свойство АП – эффективно решать задачу аналитического продолжения степенного ряда – и лежит в основе их многочисленных успешных применений в анализе и при исследовании прикладных задач. В настоящее время метод АП является одним из наиболее перспективных нелинейных методов суммирования степенного ряда и локализации его особых точек. В том числе и по этой причине теория АП превратилась во вполне самостоятельный раздел теории приближений, а сами АП нашли разнообразные применения как непосредственно в теории рациональных приближений, так и в теории чисел, теории несамосопряженных операторов, исследовании дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра, в теории возмущений [120].

Итак, основные преимущества АП по сравнению с рядами Тейлора таковы [47, 57]:

1. Как правило, скорость сходимости рациональных приближений значительно превышает скорость сходимости полиномиальных приближений. Например, функция e^z в круге сходимости аппроксимируется рациональными полиномами $P_n(z)/Q_n(z)$ в 4^n раз лучше, чем алгебраическим многочленом степени $2n$. Еще ощутимее это проявляется для функций ограниченной гладкости. Так, функцию $|z|$ на отрезке $[-1, 1]$ нельзя приблизить алгебраическими многочленами так, чтобы порядок приближения был лучше, чем $1/n$, где n – степень многочлена. АП дает экспоненциальную сходимость со скоростью порядка $e^{-\sqrt{2n}}$.

2. Обычно область сходимости рациональных приближений более широкая по сравнению со степенными рядами.

3. АП позволяют установить положение особенностей функции.

Нахождение приближенных аналитических решений, имеющих достаточную точность, возможно при помощи комбинации двух подходов – метода возмущения вида граничных условий и дробно-рационального преобразования полученного отрезка ряда возмущения. Последовательность действий может быть следующей. В граничных условиях краевой задачи выделяется некоторый малый параметр таким образом, чтобы при равенстве этого параметра нулю удавалось построить аналитическое решение упрощенной краевой задачи. Если выделить малый параметр не удастся, то его следует вводить искусственно. Далее к задаче, содержащей малый параметр, применяется метод возмущения, что позволяет отыскивать приближенное аналитическое решение. К сожалению, его точность в большинстве случаев неудовлетворительна. Для преодоления этого недостатка к найденному отрезку ряда возмущений следует применять АП, осуществляющее мероморфное продолжение функции.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК И ПЛАСТИН

1.1. Собственные колебания защемленной балки

Рассмотрим применение метода возмущения вида граничных условий в сочетании с АП на примере задачи, имеющей точное решение: определение частот и форм собственных колебаний защемленной по торцам балки длиной l . Исходное дифференциальное уравнение таково:

$$EIz_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \rho z_{tt} = 0, \quad (1.1)$$

где EI – изгибная жесткость; ρ – масса на единицу длины балки, $-l/2 \leq \bar{x} \leq l/2$.

Введем безразмерную координату:

$$x = \bar{x}/l. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) запишется в виде:

$$z_{xxxx} + \frac{\rho l^4}{EI} z_{tt} = 0. \quad (1.3)$$

Решение данного уравнения ищем методом разделения переменных:

$$z = W(x)T(t). \quad (1.4)$$

После подстановки выражения (1.4) в уравнение (1.3) получим два уравнения

$$\ddot{T} + \theta^2 T = 0, \quad (1.5)$$

$$W^{IV} - \lambda W = 0, \quad (1.6)$$

где θ^2 – круговая частота собственных поперечных колебаний балки,
 $\lambda = \rho\theta^2 l^4 (EI)^{-1}$ – собственное число задачи.

Решение уравнения (1.5) таково:

$$T(t) = C_1 \sin \theta t + C_2 \cos \theta t, \quad (1.7)$$

где $C_1, C_2 = \text{const}$.

Чтобы получить задачу на собственные значения, к дифференциальному уравнению (1.6) добавим граничные условия защемления:

$$W = 0, \quad W' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2. \quad (1.8)$$

Введем в граничные условия (1.8) параметр ε таким образом, чтобы при $\varepsilon = 0$ получались условия шарнирного опирания, а при $\varepsilon = 1$ – исходные условия:

$$W = 0, \quad (1-\varepsilon)W'' \pm W' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2. \quad (1.9)$$

Для промежуточных значений ε ($0 < \varepsilon < 1$) реализуются условия упругой заделки с коэффициентом упругости $\varepsilon/(1-\varepsilon)$.

Форму W и собственное число λ представим в виде рядов теории возмущений (РТВ) по ε :

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon^i, \quad \lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \varepsilon^i. \quad (1.10)$$

Подставим ряды (1.10) в дифференциальное уравнение (1.6) и граничные условия (1.9). После расщепления по степеням ε получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\begin{aligned} W_0^{IV} - \lambda_0 W_0 &= 0, \\ W_0 &= 0, \quad W_0'' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2; \\ W_i^{IV} - \lambda_0 W_i &= \sum_{j=1}^i \lambda_j W_{i-j}, \\ W_i &= 0, \quad W_i'' = \pm \sum_{j=0}^{i-1} W_j' \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Решение задачи нулевого приближения таково:

$$\lambda_0 = \pi^4 n^4, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (1.11)$$

$$W_0 = C \begin{cases} \cos \pi n x, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \sin \pi n x, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}. \quad (1.12)$$

Рассмотрим краевую задачу первого приближения:

$$W_1^{IV} - \lambda_0 W_1 = \lambda_1 C \begin{cases} \cos \pi n x, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \sin \pi n x, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, \quad (1.13)$$

$$W_1 = 0, \quad W_1'' = \pm C \pi n \begin{cases} -(-1)^{(n-1)/2} \\ (-1)^{n/2} \end{cases} \quad \text{при } x = \pm 1/2. \quad (1.14)$$

В краевой задаче (1.13)–(1.14) явно видна неравномерность асимптотического разложения. Она заключается в том, что невозможно удовлетворить всем граничным условиям при произвольном значении λ_1 . Такую несогласованность удается устранить наложением некоторых условий, называемых условиями разрешимости, построение которых производим согласно методике монографии [69].

Домножим уравнение (1.13) на функцию $u(x)$, называемую сопряженным решением и подлежащую определению в дальнейшем. Проинтегрируем по частям это произведение от $-1/2$ до $1/2$:

$$\int_{-1/2}^{1/2} W_1 (u^{IV} - \lambda_0 u) dx + (u W_1''' - u' W_1'' + u'' W_1' - u''' W_1) \Big|_{-1/2}^{1/2} = \lambda_1 \int_{-1/2}^{1/2} W_0 u dx. \quad (1.15)$$

Потребуем, чтобы подынтегральное выражение в левой части соотношения (1.15) равнялось нулю, тогда:

$$u^{IV} - \lambda_0 u = 0. \quad (1.16)$$

Поскольку w_1''' и w_1' неизвестны, потребуем чтобы

$$u W_1''' \Big|_{-1/2}^{1/2} + u'' W_1' \Big|_{-1/2}^{1/2} = 0. \quad (1.17)$$

Соотношение (1.17) будет выполняться, если коэффициенты при W_1''' и W_1' равны нулю. Отсюда граничные условия для u таковы:

$$u = 0, \quad u'' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2. \quad (1.18)$$

Таким образом, функция u представляет решение краевой задачи для уравнения (1.16) и граничных условий (1.18). Данная краевая задача с точностью до обозначений совпадает с задачей нулевого приближения. Следовательно, $u = W_0$. Уравнение (1.15) примет следующий вид:

$$-W_0' W_1'' \Big|_{-1/2}^{1/2} = \lambda_1 \int_{-1/2}^{1/2} W_0^2 dx. \quad (1.19)$$

Отсюда находим первую поправку к собственному числу λ_1 :

$$\lambda_1 = - \frac{W_0' W_1'' \Big|_{-1/2}^{1/2}}{\int_{-1/2}^{1/2} W_0^2 dx} = 4\pi^2 n^2. \quad (1.20)$$

Определяем первую поправку к форме колебаний W_1 :

$$W_1 = \frac{C}{\pi n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi n}{2}} \operatorname{ch} \pi n x - x \sin \pi n x, \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{-(-1)^{n/2}}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2}} \operatorname{sh} \pi n x + x \cos \pi n x, \quad n = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}. \quad (1.21)$$

Функция W_1 определяется с точностью до функций (1.12), но этот добавочный член может быть отброшен, поскольку он уже учтен в нулевом приближении.

Аналогично определяются λ_2 и W_2 . Отрезок РТВ для собственного числа, составленный по трем первым приближениям, имеет вид:

$$\lambda = \pi^4 n^4 + 4\pi^2 n^2 \varepsilon + 4\pi n \left[\pi n - \frac{1}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{\pi n}{2} \right)^{(-1)^n} - \frac{1}{2\pi n} \right] \varepsilon^2 + \dots \quad (1.22)$$

Отрезок РТВ для собственной формы колебаний W запишется так:

$$W = C \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n x \\ \sin \pi n x \end{array} \right\} + \frac{C}{\pi n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi n}{2}} \operatorname{ch} \pi n x - x \sin \pi n x \\ -\frac{(-1)^{n/2}}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2}} \operatorname{sh} \pi n x + x \cos \pi n x \end{array} \right\} \varepsilon + \quad (1.23)$$

$$+ \left[\frac{(-1)^{n+1} C}{2\pi^2 n^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\operatorname{ch} \frac{\pi n}{2}} \\ (-1)^{n/2} \\ \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2} \end{array} \right\} \left\{ \left[\pi n - \left(\operatorname{cth} \frac{\pi n}{2} \right)^{(-1)^n} - \frac{1}{\pi n} \right] \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \pi n x \\ \operatorname{sh} \pi n x \end{array} \right\} + \right. \right.$$

$$\left. + x \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sh} \pi n x \\ \operatorname{ch} \pi n x \end{array} \right\} \right\} - \frac{(-1)^{n+1} C}{\pi^2 n^2} \left[\pi n - \frac{1}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{\pi n}{2} \right)^{(-1)^n} - \frac{1}{\pi n} \right] x \left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n x \\ \cos \pi n x \end{array} \right\} -$$

$$\left. - \frac{C}{\pi^2 n^2} x \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n x \\ \sin \pi n x \end{array} \right\} \right] \varepsilon^2 + \dots, \quad \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} n = 1, 3, 5, \dots \\ n = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\} \right\}.$$

Полученный отрезок РТВ (1.22) перестраиваем в диагональную АП:

$$\lambda_{[1/1]}(\varepsilon) = \frac{a_0 + a_1 \varepsilon}{1 + b_1 \varepsilon}, \quad (1.24)$$

где $a_0 = \lambda_0$, $a_1 = \lambda_1 + b_1 \lambda_0$, $b_1 = -\lambda_2 / \lambda_1$.

Рассмотрим, какова погрешность в определении собственных чисел λ . Наибольший интерес представляет первое собственное число задачи (1.6)–(1.8), поскольку граничные условия оказывают на него наибольшее влияние. Решение уравнения (1.6) для прямосимметричных форм:

$$W = C_1 \cos 2\alpha x + C_2 \operatorname{ch} 2\alpha x, \quad \alpha = (1/2)(\lambda)^{1/4}. \quad (1.25)$$

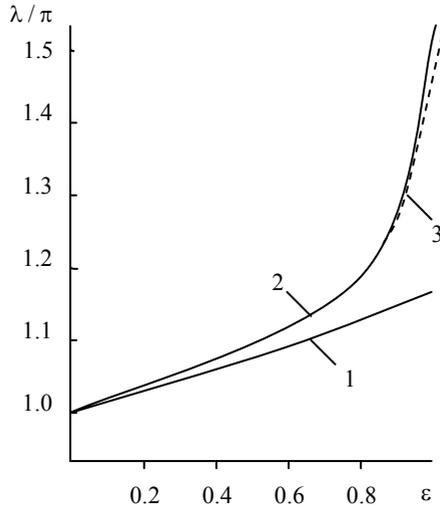


Рис. 1.1. Сравнение эффективности различных методов определения собственных чисел.

Удовлетворение граничным условиям (1.9) приводят к трансцендентному уравнению относительно α :

$$4(1-\varepsilon)\alpha \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha + \varepsilon(\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{sh} \alpha) = 0. \quad (1.26)$$

Численное решение уравнения (1.26) при $\varepsilon=1$ дает значение первого собственного числа краевой задачи $\lambda = (1.5056\pi)^4$, отрезок РТВ (1.22) – $\lambda = (1.1542\pi)^4$ (погрешность 23%), АП (1.24) – $\lambda = (1.5139\pi)^4$ (погрешность 0.58%).

Зависимость первого собственного числа задачи (1.6), (1.9) от ε представлена на рис. 1.1. Кривые 1, 2, 3 – результаты, полученные при помощи отрезка РТВ (1.22), АП (1.24) и численного решения трансцендентного уравнения (1.26) соответственно.

Видно, что результаты определения первого собственного числа задачи (1.6), (1.9), полученные при помощи АП, практически совпадают с точным решением для всех значений параметра ε , а РТВ дает удовлетворительные результаты только до $\varepsilon = 0.4$.

На рис. 1.2 представлено изменение относительной погрешности в определении первых 15-ти собственных чисел. Кривой 1 изображены результаты, полученные при помощи отрезка РТВ, кривой 2 – при

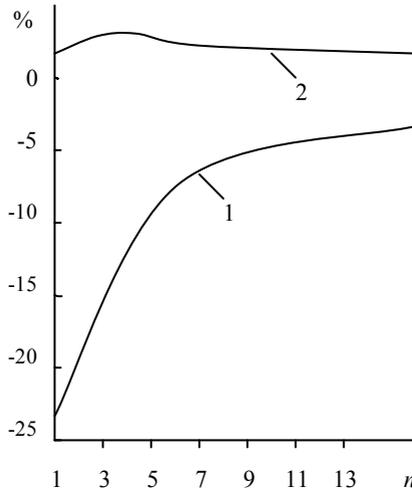


Рис. 1.2. Сравнение эффективности АП и РТВ для первых 15 форм собственных колебаний.

помощи АП. Для низших частот расхождения между отрезком РТВ и АП достаточно велики, поэтому при определении низших частот следует ориентироваться на результаты, полученные при помощи АП. Для высших частот ($n > 10$) погрешность в определении частоты составляет менее 5% и с ростом волнового числа уменьшается. Кроме того, для высших частот удастся получить оценки сверху (АП) и снизу (РТВ). Эти оценки тем эффективнее, чем выше частота.

Кроме численного решения, существует возможность асимптотического упрощения трансцендентного уравнения для определения собственных чисел. Представим α в виде ряда по ε :

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon^i . \quad (1.27)$$

Подставляя ряд (1.27) в уравнение (1.26) и расщепляя его по степеням ε , получаем рекуррентную последовательность трансцендентных уравнений:

$$4\alpha_0 \cos \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 = 0, \quad (1.28)$$

$$4\alpha_1 \cos \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 + 4\alpha_1 \alpha_0 (\cos \alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_1 - \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0) - 4\alpha_0 \cos \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 + \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 + \operatorname{sh} \alpha_0 \cos \alpha_0 = 0, \quad (1.29)$$

$$2\left\{4\alpha_2 \cos \alpha_0 + \alpha_1^2 (\cos \alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_0 - \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0) + 2\alpha_0 \left[\left(\alpha_2 \operatorname{sh} \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1^2}{2} \operatorname{ch} \alpha_0 \right) \cos \alpha_0 - \alpha_1^2 \sin \alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_0 - \left(\alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_0 + \frac{\alpha_1^2}{2} \operatorname{ch} \alpha_0 \right) \operatorname{ch} \alpha_0 \right] \right\} - \quad (1.30)$$

$$-4\left[\alpha_1 \cos \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 + \alpha_0 \alpha_1 (\cos \alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_0 - \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0) \right] = 0.$$

Из уравнения (1.28) получаем:

$$\cos \alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 = 2\pi n, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Далее из уравнений (1.29) и (1.30) находим:

$$\alpha_1 = \frac{2}{\pi n}, \quad (1.31)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\pi n} \left(1 - \frac{1}{2\pi n} \operatorname{th} \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{\pi^2 n^2} \right). \quad (1.32)$$

Аналогично строятся трансцендентные уравнения для кососимметричных форм. Окончательно выражение для α таково:

$$\alpha = \pi n + \frac{1}{\pi n} \varepsilon + \frac{1}{\pi n} \left[1 - \frac{1}{2\pi n} \left(\operatorname{cth} \frac{\pi n}{2} \right)^{(-1)^n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} \right] \varepsilon^2 + \dots, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (1.33)$$

РТВ (1.33) является корнем четвертой степени из РТВ (1.22).

При построении форм колебаний находим α при $\varepsilon = 1$, а также производим перестройку РТВ в АП по формуле (1.24). Результаты расчетов приведены на рис. 1.3 и 1.4. Кривая 1 – W_0 , кривая 2 – W_1 , кривая 3 – W_2 , кривая 4 – $W_0 + W_1 + W_2$, кривая 5 – АП, 6 – точное решение.

1.2. Собственные колебания балки со свободными краями

Рассмотрим собственные колебания балки со свободными краями. Исходное дифференциальное уравнение имеет вид (1.6):

$$W^{IV} - \lambda W = 0.$$

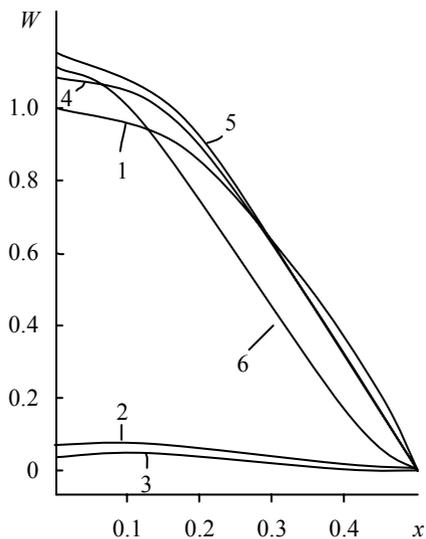


Рис. 1.3. Первая симметричная форма колебаний.

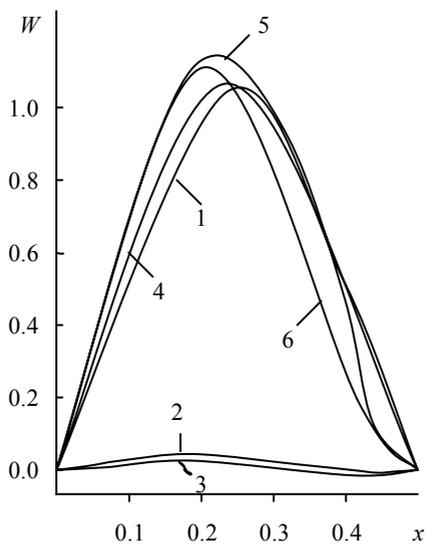


Рис. 1.4. Первая косимметричная форма колебаний.

Граничные условия таковы:

$$W'' = 0, \quad W''' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2. \quad (1.34)$$

В преобразованном виде граничные условия запишутся так:

$$W''' = 0, \quad (1-\varepsilon)W' \pm \varepsilon W'' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2. \quad (1.35)$$

Форму колебаний W и собственное число λ представляем в виде разложений (1.10) по степеням ε . Подставив ряды (1.10) в дифференциальное уравнение (1.6) и граничные условия (1.35), после расщепления по ε получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\begin{aligned} W_0^{IV} - \lambda_0 W_0 &= 0, \\ W_0''' &= 0, \quad W_0' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2; \\ W_i^{IV} - \lambda_0 W_i &= \sum_{j=1}^i \lambda_j W_{i-j}, \\ W_i''' &= 0, \quad W_i' = \pm \sum_{j=0}^{i-1} W_j'' \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Решение задачи нулевого приближения таково:

$$\lambda_0 = \pi^4 n^4, \quad n = 2, 3, 4, \dots; \quad (1.36)$$

$$W_0 = C \begin{cases} \cos \pi n x, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \sin \pi n x, & n = 3, 5, 7, \dots \end{cases}. \quad (1.37)$$

Собственная форма с номером $n = 1$ должна быть отброшена, поскольку в этом случае получается кинематически изменяемая конструкция.

После определения W_0 краевая задача первого приближения будет иметь следующий вид:

$$W_1^{IV} - \lambda_0 W_1 = \lambda_1 C \begin{cases} \cos \pi n x, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \sin \pi n x, & n = 3, 5, 7, \dots \end{cases}, \quad (1.38)$$

$$W_1''' = 0, \quad W_1' = \pm C \pi^2 n^2 \begin{cases} (-1)^{n/2} \\ (-1)^{(n-1)/2} \end{cases} \quad \text{при} \quad x = \pm 1/2. \quad (1.39)$$

Из условий разрешимости получаем:

$$-W_0' W_1'' \Big|_{-1/2}^{1/2} = \lambda_1 \int_{-1/2}^{1/2} W_0^2 dx . \quad (1.40)$$

Находим первую поправку к собственному числу

$$\lambda_1 = -4\pi^4 n^4 \quad (1.41)$$

и первую поправку к форме колебаний

$$W_1 = C\pi n \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^{n/2}}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2}} \operatorname{ch} \pi n x + x \sin \pi n x, \quad n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi n}{2}} \operatorname{sh} \pi n x - x \cos \pi n x, \quad n = 3, 5, 7, \dots \end{array} \right\} . \quad (1.42)$$

При этом составляющая нулевого приближения в выражении для w_1 должна быть отброшена.

Аналогично строится поправка к собственному числу во втором приближении λ_2 . В итоге получаем:

$$\lambda = \pi^4 n^4 - 4\pi^4 n^4 \varepsilon + 2\pi^4 n^4 (3 + \pi n C \operatorname{th}^{(-1)^n} 0.5\pi n) \varepsilon^2 + \dots \quad (1.43)$$

АП для РТВ (1.43) имеет вид (1.24).

Для сравнения результатов, полученных при помощи РТВ и АП, получим трансцендентное уравнение. Собственную форму с учетом прямой симметрии принимаем в виде (1.25). Удовлетворение граничным условиям (1.35) приводит к трансцендентному уравнению:

$$2(1 - \varepsilon) \operatorname{sh} \alpha \sin \alpha + \varepsilon \bar{\lambda} (\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{sh} \alpha) = 0 . \quad (1.44)$$

Первый корень трансцендентного уравнения (1.44) при $\varepsilon = 1$ дает значение первого собственного числа краевой задачи (1.6), (1.35): $\lambda = (1.5056\pi)^4$. РТВ (1.43) при $n = 2$ дает значение $\lambda = (3.9696\pi)^4$ (погрешность – 163.54%), АП (1.24) при $n = 2$ дает $\lambda = (1.4670\pi)^4$ (погрешность – 2.56%).

На рис.1.5 показана зависимость первого собственного числа от ε .

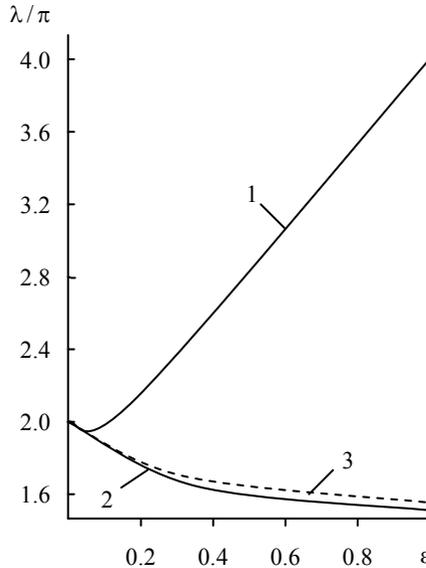


Рис.1.5. Зависимость первого собственного числа
прямоугольной формы колебаний от ε .

Кривая 1 – РТВ (1.43), кривая 2 – АП (1.24), кривая 3 – численное решение. Видно, что первое собственное число задачи (1.6), (1.35), полученное при помощи АП, практически совпадает с точным решением для всех значений параметра $\varepsilon \leq 1$, в то время как предельная величина параметра ε , при которой ряд дает погрешность менее 5% – $\varepsilon < 0.05$.

На рис.1.6 представлено изменение относительной погрешности в определении первых пятнадцати собственных чисел. Кривая 1 – РТВ (1.43), кривая 2 – (1.36), кривая 3 – АП (1.24). Для собственных чисел данной задачи удается получить как верхнюю (ряд), так и нижнюю (АП) оценку. Однако следует отметить, что первый и второй члены РТВ (1.43) по модулю превышают нулевой, поэтому численные результаты, полученные при помощи РТВ, значительно отличаются от точных значений собственных чисел. Эта разница будет возрастать с увеличением номера собственного числа, потому для получения эффективной верхней оценки в отрезке ряда для λ (1.43) следует оставить только нулевой член.

Построим теперь аналитическое решение трансцендентного уравнения (1.44). Представим α в виде (1.27). Подставляя РТВ (1.27) в уравне-

ние (1.44) и расщепляя его по степеням ε , получаем рекуррентную последовательность трансцендентного уравнения:

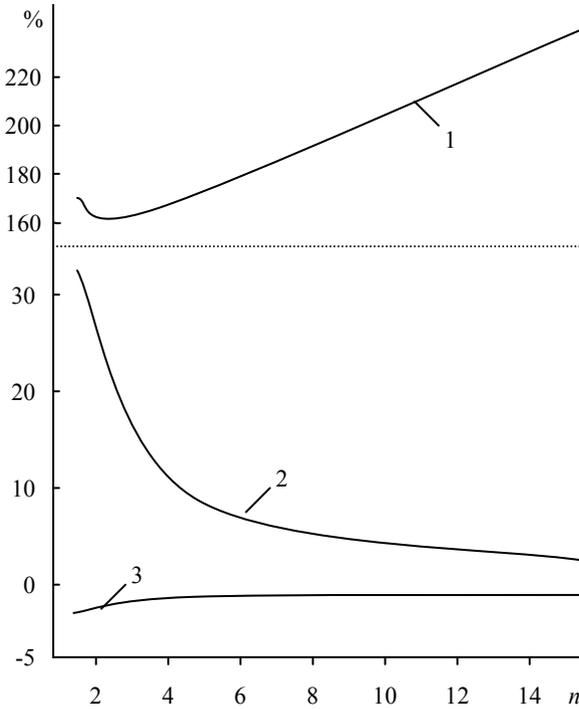


Рис.1.6. Относительные погрешности в определении первых пятнадцати собственных чисел для прямосимметричной формы колебаний.

$$2 \sin \alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_0 = 0; \tag{1.45}$$

$$2\alpha_1 (\operatorname{ch} \alpha_0 \sin \alpha_0 + \operatorname{sh} \alpha_0 \cos \alpha_0) - 2 \operatorname{sh} \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2\lambda_0 (\cos \alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_0 + \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0) = 0; \tag{1.46}$$

$$2 \left[\alpha_2 (\operatorname{ch} \alpha_0 \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_0) + \alpha_1^2 \cos \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 \right] - 2\alpha_1 (\operatorname{ch} \alpha_0 \sin \alpha_0 + \operatorname{sh} \alpha_0 \cos \alpha_0) + 4\alpha_0 \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_0 \cos \alpha_0 + 2\alpha_1 (\cos \alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_0 + \sin \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0) = 0; \tag{1.47}$$

Из уравнения (1.45) имеем:

$$\alpha_0 = 2\pi n, \quad n = 2, 4, 6, \dots \tag{1.48}$$

Далее из уравнений (1.46) и (1.47) получаем:

$$\alpha_1 = -2\pi n, \quad (1.49)$$

$$\alpha_2 = \pi^2 n^2 \operatorname{cth} 0.5\pi n. \quad (1.50)$$

Окончательно имеем:

$$\alpha = \pi n - \pi n \varepsilon + \frac{\pi^2 n^2}{2} \operatorname{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi n}{2} \varepsilon^2 + \dots \quad (1.51)$$

1.3. Собственные колебания защемленной прямоугольной пластины

Целью данного параграфа является обобщение метода на двумерные краевые задачи. Для примера рассмотрим собственные колебания прямоугольной защемленной по контуру пластины ($-0.5a \leq \bar{x} \leq 0.5a$, $-0.5b \leq \bar{y} \leq 0.5b$). Исходное дифференциальное уравнение таково:

$$D\nabla^4 W + \rho W_{tt} = 0, \quad (1.52)$$

где $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$; ρ – масса на единицу площади пластины; $\nabla^2 = \partial^2/\partial \bar{x}^2 + \partial^2/\partial \bar{y}^2$.

Введем обозначения:

$$y = \bar{y}/b; \quad x = \bar{x}/b; \quad k = a/b. \quad (1.53)$$

После подстановки соотношений (1.53) в уравнение (1.52) получим:

$$\nabla^4 W + \frac{\rho b^4}{D} W_{tt} = 0. \quad (1.54)$$

Решение уравнения (1.54) ищем методом разделения переменных:

$$W = W(x, y) \cdot T(t). \quad (1.55)$$

После подстановки выражения (1.55) в уравнение (1.52) получим два уравнения:

$$T''(t) + \theta^2 T = 0; \quad (1.56)$$

$$\nabla^4 W - \lambda W = 0. \quad (1.57)$$

где θ^2 – круговая частота собственных поперечных колебаний пластины, $\lambda = \rho\theta^2 b^4 D^{-1}$ – собственное число задачи.

Чтобы получить задачу на собственные значения, к дифференциальному уравнению (1.57) присоединяем граничные условия защемления:

$$W = 0, \quad W_x = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k; \quad (1.58)$$

$$W = 0, \quad W_y = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5. \quad (1.59)$$

Вводим в граничные условия (1.58), (1.59) параметр ε :

$$W = 0, \quad (1-\varepsilon) W_{xx} \pm \varepsilon k W_x = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \quad (1.60)$$

$$W = 0, \quad (1-\varepsilon) W_{yy} \pm \varepsilon W_y = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5k. \quad (1.61)$$

При $\varepsilon = 0$ реализуются условия шарнирного опирания пластины по контуру, при $\varepsilon = 1$ – условия защемления (1.60), (1.61).

Далее представляем собственное число задачи λ и собственную форму W в виде рядов по ε (1.10). Подставляя ряды (1.10) в дифференциальное уравнение (1.57) и граничные условия (1.60), (1.61), после расщепления по степеням ε получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\nabla^4 W_0 - \lambda_0 W_0 = 0;$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k;$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5;$$

$$\nabla^4 W_j - \lambda_0 W_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i W_{j-i};$$

$$W_j = 0, \quad W_{jxx} = \mp k \sum_{i=0}^{j-1} W_{ix} \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k;$$

$$W_j = 0, \quad W_{jyy} = \mp \sum_{i=0}^{j-1} W_{iy} \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5.$$

Подробно опишем построение собственных чисел и форм для случая, когда собственные формы обладают прямой симметрией в направлениях x и y .

В нулевом приближении имеем:

$$\lambda_0 = \pi^4 \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)^2, \quad n, m = 1, 3, 5, \dots, \quad (1.62)$$

$$W_0 = c \cos \frac{nm}{k} x \cos \pi n y. \quad (1.63)$$

Задача первого приближения записывается так:

$$\nabla^4 W_1 - \lambda_0 W_1 = \lambda_1 \cos \frac{nm}{k} x \cos \pi n y; \quad (1.64)$$

$$W_1 = 0, \quad W_{1xx} = \pm \pi m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \pi n y \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \quad (1.65)$$

$$W_1 = 0, \quad W_{1yy} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{\pi m}{k} x \quad \text{при } y = \pm 0.5. \quad (1.66)$$

Решение ищем методом разделения переменных, представив функцию W_1 в виде:

$$W_1 = Y_1 y \cos \frac{\pi m}{k} x + X_1 x \cos \pi n y. \quad (1.67)$$

Собственное число λ_1 также представим в виде суммы

$$\lambda_1 = \lambda_{1x} + \lambda_{1y}. \quad (1.68)$$

После подстановки выражений (1.67) и (1.68) в уравнение (1.64) и граничные условия (1.65)–(1.66) получаем две краевые задачи:

$$Y_1^{IV} - 2\pi^2 \frac{m^2}{k^2} Y_1'' - \pi^4 n^2 \left(2 \frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) Y_1 = \lambda_{1y} \cos \pi n y; \quad (1.69)$$

$$Y_1 = 0, \quad Y_1'' = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{при } y = \pm 0.5; \quad (1.70)$$

$$X_1^{IV} - 2\pi^2 n^2 X_1'' - \pi^4 \frac{m^2}{k^2} \left(\frac{m^2}{k^2} + 2n^2 \right) X_1 = \lambda_{1x} \cos \frac{\pi m}{k} x; \quad (1.71)$$

$$X_1 = 0, \quad X_1'' = \pm \pi m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{при } x = \pm 0.5k. \quad (1.72)$$

Построение условий разрешимости рассмотрим для краевой задачи (1.69), (1.70). Домножим уравнение (1.69) на функцию $u(y)$, подлежащую в дальнейшем определению, и проинтегрируем по переменной y от -0.5 до 0.5 :

$$\int_{-0.5}^{0.5} u(y) \left[Y_1^{IV} - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} Y_1^{II} - \pi^4 n^2 \left(2 \frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) Y_1 \right] dy = \lambda_{1y} \int_{-0.5}^{0.5} u(y) \cos \pi n y dy. \quad (1.73)$$

Интегрируя уравнение (1.73) по частям, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{-0.5}^{0.5} Y_1 \left[u^{IV}(y) - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} u^{II}(y) - \pi^4 n^2 \left(2 \frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) u(y) \right] dy + \\ & + u(y) Y_1^{III} \Big|_{-0.5}^{0.5} - u'(y) Y_1^{II} \Big|_{-0.5}^{0.5} + u''(y) Y_1^I \Big|_{-0.5}^{0.5} - u^{III}(y) Y_1 \Big|_{-0.5}^{0.5} - \\ & - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} \left(u(y) Y_1^I \Big|_{-0.5}^{0.5} - u'(y) Y_1 \Big|_{-0.5}^{0.5} \right) = \lambda_{1y} \int_{-0.5}^{0.5} u(y) \cos \pi n y dy. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Приравнявая нулю подинтегральное выражение в левой части соотношения (1.74), получим уравнение относительно функции $u(y)$:

$$u^{IV}(y) - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} u^{II}(y) - \pi^4 n^2 \left(2 \frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) u(y) = 0. \quad (1.75)$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие:

$$u(y) \left[Y_1^{III} - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} Y_1^I \right] \Big|_{-0.5}^{0.5} + u''(y) Y_1^I \Big|_{-0.5}^{0.5} = 0. \quad (1.76)$$

Соотношение (1.76) выполняется, если коэффициенты при Y_1^I и Y_1^{III} равны нулю.

$$u(y) = 0, \quad u''(y) = 0 \quad \text{при } y = \pm 0.5. \quad (1.77)$$

Общее решение уравнения (1.76) таково:

$$u(y) = c_1 \operatorname{ch} \pi \sqrt{2 \frac{m^2}{k^2} + n^2} y + c_2 \cos \pi n y. \quad (1.78)$$

Краевым условиям (1.77) удовлетворяет лишь второе слагаемое, поэтому

$$u(y) = c_2 \cos \pi n y. \quad (1.79)$$

Из уравнения (1.74) получаем условие разрешимости:

$$\lambda_{1y} = 4\pi^2 n^2. \quad (1.80)$$

Теперь определяем Y_1 :

$$Y_1 = \frac{n}{\pi \alpha} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_1} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y - y \sin \pi n y \right]. \quad (1.81)$$

Здесь $\alpha = n^2 + \frac{m^2}{k^2}$; $\beta_1 = \sqrt{2 \frac{m^2}{k^2} + n^2}$, $n = 1, 3, 5, \dots$.

Краевую задачу (1.71), (1.72) решаем аналогично, в результате получаем:

$$\lambda_{1x} = 4\pi^2 \frac{m^2}{k^2}; \quad (1.82)$$

$$X_1 = \frac{m/k}{\pi \alpha} \left[\frac{k(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_2} \operatorname{ch} \pi \beta_2 x - x \sin \frac{\pi m}{k} x \right]. \quad (1.83)$$

Здесь $\beta_2 = \sqrt{\frac{m^2}{k^2} + 2n^2}$, $m = 1, 3, 5, \dots$.

Первая поправка к собственному числу λ_1 и собственной форме W_1 для прямосимметричных форм имеет вид:

$$\lambda_1 = 4\pi^2 \alpha; \quad (1.84)$$

$$W_1 = \frac{1}{\pi\alpha} \left\{ n \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_1} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y - y \sin \pi n y \right] \cos \frac{\pi m}{k} + \right. \\ \left. + \frac{m}{k} \left[\frac{k(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2k} \beta_2} \operatorname{ch} \pi \beta_2 x - x \sin \frac{\pi m}{k} x \right] \cos \pi n y \right\}, n, m = 1, 3, 5, \dots \quad (1.85)$$

Аналогично определяется λ_2 .

РТВ для собственного числа таково:

$$\lambda = \pi^4 \alpha^2 + 4\pi^2 \alpha \varepsilon + 4\pi \left\{ \pi\alpha + 2 \frac{n^2 \frac{m^2}{k^2}}{\pi\alpha^2} - \frac{1}{2\pi} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\alpha} \left(k \frac{m^2}{k^2} \beta_1 \operatorname{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi}{2k} \beta_1 + n^2 \beta_2 \operatorname{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi}{2} \beta_2 \right) \right\} \varepsilon^2 + \dots, \quad (1.86) \\ n, m = 1, 3, 5, \dots$$

РТВ для собственного числа перестраиваем в АП (1.24).

Сравним результаты, полученные при помощи РТВ (1.86) и АП (1.24), с численным решением [48] для первого собственного числа λ_1 . Для квадратной пластины при $n = m = 1$ численным методом $\lambda^{(1)} = (1.9093\pi)^4$, то же, полученное при помощи РТВ (1.86) $\lambda^{(1)} = (1.5351\pi)^4$ (расхождение – 19.61%), АП (1.24) дает значение $\lambda^{(1)} = (1.9142\pi)^4$ (расхождение – 0.26%).

На рис.1.7 представлена зависимость первого собственного числа задачи $\lambda^{(1)}$ от ε для РТВ (1.86) (кривая 1) и АП (1.24) (кривая 2). Видно, что предельная величина параметра ε , при котором различие в результатах, полученных при помощи АП и РТВ будут находиться в пределах 5%, – $\varepsilon = 0.4$. При $\varepsilon = 1$ результаты, полученные при помощи (1.86), очень далеки от численного решения и могут быть использованы скорее для оценки собственного числа снизу. Результаты, полученные при помощи АП, несколько выше численного решения, но их можно использовать для всех значений параметра $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

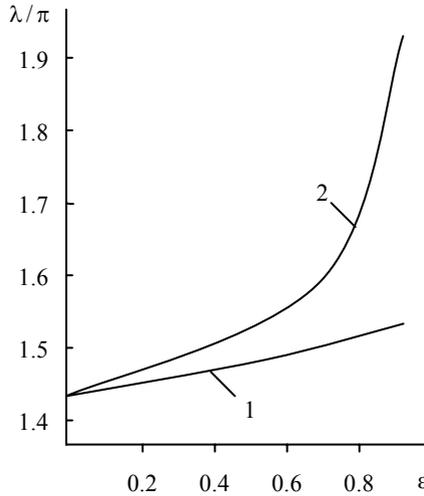


Рис. 1.7. Первое собственное число для квадратной защемленной пластины.

1.4. Собственные колебания ортотропной прямоугольной пластины со свободными краями, лежащей на упругом основании

Рассматривается задача о собственных колебаниях ортотропной прямоугольной пластины ($-a/2 \leq \bar{x} \leq a/2$; $-b/2 \leq \bar{y} \leq b/2$), лежащей на упругом основании Винклера-Фусса.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания ортотропной пластины, таково:

$$D_1 \bar{W}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + 2D_3 \bar{W}_{\bar{x}\bar{x}\bar{y}\bar{y}} + D_2 \bar{W}_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}} + \rho \bar{W}_{\bar{t}\bar{t}} + C \bar{W} = 0, \quad (1.88)$$

где $D_1 = E_1 h^3 / (12(1 - \nu_1 \nu_2))$, $D_2 = E_2 h^3 / (12(1 - \nu_1 \nu_2))$, $D_3 = D_1 \nu_2 + G h^3 / 6$, C – коэффициент постели; D_1, D_2 – цилиндрические жесткости в направлении осей \bar{x} и \bar{y} ; D_3 – крутильная жесткость; E_1, E_2 – модули упругости в направлениях \bar{x} и \bar{y} ; G – модуль сдвига; ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона в направлениях \bar{x} и \bar{y} .

После разделения временных и пространственных переменных (1.55) и обезразмеривания (1.53), дифференциальное уравнение (1.88) примет следующий вид:

$$W_{xxxx} + 2\alpha_3 W_{xxyy} + \alpha_2 W_{yyyy} - \lambda W = 0, \quad (1.89)$$

где $\alpha_3 = D_3 / D_1$; $\alpha_2 = D_2 / D_1$; $\lambda_1 = \frac{b^4 (\overline{m\theta^2} - c)}{D_1}$.

Добавим к дифференциальному уравнению (1.89) граничные условия:

$$\begin{aligned} W_{xxx} + (2 - \nu_1) W_{yyx} &= 0, \\ (1 - \varepsilon) W_x \mp k\varepsilon (W_{xx} + \nu_1 W_{yy}) &= 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \end{aligned} \quad (1.90)$$

$$\begin{aligned} W_{yyy} + (2 - \nu_2) W_{xxy} &= 0, \\ (1 - \varepsilon) W_y \mp \varepsilon (W_{yy} + \nu_2 W_{xx}) &= 0 \quad \text{при } y = \pm 0.5. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Собственное число и собственную форму представляем в виде РТВ (1.10). Подставляя эти ряды в дифференциальное уравнение (1.89) и граничные условия (1.90)-(1.91) и расщепляя по степеням ε , получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\begin{aligned} W_{0xxxx} + 2\alpha_3 W_{0xxyy} + \alpha_2 W_{0yyyy} - \lambda_0 W_0 &= 0; \\ W_{0x} = 0, \quad W_{0xxx} = 0 &\quad \text{при } x = \pm 0.5k; \\ W_{0y} = 0, \quad W_{0yyy} = 0 &\quad \text{при } y = \pm 0.5; \\ W_{jxxxx} + 2\alpha_3 W_{jxxyy} + \alpha_2 W_{jyyyy} - \lambda_0 W_j &= \sum_{i=1}^j \lambda_i W_{j-i}; \\ W_{jxxx} + (2 - \nu_1) W_{jyx} &= 0, \\ W_{jx} = \varepsilon k \sum_{i=0}^{j-1} (W_{ixx} + \nu_1 W_{iyy}) &\quad \text{при } x = \pm 0.5k; \\ W_{jyyy} + (2 - \nu_2) W_{jxy} &= 0, \\ W_{jy} = \varepsilon \sum_{i=0}^{j-1} (W_{iyy} + \nu_2 W_{ixx}) &\quad \text{при } y = \pm 0.5. \end{aligned}$$

В нулевом приближении:

$$\lambda_0 = \pi^4 \left[\frac{m^4}{k^4} + 2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} + \alpha_2 n^4 \right]; \quad (1.92)$$

$$W_0 = X_0 Y_0 = \begin{cases} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{cases} \begin{cases} \sin \frac{\pi m}{k} x; & n, m = 3, 5, 7, \dots \\ \cos \frac{\pi m}{k} x; & n, m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}. \quad (1.93)$$

Построение дальнейших приближений подробно рассмотрим для центрально симметричных форм колебаний $n, m = 3, 5, 7, \dots$. Краевая задача первого приближения такова:

$$W_{1xxxx} + 2\alpha_3 W_{1xxyy} + \alpha_2 W_{1yyyy} - \lambda_0 W_1 = \lambda_2 \sin \pi n y \sin \frac{\pi m}{k} x; \quad (1.94)$$

$$W_{1xxx} + (2 - \nu_1) W_{yyx} = 0,$$

$$W_{1x} = \pm k^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu_1 n^2 \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \pi n y \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \quad (1.95)$$

$$W_{1yyy} + (2 - \nu_2) W_{1xxy} = 0,$$

$$W_{1y} = \pm \pi^2 \left(n^2 + \nu_2 \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{\pi m}{k} x \quad \text{при } y = \pm 0.5. \quad (1.96)$$

Решение краевой задачи (1.94)-(1.96) ищем в виде:

$$W_1 = X_1(x) \sin \pi n y + Y_1(y) \sin \pi \frac{m}{k} x; \quad (1.97)$$

$$\lambda_1 = \lambda_{1x} + \lambda_{1y}. \quad (1.98)$$

Подставляя выражения (1.97), (1.98) в дифференциальное уравнение (1.94) и граничные условия (1.95) и (1.96), имеем две одномерные задачи:

$$X_1^{IV}(x) + 2\alpha_3 \pi^2 n^2 X_1''(x) - \pi^4 \left[\frac{m^4}{k^4} + 2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} \right] X_1(x) = \lambda_{1x} \sin \frac{\pi m}{k} x; \quad (1.99)$$

$$X_1'(x) = \pm kn^2 \left(\frac{m^2}{k^2} + v_1 n^2 \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \quad (1.100)$$

$$X_1'''(x) - \pi^2 n^2 (2 - v_1) X_1'(x) = 0$$

$$Y_1''(y) + 2\alpha_3 \pi^2 \frac{m^2}{k^2} Y_1''(y) - \pi^4 \left[2\alpha_3 n^2 \frac{m^2}{k^2} + n^4 \right] Y_1(y) = \lambda_{1y} \sin \pi n y; \quad (1.101)$$

$$Y_1'(y) = \pm \pi^2 \left(n^2 + v_2 \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \text{при } y = \pm 0.5. \quad (1.102)$$

$$Y_1'''(y) - \pi^2 \frac{m^2}{k^2} (2 - v_2) Y_1'(y) = 0$$

Построение условий разрешимости осуществляется по схеме, подробно описанной в предыдущих параграфах. Здесь приведены окончательные выражения:

$$\lambda_{1x} = 4\pi^4 \left(\frac{m^2}{k^2} + v_1 n^2 \right) \left[n^2 (2 - v_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right]; \quad (1.103)$$

$$\lambda_{1y} = 4\pi^4 \left(n^2 + v_2 \frac{m^2}{k^2} \right) \left[\frac{m^2}{k^2} (2 - v_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right]. \quad (1.104)$$

Теперь находим первую поправку к собственной форме W_1 :

$$W_1 = \frac{\pi \left(\frac{m^2}{k^2} + v_1 n^2 \right)}{\left(\frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2 \right)} \left[\frac{k \begin{Bmatrix} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{m}{2}} \end{Bmatrix} \left(n^2 (2 - v_1) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{2\beta_2 \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_2 k \\ \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \beta k \end{Bmatrix}} \begin{Bmatrix} \operatorname{sh} \pi \beta_2 x \\ \operatorname{ch} \pi \beta_2 x \end{Bmatrix} - \right. \quad (1.105)$$

$$\left. (-1)^m \frac{k}{m} \left(n^2 (2 - v_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right) x \begin{Bmatrix} \cos \frac{\pi m}{k} x \\ \sin \frac{\pi m}{k} x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{Bmatrix} + \right]$$

$$\frac{\pi \left(n^2 + v_2 \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left(n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \left[\frac{\left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - v_2) + n^2 \right) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{sh } \pi \beta_1 y \\ \text{ch } \pi \beta_1 y \end{array} \right\}}{2\beta_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{ch } \frac{\pi}{2} \beta_1 \\ \text{sh } \frac{\pi}{2} \beta_1 \end{array} \right\}} \right] -$$

$$(-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - v_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) y \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n y \\ \sin \pi n y \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi m}{k} x \\ \cos \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} n, m = 1, 3, 5, \dots \\ n, m = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}.$$

Рассматривая второе приближение, определяем:

$$\lambda_{2x} = 4\pi^4 \left[n^2 (2 - v_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right] \left\{ \left(\frac{m^2}{k^2} + v_1 n^2 \right) - \left(\frac{\frac{m^2}{k^2} + v_1 n^2}{\frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \left[\frac{\pi k}{2} \left(n^2 (2 - v_1) + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \text{cth}^{(-1)^m} \frac{\pi}{2} \beta_2 - 2 \left(n^2 (2 - v_1 - 2\alpha_3) - \frac{m^2}{k^2} \right) \right] - \quad (1.106)$$

$$2v_1 \frac{\left(n^2 + v_2 \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left(n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \times \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - v_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) - \frac{\left(n^2 + v_2 \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left(n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} \times$$

$$\left[\frac{\left(\frac{m^2}{k^2} (2 - v_2) + n^2 \right) \left(\frac{m^2}{k^2} (1 - 2v_1 \alpha_3) - n^2 \right)}{\left(n^2 + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} \right)} + \frac{1}{2n^2} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - v_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) \times \right.$$

$$\left. \left. \left(\frac{m^2}{k^2} + v_1 n^2 \right) \right] \right\} - \frac{\lambda_1}{2} \frac{\left(\frac{m^2}{k^2} + v_1 n^2 \right)}{\left(\frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2 \right)} \left\{ k \frac{\left(n^2 (2 - v_1) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{\left(\frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 n^2 \right)} + \right.$$

$$\frac{1}{n^2} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu_2 - 2\alpha_3) - n^2 \right) \Bigg\};$$

$$\left(\lambda_{2y}; \frac{m^2}{k^2}; n^2; \nu_1; \nu_2; \beta_1 \right) \rightarrow \left(\lambda_{2x}; n^2; \frac{m^2}{k^2}; \nu_2; \nu_1; \beta_2 \right).$$

В изотропном случае ($D_1 = D_2 = D_3 = D; \nu_1 = \nu_2 = \nu$) выражения для λ и W примут вид:

$$\lambda = \pi^4 \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)^2 - 4\pi^4 (1 + \nu) \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) \varepsilon + (\lambda_{2x} + \lambda_{2y}) \varepsilon^2 + \dots; \quad (1.107)$$

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n y \sin \frac{\pi m}{k} x \\ \cos \pi n y \cos \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\} + \frac{\pi}{\left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)} \left[\frac{k \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{m}{2}} \end{array} \right\} \left(n^2 (2 - \nu) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{2\beta_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{ch } \pi \beta_2 k / 2 \\ \text{sh } \pi \beta_2 k / 2 \end{array} \right\}} \times \right. \quad (1.108)$$

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} \text{sh } \pi \beta_2 x \\ \text{ch } \pi \beta_2 x \end{array} \right\} + (-1)^m \frac{k}{m} \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) x \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi m}{k} x \\ \sin \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{array} \right\} +$$

$$\left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right) \left[\frac{\left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{array} \right\} \left(\frac{m^2}{k^2} (2 - \nu) + n^2 \right)}{\left\{ \begin{array}{l} \text{ch } \pi \beta_1 / 2 \\ \text{sh } \pi \beta_1 / 2 \end{array} \right\}} \left\{ \begin{array}{l} \text{sh } \pi \beta_1 y \\ \text{ch } \pi \beta_1 y \end{array} \right\} +$$

$$(-1)^n \frac{1}{n} \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) y \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n y \\ \sin \pi n y \end{array} \right\} \left[\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi m}{k} x \\ \cos \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\} \right] \varepsilon + \dots,$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{2x} = & 8\pi^4(1+\nu) \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) \left[\frac{k}{2} \cdot \frac{\left(n^2(2-\nu) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{n^2 + \frac{m^2}{k^2}} - \frac{k^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) \right] - \\
& 4\pi^4 \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right)^2 + 8\pi^4 \frac{\left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right)}{\left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)} \left\{ \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) \left[\frac{k \left(n^2(2-\nu) + \frac{m^2}{k^2} \right)}{2\beta_2} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \pi th \frac{\pi\beta_2 k}{2} + 2 \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) \right] + 2\nu \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) + \nu \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) \times \right. \\
& \left. \left[\frac{\left(\frac{m^2}{k^2} (2-\nu) + n^2 \right) \left(\frac{m^2}{k^2} (1-2\nu) + n^2 \right)}{\left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)} + \frac{\left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right)}{2n^2} \right] \right\}; \\
& \left(\lambda_{2y}; n^2; \frac{m^2}{k^2}; \beta_2 \right) \rightarrow \left(\lambda_{2x}; \frac{m^2}{k^2}; n^2; \beta_1 \right).
\end{aligned}$$

Проверку результатов производим для первого собственного числа свободной квадратной изотропной пластины. АП отрезка ряда (1.107) имеет вид (1.24). Первое собственное число задачи (1.89)–(1.91) при $\nu = 1/6$, полученное при помощи АП, равно $\lambda = (1.100\pi)^4$, метод Бубнова–Галеркина – $\lambda = (1.2295\pi)^4$ (погрешность – 10.51%).

Для $\nu = 0.3$ АП дает $\lambda = (1.1198\pi)^4$, метод Бубнова–Галеркина – $\lambda = (1.1683\pi)^4$ (погрешность – 4.15%), метод Саусвелла $\lambda = (1.1424\pi)^4$ (погрешность – 1.14%). Следует отметить, что методы Бубнова–Галеркина и Саусвелла дают верхнюю оценку собственного числа. Нулевое приближение РТВ и АП при $\varepsilon = 1$ соответственно дают верхнюю и нижнюю оценки собственных чисел задачи.

1.5. Собственные колебания пластины со смешанными граничными условиями «защемление – шарнир»

Рассмотрим задачу о расчете собственных колебаний пластины

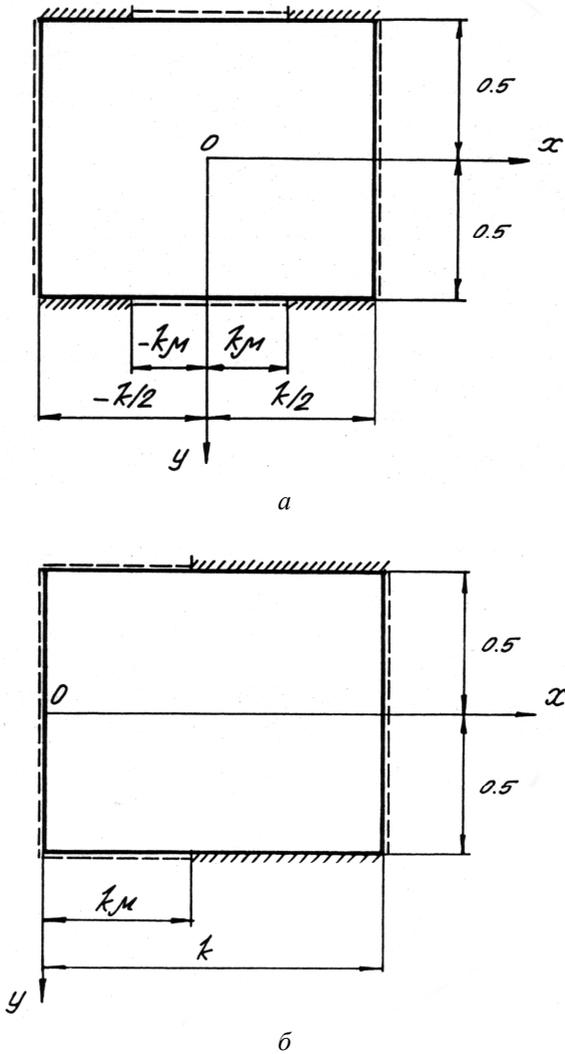


Рис. 1.8. Схемы пластин со смешанными граничными условиями;
 === шарнирное опирание, // защемление.

$(0.5k \leq x \leq 0.5k; 0.5 \leq y \leq 0.5)$, шарнирно опертой при $x = \pm 0.5k$, а на сторонах $y = \pm 0.5$ имеющей смешанные граничные условия типа «защемление-шарнир». Подробно рассмотрим симметричную задачу (рис. 1.8, а).

Исходное дифференциальное уравнение имеет вид (1.57). Присоединим к нему граничные условия, введя в них параметр ε таким образом, чтобы при $\varepsilon = 0$ были бы реализованы граничные условия шарнирного опирания по краям $y = \pm 0.5$, а при $\varepsilon = 1$ – исходные граничные условия:

$$W = 0, \quad W_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5; \quad (1.109)$$

$$W = 0, \quad W_{yy} = \overline{H}(x)\varepsilon(W_{yy} \pm W_y) \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5; \quad (1.110)$$

где $\overline{H}(x) = H(x - \mu k) + H(-x - \mu k)$, $H(x)$ – функция Хевисайда.

Для этого представим собственные числа и форму в виде РТВ (1.10). Подстановка их в дифференциальное уравнение (1.57) и граничные условия (1.109)–(1.110) с последующим расщеплением по степеням ε приводит к рекуррентной последовательности краевых задач:

$$\nabla^4 W_0 - \lambda_0 W_0 = 0;$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k,$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5;$$

$$\nabla^4 W_j - \lambda_0 W_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i W_{j-i};$$

$$W_j = 0, \quad W_{jxx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k,$$

$$W_j = 0, \quad W_{jyy} = \mp \overline{H}(x) \sum_{i=0}^{j-1} W_{iy} \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5.$$

Рассмотрим решение задачи для случая прямосимметричных относительно осей x и y форм собственных колебаний. В нулевом приближении имеем:

$$W_0 = X_0 Y_0 = \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y; \quad (1.111)$$

$$\lambda_0 = \pi^4 \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2, \quad n, m = 1, 3, 5, \dots \quad (1.112)$$

В первом приближении получаем следующую краевую задачу:

$$\nabla^4 W_1 - \lambda_0 W_0 = \lambda_1 W_0; \quad (1.113)$$

$$W_1 = 0, \quad W_{1xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k; \quad (1.114)$$

$$W_1 = 0, \quad W_{1yy} = \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{H}(x) \cos \pi m \frac{x}{k} \quad \text{при } y = \pm 0.5. \quad (1.115)$$

Решение ищем в виде разложения:

$$W_1 = \sum_{i=1,3,5,\dots} Y_i \cos \frac{\pi i}{k} x. \quad (1.116)$$

После подстановки данного выражения в (1.113)–(1.115) получим две краевые задачи:

$$\text{для } i = m: \quad Y_{1m}^{IV} - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} Y_{1m}^{II} - \pi^4 n^2 \left(2 \frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) Y_{1m} = \lambda_1 \cos \pi n y, \quad (1.117)$$

$$Y_{1m} = 0, \quad Y_{1m}^{II} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{mm} \quad \text{при } y = \pm 0.5; \quad (1.118)$$

$$\text{для } i \neq m: \quad Y_{1i}^{IV} - 2 \frac{\pi^2 i^2}{k^2} Y_{1i}^{II} - \pi^4 \left[\left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 - \frac{i^4}{k^4} \right] Y_{1i} = 0, \quad (1.119)$$

$$Y_{1i} = 0, \quad Y_{1i}^{II} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{im} \quad \text{при } y = \pm 0.5. \quad (1.120)$$

Здесь

$$\gamma_{im} = \begin{cases} 2(0.5 - \mu) - \frac{1}{\pi m} \sin 2\pi m \mu & \text{при } i = m; \\ \frac{4}{\pi (m^2 - i^2)} [i \sin \pi \mu i \cos \pi \mu m - m \sin \pi \mu m \cos \pi \mu i] & \text{при } i \neq m. \end{cases}$$

Устраняя неравномерность асимптотического разложения, определяем из краевой задачи (1.117)–(1.118) первую поправку к собственному числу:

$$\lambda_1 = 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm}. \quad (1.121)$$

После определения λ_1 строим Y_{1m} :

$$Y_{lm} = \frac{n}{\pi\alpha} \gamma_{mm} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_1} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y - y \sin \pi n y \right], \quad i = m; \quad (1.122)$$

где $\alpha = n^2 + \frac{m^2}{k^2}$; $\beta_1 = \sqrt{2 \frac{m^2}{k^2} + n^2}$.

Решение задачи (1.119)–(1.120) поправок к собственному числу не дает, а вносит дополнительные слагаемые в форму колебаний:

$$Y_{li} = \frac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\pi \left(\frac{i^2}{k^2} + n^2 \right)} \gamma_{im} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_{li} y}{\operatorname{ch} \alpha_{li} / 2} - \frac{\begin{cases} \operatorname{ch} \gamma_{li} y \\ \cos \beta_{li} y \end{cases}}{\begin{cases} \operatorname{ch} \gamma_{li} / 2 \\ \cos \beta_{li} / 2 \end{cases}} \right], \quad \begin{cases} i^2 > m^2 + n^2 k^2 \\ i^2 < m^2 + n^2 k^2 \end{cases}, \quad (1.123)$$

где $\alpha_{li} = \pi \sqrt{\frac{i^2 + m^2}{k^2} + n^2}$; $\beta_{li} = \pi \sqrt{\frac{m^2 - i^2}{k^2} + n^2}$; $\gamma_{li} = \pi \sqrt{\frac{m^2 - i^2}{k^2} - n^2}$.

Суммируя выражения (1.121) и (1.122), получаем первую поправку к собственной форме:

$$W_1 = \frac{n}{\pi\alpha} \left\{ \gamma_{mm} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \beta_1} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y - y \sin \pi n y \right] \cos \frac{\pi m}{k} x + \right. \quad (1.124)$$

$$\left. (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \gamma_{im} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_{li} y}{\operatorname{ch} \alpha_{li} / 2} - \frac{\begin{cases} \operatorname{ch} \gamma_{li} y \\ \cos \beta_{li} y \end{cases}}{\begin{cases} \operatorname{ch} \gamma_{li} / 2 \\ \cos \beta_{li} / 2 \end{cases}} \right] \right\} \cos \frac{\pi m}{k} x.$$

Здесь оператор $\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty}$ обозначает суммирование без члена с номером $i = m$.

Аналогично получаем выражение для второй поправки к собственному числу:

$$\lambda_2 = 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm} \left\{ 1 - \frac{\gamma_{mm}}{\pi^2 \alpha} \left[\frac{\pi \beta_1}{2} \operatorname{th} \frac{\pi \beta_1}{2} + \frac{n^2}{\alpha} - \frac{3}{2} \right] \right\} - \quad (1.125)$$

$$\frac{2n^2}{\alpha} \sum_{i=1,3,5,\dots} \gamma_{im}^2 \left[\alpha_i \operatorname{th} \frac{\alpha_i}{2} + \left\{ \begin{array}{l} -\varphi_{1i} \operatorname{th} \varphi_{1i} / 2 \\ \beta_{1i} \operatorname{tg} \beta_{1i} / 2 \end{array} \right\} \right].$$

РГВ имеет вид:

$$\lambda = \pi^4 \alpha^4 + 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm} \varepsilon + \left\{ 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm} \left(1 - \frac{\gamma_{mm}}{\pi^2 \alpha} \left[\frac{\pi \beta_1}{2} \operatorname{cth}^{(-1)^m} \frac{\pi \beta_1}{2} + \frac{n^2}{\alpha} - \frac{3}{2} \right] \right) - \right.$$

$$\left. \frac{2n^4}{\alpha} \sum_{\substack{i=1,3,5,\dots \\ i=2,4,6,\dots}} \gamma_{im}^2 \left[\alpha_i \operatorname{cth}^{(-1)^j} \frac{\alpha_{1i}}{2} + \left\{ \begin{array}{l} -\varphi_{1i} \operatorname{cth}^{(-1)^j} \varphi_{1i} / 2 \\ \beta_{1i} \operatorname{ctg}^{(-1)^j} \beta_{1i} / 2 \end{array} \right\} \right] \right\} \varepsilon^2 + \dots, \quad (1.126)$$

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y \\ \sin \frac{\pi m}{k} x \sin \pi n y \end{array} \right\} + \left[\frac{n}{\pi \alpha} \gamma_{mm} \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{ch} \pi \beta_{1i} y \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \operatorname{sh} \pi \beta_{1i} y \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \pi \beta_{1i} / 2 \\ \operatorname{sh} \pi \beta_{1i} / 2 \end{array} \right\} \end{array} \right) - \right.$$

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{array} \right\} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi m}{k} x \\ \sin \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\} + \frac{n}{2\pi \alpha} \left(\begin{array}{l} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{array} \right) \sum_{\substack{i=1,3,5,\dots \\ i=2,4,6,\dots}} \gamma_{im} \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \alpha_{1i} y \\ \operatorname{sh} \alpha_{1i} y \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \alpha_{1i} / 2 \\ \operatorname{sh} \alpha_{1i} / 2 \end{array} \right\} \end{array} \right) -$$

$$\left. \left. \left. \left. \left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A_{1i} \\ A_{2i} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} B_{1i} \\ B_{2i} \end{array} \right\} \end{array} \right) \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi i}{k} x \\ \sin \frac{\pi i}{k} x \end{array} \right\} \right] \varepsilon + \dots, \quad \left. \begin{array}{l} \left\{ n, m = 1, 3, 5, \dots \right\} \\ \left\{ n, m = 2, 4, 6, \dots \right\} \end{array} \right\}, \quad (1.127)$$

где

$$\gamma_{im} = \begin{cases} 1 - 2\mu + \frac{(-1)^m}{\pi m} \sin 2\pi m \mu & \text{при } i = m, \\ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(m^2 - i^2)} \left[\begin{matrix} i \\ m \end{matrix} \right] \sin \pi \mu i \cos \pi \mu m - \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \left[\begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right] \sin \pi \mu m \cos \pi \mu i & \text{при } i \neq m; \end{cases} \quad (1.128)$$

$$\frac{\begin{matrix} \{A_{1i}\} \\ \{A_{2i}\} \\ \{B_{1i}\} \\ \{B_{2i}\} \end{matrix}}{\begin{matrix} \{A_{1i}\} \\ \{A_{2i}\} \\ \{B_{1i}\} \\ \{B_{2i}\} \end{matrix}} = \frac{\begin{matrix} \{\operatorname{ch} \varphi_{1i} y\} \\ \{\operatorname{sh} \varphi_{1i} y\} \\ \{\operatorname{ch} \varphi_{1i} / 2\} \\ \{\operatorname{sh} \varphi_{1i} / 2\} \end{matrix}}{\begin{matrix} \{\operatorname{ch} \varphi_{1i} y\} \\ \{\operatorname{sh} \varphi_{1i} y\} \\ \{\operatorname{ch} \varphi_{1i} / 2\} \\ \{\operatorname{sh} \varphi_{1i} / 2\} \end{matrix}} \quad \text{при } i^2 > m^2 + n^2 k^2;$$

$$\frac{\begin{matrix} \{A_{1i}\} \\ \{A_{2i}\} \\ \{B_{1i}\} \\ \{B_{2i}\} \end{matrix}}{\begin{matrix} \{A_{1i}\} \\ \{A_{2i}\} \\ \{B_{1i}\} \\ \{B_{2i}\} \end{matrix}} = \frac{\begin{matrix} \{\cos \beta_{1i} y\} \\ \{\sin \beta_{1i} y\} \\ \{\cos \beta_{1i} / 2\} \\ \{\sin \beta_{1i} / 2\} \end{matrix}}{\begin{matrix} \{\cos \beta_{1i} y\} \\ \{\sin \beta_{1i} y\} \\ \{\cos \beta_{1i} / 2\} \\ \{\sin \beta_{1i} / 2\} \end{matrix}} \quad \text{при } i^2 < m^2 + n^2 k^2.$$

Аналогично решается задача о расчете собственных частот пластины с несимметрично расположенными участками смешанных граничных условий (рис. 1.8, б). Выражения для собственных чисел и формы (1.126) и (1.127) сохраняются с заменой $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ на (-1) , $\begin{Bmatrix} \cos \pi m x / k \\ \sin \pi m x / k \end{Bmatrix}$ на $\sin \frac{\pi m}{k} x$,

$\begin{Bmatrix} \cos \pi i x / k \\ \sin \pi i x / k \end{Bmatrix}$ на $\sin \frac{\pi i}{k} x$; $m = 1, 2, 3, \dots$, $i = 1, 2, 3, \dots$, а γ_{im} равно:

$$\gamma_{im} = \begin{cases} \mu - \frac{1}{2\pi m} \sin 2\pi m \mu & \text{при } i = m, \\ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(m^2 - i^2)} [i \sin \pi \mu m \cos \pi \mu i - m \sin \pi \mu i \cos \pi \mu m] & \text{при } i \neq m. \end{cases} \quad (1.129)$$

Далее РТВ для собственного числа перестраиваем в АП (1.24) и вычисляем значение первого собственного числа задачи (1.57), (1.109), (1.110) при $\varepsilon = 1$. Результаты расчетов представлены на рис. 1.9. Сплошной линией изображена зависимость собственного числа от параметра μ для пластины с симметричным расположением участка защемления, штриховой – несимметричным. В предельном случае (стороны $y = \pm 0.5$ полностью защемлены) первое собственное число задачи, полученное

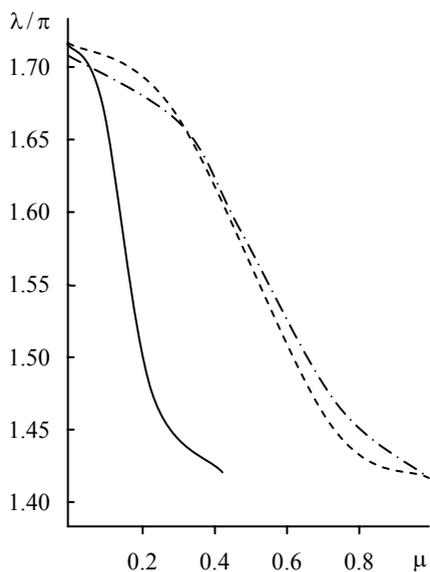


Рис.1.9. Влияние длины участков заземления на первое собственное число.

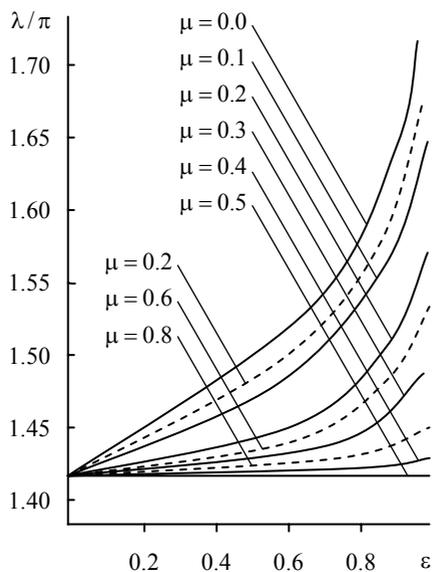


Рис.1.10. Влияние жесткости заделки на первое собственное число.

численно, $\lambda = (1.7050\pi)^4$, АП (1.24) дает $\lambda = (1.7081\pi)^4$ (погрешность – 0.18%). Штрихпунктирной линией обозначены результаты, полученные при помощи метода интегральных уравнений. Расхождения, как видно, незначительны.

В рамках предлагаемого метода удается учесть влияние жесткости заделки на участках защемления. На рис.1.10 представлена зависимость первого собственного числа задачи (1.57), (1.109), (1.110) от параметра ε для различных значений параметра μ . Видно, что влияние жесткости защемления на собственную частоту будет проявляться в наибольшей мере для упругих заделок, близких по жесткости к полным.

1.6. Сравнение теоретических и экспериментальных данных

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях пластины $(-0.5k \leq x \leq 0.5k; -0.5 \leq y \leq 0.5)$, шарнирно опертой при $x = \pm 0.5k$, а на сторонах $y = \pm 0.5$ имеющей смешанные граничные условия типа «защемление-шарнир», причем участки защемления расположены посередине сторон $y = \pm 0.5$ (рис. 1.11).

Исходное дифференциальное уравнение имеет вид (1.57), в граничных условиях (1.109), (1.110) функцию $\bar{H}(x)$ следует положить

$$\bar{H}(x) = H(-x + \mu k) - H(-x - \mu k).$$

Применив к поставленной краевой задаче МВ, получим выражения для собственных чисел и форм в виде РТВ (1.126) и (1.127). Выражение для γ_{im} в этом случае имеет вид:

$$\gamma_{im} = \begin{cases} 2\mu - \frac{(-1)^m}{4\pi m} \sin 2\pi m \mu & \text{при } i = m; \\ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(m^2 - i^2)} \left[\begin{cases} i \\ -m \end{cases} \sin \pi \mu i \cos \pi \mu m + \begin{cases} -m \\ i \end{cases} \sin \pi \mu m \cos \pi \mu i \right] & \text{при } i \neq m. \end{cases} \quad (1.130)$$

Далее РТВ перестраивается в АП (1.24) и вычисляется первое собственное число. Результаты расчета для квадратной пластины приведены на рис.1.12. Сплошная линия – полученное решение, штриховая и штрихпунктирная линии – теоретические результаты работ [67, 167].

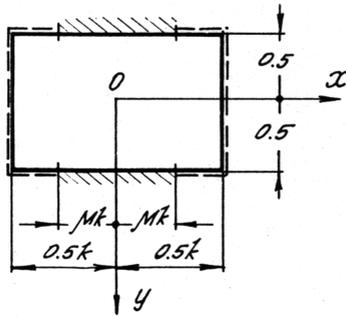


Рис. 1.11. Схема пластины со смешанными граничными условиями.

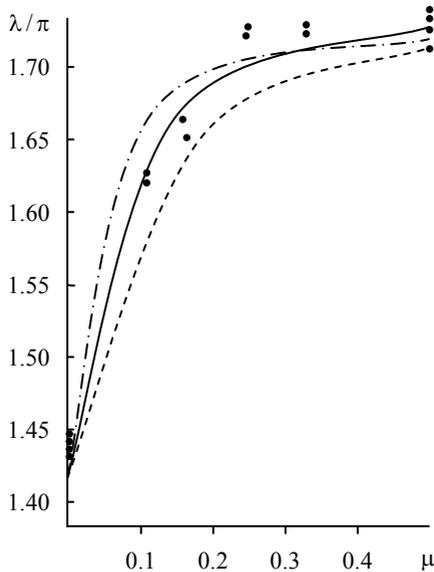


Рис.1.12. Сравнение теоретических и экспериментальных данных.

Видно, что все три кривые дают практически одинаковые результаты для всех значений параметра μ . Экспериментальные данные [167] (точки) также довольно близки к расчетным.

График зависимости собственного числа от параметра μ имеет две зоны: $0.0 \leq \mu \leq 0.3$ и $0.3 < \mu \leq 0.5$. На первом участке с ростом параметра μ наблюдается значительный рост λ . Во второй зоне изменение параметра μ практически не оказывает влияния на собственное число задачи.

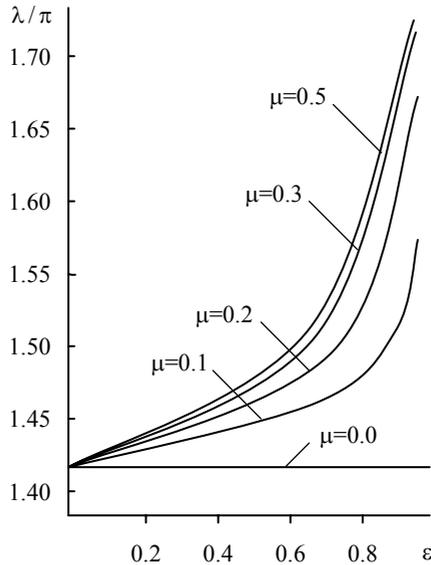


Рис.1.13. Влияние длины участков заземления на первое собственное число.

Следовательно, пластину, имеющую заземленные участки по размеру больше, чем $\mu = 0.3$, можно считать заземленной по сторонам $y = \pm 0.5$, при этом погрешность в определении собственной частоты составит менее 5%.

На рис.1.13 приведена зависимость собственного числа λ от параметра ϵ для различных μ . Видно, что влияние жесткости торцов особенно сильнее проявляется при $\epsilon > 0.7$.

1.7. Собственные колебания частично заземленной по контуру пластины

Рассмотрим более сложный случай граничных условий – частично заземленную по контуру прямоугольную пластину ($0 \leq x \leq k$; $-0.5 \leq y \leq 0.5$), шарнирно опертую по стороне $x = k$, заземленную по стороне $x = 0$, а на сторонах $y = \pm 0.5$ имеющей смешанные граничные условия типа «заземление – шарнир» (рис. 1.14). Колебания пластины описываются дифференциальным уравнением (1.57). Присоединим к дифференциальному уравнению граничные условия:

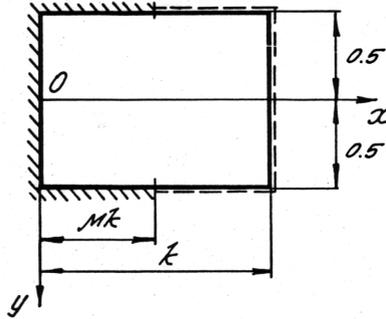


Рис. 1.14. Схема пластины со смешанными граничными условиями.

$$\begin{aligned}
 W = 0, \quad W_{yy} = \varepsilon \bar{H}(x)(W_{yy} \mp W_y) \quad \text{при } y = \pm 0.5; \\
 W = 0, \quad W_{xx} = \varepsilon(W_{xx} + kW_x) \quad \text{при } x = 0; \\
 W = 0, \quad W_{xx} = 0 \quad \text{при } x = k;
 \end{aligned} \tag{1.131}$$

где $\bar{H}(x) = H(x) - H(x - \mu k)$.

Подстановка РТВ в краевую задачу (1.57), (1.131) приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned}
 \nabla^4 W_0 - \lambda_0 W_0 &= 0; \\
 W_0 = 0, \quad W_{0yy} = 0 \quad \text{при } y = \pm 0.5; \\
 W_0 = 0, \quad W_{0xx} = 0 \quad \text{при } x = 0, k; \\
 \nabla^4 W_j - \lambda_0 W_j &= \sum_{i=1}^j \lambda_i W_{j-i}; \\
 W_j = 0, \quad W_{jyy} = \mp \bar{H}(x) \sum_{i=0}^{j-1} W_{iy} \quad \text{при } y = \pm 0.5; \\
 W_j = 0, \quad W_{jxx} = k \sum_{i=0}^{j-1} W_{ix} \quad \text{при } x = 0; \\
 W_j = 0, \quad W_{jxx} = 0 \quad \text{при } x = k.
 \end{aligned}$$

В нулевом приближении получаем задачу о колебаниях пластины, шарнирно опертой по контуру, имеющую решение:

$$W_0 = X_0 Y_0 = \sin \frac{\pi m}{k} x \begin{cases} \cos \pi n y; n = 1, 3, 5, \dots \\ \sin \pi n y; n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}; \tag{1.132}$$

$$\lambda_0 = \pi^4 \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)^2 = \pi^4 \alpha. \quad (1.133)$$

Рассмотрим краевую задачу первого приближения:

$$\nabla W_1 - \lambda_0 W_1 = \lambda_1 W_0, \quad (1.134)$$

$$W_1 = 0, \quad W_{1yy} = \mp \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{cases} \left\{ \pi n \bar{H}(x) \sin \frac{\pi m}{k} x \right. \text{ при } y = \pm 0.5; \quad (1.135)$$

$$W_1 = 0, \quad W_{1xx} = \pi m \begin{cases} \cos \pi n y \\ \sin \pi n y \end{cases} \text{ при } x = 0; \quad (1.136)$$

$$\bar{H}(x) = H(-x + \mu k) - H(-x - \mu k) \quad (1.137)$$

где $\lambda_1 = \lambda_{1x} + \lambda_{1y}$.

Решение отыскиваем в виде:

$$W_1 = X_1 \begin{cases} \cos \pi n y \\ \sin \pi n y \end{cases} + \sum_{i=1}^{\infty} Y_{1i} \sin \frac{\pi i}{k} x. \quad (1.138)$$

После подстановки выражения (1.138) в уравнение (1.134) и граничные условия (1.135) – (1.136) получаем три краевые задачи:

$$X_1^{IV} - 2\pi^2 n^2 X_1'' - \pi^4 \frac{m^2}{k^2} \left(2n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right) X_1 = \lambda_{1x} \sin \frac{\pi m}{k} x; \quad (1.139)$$

$$X_1 = 0, \quad X_1'' = \pi m \text{ при } x = 0; \quad (1.140)$$

$$X_1 = 0, \quad X_1'' = 0 \text{ при } x = k; \quad (1.141)$$

$$\text{при } i = m: \quad Y_{1m}^{IV} - 2\pi^2 \frac{m^2}{k^2} Y_{1m}'' - \pi^4 n^2 \left(2\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) Y_{1m} = \lambda_{1y} \begin{cases} \cos \pi n y \\ \sin \pi n y \end{cases}; \quad (1.142)$$

$$Y_{1m}^{IV} = 0, \quad Y_{1m}'' = \mp \begin{cases} -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{cases} \left\{ \pi n \gamma_{mm} \right. \text{ при } y = \pm 0.5; \quad (1.143)$$

$$\text{при } i \neq m: \quad Y_{1i}^{IV} - 2\pi^2 \frac{i^2}{k^2} Y_{1i}'' - \pi^4 \left[\left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)^2 - \frac{i^4}{k^4} \right] Y_{1i} = 0; \quad (1.144)$$

$$Y_{li}^{IV} = 0, \quad Y_{li}'' = \mp \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{cases} \pi n \gamma_{im} \quad \text{при } y = \pm 0.5. \quad (1.145)$$

Здесь γ_{im} определяется выражением (1.129).

Крайевые задачи (1.139)–(1.141) и (1.142)–(1.143) имеют неравномерности асимптотических разложений, устранив которые определим λ_{1x} и λ_{1y} :

$$\lambda_{1x} = 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2}, \quad (1.146)$$

$$\lambda_{1y} = 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm}. \quad (1.147)$$

Собственные функции задач (1.139)–(1.141) и (1.142)–(1.143) таковы:

$$X_1 = \frac{m}{2\pi\alpha} \left[\operatorname{ch} \beta_2 x - \operatorname{cth} \beta_2 k \operatorname{sh} \beta_2 x - \cos \frac{\pi m}{k} x + \frac{1}{k} x \cos \frac{\pi m}{k} x \right]; \quad (1.148)$$

$$Y_{lm} = \frac{(-1)^{n+1} n \gamma_{mm}}{\pi\alpha} \left[\frac{\begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{cases}}{2 \begin{cases} \operatorname{ch} \beta_1 / 2 \\ \operatorname{sh} \beta_1 / 2 \end{cases}} \begin{cases} \operatorname{ch} \beta_1 y \\ \operatorname{sh} \beta_1 y \end{cases} \right] - \quad (1.149)$$

$$- Y \begin{cases} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{cases}, \quad \begin{cases} n = 1, 3, 5, \dots \\ n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}.$$

Решение краевых задач (1.144)–(1.145) не изменяет собственных чисел, а только вносит поправку в собственные формы:

$$Y_{li} = \frac{n}{2\pi\alpha} \gamma_{im} \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{cases} \left[\frac{\begin{cases} \operatorname{ch} \alpha_{li} y \\ \operatorname{sh} \alpha_{li} y \end{cases} \begin{cases} A_{1i} \\ A_{2i} \end{cases}}{\begin{cases} \operatorname{ch} \alpha_{li} / 2 \\ \operatorname{sh} \alpha_{li} / 2 \end{cases} \begin{cases} B_{1i} \\ B_{2i} \end{cases}} \right]. \quad (1.150)$$

Суммируя выражения (1.146) и (1.147), найдем первую поправку к собственному числу:

$$\lambda_1 = 2\pi^2 \left(\frac{m^2}{k^2} + 2n^2 \gamma_{mm} \right). \quad (1.151)$$

С учетом выражений (1.138), (1.148)–(1.150) получим первую поправку к собственной форме:

$$\begin{aligned} W_1 = & \frac{m}{2\pi\alpha} \left[\operatorname{ch} \beta_2 x - \operatorname{cth} \beta_2 k \operatorname{sh} \beta_2 x - \cos \frac{\pi m}{k} x + \frac{1}{k} x \cos \frac{\pi m}{k} x \right] \begin{Bmatrix} \cos \pi n y \\ \sin \pi n y \end{Bmatrix} + \\ & (-1)^{n+1} \frac{n}{\pi\alpha} \gamma_{mm} \left[\frac{\begin{Bmatrix} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \beta_1 y \\ \operatorname{sh} \beta_1 y \end{Bmatrix} - Y \begin{Bmatrix} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{Bmatrix}}{2 \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \beta_1 / 2 \\ \operatorname{sh} \beta_1 / 2 \end{Bmatrix}} \right] \sin \frac{\pi m}{k} x + \\ & \frac{n}{2\pi\alpha} \begin{Bmatrix} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{Bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{im} \left[\frac{\begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \alpha_{1i} y \\ \operatorname{sh} \alpha_{1i} y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \alpha_{1i} / 2 \\ \operatorname{sh} \alpha_{1i} / 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \end{Bmatrix}} \right] \sin \frac{\pi i}{k} x. \end{aligned} \quad (1.152)$$

Аналогично находим вторую поправку к собственному числу. Окончательно выражение для собственного числа в виде отрезка ряда возмущений может быть записано так:

$$\lambda = \pi^4 \alpha^2 + 2\pi^2 \left(\frac{m^2}{k^2} + 2n^2 \gamma_{mm} \right) \varepsilon + (\lambda_{2x} + \lambda_{2y}) \varepsilon^2 + \dots \quad (1.153)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_{2x} = & 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} \left\{ 1 + \frac{k}{2\pi^2 \alpha} \left(\frac{1}{k} - \beta_2 \operatorname{cth} \beta_2 k \right) - \frac{\gamma_{mm}}{2\pi^2 \alpha} \left(n^2 - \frac{m^2}{k^2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{n^2}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{im} \frac{1}{\left(\frac{i^2 - m^2}{k^2} \right) \left(\frac{i^2 + m^2}{k^2} + 2n^2 \right)} - \frac{\lambda_1}{2\pi^2 \alpha^2} \left(\frac{m^2}{k^2} - n^2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\lambda_{2y} = 4\pi^2 n^2 \left\{ \gamma_{mm} + \frac{m}{2\pi\alpha} \left[\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\pi^2\alpha} \left(\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2 \mu k \sin \pi \mu k - \frac{\pi m}{k} \operatorname{ch} \beta_2 \mu k \cos \pi \mu k + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\pi m}{k} - \operatorname{cth} \beta_1 k \left(\beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 \mu k \sin \pi \mu k - \frac{\pi m}{k} \operatorname{sh} \beta_1 \mu k \cos \pi \mu k \right) \right] \right\} + \frac{1}{2\pi m} \times \\ \left(\frac{1}{2\pi m} \sin 2\pi m \mu + (1 - \mu) \cos 2\pi m \mu - 1 \right) \left[-\frac{\gamma_{mm}^2}{\pi^2 \alpha} \left(\frac{\beta_1}{2} \operatorname{th} \frac{\beta_1}{2} - 1 \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{2\pi^2 \alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{im}^2 \left[\alpha_i \operatorname{cth}^{(-1)^n} \frac{\alpha_{1i}}{2} - \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{1i} \operatorname{cth}^{(-1)^n} \frac{\varphi_{1i}}{2} \\ (-1)^n \beta_{1i} \operatorname{tg}^{(-1)^n} \frac{\beta_{1i}}{2} \end{array} \right\} \right] \right\} - \lambda_1 \frac{\gamma_{mm}}{8\pi^2 \alpha^2} \left(n^2 - \frac{m^2}{k^2} \right).$$

Далее перестраиваем РТВ (1.153) в АП (1.24).

Сравним полученные результаты с известными решениями в предельных случаях. При $\mu = 0$ получаем пластину, защемленную по одной и опертую по всем остальным сторонам. В этом случае значение первого собственного числа $\lambda^{(1)}$, полученное при помощи АП (1.24), равно $(1.5520\pi)^4$. Собственное число, полученное численным методом – $\lambda^{(1)} = (1.5501\pi)^4$, погрешность составляет 0.12%.

Во втором предельном случае ($\mu = 1$) имеем пластину, шарнирно опертую по одной стороне и защемленную по трем другим. Первое собственное число, полученное данным методом, $\lambda^{(1)} = (1.7963\pi)^4$. Сравнение производилось с данными, приведенными в работе [73], где собственные числа подсчитаны методами рядов, конечных разностей, R -функций, В.В. Болотина. Наибольшее расхождение составляет 0.76%.

Для пластины, защемленной на половине контура $\mu = 0.5$, АП дает $\lambda^{(1)} = (1.6076\pi)^4$. В работе [73] приведены значения собственных чисел, определенных при помощи метода R -функций. Наибольшее расхождение составляет 6.5%. Для собственного числа, полученного методом конечных разностей, расхождение составляет 3% [73].

На рис.1.15 изображена зависимость $\lambda^{(1)}$ от параметра μ . График имеет три характерные зоны: $[0, 0.3]$, $[0.3, 0.85]$, $[0.85, 1]$. В первой и третьей зонах собственное число практически не зависит от параметра μ . Во второй зоне $\lambda^{(1)}$ существенно увеличивается с ростом μ . Приведенные результаты свидетельствуют о том, что наличие защемленной стороны $x = 0$ существенно влияет на собственную частоту колебания пластины. Появление симметричных участков заделки на двух противоположных сторонах пластины практически не влияет на частоту собственных колебаний до значений $\mu \approx 0.3$. В случае, когда стороны $y = \pm 0.5$ почти

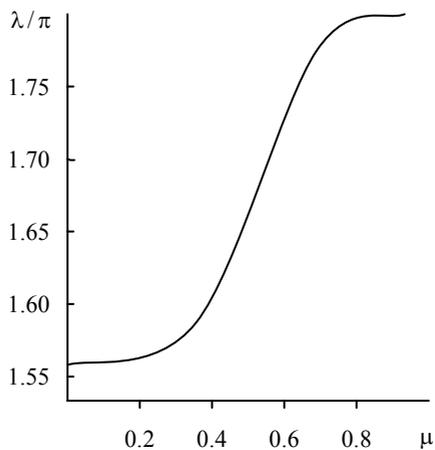


Рис.1.15. Зависимость первого собственного числа от размера участка заземления.

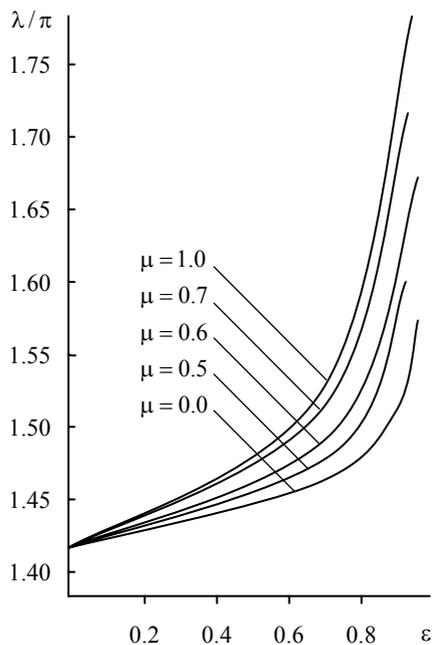


Рис.1.16. Зависимость собственного числа $\lambda^{(1)}$ от параметра ϵ .

полностью защемлены, наличие небольших шарнирно опертых участков также не оказывает влияния на собственную частоту колебаний. В промежуточных случаях незначительное изменение длины участков заделки приводит к существенным изменениям собственной частоты.

Можно также оценить влияние жесткости защемления на собственную частоту. На рис.1.16 представлена зависимость $\lambda^{(1)}$ от параметра ε для различных значений μ . В отличие от предыдущей задачи, влияние параметра ε на $\lambda^{(1)}$ существенно для всего интервала изменения ε , хотя при $0.8 \leq \varepsilon \leq 1.0$ с ростом ε собственное число растет особенно быстро.

1.8. Собственные колебания пластины со смешанными граничными условиями «свободный край – подвижная заделка»

Рассмотрим собственные колебания прямоугольной пластины ($-0.5k \leq x \leq 0.5k$; $-0.5 \leq y \leq 0.5$), шарнирно опертой по сторонам $x = \pm 0.5k$, а на сторонах $y = \pm 0.5$ имеющей смешанные граничные условия типа «свободный край – подвижная заделка». Сначала решим задачу для пластины, обладающей симметрией в двух направлениях (рис. 1.17, а).

Колебания пластины описываются дифференциальным уравнением (1.57). Присоединим к нему граничные условия в преобразованном виде:

$$W_{yyy} + (2 - \nu)W_{xy} = 0, \\ W_y = \varepsilon \overline{H}(x) [W_y + (W_{yy} + \nu W_{xx})] \quad \text{при } y = \pm 0.5; \quad (1.154)$$

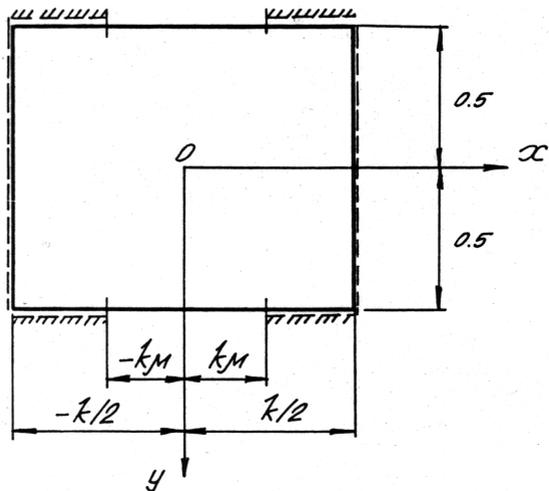
$$W = 0, \quad W_{xx} = 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \quad (1.155)$$

где $\overline{H}(x) = H(-x + \mu k) - H(-x - \mu k)$.

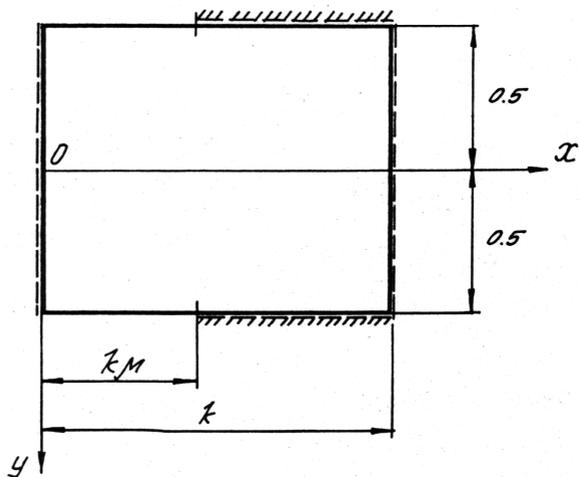
Далее к задаче (1.157), (1.154)–(1.155) применяем МВ. В результате получаем следующую рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\nabla^4 W_0 - \lambda_0 W_0 = 0; \\ W_0 = 0, \quad W_{0xx} = 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \\ W_{0y} = 0, \quad W_{0yyy} = 0 \quad \text{при } y = \pm 0.5;$$

$$\nabla^4 W_j - \lambda_0 W_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i W_{j-i};$$



a



б

Рис. 1.17. Схемы пластин со смешанными граничными условиями; ===== – шарнирное опирание, ||||| – подвижная заделка, ————— – свободный край.

$$\begin{aligned}
W_j = 0, \quad W_{jxx} = 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \\
W_{jyyy} + (2-\nu)W_{jxy} = 0; \\
W_{jy} = \pm \sum_{i=0}^{j-1} (W_{jyy} + \nu W_{ixx}) \quad \text{при } y = \pm 0.5.
\end{aligned}$$

Последовательно рассматривая эти задачи, получим выражение для собственного числа λ :

$$\begin{aligned}
\lambda = \pi^4 \alpha^2 - 4\pi^4 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) \gamma_{mm} \varepsilon + \left\{ \lambda_1 \left[1 - \frac{\gamma_{mm}}{\alpha} \left(\frac{\pi}{2\beta_1} \left(n^2 - (2-\nu) \frac{m^2}{k^2} \right) \times \right. \right. \right. \\
\times \text{cth}^{(-1)^m} \frac{\pi}{2} \beta_1 - 2 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) \left(\frac{n^2 + (2-\nu) \frac{m^2}{k^2}}{\alpha} - \frac{n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2}}{2n^2} \right) \left. \left. \left. \right] + 4\pi^2 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) \times \right. \right. \\
\times \sum_{\substack{\{i=1,3,5,\dots\} \\ \{i=2,4,6,\dots\}}} \gamma_{im}^2 \left[(1-\nu) \frac{i^2}{k^2} + \alpha \right] \text{cth}^{(-1)^i} \frac{\alpha_{1i}}{2} \cdot \frac{1}{\alpha_{1i}} - \left[(1-\nu) \frac{i^2}{k^2} - \alpha \right]^{-2} \left\{ \begin{array}{l} \text{cth}^{(-1)^i} \frac{\Phi_{1i}}{2} \cdot \frac{1}{\Phi_{1i}} \\ \text{ctg}^{(-1)^i} \frac{\beta_{1i}}{2} \cdot \frac{1}{\beta_{1i}} \end{array} \right\} \left. \right\} \times \\
\times \varepsilon^2 + \dots, \quad \left\{ \begin{array}{l} n, m = 1, 3, 5, \dots \\ n, m = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}, \quad (1.156)
\end{aligned}$$

и собственной формы W :

$$\begin{aligned}
W = \left\{ \begin{array}{l} \cos \pi n y \quad \cos \frac{\pi m}{k} x \\ \sin \pi n y \quad \sin \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\} + \frac{\pi \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right)}{\alpha} \left\{ \gamma_{mm} \frac{\left(n^2 + (2+\nu) \frac{m^2}{k^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \text{sh } \pi \beta_1 / 2 \\ \text{ch } \pi \beta_1 / 2 \end{array} \right\}} \left\{ \begin{array}{l} \text{ch } \pi \beta_1 y \\ \text{sh } \pi \beta_1 y \end{array} \right\} + \right. \\
\left. + (-1)^n \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) Y \left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n y \\ \cos \pi n y \end{array} \right\} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi m}{k} x \\ \cos \frac{\pi m}{k} x \end{array} \right\} + \pi \alpha (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{\substack{\{i=1,3,5,\dots\} \\ \{i=2,4,6,\dots\}}} \gamma_{im} \times
\end{aligned}$$

$$\times \frac{\left[\frac{(1-\nu)i^2 + m^2}{k^2} + n^2 \right]}{\alpha_{1i} \begin{Bmatrix} \text{sh } \alpha_{1i} / 2 \\ \text{ch } \alpha_{1i} / 2 \end{Bmatrix}} \left\{ \begin{matrix} \text{ch } \alpha_{1i} Y \\ \text{sh } \alpha_{1i} Y \end{matrix} \right\} + (-1)^i \frac{\left[\frac{(1-\nu)i^2 - m^2}{k^2} - n^2 \right]}{\begin{Bmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \end{Bmatrix}} \left\{ \begin{matrix} D_{1i} \\ D_{2i} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \cos \frac{\pi i}{k} x \\ \sin \frac{\pi i}{k} x \end{matrix} \right\} \left\{ \varepsilon + \dots \right\},$$

$$\left. \begin{matrix} \{n, m = 1, 3, 5, \dots\} \\ \{n, m = 2, 4, 6, \dots\} \end{matrix} \right\}. \quad (1.157)$$

Здесь

$$\gamma_{im} = \begin{cases} 2\mu - \frac{(-1)^m \sin 2\pi m \mu}{4\pi m} & \text{при } i = m; \\ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(m^2 - i^2)} \left[\begin{Bmatrix} i \\ -m \end{Bmatrix} \sin \pi \mu i \cos \pi \mu m + \begin{Bmatrix} -m \\ i \end{Bmatrix} \sin \pi \mu m \cos \pi \mu i \right] & \text{при } i \neq m; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{sh } \varphi_{1i} / 2 \\ \text{ch } \varphi_{1i} / 2 \end{Bmatrix} & \text{при } i^2 > m^2 + k^2 n^2; \\ \begin{Bmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin \beta_{1i} / 2 \\ \cos \beta_{1i} / 2 \end{Bmatrix} & \text{при } i^2 < m^2 + k^2 n^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} D_{1i} \\ D_{2i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\varphi_{1i}} \text{ch } \varphi_{1i} y \\ \frac{1}{\varphi_{1i}} \text{sh } \varphi_{1i} y \end{Bmatrix} & \text{при } i^2 > m^2 + k^2 n^2; \\ \begin{Bmatrix} D_{1i} \\ D_{2i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\beta_{1i}} \cos \beta_{1i} y \\ \frac{1}{\beta_{1i}} \sin \beta_{1i} y \end{Bmatrix} & \text{при } i^2 < m^2 + k^2 n^2. \end{cases}$$

Полученные формулы применимы и в случае несимметричного расположения свободного участка (рис. 1.17, б). Для этого в выражениях (1.156) и (1.157) необходимо заменить $\begin{Bmatrix} \cos \pi m x / k \\ \sin \pi m x / k \end{Bmatrix}$ на $\sin \pi m x / k$, $\begin{Bmatrix} \cos \pi i x / k \\ \sin \pi i x / k \end{Bmatrix}$ на $\sin \pi i x / k$, $m=1,2,3,\dots$, $i=1,2,3,\dots$.

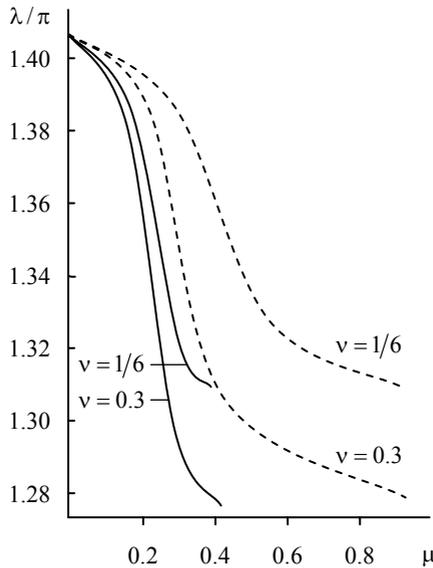


Рис.1.18. Зависимость собственного числа от размеров участков смешанных граничных условий.

Коэффициенты γ_{im} в этом случае определяются формулой (1.129). Далее РТВ λ (1.156) перестраиваем в (1.24) и подсчитываем его значение при $\varepsilon = 1$. Результаты расчета приведены на рис.1.18. Сплошной линией изображены результаты для случая симметричного расположения свободного участка, штриховой – несимметричного. В предельном случае, когда стороны $y = \pm 0.5$ полностью свободны, полученное решение можно сравнить с численным решением. При $\nu = 0.3$ численное решение дает $\lambda = (1.2758\pi)^4$; решение АП – $\lambda = (1.2766\pi)^4$ (погрешность 0.15%). При $\nu = 1/6$ численное решение дает $\lambda = (1.3132\pi)^4$; АП – $\lambda = (1.3122\pi)^4$ (погрешность 0.08%). Погрешность в определении собственных чисел уменьшается с уменьшением коэффициента Пуассона. Это происходит, по-видимому, потому, что с уменьшением коэффициента Пуассона граничные условия становятся ближе к условиям подвижной заделки, и возрастает вклад нулевого приближения в выражении для собственного числа.

Рассмотрим влияние геометрических размеров участков смешанных граничных условий на частоту собственных колебаний при $\nu = 0.3$. На рис.1.18 можно выделить три участка: $[0, 0.5]$, $[0.15, 0.35]$, $[0.35, 0.5]$ в случае симметричного расположения участка свободного края и $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.6]$, $[0.6, 1.0]$ в случае несимметричного. В первой зоне собственное

число λ существенно нелинейно зависит от геометрических размеров свободного края и с увеличением параметра μ уменьшается незначительно. Во второй зоне наблюдается почти линейная зависимость λ от μ , незначительное увеличение геометрических размеров свободного участка приводит к значительному изменению собственного числа. В третьей зоне с ростом размеров свободного края собственное число уменьшается незначительно. Обращает на себя внимание большая протяженность этой зоны, особенно в случае несимметричного расположения участка свободного края. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что наличие небольших участков свободного края не влияет существенно на частоту собственных колебаний.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК И ПЛАСТИН

2.1. Колебания стержня в нелинейно-упругой внешней среде

Исследование нелинейных колебаний пространственно ограниченных систем с распределенными параметрами начнем с рассмотрения продольных колебаний стержня в нелинейно-упругой внешней среде. На этом примере изложим используемую асимптотическую технику и проанализируем особенности получаемого решения, характерные для всего данного класса задач. В качестве определяющих соотношений используется уравнение движения в перемещениях

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_1 u - \varepsilon \beta_2 u^3 = 0. \quad (2.1)$$

Концы стержня жестко защемлены:

$$u|_{x=0,l} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь u – продольное перемещение; x – пространственная координата; t – время; l – длина стержня; $a = \sqrt{E/\rho}$, где E – модуль Юнга, ρ – плотность материала стержня; β_1, β_2 – некоторые коэффициенты, ε – безразмерный малый параметр, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Будем искать решение, удовлетворяющее условию периодичности

$$u(x, t) = u(x, t + T), \quad (2.3)$$

где $T = 2\pi/\omega$ – период, ω – искомая собственная частота колебаний.

Введем преобразование времени

$$\tau = \omega t \quad (2.4)$$

и представим решение в виде асимптотических разложений:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (2.5)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.6)$$

где $\omega_0 = \sqrt{(a\pi/l)^2 + \beta_1}$ – собственная частота основного тона колебаний линейной системы (при $\varepsilon = 0$).

Подставляя выражения (2.4)–(2.6) в исходную краевую задачу (2.1)–(2.3) и приравнявая между собой члены при одинаковых степенях ε , получаем рекуррентную систему линейных уравнений:

$$a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - \beta_1 u_0 = 0, \quad (2.7)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \beta_1 u_1 = 2\omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + \beta_2 u_0^3, \quad (2.8)$$

.....

Граничные условия (2.2) и условия периодичности (2.3) принимают вид:

$$u_i|_{x=0,l} = 0, \quad (2.9)$$

$$u_i(x, \tau) = u_i(x, \tau + 2\pi), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Решение краевой задачи (2.7), (2.9), (2.10) соответствует нулевому приближению:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left(\frac{\omega_i^{\text{lin}}}{\omega_0} \tau\right) \sin\left(\frac{\pi i}{l} x\right), \quad (2.11)$$

где A_1 – амплитуда основного тона колебаний, определяемая из начальных условий; A_j , $j = 2, 3, 4 \dots$ – амплитуды последующих гармоник; $\omega_i^{\text{lin}} = \sqrt{(a\pi i/l)^2 + \beta_1}$, $i = 1, 2, 3 \dots$ – собственные частоты гармоник в линейном случае, $\omega_0 = \omega_1^{\text{lin}}$.

Следующее приближение находится путем решения краевой задачи (2.8)–(2.10). При этом для предотвращения появления в разложении (2.5) вековых членов в правой части уравнения (2.8) коэффициенты при членах вида $\sin\left(\frac{\omega_i^{\text{lin}}}{\omega_0} \tau\right) \sin\left(\frac{\pi i}{l} x\right)$, $i = 1, 2, 3 \dots$ следует приравнять нулю. С

учетом соотношения (2.11) это условие приводит к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\frac{2A_i\omega_1}{\beta_2\omega_0}(\omega_i^{\text{lin}})^2 = \frac{9}{16}A_i^2 + \frac{3}{4}A_i\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k^2 + \sum_{k=i+1}^{\infty}A_k^2\right), \quad i=1,2,3 \dots \quad (2.12)$$

Решение системы (2.12) позволяет определить второй член разложения (2.6) ω_1 – поправку к частоте, вызванную нелинейностью задачи. Проанализируем возможные решения системы (2.12). Форма колебаний определяется выражением

$$u = \sum_{i=1}^{\infty}A_i \sin(\Omega_i t) \sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right) + O(\varepsilon), \quad (2.13)$$

где $\Omega_i = \frac{\omega_i^{\text{lin}}}{\omega_1^{\text{lin}}}\omega$ – частоты гармоник.

В общем случае имеет место только одна i -ая гармоника. Тогда

$$A_j = 0, \quad \omega_1 = \frac{9A_i^2\beta_2\omega_0}{32(\omega_i^{\text{lin}})^2}, \quad j \in N, \quad j \neq i; \quad (2.14a)$$

а искомая АЧХ запишется в виде

$$\Omega_i = \omega_i^{\text{lin}} + 0.28125 \frac{A_i^2\beta_2}{\omega_i^{\text{lin}}} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (2.14б)$$

где $i=1,2,3 \dots$. Положительные значения ε соответствуют жесткой, а отрицательные – мягкой характеристике восстанавливающей силы.

Особенностью систем с распределенными параметрами является возможность так называемого внутреннего резонанса между гармониками собственных колебаний [123, 124]. В рассматриваемой задаче о продольных колебаниях стержня данный эффект возникает при $\beta_1 = 0$. В этом случае вид нелинейной системы (2.12) качественно изменяется:

$$\begin{aligned} \frac{2A_1\omega_1}{\beta_2\omega_0}(\omega_1^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16}A_1^3 + \frac{3}{4}A_1(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2) + \\ &+ \frac{3}{8}(A_1A_2A_4 + A_2A_3A_4 + A_1A_3A_5 + A_2A_4A_5) + \frac{3}{16}(A_1^2A_3 + A_2^2A_3) + \dots, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{2A_2\omega_1}{\beta_2\omega_0}(\omega_2^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16}A_2^3 + \frac{3}{4}A_2(A_1^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2) + \\
&+ \frac{3}{8}(A_1A_2A_3 + A_1A_3A_4 + A_1A_2A_5 + A_1A_4A_5 + A_3A_4A_5) + \\
&+ \frac{3}{16}(A_1^2A_4 + A_3^2A_4) + \dots, \\
\frac{2A_3\omega_1}{\beta_2\omega_0}(\omega_3^{\text{lin}})^2 &= \frac{1}{16}A_1^3 + \frac{9}{16}A_3^3 + \frac{3}{4}A_3(A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_5^2) + \\
\frac{3}{8}(A_1A_2A_4 + A_2A_3A_4 + A_1A_3A_5 + A_2A_4A_5) &+ \frac{3}{16}(A_1A_2^2 + A_1^2A_5 + A_4^2A_5) + \dots, \\
\frac{2A_4\omega_1}{\beta_2\omega_0}(\omega_4^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16}A_4^3 + \frac{3}{4}A_4(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_5^2) + \\
&+ \frac{3}{8}(A_1A_2A_3 + A_1A_2A_5 + A_2A_3A_5 + A_3A_4A_5) + \frac{3}{16}(A_2A_1^2 + A_2A_3^2) + \dots, \\
\frac{2A_5\omega_1}{\beta_2\omega_0}(\omega_5^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16}A_5^3 + \frac{3}{4}A_5(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2) + \\
&+ \frac{3}{8}(A_1A_2A_4 + A_2A_3A_4) + \frac{3}{16}(A_1A_2^2 + A_1^2A_3 + A_3^2A_1 + A_3A_4^2) + \dots, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Для решения бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений (2.15) используется новый асимптотический подход, основанный на введении искусственного малого параметра μ . В правой части каждого i -го уравнения системы (2.15) введем параметр μ перед каждым членом $A_k A_l A_m$, $k, l, m = 1, 2, 3, \dots$, для которого выполняется условие $(k > i) \cup (l > i) \cup (m > i)$:

$$\begin{aligned}
\frac{2A_1\omega_1}{\beta_2\omega_0}(\omega_1^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16}A_1^3 + \mu \left(\frac{3}{4}A_1(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2) + \right. \\
&+ \left. \frac{3}{8}(A_1A_2A_4 + A_2A_3A_4 + A_1A_3A_5 + A_2A_4A_5) + \frac{3}{16}(A_1^2A_3 + A_2^2A_3) + \dots \right), \\
\frac{2A_2\omega_1}{\beta_2\omega_0}(\omega_2^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16}A_2^3 + \frac{3}{4}A_1^2A_2 + \mu \left(\frac{3}{4}A_2(A_3^2 + A_4^2 + A_5^2) + \right.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{8}(A_1 A_2 A_3 + A_1 A_3 A_4 + A_1 A_2 A_5 + A_1 A_4 A_5 + A_3 A_4 A_5) + \\
& + \frac{3}{16}(A_1^2 A_4 + A_3^2 A_4) + \dots \Big), \\
\frac{2A_3 \omega_1}{\beta_2 \omega_0} (\omega_3^{\text{lin}})^2 &= \frac{1}{16} A_1^3 + \frac{9}{16} A_3^3 + \frac{3}{4} A_3 (A_1^2 + A_2^2) + \frac{3}{16} A_1 A_2^2 + \mu \left(\frac{3}{4} A_3 (A_4^2 + A_5^2) + \right. \\
& + \frac{3}{8} (A_1 A_2 A_4 + A_2 A_3 A_4 + A_1 A_3 A_5 + A_2 A_4 A_5) + \frac{3}{16} (A_1^2 A_5 + A_4^2 A_5) + \dots \Big), \\
\frac{2A_4 \omega_1}{\beta_2 \omega_0} (\omega_4^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16} A_4^3 + \frac{3}{4} A_4 (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + \frac{3}{8} A_1 A_2 A_3 + \frac{3}{16} (A_2 A_1^2 + A_2 A_3^2) + \\
& + \mu \left(\frac{3}{4} A_4 A_5^2 + \frac{3}{8} (A_1 A_2 A_5 + A_2 A_3 A_5 + A_3 A_4 A_5) + \dots \Big), \\
\frac{2A_5 \omega_1}{\beta_2 \omega_0} (\omega_5^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16} A_5^3 + \frac{3}{4} A_5 (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2) + \\
& + \frac{3}{8} (A_1 A_2 A_4 + A_2 A_3 A_4) + \frac{3}{16} (A_1 A_2^2 + A_1^2 A_3 + A_3^2 A_1 + A_3 A_4^2) + \dots, \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Таким образом, при $\mu = 0$ система (2.16) принимает «треугольный» вид и сводится к рекуррентной последовательности уравнений, а при $\mu = 1$ переходит в исходную форму (2.15).

Неизвестные величины ищем в виде разложений:

$$\omega_1 = \omega_1^{(0)} + \mu \omega_1^{(1)} + \mu^2 \omega_1^{(2)} + \dots, \tag{2.17}$$

$$A_j = A_j^{(0)} + \mu A_j^{(1)} + \mu^2 A_j^{(2)} + \dots, \quad j = 2, 3, 4 \dots \tag{2.18}$$

При этом первый член ряда (2.17) $\omega_1^{(0)}$ определяется из первого уравнения системы (2.16) из условия отсутствия в решении (2.5) вековых членов, вызываемых основным тоном колебаний, а все последующие члены $\omega_1^{(j)}$, $j = 2, 3, 4 \dots$ – из условий отсутствия вековых членов, вызываемых дополнительными резонансными гармониками. Далее мы ограничиваемся в разложении (2.17) первыми двумя членами.

Решение системы (2.16) отвечает случаю, когда одновременно реализуются все нечетные гармоники:

$$A_{2i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots, \tag{2.19a}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= 0.014493151A_1, \\
A_5 &= 0.000207090A_1, \\
&\dots\dots\dots; \\
\omega_1 &= 0.282688A_1^2\beta_2 / \omega_0.
\end{aligned}$$

Искомая АЧХ может быть записана в виде:

$$\Omega_i = i\omega_0 \left(1 + 0.282688 \frac{A_1^2\beta_2}{\omega_0^2} \varepsilon \right) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 3, 5 \dots, \quad (2.19б)$$

где $\omega_0 = a\pi / l$.

Решение (2.19) соответствует внутреннему резонансу между гармониками при $\beta_1 = 0$. Далее исследуем случай, когда система близка к состоянию внутреннего резонанса, но не достигает его в точности, т.е. имеет место некоторая «расстройка». При этом параметр β_1 в уравнении (2.1) стремится к нулю. Определяющее уравнение (2.1) удобно переписать в виде:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \delta\beta_1^* u - \varepsilon\beta_2 u^3 = 0, \quad (2.20)$$

где β_1^* , β_2 – некоторые коэффициенты, $\delta = \beta_1 / \beta_1^*$ – безразмерный малый параметр, характеризующий степень «расстройки», $\delta \rightarrow 0$.

Вводим преобразование времени (2.4). Решение краевой задачи (2.2), (2.3), (2.20) ищем в виде асимптотических разложений по степеням δ :

$$u = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots, \quad (2.21)$$

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega_1 + \delta^2\omega_2 + \dots, \quad (2.22)$$

члены которых, в свою очередь, представляем рядами

$$u_0 = u_{00} + \varepsilon u_{01} + \varepsilon^2 u_{02} + \dots, \quad (2.23)$$

$$\omega_0 = \omega_{00} + \varepsilon\omega_{01} + \varepsilon^2\omega_{02} + \dots, \quad (2.24)$$

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots, \quad (2.25)$$

$$\omega_1 = \omega_{10} + \varepsilon\omega_{11} + \varepsilon^2\omega_{12} + \dots, \quad (2.26)$$

где $\omega_{00} = a\pi/l$ – собственная частота основного тона колебаний при $\varepsilon = 0$ и $\delta = 0$.

Расщепляя исходную краевую задачу (2.2), (2.3), (2.20) по степеням δ и ε , получаем следующую последовательность линейных уравнений:

$$a^2 \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial x^2} - \omega_{00}^2 \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (2.27)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x^2} - \omega_{00}^2 \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial \tau^2} = 2\omega_{00}\omega_{01} \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial \tau^2} + \beta_2 u_{00}^3, \quad (2.28)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} - \omega_{00}^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \tau^2} = 2\omega_{00}\omega_{10} \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial \tau^2} + \beta_1^* u_{00}, \quad (2.29)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} - \omega_{00}^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \tau^2} = 2\omega_{00}\omega_{10} \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial \tau^2} + \beta_1^* u_{01} +$$

$$+ 2(\omega_{01}\omega_{10} + \omega_{00}\omega_{11}) \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial \tau^2} + 2\omega_{00}\omega_{01} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \tau^2} + 3\beta_2 u_{00}^2 u_{10},$$

.....

Граничные условия (2.2) и условия периодичности (2.3) запишутся в виде:

$$u_{ij} \Big|_{x=0,l} = 0, \quad (2.31)$$

$$u_{ij}(x, \tau) = u_{ij}(x, \tau + 2\pi), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Первое уравнение последовательности (2.27) с условиями (2.31), (2.32) позволяет определить u_{00} :

$$u_{00} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left(\frac{\pi i}{l} x\right) \sin(i\tau). \quad (2.33)$$

Следующее приближение u_{01} может быть найдено из краевой задачи (2.28), (2.31), (2.32). Для предотвращения появления в разложении (2.23) вековых членов, в правой части уравнения (2.28) коэффициенты при членах вида $\sin\left(\frac{\pi i}{l} x\right) \sin(i\tau)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ приравниваем нулю. Получаем бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$u_{01} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \left(C_i^{(1)} \sin(i\tau) + C_i^{(2)} \cos(i\tau) \right), \quad (2.36)$$

где $f_i(x)$, $C_i^{(1)}$, $C_i^{(2)}$ – некоторые функции и коэффициенты.

Решение краевой задачи (2.29), (2.31), (2.32) позволяет определить член u_{10} . Условие отсутствия вековых членов в разложении (2.21) требует, чтобы в правой части уравнения (2.29) коэффициенты при членах вида $\sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right)\sin(i\tau)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ равнялись нулю. В результате получим:

$$\omega_{10} = \frac{\beta_1^*}{2\omega_{00}i^2}, \quad (2.37)$$

$$u_{10} = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right)\sin(i\tau). \quad (2.38)$$

Отметим, что здесь поправка ω_{10} к частоте каждой i -ой гармоники зависит от номера гармоники i .

Член u_{11} определяется из краевой задачи (2.30)–(2.32). В данном случае, с учетом принятых ранее соотношений для u_{01} (2.36), условие отсутствия в разложении (2.25) вековых членов приводит к бесконечной системе уравнений, линейных относительно ω_{11} и B_i , $i = 1, 2, 3 \dots$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3\beta_2} (\omega_{01}\omega_{10}A_1 + \omega_{00}\omega_{11}A_1 + \omega_{00}\omega_{01}B_1) = \\ & = \left(\frac{9}{16}A_1^2 + \frac{1}{4}(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2) + \frac{1}{8}(A_1A_3 + A_2A_4 + A_3A_5) \right) B_1 + \\ & + \left(\frac{1}{2}A_1A_2 + \frac{1}{8}(A_2A_3 + A_1A_4 + A_3A_4 + A_2A_5 + A_4A_5) \right) B_2 + \\ & + \left(\frac{1}{16}(A_1^2 + A_2^2) + \frac{1}{2}A_1A_3 + \frac{1}{8}(A_2A_4 + A_1A_5 + A_3A_5) \right) B_3 + \\ & + \left(\frac{1}{2}A_1A_4 + \frac{1}{8}(A_1A_2 + A_2A_3 + A_2A_5) \right) B_4 + \\ & + \left(\frac{1}{16}(A_2^2 + A_3^2) + \frac{1}{2}A_1A_5 + \frac{1}{8}(A_1A_3 + A_2A_4) \right) B_5 + \dots, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{8}{3\beta_2}(\omega_{01}\omega_{10}A_2 + \omega_{00}\omega_{11}A_2 + \omega_{00}\omega_{01}B_2) = \\
& = \left(\frac{1}{2}A_1A_2 + \frac{1}{8}(A_2A_3 + A_1A_4 + A_3A_4 + A_2A_5 + A_4A_5) \right) B_1 + \\
& \left(\frac{9}{16}A_2^2 + \frac{1}{4}(A_1^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2) + \frac{1}{8}(A_1A_3 + A_1A_5) \right) B_2 + \\
& + \left(\frac{1}{2}A_2A_3 + \frac{1}{8}(A_1A_2 + A_1A_4 + A_3A_4 + A_4A_5) \right) B_3 + \\
& + \left(\frac{1}{16}(A_1^2 + A_3^2) + \frac{1}{2}A_2A_4 + \frac{1}{8}(A_1A_3 + A_1A_5 + A_3A_5) \right) B_4 + \\
& + \left(\frac{1}{2}A_2A_5 + \frac{1}{8}(A_1A_2 + A_1A_4 + A_3A_4) \right) B_5 + \dots, \\
& \frac{6}{\beta_2}(\omega_{01}\omega_{10}A_3 + \omega_{00}\omega_{11}A_3 + \omega_{00}\omega_{01}B_3) = \\
& = \left(\frac{1}{16}(A_1^2 + A_2^2) + \frac{1}{2}A_1A_3 + \frac{1}{8}(A_2A_4 + A_1A_5 + A_3A_5) \right) B_1 + \\
& + \left(\frac{1}{2}A_2A_3 + \frac{1}{8}(A_1A_2 + A_1A_4 + A_3A_4 + A_4A_5) \right) B_2 + \\
& + \left(\frac{9}{16}A_3^2 + \frac{1}{4}(A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_5^2) + \frac{1}{8}(A_2A_4 + A_1A_5) \right) B_3 + \\
& + \left(\frac{1}{2}A_3A_4 + \frac{1}{8}(A_1A_2 + A_2A_3 + A_2A_5 + A_4A_5) \right) B_4 + \\
& + \left(\frac{1}{16}(A_1^2 + A_4^2) + \frac{1}{2}A_3A_5 + \frac{1}{8}(A_1A_3 + A_2A_4) \right) B_5 + \dots, \\
& \frac{32}{3\beta_2}(\omega_{01}\omega_{10}A_4 + \omega_{00}\omega_{11}A_4 + \omega_{00}\omega_{01}B_4) = \\
& = \left(\frac{1}{2}A_1A_4 + \frac{1}{8}(A_1A_2 + A_2A_3 + A_2A_5) \right) B_1 + \\
& + \left(\frac{1}{16}(A_1^2 + A_3^2) + \frac{1}{2}A_2A_4 + \frac{1}{8}(A_1A_3 + A_1A_5 + A_3A_5) \right) B_2 + \\
& + \left(\frac{1}{2}A_3A_4 + \frac{1}{8}(A_1A_2 + A_2A_3 + A_2A_5 + A_4A_5) \right) B_3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{9}{16} A_4^2 + \frac{1}{4} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_5^2) + \frac{1}{8} A_3 A_5 \right) B_4 + \\
& + \left(\frac{1}{2} A_4 A_5 + \frac{1}{8} (A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4) \right) B_5 + \dots, \\
& \frac{50}{3\beta_2} (\omega_{01} \omega_{10} A_5 + \omega_{00} \omega_{11} A_5 + \omega_{00} \omega_{01} B_5) = \\
& = \left(\frac{1}{16} (A_2^2 + A_3^2) + \frac{1}{2} A_1 A_5 + \frac{1}{8} (A_1 A_3 + A_2 A_4) \right) B_1 + \\
& + \left(\frac{1}{2} A_2 A_5 + \frac{1}{8} (A_1 A_2 + A_1 A_4 + A_3 A_4) \right) B_2 + \\
& + \left(\frac{1}{16} (A_1^2 + A_4^2) + \frac{1}{2} A_3 A_5 + \frac{1}{8} (A_1 A_3 + A_2 A_4) \right) B_3 + \\
& + \left(\frac{1}{2} A_4 A_5 + \frac{1}{8} (A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4) \right) B_4 + \\
& + \left(\frac{9}{16} A_5^2 + \frac{1}{4} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2) \right) B_5 + \dots, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned}
B_{2i} &= 0, \quad i=1,2,3 \dots, & (2.40) \\
B_3 &= 0.0144344B_1, \\
B_5 &= 0.000200445B_1 \\
&\dots\dots\dots; \\
\omega_{11} &= 0.565352 \frac{\beta_2 A_1 B_1}{\omega_{00}} - 0.141344 \frac{\beta_1^* \beta_2 A_1^2}{i^2 \omega_{00}^3}.
\end{aligned}$$

Окончательно можем записать следующие выражения для формы и частот колебаний:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i + \delta B_i) \sin\left(\frac{\pi i}{l} x\right) \sin(\Omega_i t) + O(\varepsilon) + O(\varepsilon \delta) + O(\sigma^2), \quad (2.41)$$

$$\Omega_i = \sqrt{i^2 \omega_{00}^2 + \beta_1^* \delta} + 0.282688 \frac{i^2 \beta_2 A_1^2}{\sqrt{i^2 \omega_{00}^2 + \beta_1^* \delta}} \varepsilon + \quad (2.42)$$

$$+0.565352 \frac{i\beta_2 A_1 B_1}{\omega_{00}} \varepsilon \delta + o(\varepsilon) + o(\delta) + o(\varepsilon \delta), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\omega_{00} = a\pi/l$. Данное решение согласуется с результатами, полученными выше. Так, при $\delta = 0$ выражение (2.42) совпадает с формулой (2.19б), а при $\varepsilon = 0$ – с формулой (2.14б).

2.2. Колебания балки на нелинейно-упругом основании

Рассмотрим задачу об изгибных колебаниях балки на нелинейно-упругом основании. Концы балки шарнирно оперты. Силы трения отсутствуют. Жесткость балки предполагается достаточно большой для того, чтобы можно было пренебречь возникающими при изгибе продольными силами. В этом случае уравнение движения в перемещениях имеет четвертый порядок по пространственной координате:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta_1 w + \varepsilon \beta_2 w^3 = 0. \quad (2.43)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0,l} = w \Big|_{x=0,l} = 0. \quad (2.44)$$

Здесь w – поперечное перемещение; l – длина балки; $c = \sqrt{EI/\rho S}$, где I – момент инерции поперечного сечения балки относительно главной оси инерции, S – площадь поперечного сечения балки; EI – изгибная жесткость. Искомое решение удовлетворяет условию периодичности

$$w(x, t) = w(x, t + T), \quad (2.45)$$

где $T = 2\pi/\omega$, ω – искомая собственная частота колебаний.

Вводим преобразование времени (2.4). Решение ищем в виде разложений:

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots, \quad (2.46)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.47)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\pi^4 c^2 / l^4 + \beta_1}$ – собственная частота основного тона колебаний линейной системы (при $\varepsilon = 0$).

Подставляя выражения (2.4), (2.46) и (2.47) в исходную краевую задачу (2.43)–(2.45), после расщепления по ε получаем рекуррентную систему линейных уравнений:

$$c^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + \beta_1 w_0 = 0, \quad (2.48)$$

$$c^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + \beta_1 w_1 = -2\omega_0 w_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - \beta_2 w_0^3, \quad (2.49)$$

.....

Условия (2.44) и (2.45) принимают вид:

$$\partial^2 w_i / \partial x^2 \Big|_{x=0,l} = w_i \Big|_{x=0,l} = 0, \quad (2.50)$$

$$w_i(x, \tau) = w_i(x, \tau + 2\pi), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.51)$$

Решая краевую задачу (2.48), (2.50), (2.51), находим нулевое приближение:

$$w_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left(\frac{\omega_i^{\text{lin}}}{\omega_0} \tau\right) \sin\left(\frac{\pi i}{l} x\right), \quad i = 1, 2, 3 \dots, \quad (2.52)$$

где $\omega_i^{\text{lin}} = \sqrt{\pi^4 c^2 i^4 / l^4 + \beta_1}$ – собственные частоты колебаний линейной системы, $\omega_1^{\text{lin}} = \omega_0$.

Для нахождения следующего приближения нужно решить краевую задачу (2.49)–(2.51). Чтобы предотвратить появление в разложении (2.46) вековых членов, в правой части уравнения (2.49) коэффициенты при членах вида $\sin\left(\frac{\omega_i^{\text{lin}}}{\omega_0} \tau\right) \sin\left(\frac{\pi i}{l} x\right)$, $i = 1, 2, 3 \dots$ следует приравнять нулю.

Эти условия приводят к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений (2.12).

Форма колебаний имеет вид

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(\Omega_i t) \sin\left(\frac{\pi i}{l} x\right) + O(\varepsilon), \quad (2.53)$$

где $\Omega_i = \frac{\omega_i^{\text{lin}}}{\omega_1^{\text{lin}}} \omega$. В общем случае система (2.12) имеет решение (2.14а).

При этом может реализовываться только одна i -ая гармоника, частота которой определяется формулой (2.14б), где $\omega_i^{\text{lin}} = \sqrt{\pi^4 c^2 i^4 / l^4 + \beta_1}$.

При $\beta_1 = 9c^2 \pi^4 / l^4$ в системе возникает внутренний резонанс между 1-ой и 3-ей гармониками. Получаемая из условия отсутствия вековых членов нелинейная система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{2A_1\omega_1}{\beta_2\omega_0} (\omega_1^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16} A_1^3 + \frac{3}{16} A_1^2 A_3 + \frac{3}{4} A_1 \sum_{k=2}^{\infty} A_k^2, & (2.54) \\ \frac{2A_3\omega_1}{\beta_2\omega_0} (\omega_3^{\text{lin}})^2 &= \frac{1}{16} A_1^3 + \frac{9}{16} A_3^3 + \frac{3}{4} A_3 \sum_{k=1}^2 A_k^2 + \frac{3}{4} A_3 \sum_{k=4}^{\infty} A_k^2, \\ \frac{2A_i\omega_1}{\beta_2\omega_0} (\omega_i^{\text{lin}})^2 &= \frac{9}{16} A_i^2 + \frac{3}{4} A_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k^2 + \sum_{k=i+1}^{\infty} A_k^2 \right), \quad i = 2, 4, 5, 6 \dots \end{aligned}$$

Для решения системы (2.54) используем асимптотический метод гомотопического параметра так, как это было сделано в п. 2.1. Незвестные величины ищем в виде разложений (2.17), (2.18). Ограничиваясь в разложении (2.17) первыми двумя членами, находим

$$\begin{aligned} A_i &= 0, \quad i = 2, 4, 5, 6 \dots, & (2.55) \\ A_3 &= 0.0144072 A_1; \\ \omega_1 &= 0.282679 A_1^2 \beta_2 / \omega_0. \end{aligned}$$

Данное решение соответствует случаю, когда одновременно имеют место 1-ая и 3-я гармоники, частоты которых определяются так:

$$\Omega_i = i\omega_0 \left(1 + 0.282679 \frac{A_1^2 \beta_2}{\omega_0^2} \varepsilon \right) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 3, \quad (2.56)$$

где $\omega_0 = c\pi^2 \sqrt{10} / l^2$. Положительные значения ε соответствуют жесткой, а отрицательные – мягкой характеристике восстанавливающей силы.

2.3. Колебания мембраны на нелинейно-упругом основании

Рассмотрим собственные колебания прямоугольной мембраны на нелинейно-упругом основании при отсутствии сил трения. Уравнение движения в перемещениях имеет вид:

$$a^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \beta_1 w - \varepsilon \beta_2 w^3 = 0. \quad (2.57)$$

Края мембраны закреплены, тогда граничные условия и условие периодичности таковы:

$$\begin{aligned} w|_{x=0, l_1} = w|_{y=0, l_2} = 0, \\ w(x, y, t) = w(x, y, t + T), \end{aligned} \quad (2.58)$$

где l_1, l_2 – длины сторон мембраны в направлениях x, y соответственно; $a = \sqrt{N/\rho}$; N – сила натяжения мембраны; $T = 2\pi/\omega$, ω – частота колебаний; $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Искомые собственные частоты отвечают такой форме основного тона колебаний, когда в линейном случае (при $\varepsilon = 0$) реализуется по одной полуволне вдоль каждой из сторон мембраны.

Введем преобразование времени (2.4). Решение исходной краевой задачи (2.57), (2.58) будем искать в виде анзацев (2.46), (2.47). Здесь в

разложении (2.47) $\omega_0 = \sqrt{a^2 \left(\frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right) + \beta_1}$ – собственная частота основ-

ного тона колебаний линейной системы (при $\varepsilon = 0$). После подстановки выражений (2.4), (2.46), (2.47) в исходную краевую задачу (2.57), (2.58) приходим к рекуррентной системе линейных уравнений:

$$a^2 \nabla^2 w_0 - \omega_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - \beta_1 w_0 = 0, \quad (2.59)$$

$$a^2 \nabla^2 w_1 - \omega_0^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} - \beta_1 w_1 = 2\omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + \beta_2 w_0^3, \quad (2.60)$$

.....

Граничные условия и условие периодичности (2.58) принимают вид:

$$w_i|_{x=0,l_1} = w_i|_{y=0,l_2} = 0, \quad (2.61)$$

$$w_i(x, y, \tau) = w_i(x, y, \tau + 2\pi), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Нулевое приближение получаем путем решения краевой задачи (2.59), (2.61):

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin\left(\frac{\omega_{m,n}^{\text{lin}}}{\omega_0} \tau\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l_2} y\right), \quad (2.62)$$

где $A_{1,1}$ – амплитуда основного тона колебаний; $A_{m,n}$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$, $(m, n) \neq (1, 1)$ – амплитуды последующих гармоник;

$$\omega_{m,n}^{\text{lin}} = \sqrt{a^2 \left(\frac{\pi^2 m^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l_2^2} \right)} + \beta_1, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$
 – собственные частоты колебаний линейной системы, $\omega_{1,1}^{\text{lin}} = \omega_0$.

Для нахождения следующего приближения нужно решить краевую задачу (2.60), (2.61). Согласно условию отсутствия в разложении (2.46) вековых членов, в правой части уравнения (2.60) коэффициенты при членах вида $\sin\left(\frac{\omega_{m,n}^{\text{lin}}}{\omega_0} \tau\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l_2} y\right)$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$ нужно приравнять нулю. В результате получаем бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{2A_{1,1}}{\beta_2} \omega_0 \omega_1 &= \frac{27}{64} A_{1,1}^3 + \frac{9}{16} A_{1,1} (A_{1,2}^2 + A_{2,1}^2) + \frac{3}{8} A_{1,1} A_{2,2}^2 + \dots, \quad (2.63) \\ \frac{2A_{1,2}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{1,2}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{1,2}^3 + \frac{9}{16} A_{1,2} (A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2) + \frac{3}{8} A_{1,2} A_{2,1}^2 + \dots, \\ \frac{2A_{2,1}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{2,1}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{2,1}^3 + \frac{9}{16} A_{2,1} (A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2) + \frac{3}{8} A_{2,1} A_{1,2}^2 + \dots, \\ \frac{2A_{2,2}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{2,2}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{2,2}^3 + \frac{9}{16} A_{2,2} (A_{1,2}^2 + A_{2,1}^2) + \frac{3}{8} A_{2,2} A_{1,1}^2 + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Форма колебаний определяется выражением

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin(\Omega_{m,n} t) \sin\left(\frac{\pi m}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l_2} y\right) + O(\varepsilon). \quad (2.64)$$

где $\Omega_{m,n} = \frac{\omega_{m,n}^{\text{lin}}}{\omega_{1,1}^{\text{lin}}} \omega$ – частоты гармоник. Решение системы (2.63) соответствует случаю, когда имеет место только какая-то одна гармоника с номерами (m, n) :

$$A_{i,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, \quad (i, j) \neq (m, n); \quad \omega_1 = \frac{27}{128} \frac{A_{m,n}^2 \beta_2 \omega_0}{(\omega_{m,n}^{\text{lin}})^2}. \quad (2.65)$$

Для частоты $\Omega_{m,n}$ получим:

$$\Omega_{m,n} = \omega_{m,n}^{\text{lin}} + 0.2109375 \frac{A_{m,n}^2 \beta_2}{\omega_{m,n}^{\text{lin}}} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (2.66)$$

здесь $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Положительные значения ε соответствуют жесткой, а отрицательные – мягкой характеристике восстанавливающей силы.

Решение задачи принципиально изменяется, когда линейная составляющая восстанавливающей силы равна нулю ($\beta_1 = 0$). В этом случае имеет место внутренний резонанс между гармониками собственных колебаний. Условие отсутствия вековых членов приводит к следующей бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{2A_{1,1}}{\beta_2} \omega_0 \omega_1 &= \frac{27}{64} A_{1,1}^3 + \frac{3}{8} A_{1,1} (A_{2,2}^2 + A_{3,3}^2 + A_{4,4}^2 + A_{5,5}^2) + \quad (2.67) \\ &+ \frac{3}{32} (-A_{1,1} A_{2,2} A_{4,4} + A_{2,2} A_{3,3} A_{4,4} - A_{1,1} A_{3,3} A_{5,5} + A_{2,2} A_{4,4} A_{5,5}) + \\ &+ \frac{3}{64} (-A_{1,1}^2 A_{3,3} + A_{2,2}^2 A_{3,3} - A_{2,2}^2 A_{5,5} + A_{3,3}^2 A_{5,5}) + \dots, \\ \frac{2A_{2,2}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{2,2}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{2,2}^3 + \frac{3}{8} A_{2,2} (A_{1,1}^2 + A_{3,3}^2 + A_{4,4}^2 + A_{5,5}^2) + \\ &+ \frac{3}{32} (A_{1,1} A_{2,2} A_{3,3} + A_{1,1} A_{3,3} A_{4,4} - A_{1,1} A_{2,2} A_{5,5} + A_{1,1} A_{4,4} A_{5,5} + A_{3,3} A_{4,4} A_{5,5}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{64} \left(-A_{1,1}^2 A_{4,4} + A_{3,3}^2 A_{4,4} \right) + \dots, \\
\frac{2A_{3,3}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} \left(\omega_{3,3}^{\text{lin}} \right)^2 &= -\frac{1}{64} A_{1,1}^3 + \frac{27}{64} A_{3,3}^3 + \frac{3}{8} A_{3,3} \left(A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2 + A_{4,4}^2 + A_{5,5}^2 \right) + \\
& + \frac{3}{32} \left(A_{1,1} A_{2,2} A_{4,4} + A_{2,2} A_{3,3} A_{4,4} + A_{1,1} A_{3,3} A_{5,5} + A_{2,2} A_{4,4} A_{5,5} \right) + \\
& + \frac{3}{64} \left(A_{1,1} A_{2,2}^2 - A_{1,1}^2 A_{5,5} + A_{4,4}^2 A_{5,5} \right) + \dots, \\
\frac{2A_{4,4}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} \left(\omega_{4,4}^{\text{lin}} \right)^2 &= \frac{27}{64} A_{4,4}^3 + \frac{3}{8} A_{4,4} \left(A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2 + A_{3,3}^2 + A_{5,5}^2 \right) + \\
& + \frac{3}{32} \left(A_{1,1} A_{2,2} A_{3,3} + A_{1,1} A_{2,2} A_{5,5} + A_{2,2} A_{3,3} A_{5,5} + A_{3,3} A_{4,4} A_{5,5} \right) + \\
& + \frac{3}{64} \left(-A_{1,1}^2 A_{2,2} + A_{2,2} A_{3,3}^2 \right) + \dots, \\
\frac{2A_{5,5}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} \left(\omega_{5,5}^{\text{lin}} \right)^2 &= \frac{27}{64} A_{5,5}^3 + \frac{3}{8} A_{5,5} \left(A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2 + A_{3,3}^2 + A_{4,4}^2 \right) + \\
& + \frac{3}{32} \left(A_{1,1} A_{2,2} A_{4,4} + A_{2,2} A_{3,3} A_{4,4} \right) + \\
& + \frac{3}{64} \left(-A_{1,1} A_{2,2}^2 - A_{1,1}^2 A_{3,3} + A_{1,1} A_{3,3}^2 + A_{3,3} A_{4,4}^2 \right) + \dots, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Решение системы (2.67) ищем с помощью асимптотического подхода, изложенного в п. 2.1. В правую часть системы (2.67) вводим гомотопический параметр μ . Неизвестные величины представляем в виде разложений:

$$\omega_1 = \omega_1^{(0)} + \mu \omega_1^{(1)} + \mu^2 \omega_1^{(2)} + \dots, \quad (2.68)$$

$$A_{m,n} = A_{m,n}^{(0)} + \mu A_{m,n}^{(1)} + \mu^2 A_{m,n}^{(2)} + \dots, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (m, n) \neq (1, 1). \quad (2.69)$$

Система (2.67) допускает решение, когда одновременно реализуются все нечетные «диагональные» гармоники:

$$A_{m,n} = 0, \quad (2.70)$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (m, n) \neq (1, 1), \quad (m, n) \neq (2i-1, 2i-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots;$$

$$A_{3,3} = -0.004566222 A_{1,1},$$

$$A_{5,5} = 0.000021139 A_{1,1},$$

$$\dots\dots\dots;$$

$$\omega_1 = 0.211048 A_{1,1}^2 \beta_2 / \omega_0.$$

Для искомой АЧХ получаем асимптотическую формулу:

$$\Omega_{m,n} = m\omega_0 \left(1 + 0.211048 \frac{A_{1,1}^2 \beta_2}{\omega_0^2} \varepsilon \right) + O(\varepsilon^2), \quad m = n = 1, 3, 5 \dots, \quad (2.71)$$

где $\omega_0 = a \sqrt{\frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2}}.$

2.4. Колебания пластины на нелинейно-упругом основании

Рассмотрим прямоугольную, шарнирно-опертую по краям пластину на нелинейно-упругом основании. Жесткость пластины предполагается достаточно большой для того, чтобы можно было пренебречь возникающими при изгибе цепными напряжениями. Силы трения отсутствуют. Уравнение движения в перемещениях имеет вид:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta_1 w + \varepsilon \beta_2 w^3 = 0, \quad (2.72)$$

граничные условия и условие периодичности имеют вид:

$$w|_{x=0,l_1} = w|_{y=0,l_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0,l_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0,l_2} = 0; \quad (2.73)$$

$$w(x, y, t) = w(x, y, t + T).$$

Здесь l_1, l_2 – длины сторон пластины, h – толщина, $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$ – цилиндрическая жесткость пластины, ν – коэффициент Пуассона; $\nabla^4 = \partial^4 / \partial x^4 + 2\partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 / \partial y^4.$

Как и в предыдущей задаче, будем искать собственные частоты, отсечая такие формы основного тона колебаний, когда в линейном

случае (при $\varepsilon = 0$) реализуется по одной полуволне вдоль каждой из сторон пластины.

Ход решения аналогичен изложенному выше. Изменяем масштаб времени (2.4). Решение исходной краевой задачи (2.72), (2.73) представляем в виде асимптотических разложений (2.46), (2.47). В разложении

$$(2.47) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right)^2} + \frac{\beta_1}{\rho h} - \text{собственная частота основного тона}$$

колебаний линейной системы (при $\varepsilon = 0$). Подставляя выражения (2.4), (2.46) и (2.47) в исходную краевую задачу (2.72), (2.73), после расщепления по ε получаем рекуррентную систему уравнений:

$$D\nabla^4 w_0 + \rho h \omega_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + \beta_1 w_0 = 0, \quad (2.74)$$

$$D\nabla^4 w_1 + \rho h \omega_0^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + \beta_1 w_1 = -2\rho h \omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - \beta_2 w_0^3, \quad (2.75)$$

.....

Граничные условия и условие периодичности (2.73) запишутся в виде

$$w_i \Big|_{x=0, l_1} = w_i \Big|_{y=0, l_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \Big|_{x=0, l_1} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \Big|_{y=0, l_2} = 0 \quad (2.76)$$

$$w_i(x, y, \tau) = w_i(x, y, \tau + 2\pi), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Решение краевой задачи (2.74), (2.76), соответствующее нулевому приближению, определяется выражением (2.62), где

$$\omega_{m,n}^{\text{lin}} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{\pi^2 m^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l_2^2} \right)^2} + \frac{\beta_1}{\rho h}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots - \text{собственные частоты}$$

колебаний линейной системы (при $\varepsilon = 0$), $\omega_{1,1}^{\text{lin}} = \omega_0$.

Следующее приближение находится путем решения краевой задачи (2.75), (2.76). Чтобы предотвратить появление в разложении (2.46) вековых членов, в правой части уравнения (2.75) коэффициенты при членах

$$\text{вида } \sin\left(\frac{\omega_{m,n}^{\text{lin}}}{\omega_0} \tau\right) \sin\left(\frac{\pi m}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l_2} y\right), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \text{ следует приравнять}$$

нулю. Это условие приводит к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{2\rho h A_{1,1}}{\beta_2} \omega_0 \omega_1 &= \frac{27}{64} A_{1,1}^3 + \frac{9}{16} A_{1,1} (A_{1,2}^2 + A_{2,1}^2) + \frac{3}{8} A_{1,1} A_{2,2}^2 + \dots, \quad (2.77) \\ \frac{2\rho h A_{1,2}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{1,2}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{1,2}^3 + \frac{9}{16} A_{1,2} (A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2) + \frac{3}{8} A_{1,2} A_{2,1}^2 + \dots, \\ \frac{2\rho h A_{2,1}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{2,1}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{2,1}^3 + \frac{9}{16} A_{2,1} (A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2) + \frac{3}{8} A_{2,1}^2 A_{2,1} + \dots, \\ \frac{2\rho h A_{2,2}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{2,2}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{2,2}^3 + \frac{9}{16} A_{2,2} (A_{1,2}^2 + A_{2,1}^2) + \frac{3}{8} A_{1,1}^2 A_{2,2} + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Как и в предыдущей задаче, форма колебаний определяется выражением (2.64). Решение системы (2.77) имеет вид

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, \quad (i, j) \neq (m, n); \\ \omega_1 &= \frac{27}{128} \frac{A_{m,n}^2 \beta_2 \omega_0}{\rho h (\omega_{m,n}^{\text{lin}})^2}. \end{aligned}$$

При этом имеет место только какая-то одна гармоника с номерами (m, n) , частота которой равна

$$\Omega_{m,n} = \omega_{m,n}^{\text{lin}} + 0.2109375 \frac{A_{m,n}^2 \beta_2}{\rho h \omega_{m,n}^{\text{lin}}} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Положительные значения ε соответствуют жесткой, а отрицательные – мягкой характеристике восстанавливающей силы.

При $\beta_1 = 9\pi^4 D(1/l_1^2 + 1/l_2^2)^2$ решение задачи качественно изменяется. В этом случае одновременно реализуются гармоники (1,1) и (3,3). Из условия отсутствия вековых членов получаем следующую нелинейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{2\rho h A_{1,1}}{\beta_2} \omega_0 \omega_1 &= \frac{27}{64} A_{1,1}^3 - \frac{3}{64} A_{1,1}^2 A_{3,3} + \frac{3}{8} A_{1,1} (A_{2,2}^2 + A_{3,3}^2 + A_{4,4}^2 + A_{5,5}^2) + \dots, \quad (2.78) \\ \frac{2\rho h A_{2,2}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{2,2}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{2,2}^3 + \frac{3}{8} A_{2,2} (A_{1,1}^2 + A_{3,3}^2 + A_{4,4}^2 + A_{5,5}^2) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\rho h A_{3,3}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{3,3}^{\text{lin}})^2 &= -\frac{1}{64} A_{1,1}^3 + \frac{27}{64} A_{3,3}^3 + \frac{3}{8} A_{3,3} (A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2 + A_{4,4}^2 + A_{5,5}^2) + \dots, \\ \frac{2\rho h A_{4,4}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{4,4}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{4,4}^3 + \frac{3}{8} A_{4,4} (A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2 + A_{3,3}^2 + A_{5,5}^2) + \dots, \\ \frac{2\rho h A_{5,5}}{\beta_2} \frac{\omega_1}{\omega_0} (\omega_{5,5}^{\text{lin}})^2 &= \frac{27}{64} A_{5,5}^3 + \frac{3}{8} A_{5,5} (A_{1,1}^2 + A_{2,2}^2 + A_{3,3}^2 + A_{4,4}^2) + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Для решения системы (2.78) в ее правую часть вводим гомотопический параметр μ так, как это было сделано в п. 2.2. Неизвестные величины ищем в виде разложений (2.68), (2.69). Ограничиваясь в разложении (2.68) первыми двумя членами, получаем решение системы (2.78) в виде:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, \quad (i, j) \neq (1, 1), (3, 3); \\ A_{3,3} &= -0.004566222 A_{1,1}; \quad \omega_1 = 0.211048 \frac{A_{1,1}^2 \beta_2}{\rho h \omega_0}. \end{aligned}$$

Частоты гармоник равны

$$\Omega_{m,n} = m\omega_0 \left(1 + 0.211048 \frac{A_{1,1}^2 \beta_2}{\rho h \omega_0^2} \varepsilon \right) + O(\varepsilon^2), \quad m = n = 1, 3,$$

где $\omega_0 = \sqrt{10 \frac{\pi^4 D}{\rho h} \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right)}$.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ (НДС) БАЛОК И ПЛАСТИН

3.1. НДС балки с защемленными торцами

Применим МВ к расчету НДС защемленной по торцам балки ($-0.5l \leq \bar{x} \leq 0.5l$), находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки \bar{q} . После обезразмеривания (1.2) исходное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$W^{IV} = q, \quad q = \frac{\bar{q}l^3}{EI}. \quad (3.1)$$

Для замыкания краевой задачи к данному дифференциальному уравнению присоединим граничные условия (1.9). Решение краевой задачи (3.1), (1.9) легко получить:

$$W = \frac{q}{24}x^4 - \frac{q}{48} \cdot \frac{6-5\varepsilon}{2-\varepsilon}x^2 + \frac{q}{384} \cdot \frac{10-9\varepsilon}{2-\varepsilon}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим, как соотносится решение, полученное на основе МВ, с точным (3.2). Представим прогиб W в виде РТВ (1.10). После подстановки РТВ в уравнение (3.1) и граничные условия (1.9) и расщепления по степеням ε получим рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\begin{aligned} W_0^{IV} &= q; \\ W_0 &= 0, \quad W_0^{II} = 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5; \\ W_j^{IV} &= 0; \\ W_j &= 0, \quad W_j^{II} = \mp \sum_{i=0}^{j-1} W_i^I \quad \text{при } x = \pm 0.5, \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Из выписанных краевых задач последовательно определим функции W_j :

$$W = \frac{q}{24}x^4 + C_1x^2 + C_2, \quad (3.3)$$

где

$$C_1 = \frac{q}{24} \left(-\frac{3}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \varepsilon^j \right), \quad (3.4)$$

$$C_2 = \frac{q}{96} \left(\frac{5}{4} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \varepsilon^j \right). \quad (3.5)$$

Входящий в выражения (3.4) и (3.5) ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем 0.5ε , радиусом сходимости $r = 2$ и суммой

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{2^j} = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}. \quad (3.6)$$

С учетом (3.6), выражение (3.3) совпадает с (3.2). Таким образом, в данном случае МВ дает точное решение задачи. К сожалению, это скорее исключение, чем правило. В реальных задачах чаще всего можно построить только несколько первых членов РТВ, из которых необходимо извлечь максимум информации. Это удастся осуществить, применив к РТВ АП.

Рассмотрим, что дает применение АП в данном случае. Возьмем три первых члена РТВ для коэффициентов C_1 и C_2 и применим АП:

$$C_{1[1/1]}(\varepsilon) = -\frac{q}{48} \cdot \frac{6-5\varepsilon}{2-\varepsilon}, \quad C_{2[1/1]}(\varepsilon) = \frac{q}{384} \cdot \frac{10-9\varepsilon}{2-\varepsilon}.$$

Это дает точное решение задачи. Оценим, как отличаются решения, полученные при помощи АП и РТВ. Для этого, используя точное решение (3.2), найдем изгибающий момент:

$$M = -\left[\frac{q}{2}x^2 - \frac{q}{12} \cdot \frac{6-5\varepsilon}{2-\varepsilon} \right]. \quad (3.7)$$

Оценим погрешность в определении прогиба и изгибающего

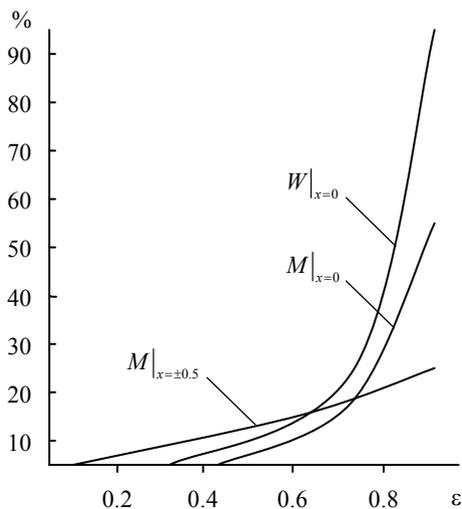


Рис. 3.1. Оценка точности РТВ.

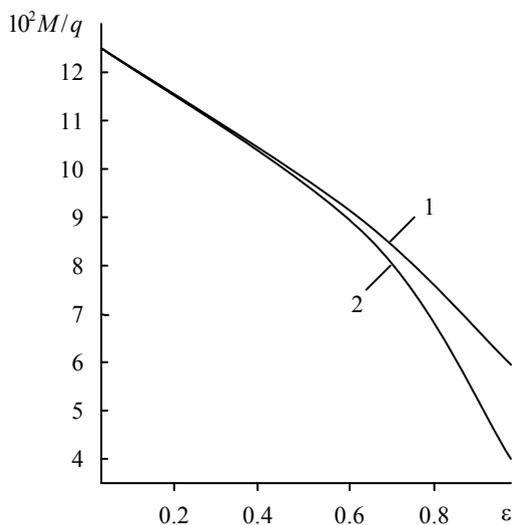


Рис. 3.2. Сравнение эффективности РТВ и АП, $M|_{x=0}$.

момента в середине пролета и изгибающего момента на краю балки, построенного при помощи РТВ по трем членам. На рис.3.1 приведены результаты этого расчета. С наибольшей погрешностью определяется

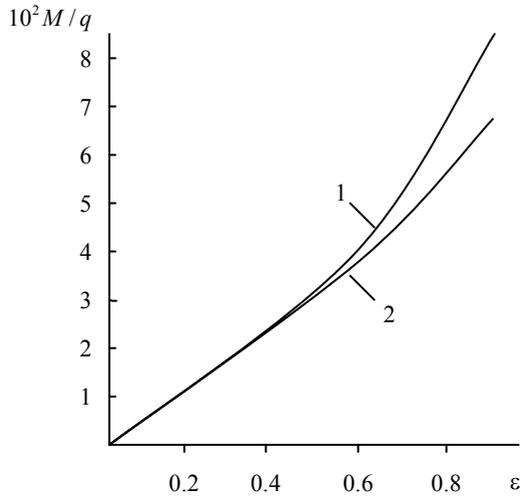


Рис. 3.3. Сравнение эффективности РТВ и АП, $M|_{x=\pm 0.5}$.

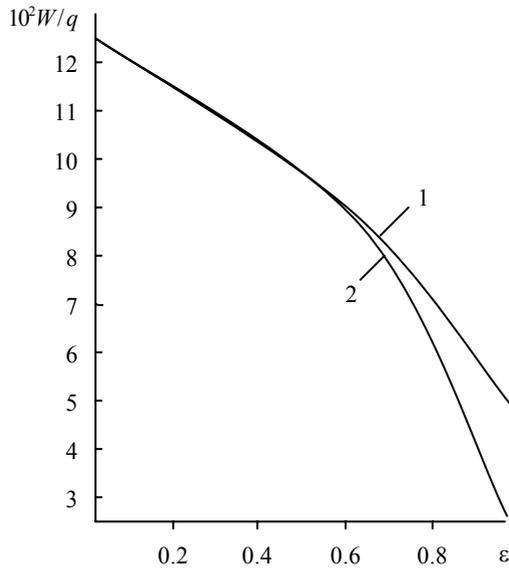


Рис. 3.4. Сравнение эффективности РТВ и АП, $W|_{x=0}$.

прогиб в середине пролета балки (при $\varepsilon = 1$ погрешность составляет 100%). Погрешность в определении изгибающего момента в середине

пролета составляет 50%, на краю – 25% при $\varepsilon = 1$. Значение параметра ε , при котором погрешность в определении факторов НДС менее 5% – $\varepsilon < 0.5$.

На рис.3.2 – 3.4 приведены зависимости различных факторов НДС от ε для точного решения (3.2), (3.7) (кривая 2) и решения, полученного при помощи РТВ (кривая 1). Наибольшее расхождение между ними – в интервале от $\varepsilon = 0.8$ до $\varepsilon = 1.0$.

3.2. НДС балки со свободными краями

Рассмотрим расчет НДС балки со свободным краями, находящейся под действием самоуравновешенной нагрузки $q(x) = q(4x - 1)$, $0 \leq x \leq 0.5$ (рис.3.5). В силу симметрии задачи будем рассматривать половину балки. Исходное дифференциальное уравнение совпадает с уравнением (3.1) с заменой $q = const$ на $q(x) = q(4x - 1)$ при $0 \leq x \leq 0.5$. Граничные условия имеют вид (1.35). Точное решение задачи (3.1), (1.35) таково

$$W = \frac{q}{6}x^4 \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{4} \right) + \frac{q}{96} \cdot \frac{1+3\varepsilon}{1+\varepsilon} x^2 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 0.5. \quad (3.8)$$

Перейдем к МВ. Как обычно, представив прогиб W в виде ряда по ε , после расщепления по степеням ε получаем следующую рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\begin{aligned} W_0^{IV} &= q(x); \\ W_0^{III} &= 0, \quad W_0^I = 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5; \\ W_j^{IV} &= 0; \\ W_j^{III} &= 0, \quad W_j^I = \mp \sum_{i=0}^{j-1} W_i^I \quad \text{при } x = \pm 0.5. \end{aligned}$$

Последовательно решая эти задачи, найдем прогиб

$$W = \frac{q}{6}x^4 \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{4} \right) + \frac{q}{48} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \varepsilon^j \right). \quad (3.9)$$

Входящий в выражение (3.9) ряд при $\varepsilon = 1$ расходится, однако его можно просуммировать:

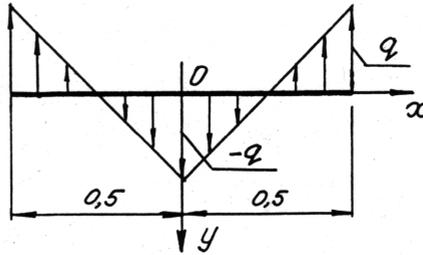


Рис. 3.5. Схема балки, находящейся под действием самоуравновешенной нагрузки.

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

С учетом этого прогиб (3.9) полностью совпадает с точным решением задачи (3.8).

Точное решение задачи при помощи МВ удалось получить только потому, что в данном конкретном случае есть возможность просуммировать РТВ. Любое конечное число приближений удовлетворительного решения не дает.

Рассмотрим применение АП. Применив к трем первым членам РТВ АП, получаем точное решение. Используя точное решение (3.8), определим выражение для изгибающих моментов:

$$M = \frac{q}{6}(4x^3 - 3x^2) + \frac{q}{48} \cdot \frac{1+3\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Оценим погрешность в определении прогиба W и изгибающего момента M для различных значений x (рис.3.6). Видно, что точность определения прогиба значительно выше, чем изгибающего момента.

На рис.3.7 показаны графики различных приближений функции W частичными суммами РТВ по сравнению с точным решением (3.8). На рис. 3.8 приведены графики нулевого, первого и второго приближений РТВ для функции M .

Как для прогиба, так и для изгибающего момента сумма первых трех членов дает результаты, совпадающие с нулевым приближением, то есть уточнения не происходит. В то же время АП, построенная при помощи первых трех членов, позволяет получить точное решение.

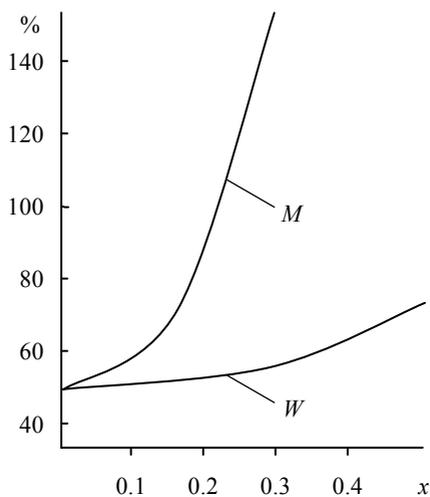


Рис.3.6. Оценка точности определения нормального перемещения и изгибающего момента при помощи РТВ.

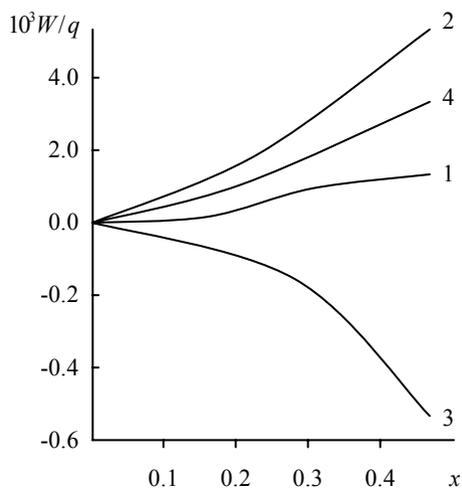


Рис. 3.7. Оценка точности частичных сумм РТВ при определении нормальных перемещений. 1 – W_0 , 2 – W_1 , 3 – W_2 , 4 – точное решение.

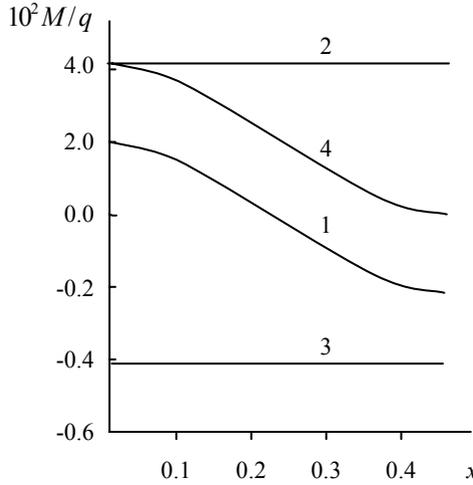


Рис. 3.8. Оценка точности РТВ при определении изгибающего момента. 1 – M_0 , 2 – M_1 , 3 – M_2 , 4 – точное решение.

3.3. НДС защемленной пластины

Исследуем НДС защемленной по контуру прямоугольной пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой \bar{q} ($-0.5a \leq \bar{x} \leq 0.5a$, $-0.5b \leq \bar{y} \leq 0.5b$). Исходное дифференциальное уравнение может быть записано следующим образом:

$$\nabla^4 W = q, \quad (3.10)$$

где $y = \bar{y}/b$; $x = \bar{x}/b$; $k = a/b$; $q = \bar{q}b^4/D$.

Граничные условия примем в виде (1.60), (1.61). Представим прогиб пластины в виде суммы трех составляющих:

$$W = W_1 + W_2 + W_3; \quad (3.11)$$

$$W_1 = \frac{q}{8k} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} 2\alpha_m y + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} y \operatorname{sh} 2\alpha_m y \right) \times \cos 2\alpha_m x; \quad (3.12)$$

$$W_2 = \frac{1}{8} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m}{\alpha_m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} 2\alpha_m y - 2\alpha_m y \operatorname{sh} 2\alpha_m y) \times \quad (3.13)$$

$$\times \cos 2\alpha_m x;$$

$$W_3 = \frac{k^2}{8} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} B_m}{\beta_m^2 \operatorname{ch} \beta_m} \left(\beta_m \operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch} \frac{2}{k} \beta_m x - \frac{2}{k} \beta_m x \operatorname{sh} \frac{2}{k} \beta_m x \right) \times \quad (3.14)$$

$$\times \cos \frac{2}{k} \beta_m y;$$

где $\alpha_m = \frac{\pi m}{2k}$; $\beta_m = \frac{\pi m k}{2}$.

Выражение (3.12) описывает прогиб шарнирно опертой по контуру пластины под действием равномерно распределенной нагрузки; выражение (3.13) – прогиб шарнирно опертой по контуру пластины, изгибаемой моментами M_y , распределенными по краям $y = \pm 0.5$, которые заданы следующим разложением:

$$M_{y|y=\pm 0.5} = \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \cos \frac{\pi m}{k} x.$$

Наконец, выражение (3.14) описывает прогиб шарнирно опертой по контуру пластины, изгибаемой моментами M_x , распределенными по краям $x = \pm 0.5k$, которые заданы разложениями:

$$M_{x|x=\pm 0.5k} = \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} B_m \cos \pi m y.$$

Выбор формы деформации пластины в виде (3.11) позволяет удовлетворить одному из граничных условий – отсутствию перемещений на внешнем контуре пластины. Удовлетворение граничным условиям (1.60), (1.61) приводит нас к уравнениям относительно коэффициентов A_m и B_m :

$$-(1-\varepsilon) \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} B_m \cos \pi m y + \varepsilon k \left\{ -\frac{q}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{\alpha_m^4} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} 2\alpha_m y + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} y \operatorname{sh} 2\alpha_m y \right) + \frac{1}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{A_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left(\operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} 2\alpha_m y - 2y \operatorname{sh} 2\alpha_m y \right) + \right. \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_m}{\beta_m} \left(\operatorname{th} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} \right) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \pi m y \Big\} = 0; \\
& - (1 - \varepsilon) \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \cos \frac{\pi m}{k} x + \varepsilon \left\{ \frac{q}{8k} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^4} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} - \operatorname{th} \alpha_m \right) \times \right. \\
& \times \cos \frac{\pi m}{k} x - \frac{1}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{A_m}{\alpha_m} \left(\operatorname{th} \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \cos \frac{\pi m}{k} x - \\
& \left. - \frac{k}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{B_m}{\operatorname{ch} \beta_m} \left(\operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch} \frac{2}{k} \beta_m x - \frac{2}{k} x \operatorname{sh} \frac{2}{k} \beta_m x \right) \right\} = 0.
\end{aligned} \quad (3.16)$$

Подчеркнутые выражения в уравнении (3.15) представляют собой четные функции от y , обращающиеся в ноль при $y = \pm 0.5$, которые можно представить разложением в ряд по $\cos \pi i y$, $i = 1, 3, 5, \dots$. Подчеркнутое выражение в уравнении (3.16) раскладываем в ряд по $\cos \pi i x/k$, $i = 1, 3, 5, \dots$. Подставляя указанные разложения в уравнения (3.15) и (3.16) и группируя члены, стоящие при $\cos \pi i y$ и $\cos \pi i x/k$, получим бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i и B_i :

$$B_i \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{k^2}{4} \cdot \frac{1}{\beta_i} \left(\operatorname{th} \beta_i + \frac{\beta_i}{\operatorname{ch}^2 \beta_i} \right) - 1 \right] \right\} + \varepsilon \frac{4}{\pi^2} i \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m \frac{m}{\left(\frac{m^2}{k^2} - i^2 \right)^2} = \quad (3.17)$$

$$= \varepsilon \frac{q}{8} \cdot \frac{1}{\beta_i^4} \left(\frac{\beta_i}{\operatorname{ch}^2 \beta_i} - \operatorname{th} \beta_i \right); \quad i = 1, 3, 5, \dots;$$

$$A_i \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{k^2}{4} \cdot \frac{1}{\alpha_i} \left(\operatorname{th} \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2 \alpha_i} \right) - 1 \right] \right\} + \varepsilon \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{i}{k} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} B_m \frac{m}{\left(m^2 + \frac{i^2}{k^2} \right)^2} = \quad (3.18)$$

$$= \varepsilon \frac{q}{8k} \cdot \frac{1}{\alpha_i^4} \left(\frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2 \alpha_i} - \operatorname{th} \alpha_i \right); \quad i = 1, 3, 5, \dots$$

Представим коэффициенты A_i и B_i в виде РТВ:

$$A_i = \sum_{j=0}^{\infty} A_{i(j)} \varepsilon^j; \quad B_i = \sum_{j=0}^{\infty} B_{i(j)} \varepsilon^j. \quad (3.19)$$

После подстановки рядов (3.19) в системы линейных алгебраических уравнений (3.17) и (3.18) получаем формулы для определения j -ых приближений неизвестных коэффициентов:

$$A_{i(0)} = \bar{0}; \quad B_{i(0)} = 0;$$

$$A_{i(1)} = \frac{q}{8k} \cdot \frac{1}{\alpha_i^4} \left(\frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2 \alpha_i} - \operatorname{th} \alpha_i \right); \quad B_{i(1)} = \frac{q}{8} \cdot \frac{1}{\beta_i^4} \left(\frac{\beta_i}{\operatorname{ch}^2 \beta_i} - \operatorname{th} \beta_i \right);$$

$$A_{i(j)} = A_{i(j-1)} \left[1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\alpha_i} \left(\operatorname{th} \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2 \alpha_i} \right) \right] - \frac{4}{\pi} i \times \quad (3.20)$$

$$\times \sum_{m=1,3,5,\dots} B_m(j-1) \frac{m/k}{\left(\frac{i^2}{k^2} + m^2 \right)^2}; \quad i = 1, 3, 5, \dots;$$

$$B_{i(j)} = B_{i(j-1)} \left[1 - \frac{k^2}{4} \cdot \frac{1}{\beta_i} \left(\operatorname{th} \beta_i + \frac{\beta_i}{\operatorname{ch}^2 \beta_i} \right) \right] - \quad (3.21)$$

$$- \frac{4}{\pi^2} i \sum_{m=1,3,5,\dots} A_m(j-1) \frac{m}{\left(\frac{m^2}{k^2} + i^2 \right)^2}; \quad i = 1, 3, 5, \dots$$

Рассмотрим расчет НДС квадратной пластины. Распределение изгибающих моментов в ней одинаково по всем краям, поэтому $A_i = B_i$ и системы (3.17) и (3.18) становятся тождественными. После определения четырех первых коэффициентов A_i по формулам (3.20) и (3.21) применим к найденному отрезку ряда АП:

$$A_{i[1/1]}(\varepsilon) = \varepsilon \frac{a_0 + a_1 \varepsilon}{b_0 + b_1 \varepsilon}, \quad (3.22)$$

где $a_0 = A_{i(1)}$, $b_0 = 1$, $a_1 = A_{i(2)} + b_1 A_{i(1)}$, $b_1 = -A_{i(3)} / A_{i(2)}$.

Прогиб в центре пластины с использованием АП (3.22) при $\varepsilon = 1$ составляет $1.275 \cdot 10^{-3} q$ (точное значение – $1.260 \cdot 10^{-3} q$, погрешность – 1.2%). Прогиб, полученный на основе РТВ – $1.797 \cdot 10^{-3} q$ (погрешность – 42.6%).

Изгибающий момент в центре пластины, найденный при помощи АП (3.22) при $\varepsilon = 1$, $\nu = 0.3$ составляет $5.173 \cdot 10^{-2} q$ (точное значение $5.130 \cdot 10^{-2} q$, погрешность – 0.83%). То же с использованием РТВ – $3.883 \cdot 10^{-2} q$ (погрешность – 24.2%).

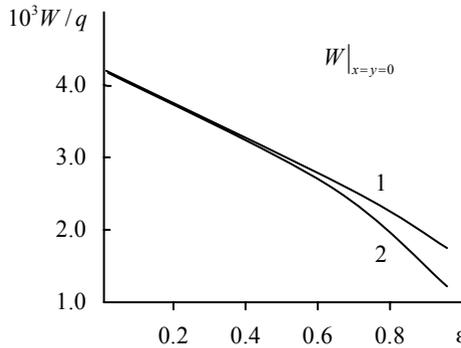


Рис. 3.9. Оценка точности РТВ при определении нормального прогиба.

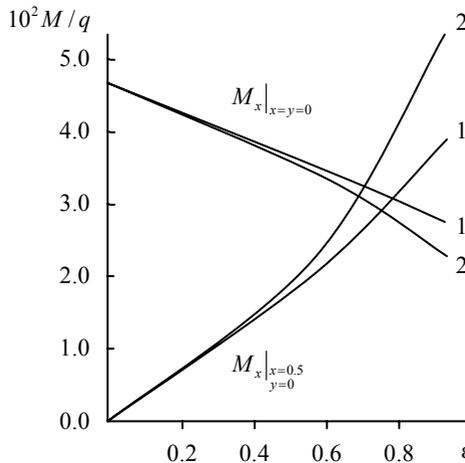


Рис. 3.10. Оценка точности РТВ при определении изгибающего момента.

Изгибающие моменты M_x и M_y на краю достигают максимума в середине защемленной стороны. Максимальный краевой момент, найденный при помощи АП (3.22), составляет $2.400 \cdot 10^{-2} q$ (точное значение – $2.310 \cdot 10^{-2} q$, погрешность – 3.90%). То же при использовании РТВ при $\varepsilon = 1$ – $2.941 \cdot 10^{-2} q$ (погрешность – 27.3%).

Зависимости $W|_{x=y=0}$, $M_x|_{x=y=0} = M_y|_{x=y=0}$, $M_x|_{x=\pm 0.5k}$ от ε представлены на рис.3.9, 3.10 для коэффициентов A_i , определенных на основе РТВ по формулам (3.20)–(3.21) при $\varepsilon = 1$ (кривые 1) и вычисленных с использованием АП (3.22) (кривые 2).

На приведенных графиках легко проследить зависимость факторов НДС от параметра ε . Для всех представленных кривых характерны две

зоны. Первая – от $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = 0.6$. В пределах этой зоны различия в результатах, полученных при помощи РТВ и АП, составляет менее 5%. Во второй зоне – от $\varepsilon = 0.6$ до $\varepsilon = 1.0$ – наблюдается большое расхождение между этими кривыми (наибольшее – при $\varepsilon = 1$). Результаты, полученные при помощи АП, можно считать практически точными. Следовательно, в данном случае $\varepsilon = 0.6$ – предел практической применимости отрезка РТВ.

Следует также отметить интересную особенность предлагаемого метода: если расчет производить только с использованием РТВ, то с наибольшей погрешностью определяется прогиб в центре пластины, погрешность в определении изгибающих моментов в центре и на краю несколько меньше. Применение АП снижает погрешность в определении факторов НДС, делая ее почти одинаковой как при определении прогиба, так и при определении изгибающих моментов.

Данное явление имеет следующее объяснение. Полюса АП в единичном круге параметра ε сохраняют свое положение при дифференцировании найденной функции по пространственным координатам x и y . Поэтому улучшение при помощи АП сходимости рядов как для прогибов, так и для моментов одинаково. Это важное преимущество АП.

3.4. НДС пластины со свободными краями

Рассмотрим расчет НДС пластины ($-0.5a \leq \bar{x} \leq 0.5a$; $-0.5b \leq \bar{y} \leq 0.5b$), находящейся под действием самоуравновешенной нагрузки $\bar{q}(x, y) = \bar{q}_0 \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y$, $m, n = 2, 4, 6, \dots$. После обезразмеривания исходное дифференциальное уравнение может быть записано в следующем виде:

$$\nabla^4 W = q_0 \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y, \quad (3.23)$$

где $q_0 = \bar{q}_0 b^4 / D$.

Граничные условия свободного контура в преобразованном виде примем такие:

$$\begin{aligned} W_{xxx} + (2 - \nu)W_{yyx} &= 0, \\ (1 - \varepsilon)W_x \pm \varepsilon k(W_{xx} + \nu W_{yy}) &= 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
 W_{yyy} + (2-\nu)W_{xxy} &= 0, \\
 (1-\varepsilon)W_y \pm \varepsilon(W_{yy} + \nu W_{xx}) &= 0 \quad \text{при } y = \pm 0.5.
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

После подстановки РТВ в дифференциальное уравнение (3.23), граничные условия (3.24), (3.25) и расщепления по степеням ε , получим следующую рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\begin{aligned}
 \nabla^4 W_0 &= q_0 \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y; \\
 W_{0x} = 0, \quad W_{0xxx} &= 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \\
 W_{0y} = 0, \quad W_{0yyy} &= 0 \quad \text{при } y = \pm 0.5; \\
 \nabla^4 W_j &= 0; \\
 W_{jxxx} + (2-\nu)W_{jyyx} &= 0, \\
 W_{jx} &= \mp k \sum_{i=0}^{j-1} (W_{ixx} + \nu W_{iyy}) \quad \text{при } x = \pm 0.5k; \\
 W_{jyyy} + (2-\nu)W_{jxxy} &= 0, \\
 W_{jy} &= \mp \sum_{i=0}^{j-1} (W_{iyy} + \nu W_{ixx}) \quad \text{при } y = \pm 0.5.
 \end{aligned}$$

Определим начальные коэффициенты РТВ:

$$\begin{aligned}
 W &= W_0 + W_1 \varepsilon + W_2 \varepsilon^2 + \dots, \\
 W_0 &= \frac{q_0}{\pi^4 \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)} \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y; \\
 W_1 &= -\frac{q_0(1-\nu)}{2\pi^2 \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)^2} \left\{ k \frac{\left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right)}{\pi n \operatorname{sh} \pi n k / 2} (-1)^{\frac{m}{2}} \left[\left(\frac{\pi n k}{2} C \operatorname{th} \frac{\pi n k}{2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \operatorname{ch} \pi n x - \pi n x \operatorname{sh} \pi n x \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \cos \pi n y + \frac{n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2}}{\frac{\pi m}{k} \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2k}} (-1)^{\frac{n}{2}} \left[\left(\frac{\pi m}{2k} \operatorname{cth} \frac{\pi m}{2k} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \operatorname{cth} \frac{\pi m}{k} y - \frac{\pi m}{k} y \operatorname{sh} \frac{\pi m}{k} y \right] \cos \frac{\pi m}{k} x \right\};
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
W_2 = & -\frac{q_0(1-\nu)^2}{4\pi^2\left(\frac{m^2}{k^2}+n^2\right)^2} \left\{ k \frac{\left(\frac{m^2}{k^2}+\nu n^2\right)}{\operatorname{sh} \pi n k / 2} (-1)^{\frac{m}{2}} \left[(1-\nu) \frac{\pi n k}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \pi n k / 2} - (3+\nu) \operatorname{cth} \frac{\pi n k}{2} \right] \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{\pi n k}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi n k}{2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \operatorname{ch} \pi n x - \pi n x \operatorname{sh} \pi n x \right] \cos \pi n y + \frac{n^2+\nu}{\operatorname{sh} \frac{\pi m}{2k}} \frac{m^2}{k^2} (-1)^{\frac{n}{2}} \times \\
& \times \left[(1-\nu) \frac{\pi m}{2k} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi m}{2k}} - (3+\nu) \operatorname{cth} \frac{\pi m}{2k} \right] \times \left[\left(\frac{\pi m}{2k} \operatorname{cth} \frac{\pi m}{2k} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi m}{k} y - \right. \\
& \left. - \frac{\pi m}{k} y \operatorname{sh} \frac{\pi m}{k} y \right] \cos \frac{\pi m}{k} x - \frac{2q_0(1-\nu)^3(-1)^{\frac{m}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi^5\left(\frac{m^2}{k^2}+n^2\right)^2} \times \left\{ k \left(\frac{\pi m}{k} \right)^2 \times \right. \\
& \times \sum_{i=2,4,6,\dots} \frac{i(-1)^{\frac{i}{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi i k}{2} \left(\frac{m^2}{k^2}+i^2 \right)^2} \left[\left(\frac{\pi i k}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi i k}{2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \operatorname{ch} \pi i x - \pi i x \operatorname{sh} \pi i x \right] \cos \pi i y + \\
& \left. + (\pi n^2) \sum_{i=2,4,6,\dots} \frac{(-1)^{\frac{i}{2}}(i/k)}{\operatorname{sh} \frac{\pi i}{2k} \left(n^2 + \frac{i^2}{k^2} \right)^2} \left[\left(\frac{\pi i}{2k} \operatorname{cth} \frac{\pi i}{2k} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi i}{k} y - \frac{\pi i}{k} y \operatorname{sh} \frac{\pi i}{k} y \right] \cos \frac{\pi i}{k} x \right\}.
\end{aligned}$$

Далее к отрезку ряда (3.26) применяем АП. Произведем расчет некоторых факторов НДС для пластины при следующих значениях параметров: $m = n = 2$, $k = 1$, $\nu = 0.3$. На рис.3.11, 3.12 представлены прогиб пластины W и изгибающие моменты M_x , M_y при $y = 0$.

Изложенный подход отличается от метода построения НДС, предложенного выше. А именно, НДС теперь строится путем последовательного решения рекуррентных краевых задач с последующим применением АП к найденному РТВ, хотя и эту задачу можно было свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с дальнейшим асимптотическим ее упрощением и применением АП. Эти два подхода дают одинаковые результаты, но изложенный в данном параграфе подход более удобен, поскольку решения в первом и последующих приближениях имеют одинаковую структуру.

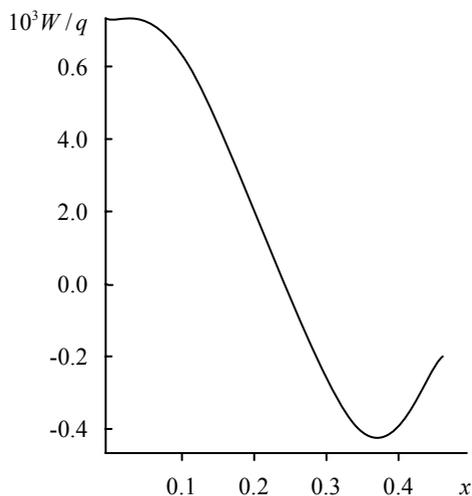


Рис. 3.11. Изменение нормального прогиба в зависимости от x при $y=0$.

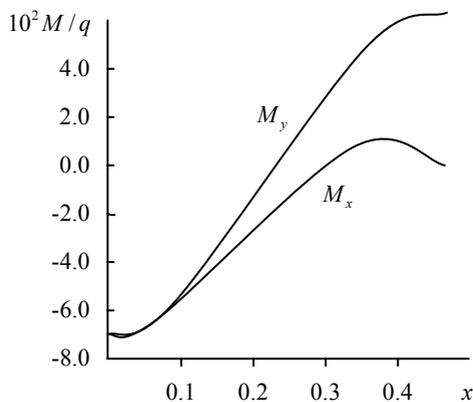


Рис.3.12. Изменение изгибающих моментов в зависимости от x при $y=0$.

3.5. НДС пластины со смешанными граничными условиями «зачемление – шарнир»

Рассмотрим прямоугольную пластину, шарнирно опертую по двум сторонам, а на двух других сторонах имеющую смешанные граничные

условия типа «зашемление – шарнир» (рис. 1.8). Пластина находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q . Подробно рассмотрим симметричную задачу (рис. 1.8, a). Ее решение сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений аналогично тому, как это было сделано при расчете НДС зашемленной по контуру прямоугольной пластины.

После обезразмеривания исходное дифференциальное уравнение принимает вид (3.10), а граничные условия – (1.109), (1.110). Прогиб пластины представим в виде:

$$W = W_1 + W_2,$$

$$W_1 = \frac{q}{8k} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_m} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} 2\alpha_m y + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} y \operatorname{sh} 2\alpha_m y \right) \times \quad (3.27)$$

$$\times \cos \frac{\pi m}{k} x;$$

$$W_2 = \frac{1}{8} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_m^2} \cdot \frac{A_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} 2\alpha_m y - 2\alpha_m y \operatorname{sh} 2\alpha_m y) \times \quad (3.28)$$

$$\times \cos \frac{\pi m}{k} x;$$

где $\alpha_m = \frac{\pi m}{2k}$.

Здесь, как и при расчете НДС зашемленной по контуру пластины, выражение (3.27) описывает прогиб шарнирно опертой по контуру пластины; выражение (3.28) – прогиб шарнирно опертой по контуру пластины, изгибаемой моментами M_y , распределенными по краю $y = \pm 0.5$:

$$M_{y|y=\pm 0.5} = \sum_{m=1,3,5,\dots} A_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos 2\alpha_m x.$$

Выражения (3.27), (3.28) удовлетворяют условию равенства нулю вертикальных перемещений на контуре, а также граничным условиям (1.109).

Удовлетворение граничным условиям (1.110) приводит к следующему уравнению:

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} A_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos 2\alpha_m x = \varepsilon \bar{H}(x) \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \cos 2\alpha_m x + \quad (3.29) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{q}{8k} \cdot \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_m^4} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} - \operatorname{th} \alpha_m \right) \cos 2\alpha_m x - \\
& - \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{4\alpha_m} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} + \operatorname{th} \alpha_m \right) \cos 2\alpha_m x \Big\}; \quad i = 1, 3, 5, \dots
\end{aligned}$$

Чтобы получить систему линейных алгебраических уравнений, используем разложение:

$$\overline{H}(x) \cos 2\alpha_m x = \sum_{i=1,3,5,\dots} \gamma_{im} \cos 2\alpha_i x; \quad (3.30)$$

$$\gamma_{im} = \begin{cases} 2 \left[0.5 - \mu - \frac{1}{2\pi m} \sin 2\pi\mu m \right] & \text{при } i = m; \\ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(m^2 - i^2)} \left[i \sin \pi\mu i \cos \pi\mu m - m \sin \pi\mu m \cos \pi\mu i \right] & \text{при } i \neq m. \end{cases}$$

Подставляя выражение (3.30) в уравнение (3.29) и группируя коэффициенты, стоящие при $\cos 2\alpha_i x$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
A_i (-1)^{\frac{i-1}{2}} = \varepsilon \sum_{m=1,3,5,\dots} \gamma_{im} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \left[1 - \frac{1}{4\alpha_m} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} + \operatorname{th} \alpha_m \right) \right] + \\
+ \varepsilon \frac{q}{8k} \sum_{m=1,3,5,\dots} \gamma_{im} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_m^4} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} - \operatorname{th} \alpha_m \right), \quad i = 1, 3, 5, \dots
\end{aligned} \quad (3.31)$$

К данной системе применяем метод возмущений. Представив коэффициенты A_i в виде рядов возмущений по ε (3.19), после подстановки их в систему (3.31) и расщепления по степеням ε получаем рекуррентные формулы:

$$A_{i(0)} = 0; \quad (3.32)$$

$$A_{i(1)} = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{q}{8k} \sum_{m=1,3,5,\dots} \gamma_{im} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_m^4} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} - \operatorname{th} \alpha_m \right); \quad (3.33)$$

$$A_{i(j)} = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \sum_{m=1,3,5,\dots} \gamma_{im} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_{m(j-1)} \left[1 - \frac{1}{4\alpha_m} \left(\frac{\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} + \text{th} \alpha_m \right) \right]. \quad (3.34)$$

АП для коэффициентов A_i имеет вид (3.22).

Рассмотрим решение (3.32)–(3.34) в предельных случаях. Значение $\mu = 0.5$ соответствует шарнирному опиранию по всей стороне $y = \pm 0.5$, при этом $\gamma_{im} \equiv 0$. Второй предельный случай – $\mu = 0$ – соответствует заземлению всей стороны $y = \pm 0.5$, тогда $\gamma_{im} = \delta_{im}$, где

$$\delta_{im} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = m; \\ 0, & \text{при } i \neq m. \end{cases}$$

Рекуррентные соотношения (3.32)–(3.34) примут следующий вид:

$$A_{i(0)} = 0; \quad (3.35)$$

$$A_{i(1)} = \frac{q}{8k} \cdot \frac{1}{\alpha_i^4} \left(\frac{\alpha_i}{\text{ch}^2 \alpha_i} - \text{th} \alpha_i \right); \quad (3.36)$$

$$A_{i(2)} = \frac{q}{8k} \cdot \frac{1}{\alpha_i^4} \left(\frac{\alpha_i}{\text{ch}^2 \alpha_i} - \text{th} \alpha_i \right) \left[1 - \frac{1}{4\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i}{\text{ch}^2 \alpha_i} + \text{th} \alpha_i \right) \right]; \quad (3.37)$$

$$A_{i(3)} = \frac{q}{8k} \cdot \frac{1}{\alpha_i^4} \left(\frac{\alpha_i}{\text{ch}^2 \alpha_i} - \text{th} \alpha_i \right) \left[1 - \frac{1}{4\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i}{\text{ch}^2 \alpha_i} + \text{th} \alpha_i \right) \right]^2. \quad (3.38)$$

АП для отрезка ряда (3.35)–(3.38) при $\varepsilon = 1$ такова:

$$A_{i[1/1]} = \frac{q}{2\alpha_i^3} \cdot \frac{\alpha_i - \text{th} \alpha_i (\alpha_i \text{th} \alpha_i + 1)}{\alpha_i - \text{th} \alpha_i (\alpha_i \text{th} \alpha_i - 1)}. \quad (3.39)$$

Выражение для A_i (3.39) полностью совпадает с решением С.П. Тимошенко.

Расчет компонентов НДС производится для квадратной пластины с учетом первых десяти коэффициентов A_i , полученных по формуле (3.22) при $\varepsilon = 1$. Определены прогиб и изгибающие моменты в центре пластины для различных значений параметра μ (рис. 3.13, 3.14). Сплошные линии – полученное решение, штриховые линии – результаты расчетов методом конечных элементов.

На рис.3.15 приведены данные для момента M_y , распределенного по краям $y = \pm 0.5$, при различных значениях параметра μ .

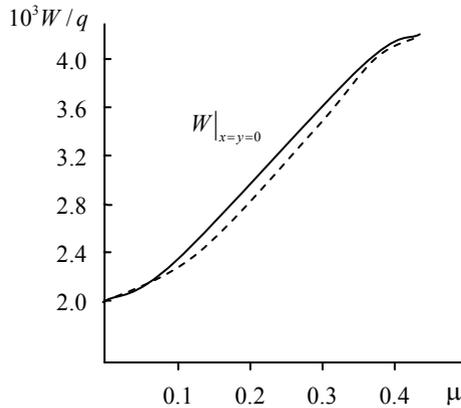


Рис. 3.13. Сравнение решения для прогибов с результатами расчета методом конечных элементов.

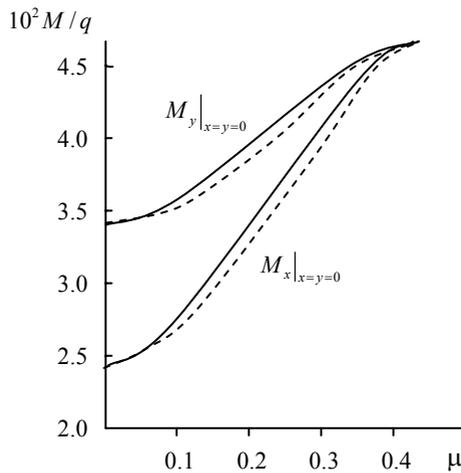


Рис. 3.14. Сравнение решения для изгибающих моментов с результатами расчета методом конечных элементов.

Кратко остановимся на следующем вопросе. В местах смены граничных условий некоторые компоненты НДС имеют особенности (см. табл. 3.1). Справедливы следующие асимптотики: $W = O(r^{\varphi+1})$, $M_n = O(r^{\varphi-1})$, $Q_n = O(r^{\varphi-2})$ [81]. Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, M_n и Q_n – изгибающий момент и обобщенная поперечная сила в пластинке в направлении n . Для граничных условий 1)–5) в табл. 3.1 $\varphi = 0.5$, для условий 6) параметр φ определяется из трансцендентного уравнения

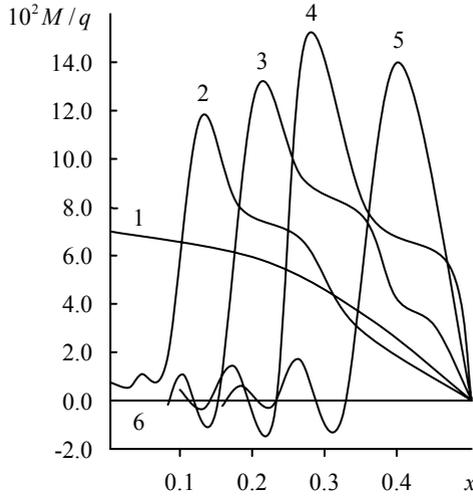


Рис. 3.15. Изгибающий момент M_y при $y = \pm 0.5$ для различных значений параметра μ : 1 – $\mu = 0$, 2 – 0.1, 3 – 0.2; 4 – 0.3; 5 – 0.4, 6 – 0.5.

Таблица 3.1.

	Расчетная схема	Граничные условия
1		$x < 0: M_y = 0, W = 0;$ $x > 0: M_y = 0, Q_y = 0;$
2		$x < 0: M_y = 0, W = 0;$ $x > 0: W = 0, dW/dy = 0;$
3		$x < 0: Q_y = 0, dW/dy = 0;$ $x > 0: W = 0, dW/dy = 0;$
4		$x < 0: Q_y = 0, dW/dy = 0;$ $x > 0: M_y = 0, W = 0;$
5		$x < 0: Q_y = 0, dW/dy = 0;$ $x > 0: M_y = 0, Q_y = 0;$
6		$x < 0: W = 0, dW/dy = 0;$ $x > 0: Q_y = 0, M_y = 0;$

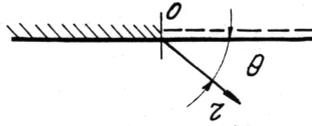


Рис. 3.16. Локальные координаты в точке смены граничных условий.

$$\cos 2\pi\varphi = -\frac{4 + (1 + \nu)^2}{4 - (1 - \nu)^2}.$$

Построенное выше приближенное решение указанных особенностей не имеет, поэтому они должны быть введены при помощи известного приема. Суть его состоит в следующем. Пусть, например, мы хотим уточнить моменты M_y в окрестности точки смены граничных условий шарнирного опирания на защемление. Введем локальные полярные координаты с полюсом в точке смены граничных условий (рис. 3.16). Сингулярная составляющая изгибающего момента M_y может быть записана следующим образом:

$$M_y^{(c)} = r^{0.5} C(\theta) = r^{0.5} (C_0 + C_1\theta + \dots), \quad (3.40)$$

где $C(\theta)$ – функция, зависящая от угла θ .

В выражении (3.40) при разложении функции $C(\theta)$ в степенной ряд по θ можно удержать только C_0 .

Составим следующее уравнение:

$$M_{y|y=\pm 0.5} = M_y^{(c)}|_{y=\pm 0.5} \quad \text{при } \theta = 0; \quad (3.41)$$

$$Q_{y|y=\pm 0.5} = Q_y^{(c)}|_{y=\pm 0.5} \quad \text{при } \theta = 0; \quad (3.42)$$

где M_y, Q_y – изгибающий момент и перерезывающая сила, определенные при помощи МВ.

Из соотношений (3.41), (3.42) определяем значение постоянной C_0 и точку срачивания сингулярной и регулярной компонент изгибающего момента y_c .

Решим задачу о расчете НДС пластины, имеющей участок защемления, несимметричный относительно центра пластины (рис. 1.8, б). Дифференциальное уравнение (3.10) и граничные условия (1.109) сохраняют свой вид, а в граничных условиях (1.110) функция $\bar{H}(x)$ должна быть записана следующим образом: $\bar{H}(x) = H(x) - H(x - \mu k)$. В уравнениях

(3.27), (3.28) $\cos \frac{\pi m}{k} x$ заменяется на $\sin \frac{\pi m}{k} x$, $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ заменяется на 1, суммирование производится по всем m . Формула (3.30) запишется следующим образом:

$$\overline{H}(x) \sin 2\alpha_m x = \sum_{i=1,2,3,\dots} \gamma_{im} \sin 2\alpha_i x,$$

где γ_{im} определяется выражением (1.129).

Система линейных алгебраических уравнений в этом случае такова:

$$A_i = \varepsilon \sum_{m=1,2,3,\dots} A_m \gamma_{im} \left[1 - \frac{1}{4\alpha_m} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} + \operatorname{th} \alpha_m \right) \right] + \varepsilon \frac{q}{8k} \sum_{m=1,2,3,\dots} \gamma_{im} \frac{1}{\alpha_m^4} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} - \operatorname{th} \alpha_m \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

В рекуррентных соотношениях для A_i (3.35)–(3.38) необходимо произвести следующие замены: $(-1)^{\frac{i-1}{2}}$ и $(-1)^{\frac{i-1}{2}}$ на 1, суммирование производить по всем i и m .

АП коэффициентов A_i сохраняет вид (3.22).

Расчет компонентов НДС квадратной пластины производился для различных значений параметра μ с учетом первых десяти коэффициентов A_i . Зависимость прогиба и моментов в центре пластины от μ представлена на рис.3.17, 3.18. На рис.3.19 приведено распределение краевого изгибающего момента M_y для различных значений параметра μ . Сплошными линиями обозначено полученное решение, штриховыми – расчет методом конечных элементов.

Анализ полученных результатов показывает, что применение МВ позволяет достоверно определять компоненты НДС пластин со смешанными граничными условиями в местах, удаленных от особенностей.

Анализируя графики зависимостей факторов НДС о геометрических размеров участков смешанных граничных условий, можно выделить три характерных зоны. Первая зона расположена в пределах значения параметра μ от $\mu = 0$ до $\mu = 0.1$ для симметричного расположения участков защемления и от $\mu = 0$ до $\mu = 0.4$ – для несимметричного. В этой зоне наблюдается незначительное изменение факторов НДС. Отклонение от начального значения составляет менее 5%. Во второй зоне с увеличением значения параметра μ наблюдается значительный, почти линейный рост величин факторов НДС. Границы этой зоны расположены в пределах от

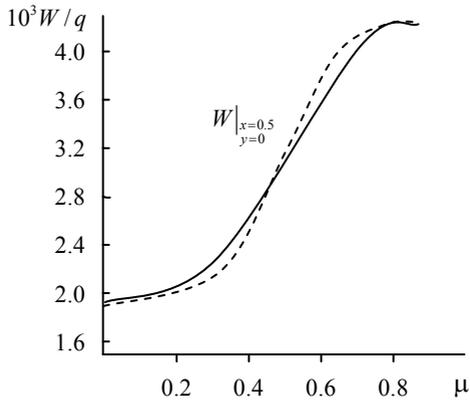


Рис. 3.17. Сравнение решения для нормального прогиба с результатами расчета методом конечных элементов.

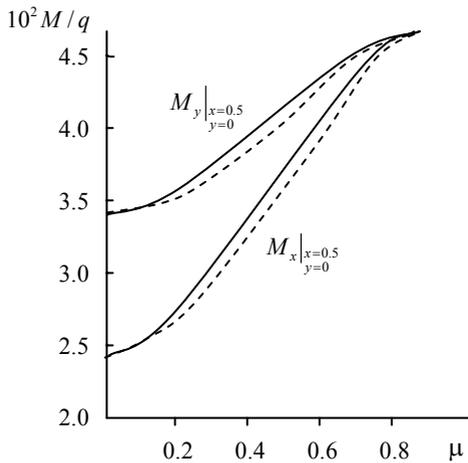


Рис. 3.18. Сравнение решения для изгибающих моментов с результатами расчета методом конечных элементов.

$\mu = 0.1$ до $\mu = 0.4$ для симметричной задачи и от $\mu = 0.4$ до $\mu = 0.9$ – для несимметричной. Третья зона – от $\mu = 0.4$ до $\mu = 0.5$ (от $\mu = 0.9$ до $\mu = 1.0$) – характерна тем, что рост величин факторов НДС с ростом параметра μ незначителен.

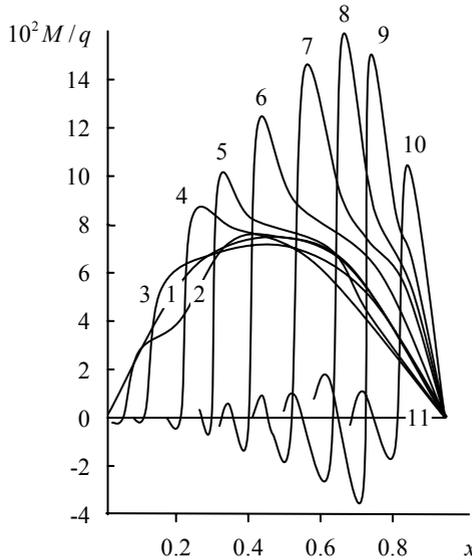


Рис. 3.19. Изгибающий момент M_y при $y = \pm 0.5$ для различных значений параметра μ : 1 – $\mu = 0$, 2 – 0.1; 3 – 0.2; 4 – 0.3; 5 – 0.4; 6 – 0.5; 7 – 0.6; 8 – 0.7; 9 – 0.8; 10 – 0.9; 11 – 1.0.

Таким образом, незначительные участки неоднородных граничных условий (как шарнирного опирания, так и защемления) не оказывают существенного влияния на НДС пластины.

3.6. НДС пластины со смешанными граничными условиями «свободный край – подвижная заделка»

Рассмотрим расчет прямоугольной пластины, шарнирно опертой по двум сторонам, а на двух других сторонах имеющей смешанные граничные условия типа «свободный край – подвижная заделка» (рис. 1.17). Пластина находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q . Рассмотрим подробно задачу, симметричную относительно начала координат (рис. 1.17, а).

После обезразмеривания исходная краевая задача имеет вид (3.28), (1.154), (1.155). Прогиб пластины представим в виде:

$$W = W_1 + W_2';$$

$$W_1 = \frac{q}{24} \left(x^4 - \frac{3}{2} k^2 x^2 + \frac{5}{16} k^4 \right); \quad (3.43)$$

$$W_2 = \frac{1}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_m (v-1)}{\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m} \left[\left(\frac{v+1}{v-1} + \alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m \right) \operatorname{ch} 2\alpha_m y - \right. \\ \left. - 2\alpha_m y \operatorname{sh} 2\beta_m y \right] \times \cos 2\alpha_m x. \quad (3.44)$$

Выражение (3.43) описывает цилиндрический изгиб пластины, шарнирно опертой по сторонам $x = \pm 0.5k$ и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, выражение (3.44) – прогиб пластины, шарнирно опертой по сторонам $x = \pm 0.5k$, а на сторонах $y = \pm 0.5$ имеющей следующие граничные условия:

$$W_{,yy} + (2-v)W_{,xy} = 0; \quad W_{,y} = \sum_{m=1,3,5,\dots} A_m \cos 2\alpha_m x.$$

Удовлетворение граничным условиям (1.154), (1.155) приводят к следующему уравнению:

$$\sum_{m=1,2,5,\dots} A_m \cos 2\alpha_m x = \varepsilon \bar{H}(x) \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots} A_m \left[1 - \alpha_m (v-1) \left(\alpha_m (1-v) \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_m} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (3+v) C \operatorname{th} \alpha_m \right) \right] \cos 2\alpha_m x + v \frac{q}{8} (4x^2 - k^2) \right\}, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Представляя подчеркнутые члены и функцию $\bar{H}(x) \cos 2\alpha_m x$ в виде ряда по $\cos 2\alpha_i x$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i :

$$A_i = \varepsilon \sum_{m=1,3,5,\dots} \gamma_{im} A_m \left\{ 1 - \alpha_m (v-1) \left[\alpha_m (1-v) \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_m} \right] \right\} - \\ - \varepsilon v q \left(4\mu \frac{k^2}{\pi^2 t^2 \cos \pi \mu i} + 2 \frac{k^2}{\pi i} \left[\left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{2}{\pi^2 t^2} \right] \right); \quad i = 1, 3, 5, \dots$$

$$\gamma_{im} = \begin{cases} 2\mu + \frac{1}{4\pi m} \sin 2\pi\mu m & \text{при } i = m; \\ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(m^2 - i^2)} [m \sin \pi\mu m \cos \pi\mu i - i \sin \pi\mu i \cos \pi\mu m] & \text{при } i \neq m. \end{cases}$$

Далее применяем МВ. В результате удается получить рекуррентные соотношения для коэффициентов A_i :

$$A_{i(0)} = 0;$$

$$A_{i(1)} = \nu q \left(4\mu \frac{k^2}{\pi^2 i^2} \cos \pi\mu i + \frac{2k^2}{\pi i} \left[\left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{2}{\pi^2 i^2} \right] \right);$$

$$A_{i(j)} = \sum_{m=1,3,5,\dots} A_{m(j-1)} \gamma_{im} \left\{ 1 - \alpha_m (\nu - 1) \left[\alpha_m (1 - \nu) \frac{1}{\text{Sh}^2 \alpha_m} - (3 + \nu) \text{cth} \alpha_m \right] \right\}.$$

Коэффициент A_i перестраиваем в АП (3.22).

Рассмотрим полученное решение в предельных случаях. Значения $\mu=0$ соответствует подвижному заземлению по всей стороне $y = \pm 0.5$, тогда $\gamma_{im} \equiv 0$. Второй предельный случай – $\mu = 0.5$ – отвечает полностью свободной стороне $y = \pm 0.5$, при этом $\gamma_{im} = 1 - \delta_{im}$. В этом случае АП (3.22) при $\varepsilon = 1$ дает точное решение:

$$W = \frac{q}{24} \left(x^4 - \frac{3}{2} k^2 x^2 + \frac{5}{16} k^4 \right) + \nu \frac{q}{8k} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_m^5} \times$$

$$\times \frac{1}{\text{sh} \alpha_m (\alpha_m (1 - \nu) \text{sh}^{-2} \alpha_m + (3 + \nu) \text{cth} \alpha_m)} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\nu + 1}{\nu - 1} + \alpha_m \text{cth} \alpha_m \right) \text{ch} 2\alpha_m y - 2\alpha_m y \text{sh} 2\alpha_m y \right] \cdot \cos 2\alpha_m x.$$

Расчет компонентов НДС производился для квадратной пластины с учетом первых десяти коэффициентов A_i , полученных при помощи АП (3.22) при $\varepsilon = 1$. Определялись прогиб и изгибающие моменты в центре пластины для некоторых значений параметра μ . Результаты расчета изображены на рис. 3.20, 3.21 сплошными линиями. Штрихпунктирной линией изображены результаты, полученные при помощи метода конечных элементов.

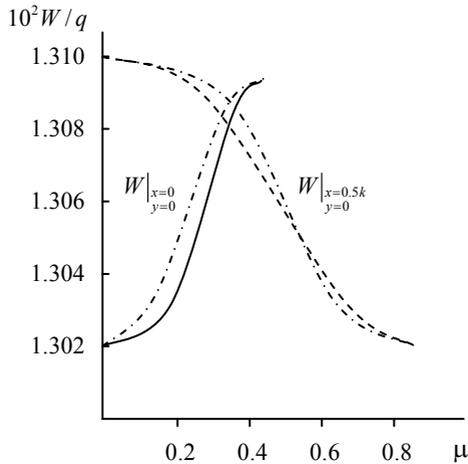


Рис. 3.20. Сравнение результатов расчета нормального перемещения различными методами.

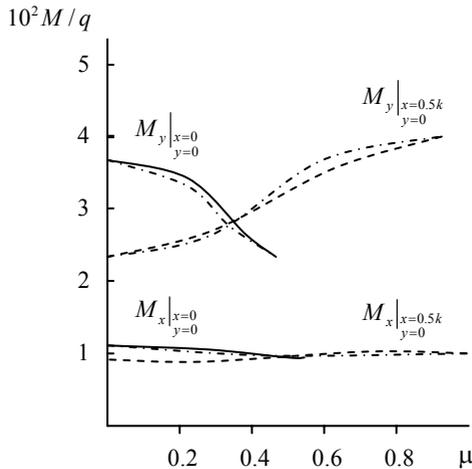


Рис. 3.21. Сравнение результатов расчета изгибающих моментов различными методами.

Аналогично решается задача о расчете НДС пластины, имеющей участок подвижной заделки, несимметричный относительно центра пластины (рис. 1.17, б). В этом случае вид исходного дифференциального уравнения (3.10) и граничных условий (1.154), (1.155) сохраняется. В граничных условиях (1.154), (1.155) функция $\bar{H}(x)$ запишется следующим образом:

$$\overline{H}(x) = H(x) - H(x - \mu k).$$

Выражение, описывающее цилиндрический изгиб пластины, примет вид:

$$W_1 = \frac{q}{24} x (x^3 2kx^2 + k^3).$$

В выражении (3.44) суммирование по нечетным m заменяется на суммирование по всем m .

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i теперь имеет вид:

$$A_i = \varepsilon \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \gamma_{im} A_m (v-1) \left[\alpha_m (1-v) \frac{1}{\text{sh}^2 \alpha_m} - (3+v) \text{cth} \alpha_m \right] \right\} + \\ + \varepsilon v \frac{q}{2} \left\{ 2 \frac{k^2}{\pi^2 i^2} \cdot \sin \pi \mu i (2\mu - 1) - \frac{2k^2}{\pi i} \left(\mu^2 + \mu - \frac{2}{\pi^2 i^2} \right) \cos \pi i \mu - 4 \frac{k^2}{\pi^3 i^3} \right\},$$

где γ_{im} определяется выражением (1.129).

Рекуррентные соотношения для коэффициентов тригонометрических рядов таковы:

$$A_{i(0)} = 0; \\ A_{i(1)} = v \frac{q}{2} \left\{ 2 \frac{k^2}{\pi^2 i^2} \sin \pi \mu i (2\mu - 1) - \frac{2k^2}{\pi i} \left(\mu^2 + \mu - \frac{2}{\pi^2 i^2} \right) \cos \pi i \mu - 4 \frac{k^2}{\pi^3 i^3} \right\}; \\ A_{i(j)} = \sum_{m=1,3,5,\dots} A_{m(j-1)} \gamma_{im} \left\{ 1 - \alpha_m (v-1) \left[\alpha_m (1-v) \frac{1}{\text{sh}^2 \alpha_m} - (3+v) \text{cth} \alpha_m \right] \right\}.$$

АП коэффициентов A_i (3.22) сохраняет свой вид.

Рассмотрим полученное решение в предельных случаях. Значение $\mu = 0$ соответствует подвижному заземлению по всей стороне $y = \pm 0.5$, тогда $\gamma_{im} \equiv 0$. Второй предельный случай ($\mu = 1.0$) отвечает полностью свободной стороне $y = \pm 0.5$, при этом $\gamma_{im} = \delta_{im}$. В этом случае АП (3.22) при $\varepsilon = 1$ дает точное решение:

$$W = \frac{q}{24} x(x^3 - 2kx^2 + k^3) + v \frac{q}{8k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^5} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_m (\alpha_m (1-v) \operatorname{sh}^{-2} \alpha_m + (3+v) \operatorname{cth} \alpha_m)} \times \\ \times \left[\left(\frac{v+1}{v-1} + \alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m y \right) \operatorname{ch} 2\alpha_m y - 2\alpha_m y \operatorname{sh} 2\alpha_m y \right] \sin 2\alpha_m x.$$

Результаты вычисления прогиба и изгибающих моментов в центре квадратной пластины изображены на рис. 3.20, 3.21 штриховой линией. Расчет производился с использованием первых десяти коэффициентов A_i . Штрихпунктирной линией обозначены результаты, полученные методом конечных элементов.

Как и в предыдущей задаче можно выделить три зоны значений параметра μ . Первая – $[0, 0.15]$ для симметричной задачи и $[0, 0.3]$ для несимметричной. Вторая – $[0.15, 0.45]$ и $[0.3, 0.9]$. Третья – $[0.45, 0.5]$ и $[0.9, 1.0]$. В первой и третьей зонах изменение параметра μ оказывает незначительное влияние на факторы НДС. Во второй зоне малые изменения параметра μ приводят к существенным изменениям всех факторов НДС. Небольшие участки неоднородных граничных условий не оказывают существенного влияния на НДС пластины.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК И ПЛАСТИН

4.1. Вынужденные колебания защемленной балки

Рассмотрим защемленную по торцам балку ($-0.5l \leq \bar{x} \leq 0.5l$), находящуюся под действием периодической по времени нагрузки $P(\bar{x}, y) = \bar{P}(x) \sin(\omega t + \alpha)$. Дифференциальное уравнение движения балки в этом случае имеет вид:

$$EI y_{xxxx} + \rho y_{tt} = \bar{P}(x) \sin(\omega t + \alpha). \quad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1) отыскиваем в следующем виде:

$$y = W(x) \sin(\omega t + \alpha), \quad (4.2)$$

где $x = \bar{x}/l$. Подставляя выражение (4.2) в уравнение (4.1), получаем:

$$W^{IV} - \lambda^4 W = P(x), \quad (4.3)$$

где $\lambda^4 = \frac{\rho \omega^2 l^2}{EI}$, $P(x) = \frac{\bar{P}(x) l^3}{EI}$. Граничные условия примем в виде (1.9).

Представив прогиб в виде ряда по ε , после подстановки его в уравнение (4.3) и граничные условия (1.9) и расщепления по степеням ε получим рекуррентную последовательность задач:

$$\begin{aligned} W_0^{IV} - \lambda^4 W_0 &= P(x), \\ W_0 &= 0, \quad W_0'' = 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5, \\ W_j^{IV} - \lambda^4 W_j &= 0; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$W_j = 0, \quad W_j'' = \mp \sum_{i=0}^{j-1} W_i' \quad \text{при } x = \pm 0.5. \quad (4.5)$$

Рассмотрим случай, когда частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот шарнирно опертой балки. Дифференциальное уравнение (4.4) в нулевом приближении может быть представлено следующим образом:

$$W_0^{IV} - \lambda^4 W_0 = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n \cos \pi n x + \sum_{n=2,4,6,\dots} B_n \sin \pi n x,$$

где

$$A_n = 2 \int_{-0.5}^{0.5} P(x) \cos \pi n x \, dx \quad \text{при } n = 1, 3, 5, \dots,$$

$$B_n = 2 \int_{-0.5}^{0.5} P(x) \sin \pi n x \, dx \quad \text{при } n = 2, 4, 6, \dots$$

Теперь получаем:

$$W = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{A_n}{\pi^4 n^4 - \lambda^4} \cos \pi n x + \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{B_n}{\pi^4 n^4 - \lambda^4} \sin \pi n x +$$

$$+ \sum_{j=0} \varepsilon^{j+1} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\pi n A_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\lambda^2 (\pi^4 n^4 - \lambda^4)} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\operatorname{th} \frac{\lambda}{2} + \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \right) \right]^j \times \right.$$

$$\times \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda / 2} - \frac{\cos \lambda x}{\cos \lambda / 2} \right) - \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{\pi n B_n (-1)^{\frac{n}{2}}}{2\lambda^2 (\pi^4 n^4 - \lambda^4)} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) \right]^j \times$$

$$\left. \times \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda / 2} - \frac{\sin \lambda x}{\sin \lambda / 2} \right) \right\}. \quad (4.6)$$

Изменив порядок суммирования по n и j в выражении (4.6), имеем конечную сумму ряда по ε :

$$W = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{A_n}{\pi^4 n^4 - \lambda^4} \cos \pi n x + \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{B_n}{\pi^4 n^4 - \lambda^4} \sin \pi n x +$$

$$+ \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\pi n A_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\lambda^2 (\pi^4 n^4 - \lambda^4)} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) \right]^j} \varepsilon$$

$$\times \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda / 2} - \frac{\cos \lambda x}{\cos \lambda / 2} \right) - \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{\pi n B_n (-1)^{\frac{n}{2}}}{2\lambda^2 (\pi^4 n^4 - \lambda^4)} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) \right] \varepsilon} \times \left. \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda / 2} - \frac{\sin \lambda x}{\sin \lambda / 2} \right) \right\}.$$

Такой же результат получается, если в (4.6) удержать только три первых члена и перестроить их в АП.

Оценим, как отличается решение, полученное при помощи АП, от результатов, найденных при помощи РТВ. Рассмотрим частный случай:

$$P(x) = q \cos \pi m x, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Тогда в нулевом приближении получаем:

$$W_0 = \frac{q}{\pi^4 m^4 - \lambda^4} \cos \pi m x. \quad (4.7)$$

В следующем приближении находим:

$$W_1 = \frac{xmq(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2\lambda^2 (\pi^4 m^4 - \lambda^4)} \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda / 2} - \frac{\cos \lambda x}{\cos \lambda / 2} \right), \quad (4.8)$$

$$W_2 = \frac{\pi m q (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2\lambda^2 (\pi^4 m^4 - \lambda^4)} \left(1 - \frac{1}{2\lambda} \left(\operatorname{th} \frac{\lambda}{2} + \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \right) \right) \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda / 2} - \frac{\cos \lambda x}{\cos \lambda / 2} \right). \quad (4.9)$$

Вычислим прогиб балки, используя РТВ (рис. 4.1). В расчете принята $k_m = \lambda^4 / (\pi m)^4 = 0.9$. Видно, что РТВ при $\varepsilon = 1$ дает значительную ошибку в определении прогиба балки. На рис. 4.2 приведены графики погрешностей в определении прогиба для различных значений параметра k_m .

Аналогичные результаты получаются, если вычислить изгибающий момент в каждом приближении и, используя точное решение, сравнить полученные результаты (рис. 4.3, $k_m = 0.9$).

На рис. 4.4 показано, как изменяется погрешность в определении изгибающего момента, построенного на основе РТВ при $\varepsilon = 1$, в различных сечениях балки для некоторых значений параметра k_m .

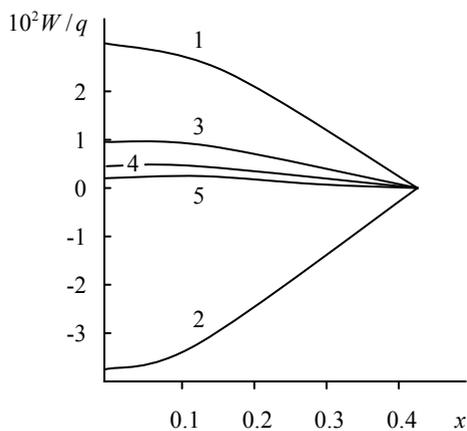


Рис. 4.1. Вычисление прогиба балки при помощи РТВ и АП.
 1 – W_0 (4.12); 2 – W_1 (4.13); 3 – W_2 (4.14); 4 – $W_0 + W_1 + W_2$;
 5 – точное решение и АП.

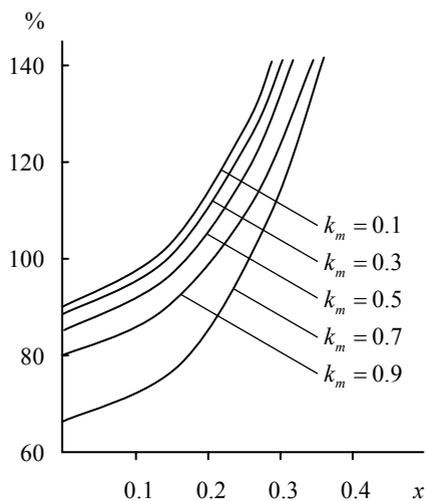


Рис. 4.2. Погрешность определения прогиба
 в зависимости от параметра $k_m = \lambda^4 / (\pi m)^4$.

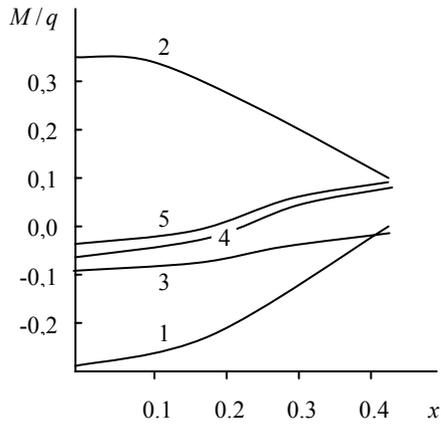


Рис. 4.3. Вычисление изгибающего момента при помощи РТВ и АП.
 1 – M_0 ; 2 – M_1 ; 3 – M_2 ; 4 – $M_0 + M_1 + M_2$; 5 – точное решение и АП.

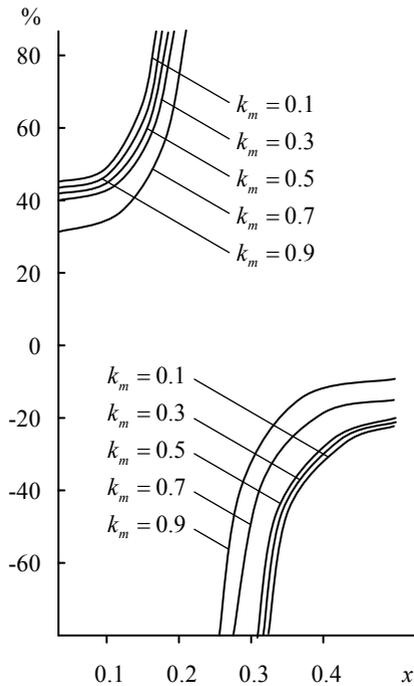


Рис. 4.4. Погрешность определения изгибающего момента при помощи РТВ.

Построенное решение имеет недостаток – появление секулярных членов при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой шарнирно опертой балки. Этого можно избежать, разложив нагрузку в ряд по формам собственных колебаний защемленной балки (1.23). Непосредственная проверка показывает, что, если в выражении (1.23) положить $c = \sqrt{2}$, то

$$\int_{-0.5}^{0.5} W_i W_j dx = \int_{-0.5}^{0.5} W_{0i} W_{0j} dx + \varepsilon \int_{-0.5}^{0.5} (W_{0i} W_{1j} + W_{1i} W_{0j}) dx + \varepsilon^2 \int_{-0.5}^{0.5} (W_{0i} W_{2j} + W_{1i} W_{1j} + W_{2i} W_{2j}) dx = \delta_{ij}. \quad (4.10)$$

Применим к расчету вынужденных колебаний метод разложения по собственным формам. Прогиб балки будем искать в виде

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n. \quad (4.11)$$

Подставляя выражение (4.11) в дифференциальное уравнение (4.3), умножая на собственную форму W_k и интегрируя по x от -0.5 до 0.5 , имеем:

$$\int_{-0.5}^{0.5} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (W_n^{IV} - \lambda^4 W_n) W_k dx = \int_{-0.5}^{0.5} P(x) W_k dx. \quad (4.12)$$

Поскольку любая собственная форма удовлетворяет уравнению

$$W_n^{IV} - \lambda_n^4 W_n = 0,$$

где λ_n^4 – собственное число задачи (1.6)–(1.9), то выражение (4.12) примет следующий вид:

$$\int_{-0.5}^{0.5} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda_n^4 - \lambda^4) W_n W_k dx = \int_{-0.5}^{0.5} P(x) W_k dx.$$

С учетом соотношения (4.10) получаем:

$$A_k = \frac{1}{\lambda_n^4 - \lambda^4} \int_{-0.5}^{0.5} f(x) (W_{0k} + W_{1k}\varepsilon + W_{2k}\varepsilon^2 + \dots) dx .$$

Таким образом, коэффициент A_k определяется в виде отрезка РТВ

$$\begin{aligned} A_k &= A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \dots = \\ &= \frac{1}{\lambda_n^4 - \lambda^4} \left[\int_{-0.5}^{0.5} f(x) W_{0k} dx + \varepsilon \int_{-0.5}^{0.5} f(x) W_{1k} dx + \varepsilon^2 \int_{-0.5}^{0.5} f(x) W_{2k} dx + \dots \right]. \end{aligned}$$

Далее коэффициенты A_k перестраиваются в дробно-рациональную функцию

$$A_{k[1/1]}(\varepsilon) = \frac{a_0 + a_1\varepsilon}{1 + b_1\varepsilon},$$

где $a_0 = A_{0k}$; $a_1 = A_{1k} + b_1 A_{0k}$; $b_1 = A_{2k} / A_{1k}$.

Теперь прогиб балки можно определить, используя выражение (4.11), причем собственные формы W_n записываются в виде АП.

4.2. Вынужденные колебания балки со свободными краями

Рассмотрим расчет динамического НДС балки со свободными торцами ($-0.5l \leq x \leq 0.5l$), находящейся под действием периодической самоуравновешенной нагрузки $q(\bar{x}, t) = \bar{q} \cos \frac{\pi m}{l} \bar{x} \sin(\omega t + \alpha)$, $m = 2, 4, 6, \dots$

(рис. 4.5). Дифференциальное уравнение движения балки после введения обезразмеривания (1.2) и разделения временных и пространственных переменных (4.2) примет вид:

$$W^{IV} - \lambda^4 W = q \cos \pi m x, \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (4.13)$$

Для замыкания краевой задачи к дифференциальному уравнению (4.13) присоединим граничные условия (1.35).

Можно найти точное решение краевой задачи (4.13), (1.35) в виде:

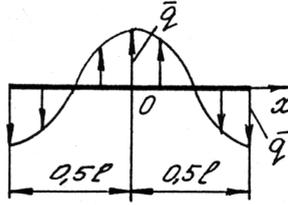


Рис. 4.5. Схема балки, находящейся под действием самоуравновешенной нагрузки.

$$W = \frac{q}{\pi^4 n^4 - \lambda^4} \cos \pi m x + C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \cos \lambda x .$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.35), определим произвольные постоянные C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{q \pi^2 m^2 (-1)^{\frac{m}{2}}}{\lambda (\pi^4 n^4 - \lambda^4)} \cdot \frac{\varepsilon}{[2(1-\varepsilon) + \varepsilon \lambda (\operatorname{cth} \lambda / 2 + \operatorname{ctg} \lambda / 2)]} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda / 2} ,$$

$$C_2 = \frac{q \pi^2 m^2 (-1)^{\frac{m}{2}}}{\lambda (\pi^4 n^4 - \lambda^4)} \cdot \frac{\varepsilon}{[2(1-\varepsilon) + \varepsilon \lambda (\operatorname{cth} \lambda / 2 + \operatorname{ctg} \lambda / 2)]} \cdot \frac{1}{\sin \lambda / 2} .$$

Окончательно точное решение задачи таково:

$$W = \frac{q}{\pi^4 m^4 - \lambda^4} \left[\cos \pi m x + \frac{\pi^2 m^2 (-1)^{\frac{m}{2}} \varepsilon}{\lambda [2(1-\varepsilon) + \varepsilon \lambda (\operatorname{cth} \lambda / 2 + \operatorname{ctg} \lambda / 2)]} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda / 2} - \frac{\cos \lambda x}{\cos \lambda / 2} \right) \right] . \quad (4.14)$$

Представив прогиб W в виде РТВ (1.10), подставляя его в дифференциальное уравнение (4.13) и граничные условия (1.35) и расщепляя по степеням ε , получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$W_0^{IV} - \lambda^4 W_0 = q \cos \pi m x, \quad m = 2, 4, 6, \dots; \\ W_0^{III} = 0, \quad W_0^I = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5;$$

$$W_j^{IV} - \lambda^4 W_j = 0;$$

$$W_j^{III} = 0, \quad W_j^I = \mp \sum_{i=0}^{j-1} W_i^{II} \quad \text{при } x = \pm 0.5, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Рассматривая последовательно приближения, можно установить вид общего члена РТВ:

$$W_0 = \frac{q}{\pi^4 m^4 - \lambda^4} \cos \pi m x, \quad m = 2, 4, 6, \dots; \quad (4.15)$$

$$W_1 = \frac{q\pi^2 m^2 (-1)^{\frac{m}{2}}}{2\lambda(\pi^4 m^4 - \lambda^4)} \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda / 2} - \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda / 2} \right), \quad (4.16)$$

$$W_2 = \frac{q\pi^2 m^2 (-1)^{\frac{m}{2}}}{2\lambda(\pi^4 m^4 - \lambda^4)} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda / 2} - \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda / 2} \right), \quad (4.17)$$

$$W_j = \frac{q\pi^2 m^2 (-1)^{\frac{m}{2}}}{2\lambda(\pi^4 m^4 - \lambda^4)} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) \right]^{j-1} \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda / 2} - \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda / 2} \right). \quad (4.18)$$

Суммируя полученные приближения, запишем решение в следующем виде:

$$W = \frac{q}{\pi^4 m^4 - \lambda^4} \cos \pi m x + \frac{q\pi^2 m^2 (-1)^{\frac{m}{2}}}{2\lambda(\pi^4 m^4 - \lambda^4)} \times \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) \right]^j \right\} \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda / 2} - \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda / 2} \right). \quad (4.19)$$

Поскольку входящий в выражение (4.19) ряд есть геометрическая прогрессия, его сумма такова:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) \right]^j = \frac{\varepsilon}{1 - \left[1 - \frac{\lambda}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \right) \right] \varepsilon}. \quad (4.20)$$

С учетом выражения (4.20) решение (4.19) совпадает с точным (4.14).

Точное решение можно также получить, имея три первых члена ряда возмущений и применяя к отрезку РТВ АП.

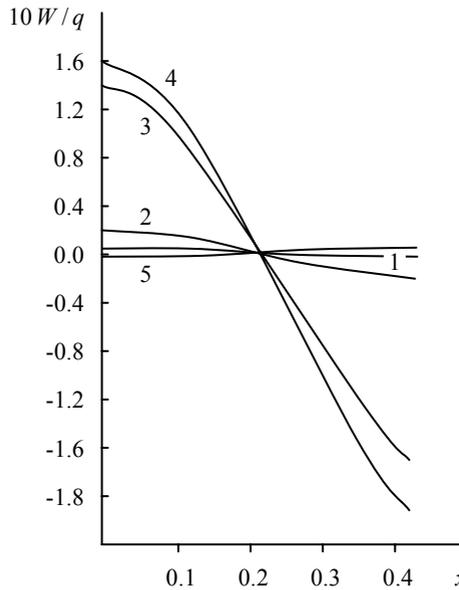


Рис. 4.6. Сравнение эффективности различных приближений.
 1 – W_0 (4.15); 2 – W_1 (4.16); 3 – W_2 (4.17); 4 – $W_0 + W_1 + W_2$;
 5 – точное решение (4.14) и АП.

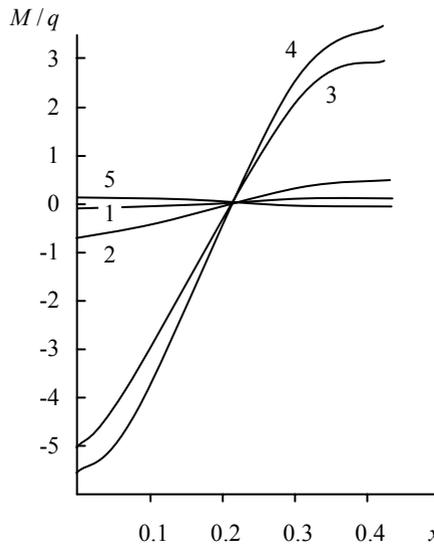


Рис. 4.7. Сравнение эффективности РТВ и АП. 1 – M_0 ; 2 – M_1 ; 3 – M_2 ;
 4 – $M_0 + M_1 + M_2$; 5 – точное решение и АП.

Сравним, чем отличается решение, построенное при помощи РТВ, от точного. Для этого вычислим прогиб при $n = 2$, $r_m = \lambda^4 / (\pi m)^4$ (рис. 4.6).

На рис. 4.7 приведены результаты расчета изгибающих моментов при помощи РТВ. Видно, что РТВ не может быть использован для определения прогиба и изгибающего момента. Применение АП существенно улучшает численные результаты.

4.3. Вынужденные колебания заземленной пластины

Рассмотрим вынужденные колебания прямоугольной пластины ($-0.5a \leq \bar{x} \leq 0.5a$; $-0.5b \leq \bar{y} \leq 0.5b$), заземленной по контуру и находящейся под действием нормальной периодической нагрузки

$$q(\bar{x}, \bar{y}, t) = \bar{q}_0 \cos \frac{\pi m \bar{x}}{a} \cos \frac{\pi n \bar{y}}{b} \sin(\omega t + \alpha), \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Исходное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$D\nabla^4 \bar{W} + \rho \bar{W}_{tt} = \bar{q}_0 \cos \frac{\pi m \bar{x}}{a} \cos \frac{\pi n \bar{y}}{b} \sin(\omega t + \alpha). \quad (4.21)$$

Решение уравнения (4.13) будем искать в виде:

$$\bar{W} = W(x; y) \sin(\omega t + \alpha), \quad (4.22)$$

где $x = \bar{x}/b$, $y = \bar{y}/b$. Подставляя выражение (4.22) в уравнение (4.21), окончательно получим:

$$\nabla^4 W - \lambda^4 W = q \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots, \quad (4.23)$$

где $\lambda^4 = \rho \omega^2 b^2 / D$; $q = \bar{q}_0 b^3 / D$. Для замыкания краевой задачи присоединим к дифференциальному уравнению (4.22) граничные условия (1.60), (1.61).

Представив прогиб пластины в виде ряда по степеням ϵ , подставляя его в уравнение (4.23) и граничные условия (1.60), (1.61) и расщепляя по степеням ϵ , получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\nabla^4 W_0 - \lambda^4 W_0 = q \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots;$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k;$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5;$$

$$\nabla^4 W_j - \lambda^4 W_j = 0;$$

$$W_j = 0, \quad W_{jxx} = \mp k \sum_{i=0}^{j-1} W_{ix} \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k;$$

$$W_j = 0, \quad W_{jyy} = \mp \sum_{i=0}^{j-1} W_{iy} \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5.$$

В нулевом приближении имеем

$$W_0 = \frac{q}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y, \quad \alpha = n^2 + \frac{m^2}{k^2}. \quad (4.24)$$

В последующих приближениях получаем задачи, описываемые однородными уравнениями и неоднородными граничными условиями. Их решения в первом и втором приближениях имеют вид:

$$W_1 = \frac{\pi q}{2\lambda^2 (\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4)} \left\{ m(-1)^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{\operatorname{ch} \beta_{1n} x}{\operatorname{ch} \beta_{1n} / 2} - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_{2n} x \\ \operatorname{ch} \beta_{3n} x \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_{2n} k / 2 \\ \operatorname{ch} \beta_{3n} k / 2 \end{array} \right\}} \right] \cos \pi n y + \quad (4.25)$$

$$+ n(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\operatorname{ch} \gamma_{1m} y}{\operatorname{ch} \gamma_{1m} / 2} - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_{2m} y \\ \operatorname{ch} \gamma_{3m} y \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_{2m} / 2 \\ \operatorname{ch} \gamma_{3m} / 2 \end{array} \right\}} \right] \cos \frac{\pi m}{k} x; \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda > \pi n; \quad \lambda > \frac{\pi m}{k} \\ \lambda < \pi n; \quad \lambda < \frac{\pi m}{k} \end{array} \right\};$$

$$W_2 = \frac{\pi q}{2\lambda^2 (\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4)} \left[m(-1)^{\frac{m-1}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left[\beta_{1n} \operatorname{th} \beta_{1n} / 2 + \left\{ \begin{array}{l} \beta_{2n} \operatorname{tg} \beta_{2n} k / 2 \\ -\beta_{2n} \operatorname{th} \beta_{3n} k / 2 \end{array} \right\} \right] \right\} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{\operatorname{ch} \beta_{1n} x}{\operatorname{ch} \beta_{1n} k / 2} - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_{2n} x \\ \operatorname{ch} \beta_{3n} x \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_{2n} k / 2 \\ \operatorname{ch} \beta_{3n} k / 2 \end{array} \right\}} \right] \cos \pi n y + n(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2\lambda^2} [\gamma_{1m} \operatorname{th} \gamma_{1m} k / 2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{2m} \operatorname{tg} \gamma_{2m} / 2 \\ -\gamma_{3m} \operatorname{th} \gamma_{3m} / 2 \end{array} \right\} \left[\frac{\operatorname{ch} \gamma_{1m} y}{\operatorname{ch} \gamma_{1m} / 2} - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_{2m} y \\ \operatorname{ch} \gamma_{3m} y \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_{2m} / 2 \\ \operatorname{ch} \gamma_{3m} / 2 \end{array} \right\}} \right] \cos \frac{\pi m}{k} x - \frac{2\pi^3 qmn}{\lambda^2 (\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4)} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \times \\
& \times (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{i=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{i-1}{2}} i \left[\frac{1}{\pi^4 \left(\frac{m^2}{k^2} + i^2 \right)^2} \cdot \left\{ \frac{\operatorname{ch} \beta_{1i} x}{\operatorname{ch} \beta_{1i} k / 2} - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_{2i} x \\ \operatorname{ch} \beta_{3i} x \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_{2i} k / 2 \\ \operatorname{ch} \beta_{3i} k / 2 \end{array} \right\}} \right\} \cos \pi i y - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\pi^4 \left(\frac{i^2}{k^2} + n^2 \right)^2 - \lambda^4} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \gamma_{1i} y}{\operatorname{ch} \gamma_{1i} / 2} - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_{2i} y \\ \operatorname{ch} \gamma_{3i} y \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_{2i} / 2 \\ \operatorname{ch} \gamma_{3i} / 2 \end{array} \right\}} \right\} \cos \frac{\pi i}{k} x \right]; \\
& \left\{ \begin{array}{l} \lambda > \pi i(n); \lambda > \frac{\pi i(m)}{k} \\ \lambda < \pi i(n); \lambda < \frac{\pi i(m)}{k} \end{array} \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\beta_{1i} &= \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 i^2}; \quad \beta_{2i} = \sqrt{\lambda^2 - \pi^2 i^2}; \quad \beta_{3i} = \sqrt{\pi^2 i^2 - \lambda^2}; \\
\gamma_{1i} &= \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 i^2 / k^2}; \quad \gamma_{2i} = \sqrt{\lambda^2 - \pi^2 i^2 / k^2}; \quad \gamma_{3i} = \sqrt{\pi^2 i^2 / k^2 - \lambda^2}.
\end{aligned}$$

Имея три коэффициента ряда возмущений W , строим АП. На рис. 4.8 представлены графики изменения прогибов при $y = 0$, $m = n = 1$, $k_m = \lambda^4 / (\pi_4 \alpha)$. На рис. 4.9 приведены результаты вычисления изгибающего момента.

4.4. Вынужденные колебания пластины со свободными краями

Рассмотрим вынужденные колебания прямоугольной пластины $(-a/2 \leq \bar{x} \leq a/2; -b/2 \leq \bar{y} \leq b/2)$, находящейся под действием самоуравновешенной нормальной периодической нагрузки

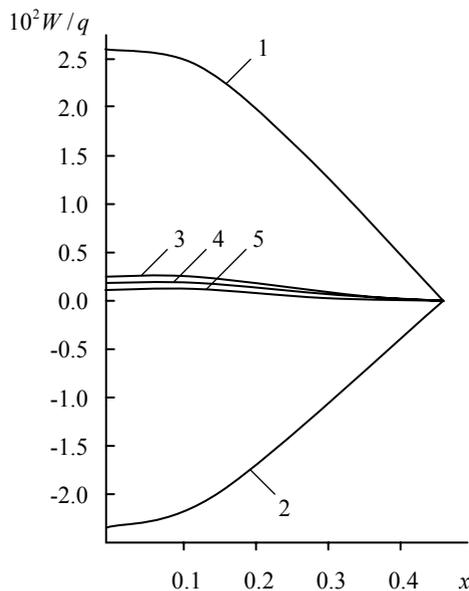


Рис. 4.8. Результаты расчета прогибов при помощи РТВ и АП.
 1 – W_0 (4.24); 2 – W_1 (4.25); 3 – W_2 (4.25); 4 – $W_0 + W_1 + W_2$; 5 – АП.

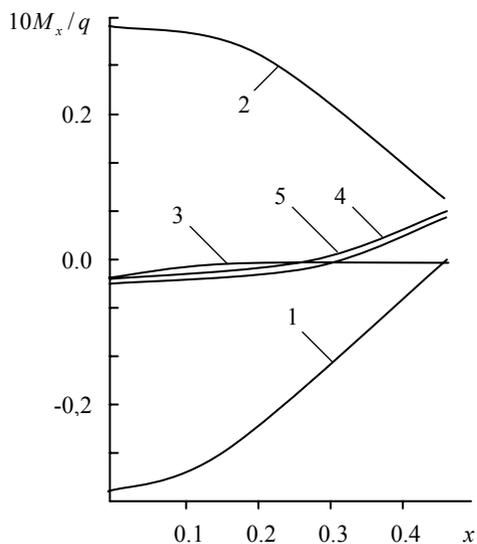


Рис. 4.9. Расчет изгибающего момента при помощи РТВ и АП.
 1 – M_0 ; 2 – M_1 ; 3 – M_2 ; 4 – $M_0 + M_1 + M_2$; 5 – АП.

$$\bar{q}(\bar{x}, \bar{y}, t) = \bar{q} \cos \frac{\pi m}{a} \bar{x} \cdot \cos \frac{\pi n}{b} \bar{y} \sin(\omega t + \alpha); \quad m, n = 2, 4, 6, \dots$$

После обезразмеривания и разделения пространственных и временных переменных исходное дифференциальное уравнение примет вид:

$$\nabla^4 W - \lambda^4 W = q \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y; \quad m, n = 2, 4, 6, \dots \quad (4.26)$$

К дифференциальному уравнению (4.26) присоединим граничные условия (3.42), (3.43). Далее для решения краевой задачи (4.26), (3.42), (3.43) применим МВ. Прогиб пластины представим в виде РТВ (1.10). После подстановки его в дифференциальное уравнение (4.35) и граничные условия (3.42), (3.43) и расщепления по степеням ε получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\nabla^4 W_0 - \lambda^4 W_0 = q \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y, \quad m, n = 2, 4, 6, \dots;$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0xxx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k;$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0yyy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5;$$

$$\nabla^4 W_j - \lambda^4 W_j = 0;$$

$$W_{jxxx} + (2 - \nu)W_{jyyx} = 0, \quad W_{jx} = \mp k \sum_{i=0}^{j-1} (W_{ixx} + \nu W_{iyy}) \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k;$$

$$W_{jyyy} + (2 - \nu)W_{jxxy} = 0, \quad W_{jy} = \mp \sum_{i=0}^{j-1} (W_{iyy} + \nu W_{ixx}) \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5.$$

В нулевом приближении имеем:

$$W_0 = \frac{q}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y.$$

Последовательно рассматривая краевые задачи последующих приближений, находим коэффициенты РТВ:

$$W_1 = \frac{q\pi^2}{2\lambda^2(\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4)} \left\{ \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{n}{2}} \left[\left(\lambda^2 + (1 - \nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right) \frac{1}{\gamma_{1m}} \cdot \frac{\text{ch } \gamma_{1m} y}{\text{sh } \gamma_{1m} / 2} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right) \left\{ \frac{1}{\gamma_{2m}} \cdot \frac{\cos \gamma_{2m} y}{\sin \gamma_{2m} / 2} \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{\gamma_{3m}} \cdot \frac{\text{ch } \gamma_{3m} y}{\text{sh } \gamma_{3m} / 2} \right\} \cos \frac{\pi m}{k} x + \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) (-1)^{\frac{m}{2}} \times \\
& \quad \times \left[\left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 n^2 \right) \frac{1}{\beta_{1n}} \cdot \frac{\text{ch } \beta_{1n} x}{\text{sh } \beta_{1n} k / 2} + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 n^2 \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left\{ \frac{1}{\beta_{2n}} \cdot \frac{\cos \beta_{2n} x}{\sin \beta_{2n} k / 2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{\beta_{3n}} \cdot \frac{\text{ch } \beta_{3n} x}{\text{sh } \beta_{3n} k / 2} \right\} \cos \pi n y \right]; \\
W_2 = W_1 - \frac{q\pi^2}{2\lambda^2(\pi^4\alpha^2 - \lambda^4)} & \left\{ k(-1)^{\frac{n}{2}} \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) \left[\frac{1}{\gamma_{1m}} \left[\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right]^2 \text{cth } \gamma_{1m} / 2 + \right. \right. \\
& + \left[\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right]^2 \left\{ \frac{1}{\gamma_{2m}} \text{ctg } \gamma_{2m} / 2 \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma_{3m}} \text{cth } \gamma_{3m} / 2 \right\} \left[\left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right) \frac{1}{\gamma_{1m}} \cdot \frac{\text{ch } \gamma_{1m} y}{\text{sh } \gamma_{1m} / 2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right) \left\{ \frac{1}{\gamma_{2m}} \cdot \frac{\cos \gamma_{2m} y}{\sin \gamma_{2m} / 2} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{\gamma_{3m}} \cdot \frac{\text{ch } \gamma_{3m} y}{\text{sh } \gamma_{3m} / 2} \right\} \cos \frac{\pi m}{k} x + (-1)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left[\left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 n^2 \right) \frac{1}{\beta_{1n}} \cdot \text{cth } \beta_{1n} k / 2 + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 n^2 \right) \left\{ \frac{1}{\beta_{2n}} \cdot \frac{\cos \beta_{2n} x}{\sin \beta_{2n} k / 2} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{\beta_{3n}} \cdot \frac{\text{ch } \beta_{3n} x}{\text{sh } \beta_{3n} k / 2} \right\} \right] \times \\
& \quad \times \cos \pi n y \Big\} + \frac{2\pi q (-1)^{\frac{m}{2}} (-1)^{\frac{n}{2}}}{\lambda^4 (\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4)} \times \sum_{i=2,4,6,\dots} (-1)^{\frac{i}{2}} \left\{ k \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \frac{\left[\left(\lambda^2 + (1-\nu)n^2 \frac{m^2}{k^2} \right) \left((1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} + \nu \lambda^2 \right) \right]}{\lambda^2 + \pi^2 \left(\frac{m^2}{k^2} + i^2 \right)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right) \left((1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} + \nu\lambda^2 \right)}{\lambda^2 - \pi^2 \left(i^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)} \right] \times \\
& \times \left[\left(\lambda^2 (1-\nu)\pi^2 i^2 \right) \frac{1}{\beta_{1i}} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_{1i} x}{\operatorname{sh} \beta_{1i} k/2} + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 i^2 \right) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\beta_{2i}} \cdot \frac{\cos \beta_{2i} x}{\sin \beta_{2i} k/2} \\ \frac{1}{\beta_{3i}} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_{3i} x}{\operatorname{sh} \beta_{3i} k/2} \end{array} \right\} \cos \pi i y + \right. \\
& \left. + \frac{1}{k} \left(\frac{m^2}{k^2} + \nu n^2 \right) \left[\frac{\left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 n^2 \right) \left((1-\nu)\pi^2 n^2 + \nu\lambda^2 \right)}{\lambda^2 + \pi^2 \left(n^2 + \frac{i^2}{k^2} \right)} - \right. \\
& \left. - \frac{\left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 n^2 \right) \left((1-\nu)\pi^2 n^2 + \nu\lambda^2 \right)}{\lambda^2 - \pi^2 \left(n^2 + \frac{i^2}{k^2} \right)} \right] \cdot \left[\left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right) \frac{1}{\gamma_{1i}} \frac{\operatorname{ch} \gamma_{1i} y}{\operatorname{sh} \gamma_{1i} / 2} + \right. \\
& \left. + \left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\gamma_{2i}} \cdot \frac{\cos \gamma_{2i} y}{\sin \gamma_{2i} / 2} \\ \frac{1}{\gamma_{3i}} \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma_{3i} y}{\operatorname{sh} \gamma_{3i} / 2} \end{array} \right\} \cos \frac{\pi i}{k} x \right];
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\beta_{1i} &= \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 i^2}; & \beta_{2i} &= \sqrt{\lambda^2 - \pi^2 i^2}; & \beta_{3i} &= \sqrt{\pi^2 i^2 - \lambda^2}; \\
\gamma_{1i} &= \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 i^2 / k^2}; & \gamma_{2i} &= \sqrt{\lambda^2 - \pi^2 i^2 / k^2}; & \gamma_{3i} &= \sqrt{\pi^2 i^2 / 2 - \lambda^2}.
\end{aligned}$$

Зная три коэффициента РТВ, строим АП (3.26). На рис. 4.10, 4.11 представлены прогиб и изгибающие моменты в квадратной пластине, вычисленные при помощи АП при $y=0$, $k=1$; $\nu=0.3$; $\eta_m = \lambda^4 / \pi^4 \alpha^2 = 0.9$.

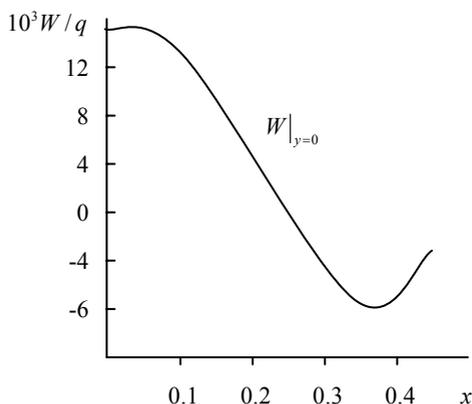


Рис.4.10. Прогиб квадратной пластины со свободными краями.

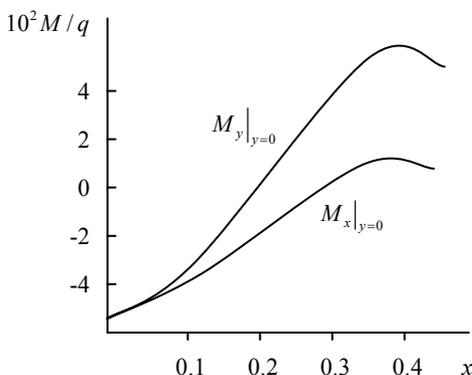


Рис. 4.11. Изгибающие моменты в квадратной пластине со свободными краями

4.5. Вынужденные колебания пластины со смешанными граничными условиями «зашемление – шарнир»

Рассмотрим прямоугольную пластину ($-0.5a \leq \bar{x} \leq 0.5a$; $-0.5b \leq \bar{y} \leq 0.5b$), шарнирно опертую по сторонам $x = \pm 0.5a$, а на сторонах $y = \pm 0.5b$ имеющую смешанные граничные условия «зашемление – шарнир», симметричные относительно оси y (рис. 1.8, а). Пластина находится под действием нормальной периодической нагрузки

$$q(\bar{x}, \bar{y}, t) = \bar{q}_0 \cos \frac{\pi m}{k} \bar{x} \cos \frac{\pi n}{b} \bar{y} \sin(\omega t + \alpha), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Граничные условия примем в виде (1.109)–(1.110).

Краевую задачу (4.23), (1.109), (1.110) приведем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, аналогично тому, как это было сделано в п. 3.5 для статического случая.

Краевой момент, возникающий на участке заделки, представим следующим разложением:

$$M_{y|y=\pm 0.5} = \sum_{i=1,3,5,\dots} A_i \cos \frac{\pi i}{k} x,$$

где A_i – неопределенные коэффициенты.

Решение будем отыскивать в следующем виде:

$$W = W_1 + W_2,$$

где $W_1 = \frac{q}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y$, W_1 – частное решение уравнения (4.23) при однородных граничных условиях

$$\begin{aligned} W_1 &= 0, \quad W_{1xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \\ W_1 &= 0, \quad W_{1yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5. \end{aligned}$$

Функция W_2 такова:

$$W_2 = \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{A_i}{2\lambda^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \beta_{1i} y}{\operatorname{ch} \beta_{1i/2}} - \frac{\begin{cases} \cos \beta_{2i} y \\ \operatorname{ch} \beta_{3i} y \end{cases}}{\begin{cases} \cos \beta_{2i} / 2 \\ \cos \beta_{3i} / 2 \end{cases}} \right] \cos \frac{\pi i}{k} x; \quad \begin{aligned} \lambda &> \frac{\pi i}{k}; \\ \lambda &< \frac{\pi i}{k}; \end{aligned}$$

где $\beta_{1i} = \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 i^2 / k^2}$, $\beta_{2i} = \sqrt{\lambda^2 - \pi^2 i^2 / k^2}$, $\beta_{3i} = \sqrt{\pi^2 i^2 / k^2 - \lambda^2}$. Она описывает решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \nabla^4 W_2 - \lambda^4 W_2 &= 0, \\ W_2 &= 0, \quad W_{2xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \end{aligned}$$

$$W_2 = 0, W_{2,y} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} A_i \cos \frac{\pi i}{k} x \quad \text{при } y = \pm 0.5.$$

Удовлетворение граничным условиям (1.110) приводит к следующему уравнению:

$$\sum_{i=1,3,5,\dots} A_i \cos \frac{\pi i}{k} x = \varepsilon \overline{H}(x) \left[\sum_{i=1,3,5,\dots} A_i \cos \frac{\pi i}{k} x + \frac{q\pi n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \cos \frac{\pi m}{k} x - \right. \quad (4.27)$$

$$\left. - \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{A_i}{2\lambda^2} \left(\beta_{1i} \operatorname{th} \beta_{1i} / 2 + \left\{ \begin{array}{l} \beta_{2i} \operatorname{tg} \beta_{2i} / 2 \\ -\beta_{3i} \operatorname{th} \beta_{3i} / 2 \end{array} \right\} \right) \cos \frac{\pi i}{k} x \right]; \quad i = 1, 3, 5, \dots$$

Раскладывая правые части соотношений (4.27) в ряд по $\cos \frac{\pi j}{k} x$, $j = 1, 3, 5, \dots$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$A_j = \varepsilon \sum_{i=1,3,5,\dots} \gamma_{ji} A_i \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\beta_{1i} \operatorname{th} \beta_{1i} / 2 + \left\{ \begin{array}{l} \beta_{2i} \operatorname{tg} \beta_{2i} / 2 \\ -\beta_{3i} \operatorname{th} \beta_{3i} / 2 \end{array} \right\} \right) \right] + \quad (4.28)$$

$$+ \varepsilon \gamma_{jm} \frac{q\pi n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4}; \quad j = 1, 3, 5, \dots$$

Здесь γ_{ji} определяются соотношениями (3.30) ($j \rightarrow i$, $i \rightarrow m$).

Наличие в бесконечной системе (4.28) параметра ε позволяет произвести ее упрощение, представив коэффициенты A_j в виде (3.19). После подстановки РТВ (3.19) в систему (4.28) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε , получаем формулы для определения неизвестных коэффициентов:

$$A_{j(0)} = 0; \quad (4.29)$$

$$A_{j(1)} = \gamma_{jm} \frac{q\pi n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4}; \quad (4.30)$$

$$A_{j(p)} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \gamma_{ji} A_{i(p-1)} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\beta_{1i} \operatorname{th} \beta_{1i} / 2 + \left\{ \begin{array}{l} \beta_{2i} \operatorname{tg} \beta_{2i} / 2 \\ -\beta_{3i} \operatorname{th} \beta_{3i} / 2 \end{array} \right\} \right) \right]. \quad (4.31)$$

АП для коэффициентов A_j имеет вид (3.22).

Рассмотрим поведение полученного решения в предельных случаях. Предельный переход $\mu = 0$ соответствует шарнирному опиранию сторон $y = \pm 0.5$. Второй предельный переход $\mu = 0.5$ – приводит к краевой задаче

$$\begin{aligned} \nabla^4 W - \lambda^4 W &= q \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y, \quad n, m = 1, 3, 5, \dots, \\ W = 0, \quad W_{xx} &= 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \\ W = 0, \quad W_y &= 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \end{aligned}$$

имеющей точное решение:

$$\begin{aligned} W &= \frac{q}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y + \frac{q \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \times \\ &\times \frac{1}{\beta_{1m} \operatorname{th} \beta_{1m} / 2 + \begin{Bmatrix} \beta_{2m} \operatorname{tg} \beta_{2m} / 2 \\ -\beta_{3m} \operatorname{th} \beta_{3m} / 2 \end{Bmatrix}} \cdot \left[\frac{\operatorname{ch} \beta_{1m} y}{\operatorname{ch} \beta_{1m} / 2} - \frac{\begin{Bmatrix} \cos \beta_{2m} y \\ \operatorname{ch} \beta_{3m} y \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} \cos \beta_{2m} / 2 \\ \cos \beta_{3m} / 2 \end{Bmatrix}} \right] \cos \frac{\pi m}{k} x. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Что же дает метод возмущений? При $\mu = 0.5$ имеем $\gamma_{ji} = \delta_{ij}$, а рекуррентные выражения для коэффициентов A_i (4.29)–(4.31) можно записать следующим образом:

$$A_j = A_{j(0)} + A_{j(1)} \varepsilon + A_{j(2)} \varepsilon^2 + A_{j(3)} \varepsilon^3 + \dots, \quad (4.33)$$

где

$$\begin{aligned} A_{j(0)} &= 0; \quad A_{j(1)} = \frac{q \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4}; \\ A_{j(2)} &= \frac{q \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\beta_{1i} \operatorname{th} \beta_{1i} / 2 + \begin{Bmatrix} \beta_{2i} \operatorname{tg} \beta_{2i} / 2 \\ -\beta_{3i} \operatorname{th} \beta_{3i} / 2 \end{Bmatrix} \right) \right]; \\ A_{j(3)} &= \frac{q \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\beta_{1i} \operatorname{th} \beta_{1i} / 2 + \begin{Bmatrix} \beta_{2i} \operatorname{tg} \beta_{2i} / 2 \\ -\beta_{3i} \operatorname{th} \beta_{3i} / 2 \end{Bmatrix} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Перестраивая отрезок ряда (4.33) в АП (3.22), ОК получаем:

$$A_{j[1/1]}(\varepsilon) = \frac{q\pi n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\beta_{1i} \operatorname{th} \beta_{1i} / 2 + \left\{ \begin{array}{l} \beta_{2i} \operatorname{tg} \beta_{2i} / 2 \\ -\beta_{3i} \operatorname{th} \beta_{3i} / 2 \end{array} \right\} \right) \right]} \varepsilon. \quad (4.34)$$

Если сравнить выражение (4.34) при $\varepsilon = 1$ с множителем, стоящим перед квадратными скобками в выражении (4.32), то видно, что АП дает точное значение. Таким образом, и во втором предельном переходе получаем точное решение задачи (4.23), (1.109), (1.110).

Способом, аналогичным описанному выше, решается задача о расчете динамического НДС пластины со смешанными граничными условиями при несимметричном расположении участков защемления (рис. 1.8, б). Периодическую нагрузку, симметричную относительно центра пластины, примем в виде:

$$q(\bar{x}, \bar{y}, t) = \bar{q}_0 \sin \frac{\pi m}{a} \bar{x} \cos \frac{\pi n}{b} \bar{y} \sin(\omega t + \alpha), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Дифференциальное уравнение (4.23) сохранит свой вид с заменой $\cos \frac{\pi m}{k} x$ на $\sin \frac{\pi m}{k} x$. В остальных выражениях также следует заменить $\cos \frac{\pi m}{k} x$ на $\sin \frac{\pi m}{k} x$, $\cos \frac{\pi i}{k} x$ на $\sin \frac{\pi i}{k} x$, а суммирование производить по $i, m = 1, 2, 3, \dots$. Коэффициент γ_{ji} приобретает вид (1.129) ($i \rightarrow j, m \rightarrow i$). В бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (4.28) суммирование следует производить по $i = 1, 2, 3, \dots$

Расчет компонентов динамического НДС производился для квадратной пластины с учетом первых десяти коэффициентов A_j , полученных при помощи АП (3.22) при $\varepsilon = 1$. Определялись прогиб и изгибающие моменты в центре для различных значений параметра μ . Результаты приведены на рис. 4.12, 4.13. Здесь, как и ранее, сплошной линией обозначены результаты, полученные для пластины с симметричным расположением участков защемления, штриховой – несимметричным. При расчетах принято $k_m = \pi^4 \alpha^2 / \lambda^4 = 0.9$.

Анализируя изображенные на графиках зависимости, можно выделить три характерные зоны значений параметра μ : $[0, 0.1]$, $(0.1, 0.45]$, $(0.45, 0.5]$ для симметричного случая и $[0, 0.5]$, $(0.5, 0.7]$, $(0.7, 1]$ – для несимметричного. В первой и третьей зонах рост прогиба и изгибающих

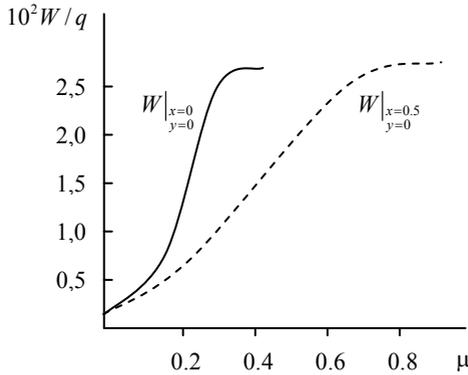


Рис. 4.12. Зависимость нормального прогиба от длины участка шарнирного опирания.

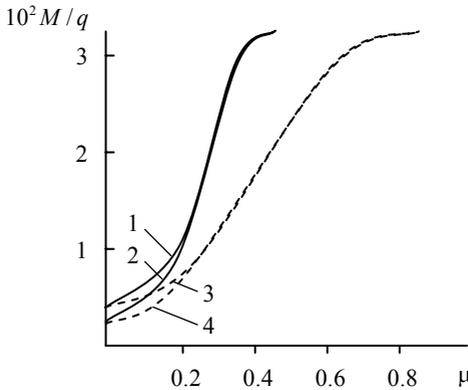


Рис. 4.13. Зависимость изгибающих моментов от длины участка шарнирного опирания. 1 – $M_x|_{x=0, y=0}$, 2 – $M_y|_{x=0, y=0}$, 3 – $M_x|_{x=0.5, y=0}$; 4 – $M_y|_{x=0.5, y=0}$.

моментов при увеличении параметра μ незначителен. Во второй зоне наблюдается существенное изменение прогиба и изгибающих моментов даже при незначительном изменении параметра μ .

Таким образом, если геометрические размеры смешанных граничных условий могут быть отнесены к первой зоне, то такую пластину с незначительной погрешностью можно считать шарнирно опертой по контуру. Если геометрические размеры смешанных граничных условий позволяют отнести их к третьей зоне, то такую пластину можно считать шарнирно опертой по двум сторонам, а на двух других сторонах имеющей защемление. В промежуточных случаях необходим учет смешанных граничных условий.

4.6. Вынужденные колебания пластины со смешанными граничными условиями «свободный край – подвижная заделка»

Рассмотрим вынужденные колебания прямоугольной пластины $(-0.5a \leq \bar{x} \leq 0.5a; -0.5b \leq \bar{y} \leq 0.5b)$, шарнирно опертой по сторонам $\bar{x} = \pm 0.5a$, а на сторонах $y = \pm 0.5b$ имеющей смешанные граничные условия типа «свободный край – подвижная заделка», симметричные относительно оси y (рис. 1.17, а). Пластина находится под действием нагрузки

$$q(\bar{x}, \bar{y}, t) = \bar{q}_0 \cos \frac{\pi m}{a} x \cdot \sin \frac{\pi n}{b} y \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad m, n = 1, 3, 5, \dots, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

После обезразмеривания (1.53) и исключения функции времени исходное дифференциальное уравнение приобретает следующий вид:

$$\nabla^4 W - \lambda^4 W = q \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y, \quad m = 1, 3, 5, \dots, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (4.35)$$

Для замыкания краевой задачи присоединим к (4.35) граничные условия (1.154), (1.155).

Прогиб пластины представим в виде:

$$W = W_1 + W_2,$$

где W_1 – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (4.35),

$$W_1 = \frac{q}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y. \quad (4.36)$$

Функция W_2 такова:

$$W_2 = \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{A_i}{2\lambda^2} \left[\left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right) \frac{1}{\beta_{ii}} \cdot \frac{ch\beta_{ii}y}{sh\beta_{ii}/2} + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right) \times \right.$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\beta_{2i}} \cdot \frac{\cos \beta_{2i} y}{\sin \beta_{2i} / 2} \\ \frac{1}{\beta_{3i}} \cdot \frac{\operatorname{ch} \beta_{3i} y}{\operatorname{sh} \beta_{3i} / 2} \end{array} \right\} \cos \frac{\pi i}{k} x, \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda > \frac{\pi i}{k} \\ \lambda < \frac{\pi i}{k} \end{array} \right\}. \quad (4.37)$$

Она получается в результате решения следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \nabla^4 W - \lambda^4 W &= 0; \\ W &= 0, \quad W_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \\ W_{yyy} + (2-\nu)W_{xyy} &= 0, \quad W_y = \sum_{i=1,3,5,\dots} A_i \cos \frac{\pi i}{k} x \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5. \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты A_i определим, удовлетворив граничным условиям (1.165):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,3,5,\dots} A_i \cos \frac{\pi i}{k} x = \varepsilon \bar{H}(x) &\left\{ \sum_{i=1,3,5,\dots} A_i \cos \frac{\pi i}{k} x + \frac{q\pi^2 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right)}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi m}{k} x - \right. \\ &- \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{A_i}{2\lambda^2} \left[\frac{1}{\beta_{1i}} \left(\lambda^2 + (1-\nu) \pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right) \operatorname{cth} \beta_{1i} / 2 + \left(\lambda^2 - (1-\nu) \pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\beta_{2i}} \operatorname{ctg} \beta_{2i} / 2 \\ -\frac{1}{\beta_{3i} \operatorname{cth} \beta_{3i} / 2} \end{array} \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Разложив правую часть уравнения (4.38) в ряд по $\cos \frac{\pi j}{k} x$, $j = 1, 3, 5, \dots$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$A_j = \varepsilon \sum_{j=1,3,5,\dots} A_j \gamma_{ji} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left[\frac{1}{\beta_{1i}} \left(\lambda^2 + (1-\nu) \pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right) \operatorname{cth} \beta_{1i} / 2 + \right. \right. \quad (4.39)$$

$$+ \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right) \times \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\beta_{2i}} \operatorname{ctg} \beta_{2i} / 2 \\ -\frac{1}{\beta_{3i}} \operatorname{cth} \beta_{3i} / 2 \end{array} \right] + \varepsilon \gamma_{im} \frac{q\pi^2 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right)}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Здесь γ_{ji} имеет вид (1.130) ($m \rightarrow j$).

Представим коэффициенты A_j в виде РТВ (3.19), подставим их в систему (4.39) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε :

$$A_{j(0)} = 0; \quad (4.40)$$

$$A_{j(1)} = \gamma_{jm} \frac{q\pi^2 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right) (-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4}; \quad (4.41)$$

$$A_{j(p)} = \sum_{j=1,3,5,\dots} A_{i(p-1)} \gamma_{ji} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left[\frac{1}{\beta_{li}} \left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right)^2 \operatorname{cth} \beta_{li} / 2 + \right. \right. \quad (4.42)$$

$$\left. \left. + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{i^2}{k^2} \right)^2 \times \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\beta_{2i}} \operatorname{ctg} \beta_{2i} / 2 \\ -\frac{1}{\beta_{3i}} \operatorname{cth} \beta_{3i} / 2 \end{array} \right] \right] \right]; \quad j = 1, 3, 5, \dots$$

АП для коэффициентов A_j имеет вид (3.22).

Рассмотрим поведение полученного решения в предельных случаях. Первый случай соответствует подвижному защемлению сторон $y = \pm 0.5$, второй – $\mu = 0.5$ – полностью свободным сторонам $y = \pm 0.5$. Во втором случае можно найти точное решение:

$$W = \frac{q}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y + \quad (4.43)$$

$$+ \left[\frac{1}{\beta_{1m}} \left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \operatorname{cth} \frac{\beta_{1m}}{2} + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\beta_{2m}} \operatorname{ctg} \beta_{2m} / 2 \\ -\frac{1}{\beta_{3m}} \operatorname{cth} \beta_{3m} / 2 \end{array} \right] \right] \times$$

$$\times \left[\left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right) \frac{1}{\beta_{1m}} \cdot \frac{\text{ch} \beta_{1m} y}{\text{sh} \beta_{1m} / 2} + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right) \left\{ \frac{1}{\beta_{2m}} \cdot \frac{\cos \beta_{2m} y}{\sin \beta_{2m} / 2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\beta_{3m}} \cdot \frac{\text{ch} \beta_{3m} y}{\text{sh} \beta_{3m} / 2} \right\} \right].$$

Метод возмущений при $\mu = 0.5$ дает $\gamma_{ji} = \delta_{ij}$, и рекуррентные выражения для коэффициентов A_j (4.40)–(4.42) можно записать следующим образом:

$$A_j = A_{j(1)}\varepsilon + A_{j(2)}\varepsilon^2 + A_{j(3)}\varepsilon^3 + \dots, \quad (4.44)$$

где

$$A_{j(0)} = 0;$$

$$A_{j(1)} = \frac{q\pi^2 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right)}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} (-1)^{\frac{n}{2}};$$

$$A_{j(2)} = \frac{q\pi^2 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right)}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} (-1)^{\frac{n}{2}} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{1}{\beta_{1m}} \left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \text{cth} \beta_{1m} / 2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\beta_{2m}} \cdot \text{ctg} \beta_{2m} / 2 \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\beta_{3m}} \text{cth} \beta_{3m} / 2 \right\} \right];$$

$$A_{j(3)} = \frac{q\pi^2 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right)}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} (-1)^{\frac{n}{2}} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{1}{\beta_{1m}} \left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \text{cth} \beta_{1m} / 2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\beta_{2m}} \cdot \text{ctg} \beta_{2m} / 2 \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\beta_{3m}} \text{cth} \beta_{3m} / 2 \right\} \right]^2.$$

АП (3.22) для РТВ(4.44) имеет вид:

$$A_{j[1/1]}(\varepsilon) = \frac{q\pi^2 \left(n^2 + \nu \frac{m^2}{k^2} \right)}{\pi^4 \alpha^2 - \lambda^4} (-1)^{\frac{n}{2}} \times$$

$$\times \frac{\varepsilon}{1 - \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{1}{\beta_{1m}} \left(\lambda^2 + (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \operatorname{cth} \beta_{1m} + \right. \right.}$$

$$\left. \left. + \left(\lambda^2 - (1-\nu)\pi^2 \frac{m^2}{k^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\beta_{2m}} \operatorname{ctg} \beta_{2m} / 2 \right. \right\} \right]}{\varepsilon} \cdot \varepsilon$$

Если сравнить АП (3.22) с множителем, стоящим перед квадратными скобками в выражении (4.44), то видно, что при $\varepsilon = 1$ АП коэффициентов A_j (3.22) дает точное значение. Таким образом, и во втором предельном случае получаем точное решение задач (4.35), (1.154), (1.155).

Аналогично решается задача о расчете динамического НДС пластины при несимметричном расположении участков защемления (рис. 1.17, б). В этом случае нагрузка записывается так:

$$q(\bar{x}, \bar{y}, t) = \bar{q}_0 \sin \frac{\pi m}{a} \bar{x} \cos \frac{\pi n}{b} \bar{y} \sin(\omega t + \alpha), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (4.35) сохранится с заменой $\cos \frac{\pi m}{k} x$ на $\sin \frac{\pi m}{k} x$. В выражениях (4.36)–(4.38) следует заменить $\cos \frac{\pi m}{k} x$ на $\sin \frac{\pi m}{k} x$, $\cos \frac{\pi i}{k} x$ на $\sin \frac{\pi i}{k} x$, а суммирование производить по $m, i = 1, 2, 3, \dots$. Коэффициент γ_{ji} в этом случае приобретает вид (1.129) ($m \rightarrow j$). В бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (4.39) суммирование следует производить по $i = 1, 2, 3, \dots$.

Расчет компонентов динамического НДС производился для квадратной пластины с учетом первых десяти коэффициентов A_j , полученных при помощи АП (3.22) при $\varepsilon = 1$. Определялись прогиб и изгибающие моменты в центре пластины для различных значений параметра μ .

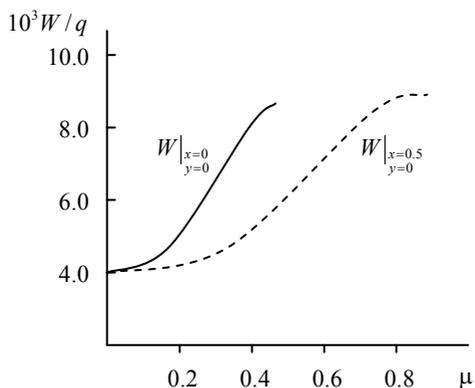


Рис. 4.14. Влияние длины шарнирно-опертых участков на нормальный прогиб.

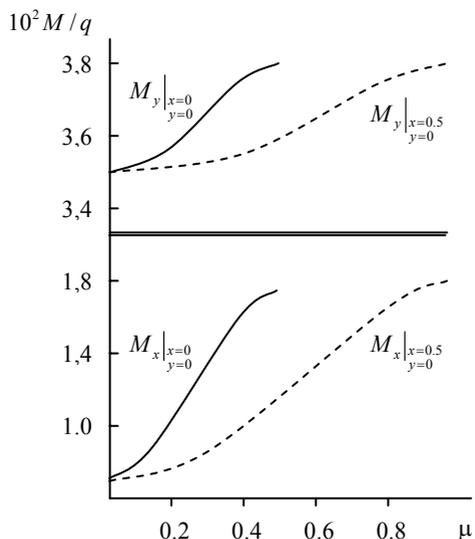


Рис. 4.15. Зависимость изгибающих моментов от длины шарнирно-опертых участков. 1 – $M_y/x=y=0$; 2 – $M_y/x=0,5, y=0$; 3 – $M_x/x=y=0$; 4 – $M_x/x=0,5, y=0$.

Результаты расчета представлены на рис. 4.14, 4.15. Сплошными линиями обозначены результаты, полученные для пластины с симметричным расположением участков защемления, штриховыми – несимметричным. В расчете принято $k_m = \pi^4 \alpha^2 / \lambda^4 = 0.9$.

Анализируя приведенные на графиках результаты, можно выделить три характерные зоны значений параметра μ : для симметричного случая – $[0,0.05]$, $[0.05,0.47]$, $[0.47,0.5]$, для несимметричного случая – $[0,0.47]$, $[0.47,0.9]$; $[0.9,1]$. Для первой и третьей зоны характерно небольшое изменение факторов динамического НДС с ростом μ . Во второй зоне незначительное изменение параметра μ приводит к значительным изменениям всех факторов НДС.

Таким образом, если соотношения геометрических размеров участков смешанных граничных условий могут быть отнесены к первой зоне, то такую пластину с незначительной погрешностью можно рассчитывать как шарнирно опертую по сторонам $x = \pm 0.5k$, а на сторонах $y = \pm 0.5$ имеющую подвижную заделку. Если соотношения геометрических размеров участков смешанных граничных условий могут быть отнесены к третьей зоне, то такую пластину можно рассчитывать как шарнирно опертую по сторонам $x = \pm 0.5k$, а на сторонах $y = \pm 0.5$ имеющую свободные края. В промежуточных случаях (вторая зона) необходимо учитывать смешанные граничные условия.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН

5.1. Устойчивость заземленного стержня

Рассмотрим модельную задачу определения критических сил заземленного по торцам стержня ($-0.5l \leq \bar{x} \leq 0.5l$). Исходное дифференциальное уравнение устойчивости имеет вид:

$$EIW_{xxxx} + NW_{xx} = 0. \quad (5.1)$$

где N – сжимающая сила. После обезразмеривания (1.2) дифференциальное уравнение (5.1) примет вид:

$$W^{IV} + \alpha^2 W'' = 0, \quad (5.2)$$

где

$$\alpha^2 = Nl^2 / EI. \quad (5.3)$$

Для замыкания краевой задачи к уравнению (5.2) присоединим преобразованные граничные условия (1.9).

Решение уравнения (5.2) таково:

$$W = C_1 \cos \alpha x + C_2.$$

Удовлетворение граничным условиям (1.9) приводит к трансцендентному уравнению относительно параметра α :

$$(1 - \varepsilon) \alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \varepsilon \sin \frac{\alpha}{2} = 0. \quad (5.4)$$

Представим параметр α в виде ряда по ε :

$$\alpha = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon^i. \quad (5.5)$$

После подстановки (5.5) в (5.4) и расщепления по степеням ε получаем рекуррентную последовательность уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cos \alpha_0 &= 0; \\ -2\alpha_0 \alpha_1 \sin \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0 &= 0; \\ -\alpha_0 (2\alpha_2 \sin \alpha_0 + \alpha_1^2 \cos \alpha_0) - 2\alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_0) \sin \alpha_0 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) \times \\ &\times \cos \alpha_0 + \alpha_1 \cos \alpha_0 = 0; \\ \frac{\alpha_0}{3} (-3\alpha_3 \sin \alpha_0 - 6\alpha_1 \alpha_2 \cos \alpha_0 + 4\alpha_1^3 \sin \alpha_0) - (2\alpha_2 \sin \alpha_0 - \alpha_1^2 \cos \alpha_0) \times \\ &\times (\alpha_1 - \alpha_0) - 2\alpha_1 \sin \alpha_0 (\alpha_2 - \alpha_1) + 2(\alpha_3 - \alpha_2) \cos \alpha_0 + \\ &+ \left(\alpha_2 \cos \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_1^2}{2} \sin \frac{\alpha_0}{2} \right) = 0; \\ \frac{\alpha_0}{12} (-6\alpha_4 \sin \alpha_0 - 4\alpha_1 \alpha_3 \cos \alpha_0 - 12\alpha_2^2 \cos \alpha_0 + 12\alpha_1^2 \alpha_2 \sin \alpha_0 + \alpha_1^4 \cos \alpha_0) + \\ &+ (-2\alpha_3 \sin \alpha_0 - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \alpha_0 + \alpha_1^3 \sin \alpha_0) (\alpha_1 - \alpha_0) - (2\alpha_2 \sin \alpha_0 + \alpha_1^2 \cos \alpha_0) \times \\ &\times (\alpha_1 - \alpha_0) - (2\alpha_2 \sin \alpha_0 - \alpha_1^2 \cos \alpha_0) (\alpha_2 - \alpha_1) - 2\alpha_1 \sin \alpha_0 (\alpha_3 - \alpha_2) + \\ &+ 2(\alpha_4 - \alpha_3) \cos \alpha_0 + \frac{1}{6} (6\alpha_3 \cos \alpha_0 - 6\alpha_1 \alpha_2 \sin \alpha_0 - \alpha_3 \cos \alpha_0) = 0. \end{aligned}$$

Последовательно решая эти задачи, получаем РТВ для собственного числа:

$$\alpha = 2 \left[\varphi + \frac{2}{\varphi} \varepsilon + \frac{2}{\varphi} \left(1 - \frac{2}{\varphi^2} \right) \varepsilon^2 + \frac{2}{\varphi} \left(1 - \frac{13}{\varphi^2} - \frac{8}{\varphi^4} \right) \varepsilon^3 + \frac{2}{\varphi} \left(1 - \frac{12}{\varphi^2} + \frac{110}{3\varphi^4} - \frac{40}{\varphi^6} \right) \varepsilon^4 \right],$$

где $\varphi = \pi n$, $n = 1, 3, 5, \dots$.

Применяя АП, имеем:

$$\alpha_{[1/1]}(\varepsilon) = \frac{\varphi + \left(\frac{4}{\alpha_0} - \varphi \right)}{1 - \left(1 - \frac{2}{\varphi^2} \right) \varepsilon}. \quad (5.6)$$

При $n = 1$, $\varepsilon = 1$, $\alpha^{[1/1]} = 2\pi$, что совпадает с точным значением, в то время как РТВ дает результат на 32% ниже точного значения ($\alpha = 1.3642\pi$).

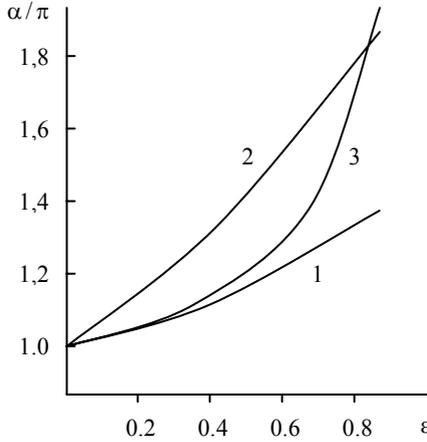


Рис.5.1. Сравнение эффективности РТВ и АП.

Рассмотрим АП более высокого порядка:

$$\alpha_{[2/2]}(\varepsilon) = \frac{\varphi + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2}{1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2}, \quad (5.7)$$

где

$$a_1 = 2(\alpha_1 + b_1\varphi); \quad a_2 = 2(\alpha_2 + b_1\alpha_1 + b_2\varphi);$$

$$b_1 = \frac{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3}{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3}; \quad b_2 = \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_4}{\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3}.$$

При $n = 1$, $\varepsilon = 1$ АП (5.7) дает точное решение, в то время как РТВ дает значение $\alpha = 1.8369\pi$ (погрешность – 8.15%).

На рис.5.1 приведена зависимость собственного числа α от параметра ε для РТВ, содержащего три и пять членов (кривые 1 и 2), и АП (5.6), (5.7) (кривая 3). АП дают практически одинаковые результаты для всех значений параметра $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Численное решение трансцендентного уравнения (5.4) почти полностью совпадает с результатами, полученными при помощи АП. Это подтверждает известные рекомендации: нет необходимости стремиться к построению АП высоких порядков, поскольку при их применении не происходит существенного уточнения результатов. Интересно, что увеличение количества членов РТВ не дает существенного улучшения результатов.

В заключение следует отметить, что собственные числа краевой задачи (5.2), (1.9) могут быть получены при помощи изложенного ранее метода непосредственно из дифференциального уравнения.

5.2. Устойчивость защемленной прямоугольной пластины

Рассмотрим защемленную по контуру прямоугольную пластину ($-a/2 \leq \bar{x} \leq a/2$; $-b/2 \leq \bar{y} \leq b/2$), сжимаемую вдоль оси x распределенной силой \bar{N} . Исходное дифференциальное уравнение таково:

$$D\nabla^4 W + \bar{N}W_{xx} = 0. \quad (5.8)$$

После обезразмеривания уравнение (5.8) запишется так:

$$\nabla^4 W + NW_{xx} = 0, \quad (5.9)$$

где $N = \bar{N}b^2 / D$.

Граничные условия примем в виде (1.60), (1.61).

Критическую силу N и прогиб пластины W представим в виде рядов:

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} N_i \varepsilon^i; \quad W = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon^i. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.10) в уравнение (5.9) и граничные условия (1.60), (1.61) и выполняя расщепление по степеням ε , получаем рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\nabla^4 W_0 + N_0 W_{0xx} = 0, \quad (5.11)$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \quad (5.12)$$

$$W_0 = 0, \quad W_{0yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \quad (5.13)$$

$$W_j + N_0 W_{jxx} = - \sum_{i=0}^{j-1} N_{j-i} W_{ixx},$$

$$W_j = 0, \quad W_{jxx} = \mp k \sum_{i=0}^{j-1} W_{ix} \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k,$$

$$W_j = 0, \quad W_{jyy} = \mp \sum_{i=0}^{j-1} W_{iy} \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5.$$

Краевая задача нулевого приближения (5.11)–(5.13) описывает устойчивость шарнирно опертой пластины. Ее решение таково:

$$N_0 = \frac{\pi^2 k^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)^2, \quad (5.14)$$

$$W_0 = C \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y; \quad n, m = 1, 3, 5, \dots \quad (5.15)$$

Первая поправка к критической нагрузке выглядит следующим образом:

$$N_1 = 4 \frac{k^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right). \quad (5.16)$$

Первая же поправка к форме потери устойчивости имеет вид:

$$W = \frac{n}{n^2 \alpha} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \pi \beta_1 / 2} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y - y \sin \pi n y \right] \cos \frac{\pi m}{k} x + \quad (5.17)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m^3 / k^3}{\left(n^4 - \frac{m^4}{k^4} \right)} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \cos \frac{\pi}{2} n^2 \frac{k^2}{m}} \cos \pi n^2 \frac{k}{m} x - x \sin \frac{\pi m}{k} x \right], \quad n \neq \frac{m}{k} \\ -\frac{1}{2} x^2 \cos \frac{\pi m}{k} x, \quad n = \frac{m}{k} \end{array} \right\} \cos \pi n y.$$

Выражение для второй поправки к критической нагрузке:

$$N_2 = N_{2x} + N_{2y}, \quad (5.18)$$

где

$$\begin{aligned}
 N_{2x} = & \frac{4}{k} \cdot \frac{\pi^2 m^2}{k^2} \left\{ 1 + \left(\frac{n^2 - m^2}{2\pi^2 \alpha^2} - \left\{ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m^2/k^2}{\left(n^4 - \frac{m^4}{k^4}\right)} \left(\frac{\pi}{2} n^2 \frac{k}{m} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} n^2 \frac{k^2}{m} + 1 \right) \right\} \right) \right\} + \\
 & + \frac{8}{k\pi^2} \cdot \frac{k^4}{m^4} \alpha \left\{ -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m^3/k^3}{n^4 - \frac{m^4}{k^4}} \left[\frac{m^3/k^3}{n^4 - \frac{m^4}{k^4}} n^4 \frac{k^2}{m^2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} n^2 \frac{k^2}{m} + \frac{3}{4} m \right] \right\}; \\
 N_{2y} = & 4n^2 \frac{k^2}{m^2} \left[1 - \frac{1}{\pi^2 \alpha} \left(\frac{\pi\beta_1}{2} \operatorname{th} \frac{\pi\beta_1}{2} - 1 \right) + \frac{2}{\pi\alpha} - 4n(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{k}{\pi m} \right] \times \\
 & \times \left\{ \begin{aligned} & -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m^3/k^3}{n^4 - \frac{m^4}{k^4}} \left[\frac{2}{k} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{m^3/k^3}{n^4 - \frac{m^4}{k^4}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} n^2 \frac{k^2}{m} - \frac{k}{2\pi m} \right]; \\ & \frac{1}{4} \left(\frac{k^2}{6} - 1 \right) \end{aligned} \right\}; \quad \left\{ \begin{aligned} & n \neq \frac{m}{k} \\ & n = \frac{m}{k} \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Зная три члена отрезка ряда возмущений для N , можно построить АП.

Сравним полученные результаты с численным решением для квадратной пластины. Известное решение [7]: $N = 8.5540\pi^2$. РТВ дает $N = 5.4512\pi^2$ (расхождение – 56.9%). АП – $N = 7.8662\pi^2$ (расхождение – 8.04%). На рис.5.2 представлен график зависимости критической силы N от параметра ε . Кривой 1 обозначены результаты, полученные при помощи РТВ; кривой 2 – результаты, полученные при помощи АП; точкой 3 – численное решение [43]. Графики 1 и 2 для значений $\varepsilon < 0.5$ отличаются друг от друга менее, чем на 5%.

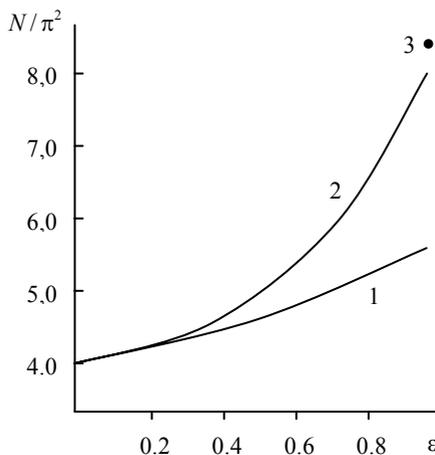


Рис. 5.2. Сравнение эффективности РТВ и АП.

5.3. Устойчивость прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями «защемление – шарнир»

Применим МВ к определению критических сил для пластин, имеющих смешанные граничные условия «защемление – шарнир». Рассмотрим две принципиально различные расчетные схемы: рис. 5.3, *а*, *б* и рис. 5.3, *в*, *г*. Граничные условия

$$\begin{aligned} T_x = N, \quad T_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \\ T_y = 0, \quad T_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \end{aligned}$$

где T_x , T_y – усилия сжатия в соответствующих направлениях, T_{xy} – сдвиговое усилие, обеспечивают однородность исходного докритического состояния.

Исходное дифференциальное уравнение примем в виде (5.9).

Подробно рассмотрим расчет критической нагрузки для пластины, изображенной на рис. 5.3, *а*. Граничные условия примем в виде (1.109), (1.110).

Подставим РТВ (5.10) в дифференциальное уравнение (5.9) и граничные условия (1.109)–(1.110) и произведем расщепление по степеням параметра ε . Получаем следующую последовательность краевых задач:

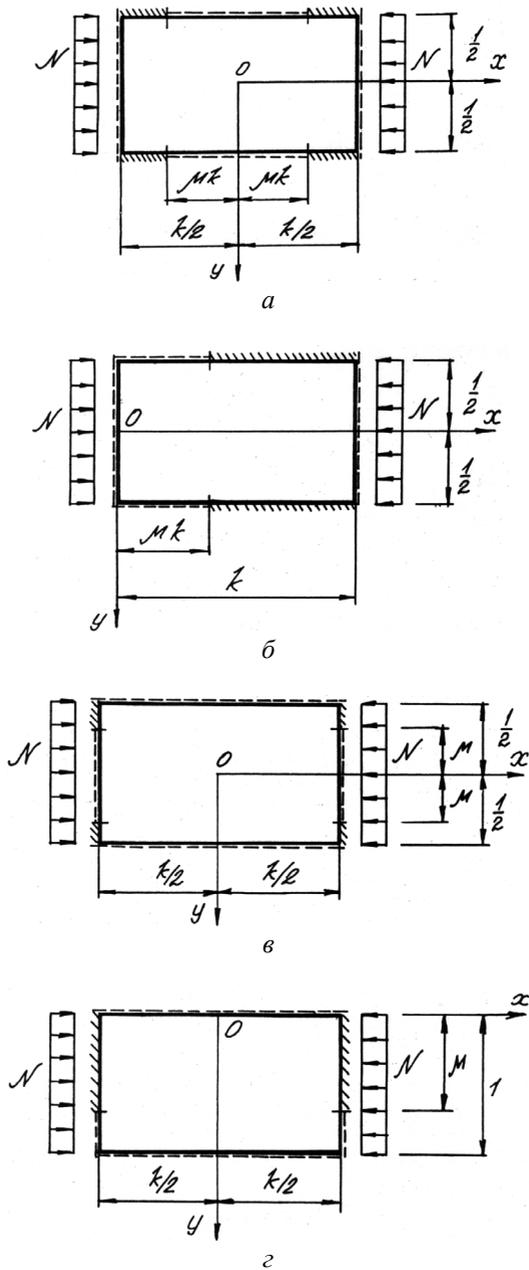


Рис. 5.3. Схемы пластин со смешанными граничными условиями.

$$\begin{aligned}
& \nabla^4 W_0 + N_0 W_{0xx} = 0, \\
& W_0 = 0, \quad W_{0xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \\
& W_0 = 0, \quad W_{0yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \\
& \nabla^4 W_j + N_0 W_{jxx} = - \sum_{i=0}^{j-1} N_{j-i} W_{ixx}, \\
& W_j = 0, \quad W_{jxx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \\
& W_j = 0, \quad W_{jyy} = \mp \overline{H}(x) \sum_{i=0}^{j-1} W_{iy} \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5.
\end{aligned}$$

В нулевом приближении имеем задачу об определении критической нагрузки пластины, шарнирно опертой по контуру и сжимаемой в направлении оси x распределенной силой N_0 .

Краевая задача первого приближения имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \nabla^4 W_1 + \pi^2 \frac{k^2}{m^2} \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 W_{1xx} = N_1 \pi^2 \frac{m^2}{k^2} \cos \frac{\pi m}{k} x, \\
& W_1 = 0, \quad W_{1xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \\
& W_1 = 0, \quad W_{1yy} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{H}(x) \cos \frac{\pi m}{k} x \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5.
\end{aligned}$$

Ее решение запишем так:

$$W_1 = \sum_{i=1,3,5,\dots} y_{1i} \cos \frac{\pi i}{k} x.$$

Разложив функции в граничных условиях в ряд по $\cos(\pi i x/k)$, $i = 1, 3, 5, \dots$, получим две краевые задачи:

при $i = m$:

$$Y_{1m}^{IV} - 2 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} Y_{1m}^{II} - \pi^4 n^2 \left(2 \frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) Y_{1m} = N_1 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} \cos \pi n y, \quad (5.19)$$

$$Y_{1m} = 0, \quad Y_{1m}^{II} = \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{nm} \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5; \quad (5.20)$$

при $i \neq m$:

$$Y_{li}^{IV} - 2 \frac{\pi^2 i^2}{k^2} Y_{li}^{II} - \pi^4 \left[\frac{i^2}{m^2} \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 - \frac{i^4}{k^4} \right] Y_{li} = 0, \quad (5.21)$$

$$Y_{li} = 0, \quad Y_{li} = \pm \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{im} \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5. \quad (5.22)$$

Здесь γ_{im} определяется выражением (3.30). Значение N_1 определяется из условия разрешимости:

$$N_1 = 4k^2 \frac{n^2}{m} \gamma_{mm}. \quad (5.23)$$

Функция Y_{im} такова:

$$Y_{im} = \frac{n}{\pi \alpha} \gamma_{mm} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \pi \beta_1 / 2} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y - y \sin \pi n y \right],$$

где $\beta_1 = \sqrt{2m^2/k^2 + n^2}$.

Решение краевой задачи (5.21), (5.22) не дает поправку к критической нагрузке, а лишь уточняет форму потери устойчивости:

$$Y_{li} = \pi n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{i=1,3,5,\dots} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_{2i} y}{\operatorname{ch} \alpha_{2i} / 2} - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \beta_{2i} y \\ \cos \varphi_{2i} y \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \beta_{2i} / 2 \\ \cos \varphi_{2i} / 2 \end{array} \right\}} \right], \quad \left\{ \begin{array}{l} m(i-m) > n^2 k^2 \\ m(i-m) < n^2 k^2 \end{array} \right\},$$

где $\alpha_{2i} = \pi \sqrt{i \left(\frac{i+m}{k^2} + \frac{n^2}{m} \right)}$, $\beta_{2i} = \pi \sqrt{i \left(\frac{i+m}{k^2} - \frac{n^2}{m} \right)}$, $\varphi_{2i} = \pi \sqrt{i \left(\frac{n^2}{m} - \frac{i-m}{k^2} \right)}$.

Теперь можно записать первую поправку к форме потери устойчивости:

$$W_1 = \frac{n}{\pi \alpha} \gamma_{mm} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 \operatorname{ch} \pi \beta_1 / 2} \operatorname{ch} \pi \beta_1 y - y \sin \pi n y \right] \cos \frac{\pi m}{k} x +$$

$$+\pi n(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{i=1,3,5,\dots} \gamma_{im} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_{2i} y}{\operatorname{ch} \alpha_{2i} / 2} - \frac{\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \beta_{2i} y \\ \cos \varphi_{2i} y \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \beta_{2i} / 2 \\ \cos \varphi_{2i} / 2 \end{array} \right\}} \right] \cos \frac{\pi i}{k} x.$$

Рассматривая второе приближение, найдем вторую поправку к критической силе:

$$N_2 = \frac{k^2}{\pi^2 m^2} \left\{ 4\pi^2 n^2 \gamma_{mm} - \frac{2n^2}{\alpha} \gamma_{mm}^2 \left(\frac{\pi}{2} \beta_1 \operatorname{th} \frac{\pi}{2} \beta_1 - 1 \right) - \right. \quad (5.24)$$

$$\left. - \frac{n^2 m}{\alpha^2} \left(n^2 - \frac{m^2}{k^2} \right) \times \gamma_{mm}^2 - 4\pi^2 n^2 \sum_{i=1,3,5,\dots} \gamma_{im}^2 \left[\alpha_{2i} \operatorname{th} \frac{\alpha_{2i}}{2} - \left\{ \begin{array}{l} \beta_{2i} \operatorname{th} \frac{\beta_{2i}}{2} \\ -\varphi_{2i} \operatorname{tg} \frac{\varphi_{2i}}{2} \end{array} \right\} \right] \right\}.$$

Для случая, изображенного на рис. 5.3, б, формула (4.24) сохранятся с заменой суммирования по нечетным значениям i на суммирование по всем i . Параметр γ_{im} в этом случае имеет вид (1.129).

Зная три коэффициента РТВ, можно построить АП.

В предельном случае, соответствующем полному защемлению стороны $y = \pm 0.5$, точное значение критической силы для квадратной пластины, полученное численно из трансцендентного уравнения при $m = 1$ равно $N = 8.6044\pi^2$. АП дает $N = 8.7136\pi^2$ (погрешность – 1.27%), в то время как РТВ дает $N = 4.7757\pi^2$ (погрешность – 44.5%). Численное решение трансцендентного уравнения при $m = 2$ дает $N = 7.6913\pi^2$, АП – $N = 7.7156\pi^2$ (погрешность – 0.32%), РТВ – $N = 6.4456\pi^2$ (погрешность – 16.2%).

На рис.5.4 приведена зависимость критической силы от геометрических размеров участков смешанных граничных условий для квадратной пластины. Сплошная линия соответствует симметричному, а штриховая – несимметричному расположению участков защемления. Штрихпунктирными линиями обозначены результаты, полученные при помощи метода R-функций [73, 98–100]. Точками обозначены результаты численного решения для предельных случаев $\mu = 0, 0.5, 1$ [37].

Можно выделить две зоны значений параметра μ . Первая – от $\mu = 0$ до $\mu = 0.15$ для симметричного и от $\mu = 0$ до $\mu = 0.55$ для несимметричного случаев. В этой зоне потеря устойчивости пластины происходит с образованием двух полуволн в направлении x . Во второй зоне – от $\mu = 0.15$ до $\mu = 0.5$ для симметричного случая и от $\mu = 0.55$ до $\mu = 1$ для

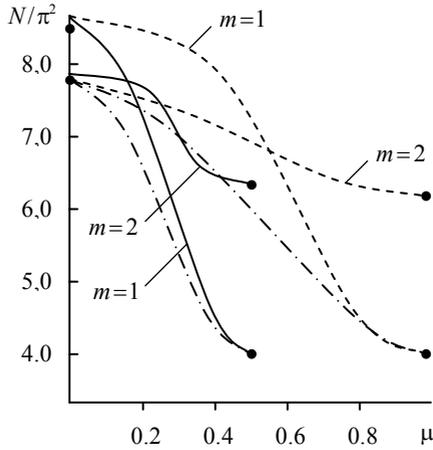


Рис. 5.4. Зависимость критической силы от длины участков шарнирного опирания.

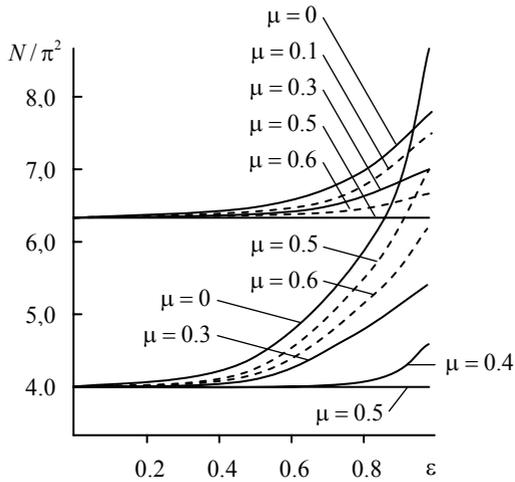


Рис. 5.5. Зависимость критической силы от жесткости упругой заделки.

несимметричного – пластина теряет устойчивость с образованием одной полуволны в направлении x . Таким образом, при $\mu = 0.15$ (или $\mu = 0.55$) равновероятна потеря устойчивости как по первой форме, так и по второй. Решения, полученные при помощи R-функций, дают практически те же результаты.

МВ позволяет исследовать влияние жесткости заземления торцов на критические силы N . На рис.5.5 приведена зависимость критической силы N от параметра ε для некоторых значений μ . Сплошной линией

обозначены результаты, полученные для симметричного случая, штриховой – для несимметричного.

Следует отметить, что для упругого защемления краев $y = \pm 0.5$ при отсутствии смешанных граничных условий смежные формы равновесия проявляются при $\varepsilon = 0.96$, при этом потеря устойчивости с образованием одной полуволны в направлении x возможна при $\varepsilon < 0.96$, а по двум полуволнам – при $\varepsilon > 0.96$. Появление одновременно первой и второй формы равновесия возможно при смешанных граничных условиях, причем при $\mu \rightarrow 0$ смежные формы равновесия появляются при $\varepsilon \rightarrow 1$. Предельное значение μ , при котором пластина будет терять устойчивость с образованием одной полуволны в направлении x при $\varepsilon = 1$, для симметричного расположения смешанных граничных условий составляет $\mu = 0.25$, а для несимметричного – $\mu = 0.58$.

Рассмотрим другой случай смешанных граничных условий (рис. 5.3, в, г). Исходное дифференциальное уравнение сохраняет вид (5.9). Присоединим к нему граничные условия

$$W = 0, \quad W_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \quad (5.25)$$

$$W = 0, \quad W_{xx} = \overline{H}(y)\varepsilon(W_{xx} \mp kW_x) \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \quad (5.26)$$

где $\overline{H}(y) = H(y - \mu) - H(-y - \mu)$.

Представив прогиб W и критическую силу N в виде рядов по ε (5.10), после подстановки их в дифференциальное уравнение (5.9) и граничные условия (5.25), (5.26) получаем следующую рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\begin{aligned} \nabla^4 W_0 + N_0 W_0 &= 0, \\ W_0 = 0, \quad W_{0yy} &= 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \\ W_0 = 0, \quad W_{0xx} &= 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \\ \nabla^4 W_j + N_0 W_{jxx} &= - \sum_{i=0}^{j-1} N_{j-i} W_{ixx}, \\ W_j = 0, \quad W_{jyy} &= 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \\ W_j = 0, \quad W_{jxx} &= \mp \overline{H}(y)k \sum_{i=0}^{j-1} W_x \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k. \end{aligned}$$

Краевая задача первого приближения такова:

$$\nabla^4 W_1 + \pi^2 \frac{k^2}{m^2} \left(n^2 + \frac{m^2}{k^2} \right)^2 W_{1,xx} = N_1 \pi^2 \frac{m^2}{k^2} \cos \frac{\pi m}{k} x \cos \pi n y, \quad (5.27)$$

$$W_1 = 0, \quad W_{1,yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \quad (5.28)$$

$$W_1 = 0, \quad W_{1,xx} = \pm k \frac{\pi m}{k} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{H}(y) \cos \pi n y \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k. \quad (5.29)$$

Ее решение будем искать в виде:

$$W_1 = \sum_{p=1,3,5,\dots} X_{1p} \cos \pi p y. \quad (5.30)$$

После подстановки разложения (5.30) в уравнение (5.27) и краевые условия (5.28), (5.29) получаем две одномерные краевые задачи:

для $p \neq n$:

$$X_{1n}^{IV} + \pi^2 \frac{k^2}{m^2} \left(\frac{m^4}{k^4} + n^4 \right) X_{1n}'' + \pi^4 n^4 X_{1n} = N_1 \frac{\pi^2 m^2}{k^2} \cos \frac{\pi m}{k} x, \quad (5.31)$$

$$X_{1n} = 0, \quad X_{1n}'' = \pm k \frac{\pi m}{k} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \gamma_{mn} \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k, \quad (5.32)$$

для $p = n$:

$$X_{1p}^{IV} - \pi^2 \left(2p^2 - \frac{k^2}{m^2} \left(\frac{m^4}{k^4} + n^4 \right) \right) X_{1p}'' + \pi^4 p^4 X_{1p} = 0, \quad (5.33)$$

$$X_{1p} = 0, \quad X_{1p}'' = \pm k \frac{\pi m}{k} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \gamma_{pn} \quad \text{при} \quad x = \pm 0.5k. \quad (5.34)$$

Здесь γ_{pn} определяется выражением (3.30) ($i \rightarrow p, m \rightarrow n$).

Из условия разрешимости краевой задачи (5.31), (5.32) находим

$$N_1 = 4\gamma_{mn}. \quad (5.35)$$

Краевая задача (5.31), (5.32) дает поправки к критической силе и форме потери устойчивости. Ее решение распадается на два случая:

при $n \neq m/k$:

$$X_{1n} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m^3/k^3}{\left(n^4 - \frac{m^4}{k^4}\right)} \gamma_{mn} \left[\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} k}{2 \cos \frac{\pi}{2} n^2 \frac{k^2}{m}} \cos \pi n^2 \frac{k}{m} x - x \sin \frac{\pi m}{k} x \right],$$

при $n = m/k$:
$$X_{1n} = -\frac{\gamma_{mn}}{2} x^2 \cos \frac{\pi m}{k} x .$$

Из краевой задачи (5.33), (5.34) получаем поправку только к форме потери устойчивости:

$$X_{1p} = \pi m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\gamma_{pn}}{\alpha_p^2 - \beta_p^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_p x}{\operatorname{ch} \alpha_p k/2} - \frac{\operatorname{ch} \beta_p x}{\operatorname{ch} \beta_p k/2} \right],$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha_p \\ \beta_p \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} \left(2p^2 + \frac{k^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)^2 \right) \pm \frac{\pi^2 k}{2m} \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right) \sqrt{\frac{k^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{k^2} + n^2 \right)^2 - 4p^2}} .$$

В случае, когда α_p и β_p комплексные, $\operatorname{ch} \alpha_p x$ и $\operatorname{ch} \beta_p x$ следует заменить на $\cos \alpha_p x$ и $\cos \beta_p x$.

Выражение для первой поправки к форме потери устойчивости примет следующий вид:

$$W_1 = \left\{ \begin{matrix} -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m^3/k^3}{n^4 - \frac{m^4}{k^4}} \cdot \gamma_{mn} \left[\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} k}{2 \cos \frac{\pi}{2} n^2 \frac{k^2}{m}} \cos \pi n^2 \frac{k}{m} x - x \sin \frac{\pi m}{k} x \right] \\ -\frac{\gamma_{nn}}{2} x^2 \cos \frac{\pi m}{k} x \end{matrix} \right\} \cos \pi n y +$$

$$+ \pi m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{p=1,3,5,\dots} \frac{\gamma_{pn}}{\alpha_p^2 - \beta_p^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_p x}{\operatorname{ch} \alpha_p k/2} - \frac{\operatorname{ch} \beta_p x}{\operatorname{ch} \beta_p k/2} \right] \cos \pi p y \left\{ \begin{matrix} n \neq \frac{m}{k} \\ n = \frac{m}{k} \end{matrix} \right\} . \quad (5.36)$$

Рассматривая второе приближение, находим:

$$N_2 = \left\{ \begin{array}{l} 4\gamma_m \frac{\pi^2 m^2}{k^2} \left\{ 1 - 2\gamma_m \frac{m^2/k^2}{\pi^2 \left(n^4 - \frac{m^4}{k^4} \right)} \left[\frac{k}{2} n^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} n^2 \frac{k^2}{m^2} \left(1 - \frac{4n^2}{k \left(n^4 - \frac{m^4}{k^4} \right)} \right) - \frac{3}{2} \right] \right\} \\ \gamma_m \left(4 - \frac{k^2}{3} \gamma_m - \gamma_m \right) \end{array} \right\} - \frac{4k^2}{\pi m} \sum_{p=1,3,5,\dots} \gamma_{pn}^2 \frac{1}{\alpha_p^2 - \beta_p^2} \left[\alpha_p \operatorname{th} \frac{\alpha_p k}{2} - \beta_p \operatorname{th} \frac{\beta_p k}{2} \right]. \quad (5.37)$$

Для случая несимметричного расположения участка защемления (рис. 5.3, з) формулы (5.35), (5.36) сохраняют свой вид с заменой суммирования по нечетным значениям p на суммирование по всем значениям p . Параметр γ_{pn} в этом случае определяется выражением (1.129).

В предельном случае, соответствующем полному защемлению стороны $x = \pm 0.5k$, значение критической силы, полученное численно из трансцендентного уравнения, равно $N = 5.4390\pi^2$. РТВ дает $N = 4.7654\pi^2$ (погрешность – 14.01%), АП – $N = 5.2159\pi^2$ (погрешность – 4.1%).

На рис.5.6 приведена зависимость критической силы N для квадратной пластины от длины μ участка шарнирного опирания. Сплошной линией обозначены результаты для случая симметричного расположения участков смешанных граничных условий, штриховой – несимметричного, штрихпунктирной – результаты расчета при помощи метода R-функций [17]. Точками обозначены результаты численного расчета в предельных случаях $\mu = 0, 0.5, 1$.

Можно выделить три зоны значений параметра μ : симметричный случай – $[0, 0.1]$, $(0.1, 0.45]$, $(0.45, 0.5]$; несимметричный случай – $(0.8, 1]$, $(0.1, 0.8]$, $[0, 0.1]$. Если геометрические размеры участков смешанных граничных условий относятся к первой зоне, то такую пластину можно считать шарнирно опертой по двум сторонам $y = \pm 0.5$ и защемленной по двум другим. Критическая сила при этом будет выше точного значения не более, чем на 5%. Если размеры смешанных граничных условий относятся к третьей зоне, то такую пластину можно рассматривать как шарнирно опертую по контуру, при этом расчетное значение критической силы меньше точного значения не более, чем на 5%. Если же геометрические размеры смешанных граничных условий соответствуют второй

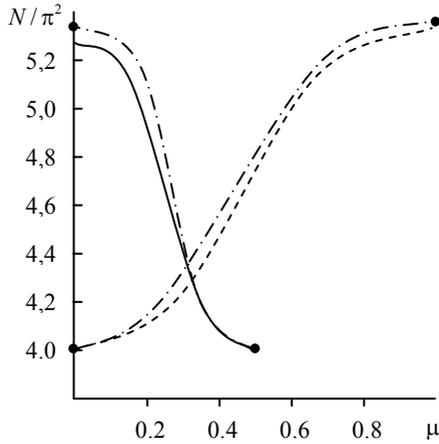


Рис. 5.6. Зависимость критической силы от длины участков шарнирного опирания.

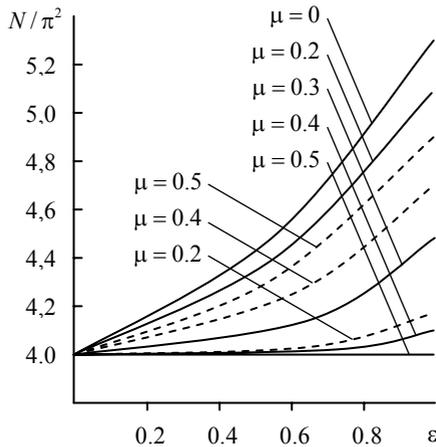


Рис. 5.7. Влияние жесткости упругой заделки на критическую силу.

зоне, то такую пластину следует рассчитывать с учетом смешанных граничных условий.

На рис.5.7 представлена зависимость критической силы от параметра ϵ . Отличие от предыдущего случая состоит в том, что в данном примере нельзя выделить участок интенсивного роста. Жесткость защемления торцов существенно сказывается для любых значений ϵ .

5.4. Сравнение теоретических и экспериментальных данных

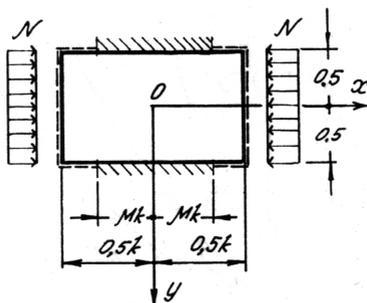


Рис. 5.8. Расчетная схема пластины.

Рассмотрим устойчивость пластины, изображенной на рис. 5.8. РТВ для критической силы сохранит вид (5.23), (5.24). Коэффициенты γ_{im} в данном случае определяется выражением (1.130).

Далее РТВ перестраивается в АП. В предельном случае, соответствующему полному защемлению сторон $y = \pm 0.5$, результаты совпадают с изложенными в предыдущем параграфе.

На рис.5.9 сплошными линиями представлена зависимость критической силы для квадратной пластины от длины участка шарнирного оперения μ . Штриховой линией обозначены результаты, приведенные в статье [149]; штрихпунктирной – результаты работы [67]; точками – экспериментальные данные [149].

На графиках выделяются две зоны – $[0,0.08]$ и $[0.08,1]$. В первой зоне потеря устойчивости пластины происходит с образованием одной полуволны, во второй – двух полуволн в направлении оси x . При $\mu = 0.08$ равновероятно появление как первой, так и второй форм равновесия.

Результаты, полученные при помощи МВ, достаточно хорошо согласуются как с результатами расчета других авторов, так и с результатами эксперимента.

Появление смежных форм равновесия возможно при различных параметрах ε . Так, например, для случая полного защемления сторон $y = \pm 0.5$ смежные формы проявляются при $\varepsilon = 0.96$. Для $\mu < 0.075$ пластина будет терять устойчивость с образованием только одной полуволны в направлении x при любом значении параметра ε .

На рис.5.10 представлена зависимость критической силы N от жесткости защемления торцов ε .

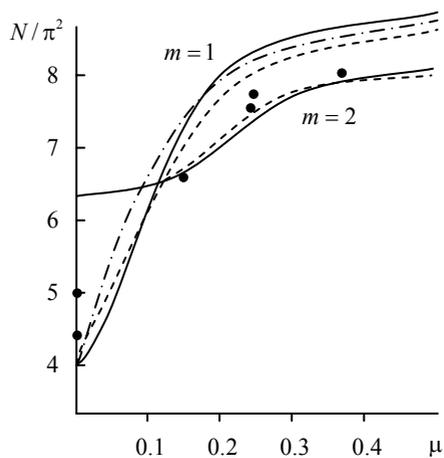


Рис. 5.9. Сравнение результатов расчета критической силы в зависимости от длины участков шарнирного опирания.

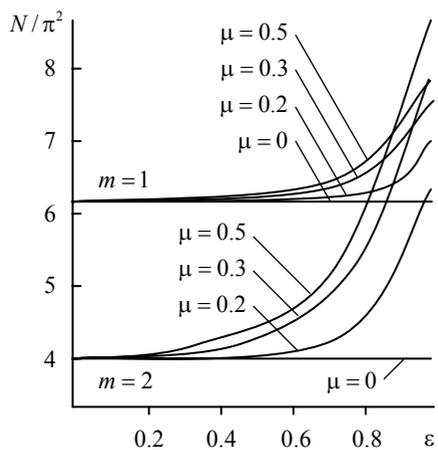


Рис. 5.10. Зависимость критической силы от жесткости заделки.

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

6.1. Динамика неоднородных конструкций

Исследование динамики неоднородных конструкций вызывает определенные трудности, как при аналитическом, так и при численном решении. Аналитические методы, основанные на разделении исходной системы на подсистемы с их последующей стыковкой, приводят к системам алгебраических уравнений высокого порядка. Численные методы не всегда просто применять из-за резкого изменения характеристик конструкции в местах стыка, что приводит к жестким (с точки зрения вычислительной математики) системам. Между тем, при исследовании задач для неоднородных конструкций можно отправляться от предельного случая, когда характеристики подсистем одинаковы, далее строить асимптотическое решение при помощи известных приемов, а затем получить уточненное решение на основе АП.

Рассмотрим продольные колебания неоднородного стержня плотностью ρ и площадью поперечного сечения F , имеющего на участке $-1 \leq x < 0$ модуль упругости E_1 , а на участке $0 < x \leq 1$ – модуль E_2 . Уравнения движения для этих участков имеют вид:

$$E_{1(2)}F \frac{\partial^2 u^{1(2)}}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 u^{1(2)}}{\partial t^2} = 0, \quad (6.1)$$

где $u^{1(2)}$ – продольное перемещение.

Решения уравнений (6.1) можно записать в виде:

$$u^{1(2)}(x) = u^{1(2)}(x) (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (6.2)$$

Подставляя соотношения (6.2) в уравнение (6.1), получаем:

$$\frac{d^2 u^{1(2)}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{a_{1(2)}^2} u^{1(2)} = 0,$$

где $a_{1(2)}^2 = E_{1(2)}/\rho$. Решения этих уравнений таковы:

$$u^{1(2)} = C_1^{1(2)} \cos \frac{\omega}{a_{1(2)}} x + C_2^{1(2)} \sin \frac{\omega}{a_{1(2)}} x.$$

Произвольные постоянные $C_i^{1(2)}$ определяются из граничных условий $u^1|_{-1} = u^2|_1 = 0$ и условий равенства в нуле перемещений и продольных сил. Введя обозначения $\varepsilon = (E_2 - E_1)/E_1$, $\omega^* = \omega/a_1$, запишем искомое трансцендентное уравнение в виде:

$$(1/\sqrt{1+\varepsilon}) \cos \omega^* \sin(\omega^* \sqrt{1+\varepsilon}) + \sin \omega^* \cos \omega^* (\sqrt{1+\varepsilon}) = 0. \quad (6.3)$$

Найдем приближенное решение, разложив функцию $\omega^*(\varepsilon)$ в ряд Тейлора до третьего члена включительно:

$$\omega^* \approx \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon \omega_2. \quad (6.4)$$

Подставляя отрезок ряда (6.4) в уравнение (6.3), выполняя элементарные преобразования и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем:

$$\omega_1 = \pi k \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^4}{4} \right); \quad \omega_2 = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{8} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

АП корней ω_1 и ω_2 при $k = 1$ таковы:

$$\begin{aligned} \omega_{2[1/1]} &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{4+3E}{2+E} \right); & \omega_{2[0/1]} &= \frac{2\pi}{4+E}; \\ \omega_{1[1/1]} &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{4+3E}{1+E} \right); & \omega_{1[0/1]} &= \pi \cdot \frac{4}{4+E}. \end{aligned}$$

Численно найдены также решения ω трансцендентного уравнения (6.3) с точностью до 10^{-6} . Полученные результаты приведены в табл.6.1. Видно, что применение АП существенно улучшает асимптотические результаты и позволяет использовать их даже для больших значений ε .

Таблица 6.1.

ε	ω_T	$\omega_{I[1/1]}$	$\omega_{I[0/1]}$	ω_T	ω_2
0.01	1.566888	1.566888	1.566879	3.1338	3.133
0.1	1.53251	1.53339	1.532484	3.06849	3.07
0.3	1.451702	1.468353	1.461206	2.94812	2.96
0.5	1.39808	1.413716	1.396263	2.85139	2.87
1	1.265672	1.308996	1.25663	2.666309	2.74
2	1.07977	1.178097	1.047198	2.39736	2.61
3	0.955317	1.099557	0.897598	2.186276	2.55
5	0.796394	1.009798	0.698132	1.872274	2.48

Рассмотрим теперь колебания балки плотностью ρ и статическим моментом поперечного сечения I , имеющей на участке $-1 \leq x < 0$ модуль упругости E_1 , а на участке $0 < x \leq 1$ – модуль E_2 . Введем малый параметр $\varepsilon = (E_2 - E_1)/E_1$; тогда модуль упругости на всем участке $[0;1]$ можно записать в виде $E = E_1 + \varepsilon H(x - 0.5)E_1$.

Исходное уравнение для собственных колебаний можно представить в следующей форме:

$$EIw^{IV} - \rho F\omega^2 w = 0, \quad (6.5)$$

с граничными условиями:

$$w = w_{xx} = 0 \quad \text{при } x = 0, 1. \quad (6.6)$$

Представив решение в виде:

$$\omega^2 \approx \omega_1^2 + \varepsilon\omega_1^2 + \varepsilon^2\omega_2^2; \quad \omega \approx \omega_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2, \quad (6.7)$$

подставим выражения (6.7) в краевую задачу (6.5), (6.6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε :

$$w_0^{IV} - \frac{\rho F}{IE}\omega_0^2 w_0 = 0; \quad (6.8)$$

$$w_0 = w_{0xx} = 0 \quad \text{при } x = 0, 1; \quad (6.9)$$

Таблица 6.2.

λ/k	1	2	3	4	5
λ_1	2.64	5.28	7.92	10.56	13.2
λ	2.69	5.39	8.099	10.799	13.499
$\lambda_{[1/1]}$	2.69	5.38	8.07	10.77	13.46

$$w_0^{IV} - \frac{\rho F}{IE_1} \omega_0^2 w_1 = \frac{\rho F}{IE_1} \omega_1^2 w_0 - H(x-0.5) w_0^{IV};$$

$$w_0 = w_{1xx} = 0 \quad \text{при } x = 0, 1.$$

Решение краевой задачи (6.8), (6.9) имеет следующий вид:

$$\omega_0 = (\pi k)^2 \sqrt{\frac{E_1 I}{\rho F}}; \quad w_0 = D \sin(\pi k x), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Для нахождения ω_1^2 используем стандартную процедуру МВ. В результате получаем: $\omega_1^2 = 0.5\omega_0^2$, $\omega_2^2 = \omega_0^2/32$. Окончательно

$$\omega^2 \approx (k\pi)^4 \frac{E_1 I}{\rho F} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{32} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.10)$$

АП в данном случае имеет вид:

$$\omega_{[1/1]}^2 = (k\pi)^2 \frac{E_1 I (16 + 7\varepsilon)}{\rho F (16 - \varepsilon)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.11)$$

В таблице 6.2 приведены результаты расчета $\lambda = \omega/\omega_0$ при помощи отрезка РТВ (6.10), АП (6.11) и численное решение трансцендентного уравнения с точностью до 10^{-6} для различных значений k при $\varepsilon=1$. Видно, что для данной задачи использование отрезка РТВ при $\varepsilon=1$ достаточно эффективно. Однако дополнительное исследование показывает, что при $\varepsilon \geq 2$ АП имеет неоспоримое преимущество в точности и должна использоваться в расчетах.

6.2. Метод Ишлинского-Лейбензона

А.Ю. Ишлинским [65] и Л.С. Лейбензоном [75] был предложен метод исследования устойчивости упругих систем для конструкций со свободными краями (или тел со свободными поверхностями). Суть его состоит в том, что в уравнениях устойчивости отбрасываются параметрические члены при сохранении их только в краевых условиях. Метод получил достаточно широкое распространение и неоднократно обсуждался в литературе [42, 52–54, 61–63], при этом высказывался ряд обоснованных претензий к его точности. Ниже показано, что трактовка данного подхода как нулевого приближения некоторого, допускающего уточнение асимптотического процесса, позволяет преодолеть указанный недостаток.

Рассмотрим сначала модельную задачу – устойчивость консольного стержня. Исходные уравнения устойчивости и краевые условия можно представить в следующем виде:

$$EIw_{xxxx} + Tw_{xx} = 0; \quad (6.12)$$

$$w(0) = w_x(0) = 0; \quad (6.13)$$

$$w_{xx}(L) = 0; \quad (6.14)$$

$$EIw_{xxx}(L) + Tw_x(L) = 0; \quad (6.15)$$

где T – сжимающее усилие.

Точное решение задачи на собственные значения (6.12)–(6.15) имеет вид

$$T = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2}; \quad (6.16)$$

$$w = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}. \quad (6.17)$$

Непосредственно сравнить входящие в уравнение устойчивости (6.12) и краевое условие (6.15) параметрические члены затруднительно, поэтому применим вариационно-асимптотический метод [25, 26]. Выпишем выражение для потенциальной энергии консольного стержня:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L (EIw_{xx}^2 + Tw_x^2) dx = \frac{1}{2} EI \int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} T \int_0^L w w_{xx} dx + \frac{1}{2} T w w_x \Big|_{x=L}. \quad (6.18)$$

Найдем отношение второго и третьего членов в выражении (6.18), приняв для w выражение (6.17). Это отношение оказывается относительно малым: $1 - \pi/4 \approx 0.215$. Следовательно, пренебрежение параметрическим членом в уравнении устойчивости имеет смысл, и можно попытаться построить итерационную процедуру.

Наиболее естественным выглядит введение гомотопического параметра ε в уравнение (6.12) следующим образом:

$$EIw_{xxxx} + \varepsilon Tw_{xx} = 0. \quad (6.19)$$

Представим функцию w и параметр T в виде рядов по ε :

$$w = w_0 + w_1\varepsilon + w_2\varepsilon^2 + \dots; \quad (6.20)$$

$$T = T_0 + T_1\varepsilon + T_2\varepsilon^2 + \dots. \quad (6.21)$$

Подставляя выражения (6.20) в краевую задачу (6.19), (6.12)–(6.14) и производя расщепление по ε , имеем:

$$EIw_{0xxxx} = 0;$$

$$w_0(0) = w_{0x}(0) = 0; \quad w_{0xx}(L) = 0; \quad EIw_{0xxx}(L) + T_0 w_{0x}(L) = 0;$$

$$EIw_{kxxxx} = -\sum_{i=0}^{k-1} T_i w_{k-1ix}; \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$w_k(0) = w_{kx}(0) = 0, \quad w_{kxx}(L) = 0, \quad EIw_{kxxx}(0) + \sum_{i=1}^k T_i w_{k-ix}(L) = 0.$$

В нулевом приближении получаем

$$T_0 = 2EI/L^2, \quad w_0 = Ax^2(x-3L)..$$

Для первого приближения находим

$$T_1 = \frac{EI}{3L^2}, \quad w_1 = -5ALx^2 + Ax^3 + \frac{A}{2L}x^4 - \frac{A}{10L^2}x^5.$$

Из уравнения и краевых условий второго приближения следует, что $T_2 = 4EI/(45L^2)$. Найденное решение может быть улучшено путем применения аппроксимации Паде. В результате получим

$$T = 2 \frac{(15 - 1.5\varepsilon)EI}{(15 - 4\varepsilon)L^2}.$$

При $\varepsilon = 1$ имеем $T = 2.4545EI/L^2$, что отличается от точного значения $T = 0.25\pi^2 EI/L^2 \approx 2.4650EI/L^2$ на 0.42%.

Рассмотрим другой пример: стержень со свободными краями на упругом основании. Исходная краевая задача после введения гомотопического параметра ε принимает вид

$$EIw_{xxxx} + \varepsilon Tw_{xx} + cw = 0,$$

где c – коэффициент постели основания.

Исследуем прямосимметричную форму потери устойчивости (для кососимметричной формы результаты аналогичны). Граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} w_x(0) = w_{xxx}(0) = 0; \\ w_{xx}(l) = 0, \quad EIw_{xx}(l) + Tw_x(l) = 0. \end{aligned}$$

Используя разложения (6.20), (6.21), после расщепления по ε имеем следующие краевые задачи:

$$\begin{aligned} EIw_{0xxxx} + cw_0 = 0; \\ w_{0xx}(0) = w_{0xxx}(0) = 0; \\ w_{0xx}(l) = 0, \quad EIw_{0xxx}(l) + T_0 w_{0x}(l) = 0; \\ EIw_{kxxxx} + cw_k = -k \sum_{i=0} T_i w_{k-(i+1)xx}; \\ w_k(0) = w_{kxxx}(0) = 0; \\ w_{kxx}(l) = 0, \quad EIw_{kxxx}(l) + \sum_{i=0}^k T_i w_{k-ix}(l) = 0. \end{aligned}$$

В нулевом приближении получаем

$$w_0 = C_1 (a_1 \operatorname{sh} kx \sin kx + \operatorname{ch} kx \cos kx), \quad T_0 = (EI/l^2) \bar{T}_0, \quad (6.22)$$

где $\bar{T}_0 = 2\omega^2 (a_2 - a_1 a_3) / (a_3 + a_1 a_2)$, $\omega = lk$, $a_1 = \operatorname{th} \omega \operatorname{tg} \omega$, $a_2 = \operatorname{cth} \omega + \operatorname{tg} \omega$, $a_3 = \operatorname{ctg} \omega - \operatorname{tg} \omega$.

В первом приближении имеем:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= (EI/l^2)\bar{T}_1; \quad \bar{T}_1 = \omega^2(t_1 + t_2 - t_3 t_4)w_{0x}^{-1}(l); \\
 t_1 &= \frac{\bar{T}_0}{2\omega^2} \left(b_1(\operatorname{cth} \omega + k^2 \omega a_4) + b_2(\operatorname{th} \omega + k^2 \omega a_1) \right); \\
 t_2 &= b_2(3 \operatorname{ctg} \omega - \omega a_4) - b_1(3 \operatorname{tg} \omega + \omega a_5); \quad t_3 = \frac{1}{2a_1} \left(ka_2 + \frac{\bar{T}_0}{\omega l} a_3 \right); \\
 t_4 &= (b_1(a_4 - \omega \operatorname{tg} \omega) + b_2(a_5 + \omega \operatorname{cth} \omega))k^{-1}; \\
 b_1 &= \frac{\bar{T}_0 a_4}{4\omega l}; \quad b_2 = \frac{\bar{T}_0 a_5}{4\omega l}; \quad a_4 = -a_1; \quad a_5 = 1 + a_1.
 \end{aligned}$$

АП при $\varepsilon = 1$:

$$T \approx T_0^2 / (T_0 - T_1). \quad (6.23)$$

Исследуем устойчивость тонкой изотропной пластинки прямоугольной формы ($0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$), свободно опертой по трем кромкам, свободной на четвертой и сжатой нагрузкой P , направленной параллельно двум свободно опертым кромкам. После введения гомотопического параметра ε уравнение устойчивости пластины в этом случае таково:

$$D\nabla^4 w + \varepsilon P w_{yy} = 0.$$

Граничные условия

$$\begin{aligned}
 w = 0, \quad w_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a; \\
 w = 0, \quad w_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \\
 w_{yy} + \nu w_{xx} = 0, \quad D[w_{yyy} + (2 - \nu)w_{xxy}] + Pw_y = 0 \quad \text{при} \quad y = b.
 \end{aligned}$$

Представим функцию w в виде ряда по степеням ε (6.20), а параметр P – в виде разложения $P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots$. После расщепления по ε имеем следующие краевые задачи:

$$D\nabla^4 w_i + \sum_{j=0}^{i-1} P_{i-1} w_{k-ix} = 0; \quad (6.24)$$

$$w_i = 0, \quad w_{ixx} = 0 \quad \text{при } x = 0, a; \quad (6.25)$$

$$w_i = 0, \quad w_{iyy} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad (6.26)$$

$$w_{iyy} + \nu w_{ixx} = 0, \quad D[w_{iyyy} + (2-\nu)w_{ixxy}] + \sum_{i=0}^k P_i w_{k-iy} \quad (6.27)$$

при $y = b, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$

где $P_i = 0$.

Уравнения (6.24)–(6.27) при $i=0$ являются уравнениями метода Ишлинского-Лейбензона. В нулевом приближении получаем:

$$w_0 = C(\operatorname{sh} \lambda y - \lambda y C_1 \operatorname{ch} \lambda y) \sin \lambda y, \quad \sigma_0 = H_0 \varphi,$$

где

$$H_0 = [(1-\nu) + C_1(1+\nu) - (1-\nu)A \operatorname{th} A] \vartheta, \quad \vartheta = 1/[1 - C_1(1 + A \operatorname{th} A)],$$

$$\varphi = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2, \quad \sigma_0 = \frac{P_0}{h}, \quad A = \frac{b\pi}{a}, \quad \tilde{N}_1 = (1-\nu)\psi,$$

$$\psi = 1/(2 + A(1-\nu)\operatorname{cth} A).$$

Решение задачи в первом приближении таково:

$$w_1 = C \left\{ \operatorname{sh} \lambda y - \lambda(C_1 C_2) y \operatorname{ch} \lambda y + \frac{H_0 \lambda^2}{8} [(C_2 - 1) y^2 \operatorname{sh} \lambda y + \right. \\ \left. + \frac{\lambda C_1}{3} y^3 \operatorname{ch} \lambda y \right\} \sin \lambda x; \quad \sigma_1 = H_1 \varphi;$$

где

$$C_2 = \frac{H_0}{8} \left\{ [2 + 4A \operatorname{cth} A + (1-\nu)A^2] + \frac{C_1 A}{3} [6 \operatorname{cth} A + 6A + (1-\nu)A^2 \operatorname{cth} A] \right\} \psi;$$

$$H_1 = \left\{ -1 + (C_1 + C_2)(3 + A \operatorname{th} A) - \frac{H_0}{8} [(C_2 - 1)(6 + 6A \operatorname{th} A + A^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1}{3}(6 + 18A \operatorname{th} A + 9A^2 + A^3 \operatorname{th} A) \right] - (H_0 - 2 + \nu) \{1 - (C_1 + C_2)(1 + A \operatorname{th} A) +$$

$$+ \frac{H_0}{8} \left[(C_1 - 1)(2A \operatorname{th} A + A^2) + \frac{C_1}{3}(3A^2 + A^3 \operatorname{th} A) \right] \} \vartheta.$$

Аналогично решается задача во втором приближении. В результате имеем

$$\sigma_2 = H_2 \varphi,$$

где

$$\begin{aligned} H_2 = & \left\{ \left[24\beta - 6(a - 2\beta A^2 + 3\gamma - 10\theta A^2) - A^2(\gamma + \theta A^2) + C_1 + C_3 \right] \operatorname{th} A + \right. \\ & \left. + \left\{ \beta A^4 - 1 - aA^2 - 6(a - 6\beta A^2 + \gamma - 10\theta A^2) + 3(C_1 + C_3 - A^2(3\gamma - 5\theta A^2)) \right\} - \right. \\ & \left. - (H_0 - 2 + \nu) \left\{ \left[2A(a - 2\beta A^2) - A(C_1 + C_3) + A^3(\gamma - \theta A^2) \right] \operatorname{th} A + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[1 - aA^2 - \beta A^4 - C_1 - C_3 + A^2(3\gamma - 5\theta A^2) \right] - H_1 \{ 1 - (C_1 + C_3)(1 + A \operatorname{th} A) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{H_0}{8} \left[(C_1 - 1)(2A \operatorname{th} A + A^2) + \frac{C_1}{3}(3A^2 + A^3 \operatorname{th} A) \right] \right\} \right\} \vartheta; \\ C_3 = & \left\{ \left\{ 2a + A^2[(1 - \nu)a - 12\beta + 6\gamma] - A^4[(1 - \nu)\beta + 10\theta] \right\} + \left\{ 2A(1a + 3\gamma) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left\{ 2A(1a + 3\gamma) + A^3[(1 - \nu)\gamma - 8\beta - 20\theta] - A^5(1 - \nu)\theta \right\} \operatorname{cth} A \right\} \varphi; \right. \\ \alpha = & \frac{1}{8} \left[H_0(C_1 + C_3) + \frac{H_0^2}{16}(C_1 - 1) + H_1 C_1 - H_0 - H_1 \right]; \quad \beta = \frac{H_0^2}{384}(2C_1 - 1); \\ \theta = & \frac{H_0^2 C_1}{1920}; \quad \gamma = \frac{1}{24} \left[H_0(C_1 + C_3) + \frac{H_0^2}{16}(4 - 3C_1) + H_1 C_1 \right]. \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$\sigma \approx \varphi(H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2) \dots \quad (6.28)$$

АП при $\varepsilon = 1$ по двум первым членам выражения (6.28) дает

$$\gamma = \varphi H_0 / (1 - \beta_1), \quad \text{где} \quad \beta_1 = H_1 / H_{01}. \quad (6.29)$$

АП по трем членам выражения (6.28) при $\varepsilon = 1$ имеет вид:

Таблица 6.3.

a/b	1	1.5	2	3
Решение	2.36	2.30	2.19	1.72
φH_0	1.76 $\delta=25.3\%$	1.7 $\delta=25.7\%$	1.64 $\delta=25.1\%$	1.54 $\delta=10.5\%$
$\varphi(H_0 + H_1)$	2.30 $\delta=2.5\%$	2.11 $\delta=8.7\%$	1.96 $\delta=10.5\%$	1.71 $\delta=0.6\%$
Формула (6.28) при $\varepsilon=1$	2.18 $\delta=2.41\%$	2.17 $\delta=10.1\%$	1.91 $\delta=12.9\%$	1.68 $\delta=2.26\%$
Формула (6.29)	2.30 $\delta=2.41\%$	2.19 $\delta=4.87\%$	1.98 $\delta=9.37\%$	1.07 $\delta=0.43\%$
Формула (6.30)	2.36 $\delta=0.16\%$	2.25 $\delta=2.17\%$	2.02 $\delta=7.94\%$	1.71 $\delta=0.43\%$

$$H = \varphi H_0 \frac{1 + (\beta_1 + \beta_2)}{1 + \beta_2}, \quad (6.30)$$

где $\beta_2 = -H_2 / H_1$.

В таблице 6.3 приведены результаты вычисления параметра H и приведенные в [37, с. 804] данные для пластин с различным отношением сторон a/b при $\nu = 0.3$. Также даны значения относительных ошибок δ в процентах.

Таким образом, два приближения в сочетании с АП дают хорошие результаты. Однако даже нулевое и первое приближения вполне пригодны для достаточно точного решения.

Упрощение Ишлинского-Лейбензона может рассматриваться как нулевое приближение некоторого асимптотического процесса. Если погрешность нулевого приближения велика, то можно уточнять решение, достраивая следующие приближения и применяя к полученному отрезку ряда теории возмущений аппроксимацию Паде. Модифицированный таким образом метод Ишлинского-Лейбензона является во многих случаях полезным инструментом исследования устойчивости упругих систем.

В целом можно считать оправданным утверждение работы [52]: «Применительно к исследованию устойчивости тонкостенных элементов конструкций применение приближенного подхода является обоснован-

ным, если ограничиться точностью вычислений критических нагрузок, соответствующих точности гипотез Киргхофа-Лява».

6.3. Собственные планарные колебания пластины

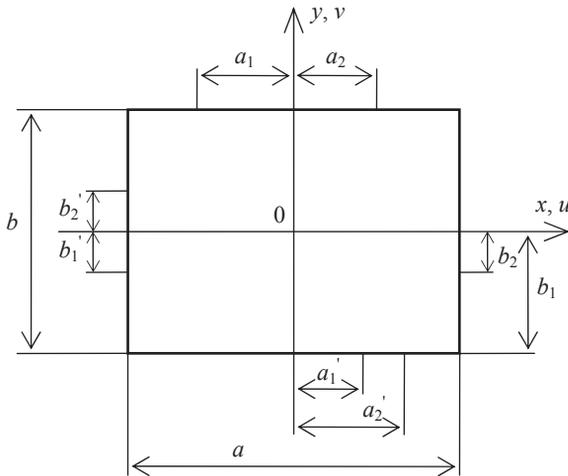


Рис. 6.1. Схема пластины.

Рассмотрим собственные колебания прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями в своей плоскости (рис. 6.1). Исходные уравнения движения таковы:

$$(1+c) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 u = 0; \quad (6.31)$$

$$(1+c) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 v = 0,$$

где $c = 1/(1-2\mu^*)$; $\mu^* = \nu/(1+\nu)$; ν – коэффициент Пуассона, ω – частота собственных колебаний; $\rho = \rho_0/E$, ρ_0 – плотность материала пластины.

Граничные условия могут быть записаны при помощи функции Хевисайда. В итоге имеем:

$$\begin{aligned}
\text{при } x = a/2 : \quad & u = 0, \quad H_1 v + (1 - H_1) S = 0; \\
\text{при } x = -a/2 : \quad & u = 0, \quad H_2 v + (1 - H_2) S = 0; \\
\text{при } y = b/2 : \quad & v = 0, \quad H_3 u + (1 - H_3) S = 0; \\
\text{при } y = -b/2 : \quad & v = 0, \quad H_4 u + (1 - H_4) S = 0;
\end{aligned} \tag{6.32}$$

где $S = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$; G – модуль сдвига;

$$\begin{aligned}
H_1 &= H(x, y - a_1) - H(x, -y - a_2); \quad H_2 = H(x, y - a'_1) - H(x, y - a'_2); \\
H_3 &= H(x - b_1, y) - H(x - b_2, y); \quad H_4 = H(x - b'_1, y) - H(x - b'_2, y).
\end{aligned}$$

При введении гомотопического параметра ε условия (6.32) приобретают вид:

$$\begin{aligned}
\text{при } x = a/2 : \quad & u = 0, \quad \varepsilon \left[GH_1 \frac{v}{a} + (1 - H_1) S \right] + (1 - \varepsilon) S = 0; \\
\text{при } x = -a/2 : \quad & u = 0, \quad \varepsilon \left[GH_2 \frac{v}{a} + (1 - H_2) S \right] - (1 - \varepsilon) S = 0; \\
\text{при } y = b/2 : \quad & v = 0, \quad \varepsilon \left[GH_3 \frac{u}{b} + (1 - H_3) S \right] + (1 - \varepsilon) S = 0; \\
\text{при } y = -b/2 : \quad & v = 0, \quad \varepsilon \left[GH_4 \frac{u}{b} + (1 - H_4) S \right] - (1 - \varepsilon) S = 0.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

При $\varepsilon = 0$ граничные условия (6.33) допускают разделения переменных. Неизвестные перемещения и частота раскладываются в ряды по степеням параметра ε :

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\
v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \\
\omega^2 &= \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1^2 + \varepsilon^2 \omega_2^2 + \dots.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Подставляя выражения (6.34) в систему уравнений (6.31) и граничные условия (6.33) и расщепляя их по ε , имеем в нулевом приближении

$$(1+c) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \rho \omega_0^2 u_0 = 0; \quad (6.35)$$

$$(1+c) \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \rho \omega_0^2 v_0 = 0;$$

$$\text{при } x = \pm a/2: \quad u_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0; \quad (6.36)$$

$$\text{при } y = \pm b/2: \quad v_0 = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0.$$

Решение системы уравнений (6.35), удовлетворяющее граничным условиям (6.36), имеет вид:

$$u_0 = A \sin \frac{2m\pi}{a} x \cos \frac{2n\pi}{b} y;$$

$$v_0 = B \sin \frac{2n\pi}{b} x \cos \frac{2m\pi}{a} y;$$

$$\rho \omega_{01}^2 = 4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right); \quad B_1 = -\frac{A m b}{n a};$$

$$\rho \omega_{02}^2 = 4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) (1+c); \quad B_2 = -\frac{A n a}{m b}.$$

В следующем приближении находим:

$$(1+c) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \rho \omega_0^2 u_1 = -\rho \omega_0^2 u_0;$$

$$(1+c) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \rho \omega_0^2 v_1 = -\rho \omega_0^2 v_0;$$

$$\text{при } x = a/2: \quad u_1 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{H_1 v_0}{a};$$

$$\text{при } x = -a/2: \quad u_1 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{H_2 v_0}{a};$$

$$\text{при } x = b/2: \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{H_3 u_0}{b};$$

$$\text{при } x = -b/2: \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{H_4 u_0}{b}.$$

Значения ω_1^2 могут быть определены путем решения задачи сопряжения:

$$\rho\omega_1^2 = \left[A(a_1, a_2) + A(a'_1, a'_2) + B(b_1, b_2) + B(b'_1, b'_2) \right];$$

где

$$A(a_1, a_2) = \frac{n^2 a}{b^2} \left[0.5(a_2 - a_1) - \frac{a}{8\pi m} \left(\sin\left(\frac{4\pi m a_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{4\pi m a_1}{a}\right) \right) \right];$$

$$B(b_1, b_2) = \frac{m^2 b}{a^2} \left[0.5(b_2 - b_1) - \frac{b}{8\pi n} \left(\sin\left(\frac{4\pi n b_2}{b}\right) - \sin\left(\frac{4\pi n b_1}{b}\right) \right) \right];$$

$$N(m, n) = (n^2 a^2 + m^2 b^2)^{-1}.$$

Частное решение, удовлетворяющее граничным условиям первого приближения, имеет вид:

$$u_1 = \frac{A}{b^2} (-1)^n \left[H_4(by/2 - y^2/2) - H_3(y^2/2 + by/2) \right] \sin \frac{2m\pi x}{a};$$

$$v_1 = \frac{B}{a^2} (-1)^m \left[H_{42}(ax/2 - x^2/2) - H_1(x^2/2 + ax/2) \right] \sin \frac{2n\pi y}{b}.$$

Во втором приближении имеем:

$$(1+c) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \rho\omega_0^2 u_2 = -\rho(\omega_2^2 u_0 + \omega_1^2 u_1);$$

$$(1+c) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \rho\omega_0^2 v_2 = -\rho(\omega_2^2 v_0 + \omega_1^2 v_1);$$

при $x = a/2$: $u_2 = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{H_1}{a}(v_0 + v_1);$

при $x = -a/2$: $u_2 = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{H_2}{a}(v_0 + v_1);$

при $y = b/2$: $v_2 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{H_3}{b}(u_0 + u_1);$

при $y = -b/2$: $v_2 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{H_4}{b}(u_0 + u_1).$

Таблица 6.4.

a/b	(6.37)	погрешность, %	(6.38)	погрешность, %	точное решение
0.5	221.0	15.8	277.6	5.8	262.5
1	82.63	4.7	91.34	4.8	86.73
1.5	58.03	6.6	60.38	2.8	62.15
2	49.72	4.0	50.60	2.2	51.79

Решая задачу сопряжения, находим ω_2^2 . Окончательно для квадрата частоты получим следующее выражение:

$$\omega^2 = \omega_1^2 \left\{ 2.5 - \pi^{-2} + 2\pi^{-2} N(m, n) \theta \left[aA(a_1, a_2) + aA(a'_1, a'_2) + \right. \right. \quad (6.37) \\ \left. \left. + bB(b_1, b_2) + bB(b'_1, b'_2) \right] \right\}.$$

Применение АП позволяет аналитически продолжить функцию по конечному числу членов ее ряда и повышает практическую ценность описанного выше метода. АП отрезка ряда

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1^2 + \varepsilon^2 \omega_2^2$$

имеет вид:

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2) + \omega_1^4}{\omega_1^2 - \omega_2^2}. \quad (6.38)$$

В предельном случае, когда на сторонах, перпендикулярных оси y , отсутствуют участки заземления, а на двух других сторонах заземление распространено на всю высоту пластины, можно найти точное решение. В табл. 6.4 приведены результаты вычислений квадрата частоты $\rho\omega^2$ первой формы колебаний, для которых влияние вида граничных условий максимально (при расчетах принято $\nu = 0.3$). Анализ полученных данных показывает, что метод возмущения вида граничных условий дает вполне удовлетворительные результаты.

6.4. Колебания струны с концевой массой и вязким демпфером

Рассмотрим динамическую систему, изображенную на рис. 6.2. Данная модель может описывать колебания тросов подвесных мостов, вантовых систем, проводов высоковольтных линий [143, 147, 165].

Исходное уравнение, граничные и начальные условия имеют вид [147]:

$$\rho \bar{u}_{\tau\tau} - T\bar{u}_{xx} = 0; \quad (6.39)$$

$$\bar{u}(0, \tau) = 0; \quad (6.40)$$

$$m_1 \bar{u}_{\tau\tau}(1, \tau) + \gamma_2 \bar{u}(1, \tau) + \bar{u}_x(1, \tau) = -\alpha \bar{u}_t(1, \tau); \quad (6.41)$$

$$\bar{u}(x, 0) = \varphi(x); \quad \bar{u}_t(x, 0) = \psi_1(x). \quad (6.42)$$

Здесь ρ – плотность материала струны на единицу длины; T – сила натяжения струны; τ – время, остальные обозначения ясны из рис. 6.2.

Перепишем систему (6.39)–(6.42) в новых переменных:

$$\bar{u}_{tt} - \bar{u}_{xx} = 0; \quad (6.43)$$

$$\bar{u}(0, t) = 0; \quad (6.44)$$

$$m \bar{u}_{tt}(1, t) + \gamma_1 \bar{u}(1, t) + \bar{u}_x(1, t) = -\varepsilon_1 \bar{u}_t(1, t); \quad (6.45)$$

$$\bar{u}(x, 0) = \varphi(x); \quad \bar{u}_t(x, 0) = \psi(x), \quad (6.46)$$

где $t = \tau\sqrt{\rho/T}$; $m = m_1/\rho$; $\gamma_1 = \gamma_2/T$; $\varepsilon_1 = \alpha/\sqrt{\rho T}$; $\psi = \psi_1\sqrt{\rho/T}$.

Представим функцию $\bar{u}(x, t)$ в виде

$$\bar{u} = \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{2m}t\right)u(x, t). \quad (6.47)$$

Подставляя выражение (6.47) в соотношения (6.43)–(6.46), получаем

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon u_t - 0.25\varepsilon^2 u; \quad (6.48)$$

$$u(0, t) = 0; \quad (6.49)$$

$$mu_{tt}(1, t) + \gamma u(1, t) + u_x(1, t) = 0; \quad (6.50)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x) + 0.5\varepsilon \varphi(x), \quad (6.51)$$

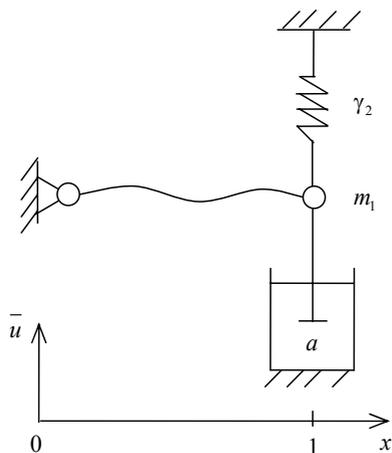


Рис. 6.2. Модель струны, закрепленной в точке $x = 0$ и имеющей на конце $x = 1$ присоединенную массу и вязкий гаситель колебаний

где $\varepsilon = \varepsilon_1/m$; $\gamma = \gamma_1 - 0.25\varepsilon_1^2/m$.

Далее предполагается, что $\varepsilon \ll 1$.

Представление (6.48) позволяет существенно упростить выкладки по сравнению с работой [147]. Решение краевой задачи (6.48)–(6.51) представим в виде ряда по степеням ε :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (6.52)$$

Подставляя (6.52) в (6.48)–(6.51), после расщепления по ε имеем:

$$u_{0tt} - u_{0xx} = 0; \quad (6.53)$$

$$u_0(0, t) = 0; \quad (6.54)$$

$$m u_{0tt}(1, t) + \gamma u_0(1, t) + u_{0,x}(1, t) = 0; \quad (6.55)$$

$$u_0(x, 0) = \varphi(x); \quad u_{0,t}(x, 0) = \psi(x); \quad (6.56)$$

$$u_{1tt} - u_{1,xx} = u_{0,t};$$

$$u_1(0, t) = 0; \quad (6.57)$$

$$m u_{1tt}(1, t) + \gamma u_1(1, t) + u_{1,x}(1, t) = 0; \quad (6.58)$$

$$u_1(x, 0) = 0; \quad u_{1,t} = 0.5\varphi(x); \quad (6.59)$$

$$u_{2tt} - u_{2,xx} = u_{1,t} - 0.25u_0;$$

$$\begin{aligned}
u_2(0,t) &= 0; \\
mu_{2tt}(1,t) + \gamma u_2(1,t) + u_{2xx}(1,t) &= 0; \\
u_2(x,0) &= 0; \quad u_{2t}(x,0) = 0; \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Краевая задача (6.53)–(6.56) допускает разделение переменных [147]. Собственные числа являются решениями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \lambda = m\lambda - \gamma / \lambda. \tag{6.60}$$

Нетрудно убедиться, что $(n-1)\pi < \lambda_n < n\pi$; $n = 1, 2, 3, \dots$, а при $n \rightarrow \infty$ имеем $\lambda_n \rightarrow n\pi$. Корни уравнения (6.60) должны определяться численно. Собственные функции $\sin \lambda_n x$ ортогональны в обобщенном смысле:

$$\int_0^1 [1 + m\delta(x-1)] \sin(\lambda_n x) \cdot \sin(\lambda_m x) dx = 0,$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Окончательно решение краевой задачи (6.53)–(6.56) имеет вид:

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\lambda_n t) + B_n \cos(\lambda_n t)] \sin(\lambda_n x), \tag{6.61}$$

где

$$\begin{aligned}
A_n &= A(\psi(x), \sin(\lambda_n x)) / \bar{A}; \quad B_n = A(\varphi(x), \sin(\lambda_n x)) / (\lambda_n \bar{A}); \\
\bar{A} &= A(\sin(\lambda_n x), \sin(\lambda_n x)); \quad A(a(x), b(x)) = \int_0^1 [1 + m\delta(x-1)] ab dx.
\end{aligned}$$

Уравнение первого приближения таково:

$$u_{1tt} - u_{1xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [A_n \cos(\lambda_n t) - B_n \sin(\lambda_n t)] \sin(\lambda_n x).$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$u_1^{(0)} = -0.5t \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t)] \sin(\lambda_n x) \quad (6.62)$$

и является секулярным.

Для устранения данного недостатка можно использовать прием Тиссерана устранения секулярностей. Суть этого приема заключается в следующем [89]. Пусть в результате применения метода возмущений получено решение вида

$$x(t) = \cos \omega t + \beta \sin \omega t ,$$

тогда можно приближенно положить

$$x(t) = \cos(\omega + \varepsilon\beta)t .$$

Прием Тиссерана, примененный к соотношениям (6.61), (6.62), позволяет избавиться от секулярных членов:

$$u_0^{(1)} = u_0 + \varepsilon \quad u_1 \approx \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin((\lambda_n + 0.5\varepsilon)t) + B_n \cos((\lambda_n + 0.5\varepsilon)t)] \sin(\lambda_n x) .$$

Решение уравнения

$$u_{tt}^{(1)} - u_{1xx}^{(1)} = 0$$

с условиями (6.57)–(6.59) таково:

$$u_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \sin(\lambda_n t) \sin(\lambda_n x) ,$$

где $A_n^{(1)} = 0.5A(\varphi(x), \sin(\lambda_n x)) / \bar{A}$.

Окончательно, получаем следующее приближенное решение:

$$u \approx u_0^{(1)} + \varepsilon u^{(1)} .$$

6.5. Колебания струны с нелинейными граничными условиями

В теории подвесных систем (провода высоковольтных передач, кабели подвесных мостов, вантовые системы, конвейерные ленты и т.д.) часто используется модель струны с нелинейными граничными условиями [87, 143, 145–147, 165, 169, 177]. Изучению колебаний данной системы посвящено значительное количество исследований, в которых использовались те или иные варианты метода малого параметра [145–147, 131] или вариационные подходы [87, 143, 165, 169, 177].

В данном параграфе рассматривается волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} \quad (6.63)$$

со следующими граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad (6.64)$$

$$u_x(1, t) + u(1, t) + \alpha u^3(1, t) = 0. \quad (6.65)$$

С физической точки зрения краевая задача (6.63)–(6.65) описывает колебания струны или продольные колебания стержня с нелинейными краевыми условиями.

В случае $\alpha \ll 1$ задача (6.63)–(6.65) часто решается методом Бубнова-Галеркина [87, 143, 165, 169, 177] или методом многих масштабов [145–147]. При использовании вариационных подходов возникает нетривиальная и не до конца решенная проблема редукции бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [145–147].

Последовательные асимптотические решения построены в [145–147]. Однако при $\alpha \sim 1$ ситуация существенно усложняется. Представленные решения в виде

$$u(x, t) = \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} A_j \sin \frac{\pi j x}{2} \sin \frac{\pi j t}{2}$$

приводит к бесконечной системе связанных линейных алгебраических уравнений для коэффициентов A_j . Ее можно решать методом усечения, однако при этом возникают существенные трудности даже при относительно небольшом числе уравнений.

Естественной выглядит идея поиска другого параметра асимптотического разложения, отличного от α . В работах [138, 140] предложен так

называемый «метод малых δ », основанный на введении искусственного малого параметра δ в показатель степени нелинейности. В соответствии с этим подходом граничное условие (6.65) можно представить в виде:

$$u_x + u + \alpha u^{1+2\delta} = 0 \quad \text{при} \quad x = 1 \quad (6.66)$$

и разыскивать решение краевой задачи (6.63), (6.64), (6.66) в виде рядов по параметру δ . Применение указанной процедуры в нелинейной механике [16, 18] показало ее высокую эффективность. В настоящей работе этот подход используется для построения периодических решений краевой задачи (6.63)–(6.65).

Рассмотрим метод малых δ на следующем модельном примере:

$$\ddot{x} + x^3 = 0, \quad (6.67)$$

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (6.68)$$

Будем искать периодическое решение. Введем искусственный малый параметр δ в уравнение (6.67):

$$\ddot{x} + x^{1+2\delta} = 0. \quad (6.69)$$

В окончательном выражении следует положить $\delta = 1$, однако в процессе решения считаем $\delta \ll 1$. Тогда

$$x^{2\delta} = 1 + \delta \ln x^2 + 0.5\delta^2 (\ln x^2)^2 + \dots \quad (6.70)$$

Представим далее решение уравнения (6.67) в виде

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k x_k \quad (6.71)$$

и произведем замену независимой переменной

$$t = \tau/\omega, \quad (6.72)$$

где $\omega^2 = 1 + \alpha_1\delta + \alpha_2\delta^2 + \dots$. Постоянные α_i ($i = 1, 2, \dots$) подлежат определению в процессе решения задачи.

После подстановки соотношений (6.70)–(6.72) и расщепления по δ получим следующую рекуррентную последовательность краевых задач:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad (6.73)$$

$$x_0(0) = 1, \dot{x}_0(0) = 0; \quad (6.74)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -x_0 \ln(x_0^2) - \alpha_1 \ddot{x}_0, \quad (6.75)$$

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0; \quad (6.76)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1 \ln(x_0^2) - 2x_1 - x_0 (\ln(x_0^2))^2 - \alpha_2 \ddot{x}_0 - \alpha_1 \ddot{x}_1, \quad (6.77)$$

$$x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0; \quad (6.78)$$

.....

Краевая задача нулевого приближения (6.73), (6.74) имеет решение

$$x_0 = \cos t.$$

В первом приближении получаем:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\cos t \ln(\cos^2 t) + \alpha_1 \cos t \equiv L_0. \quad (6.79)$$

Для того, чтобы в решении краевой задачи (6.76), (6.79) отсутствовали секулярные члены, поставим условие

$$\int_0^{\pi/2} L_0 \cos t \, dt = 0, \quad (6.80)$$

из которого определяется постоянная $\alpha_1 = 1 - 2 \ln 2$.

Выражение для периода колебаний можно представить в виде:

$$T = 2\pi[1 + \delta(\ln 2 - 0.5)].$$

При $\delta = 1$ получаем $T = 6.8070$, тогда как точное значение $T = 7.4164$ (погрешность приближенного решения составляет 8.2%).

Построение следующего приближения (решение краевой задачи (6.77), (6.78)) дает значение периода, практически совпадающее с точным: $T = 7.4111$.

Рассмотрим теперь краевую задачу (6.63), (6.64), (6.66), положив в последнем выражении $\alpha = 1$, и будем искать ее решение в виде

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k u_k. \quad (6.81)$$

Выполним также замену переменной (6.72). Нелинейный член в краевом условии (6.66) представим в виде:

$$u^3 \equiv u^{1+2\delta} = u \left[1 + \delta \ln u^2 + \frac{\delta^2}{2} (\ln u^2)^2 + \dots \right]. \quad (6.82)$$

Как и ранее, параметр δ считаем в процессе решения малым, а в окончательном выражении положим $\delta = 1$.

После подстановки соотношений (6.72), (6.81), (6.82) в исходную краевую задачу (6.63), (6.64), (6.66) и расщепления по параметру δ приходим к рекуррентной последовательности краевых задач:

$$u_{0tt} = u_{0xx}; \quad (6.83)$$

$$u_0 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (6.84)$$

$$u_{0x} + 2u_0 = 0 \quad \text{при} \quad x = 1; \quad (6.85)$$

$$u_{0tt} = u_{0xx} - \sum_{p=0}^1 \alpha_{i-p} u_{ptt}; \quad (6.86)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (6.87)$$

$$u_{1x} + 2u_1 = -u_0 \ln u_0^2 \quad \text{при} \quad x = 1; \quad (6.88)$$

$$u_{0tt} = u_{0xx} - \sum_{p=0}^2 \alpha_{i-p} u_{ptt}; \quad (6.89)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (6.90)$$

$$u_{2x} + 2u_2 = -u_1 \ln u_0^2 - 2u_1 - 0.5u_0 (\ln u_0^2)^2 \quad \text{при} \quad x = 1; \quad (6.91)$$

.....

Здесь $\alpha_0 = 0$.

Решение краевой задачи нулевого приближения (6.83)–(6.85) можно представить в виде:

$$u_0 = A \sin(\omega_0 x) \sin(\omega_0 t),$$

где частота ω_0 определяется из трансцендентного уравнения:

$$\omega_0 = -2 \operatorname{tg} \omega_0.$$

Первые несколько ненулевых значений ω приведены в табл. 6.5. При $k \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика: $\omega_0^{(k)} \rightarrow 0.5\pi(2k+1)$.

Таблица 6.5.

$\omega_0^{(1)}$	$\omega_0^{(2)}$	$\omega_0^{(3)}$	$\omega_0^{(4)}$	$\omega_0^{(5)}$	$\omega_0^{(6)}$	$\omega_0^{(7)}$	$\omega_0^{(8)}$	$\omega_0^{(9)}$	$\omega_0^{(10)}$
2.289	5.087	8.096	11.17	14.28	17.39	20.52	23.65	26.78	29.91

Соотношения первого приближения таковы:

$$u_{1xx} - u_{1tt} = \alpha_1 A \omega_0^2 \sin(\omega_0 x) \sin(\omega_0 t); \quad (6.92)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (6.93)$$

$$u_{1x} + 2u_1 = A_1 \sin(\omega_0 t) \left[\ln(A^2 \sin^2 \omega_0) + \ln(\sin^2 \omega_0 t) \right] \quad \text{при} \quad x = 1; \quad (6.94)$$

где $A_1 = -A \sin \omega_0$.

Частное решение уравнения (6.92), удовлетворяющее граничному условию (6.93), имеет вид:

$$u_1^{(1)} = -0.5 \alpha_1 A \omega_0 x \cos(\omega_0 x) \sin(\omega_0 t).$$

Подберем постоянную α_1 таким образом, чтобы компенсировать резонансное слагаемое в правой части уравнения (6.94):

$$\alpha_1 = 2R_1 / (\omega_0 (6 + \omega_0^2)),$$

где $R_1 = \ln(0.25eA^2 \sin^2 \omega_0)$.

Резонансные гармоники в правой части условия (6.94) дают решение

$$u_1^{(2)} = 4A_1 \sum_{k=2}^{\infty} T_k \sin(\omega_0 kx) \sin(\omega_0 kt) \frac{1}{k^2 - 1}; \quad (6.95)$$

где $T_k = 1 / [k\omega_0 \cos(k\omega_0) + 2\sin(k\omega_0)]$.

Решение (6.95) может содержать малые знаменатели и нуждается в дополнительном исследовании, например, методами КАМ теории. Полное решение первого приближения имеет вид

$$u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)}.$$

При построении второго приближения перепишем правую часть граничного условия (6.91) в виде:

$$u_{2x} + 2u_2 = -2u_1 - 0.5u_1 \ln u_0^2 \quad \text{при } x = 1. \quad (6.96)$$

Выделим в правой части граничного условия (6.96) резонансную гармонику:

$$u_{2x} + 2u_2 = -R_2 \sin \omega_0 t + \varphi(t) \quad \text{при } x = 1, \quad (6.97)$$

где $R_2 = A\omega_0 \sin \omega_0 [\alpha_1 (\text{ctg} \omega_0 + 0.5(\omega_0 - \text{ctg} \omega_0)R_1 + R_3)]$, $R_3 = 4 \sum_{k=3,5,\dots} T_k$,

$T_k = k^2 / \left((k^2 - 1) [k\omega_0 + 2\text{tg}(k\omega_0)]^2 \right)$, через $\varphi(t)$ обозначена сумма нерезонансных гармоник.

Построим частное решение уравнения (6.96), удовлетворяющее граничному условию (6.90), для резонансной правой части:

$$u_2^{(1)} = -0.5A \sin(\omega_0 t) x \omega_0 [\alpha_2 \cos(\omega_0 x) + \alpha_1^2 \sin(\omega_0 x)]. \quad (6.98)$$

Постоянная α_2 подбирается из условия отсутствия резонансных членов в правой части краевого условия (6.94). В результате получаем:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1^2 (\text{tg} \omega_0 + \omega_0) + \alpha_1 (2 - R_1) + \text{tg} \omega_0 (\alpha_1 \omega_0 + 2R_3)}{\omega_0 \text{tg} \omega_0 - 3}.$$

Таким образом, с точностью до членов третьего порядка малости по δ искомую частоту колебаний можно представить в виде:

$$\omega \cong \omega_0 \sqrt{1 + \alpha_1 \delta + \alpha_2 \delta^2}. \quad (6.99)$$

Если применить для уточнения результата АП, то получим:

$$\omega \cong \omega_0 \sqrt{\frac{\alpha_1 + (\alpha_1^2 - \alpha_2) \delta}{\alpha_1 - \alpha_2 \delta}}. \quad (6.100)$$

Полагая $\delta = 1$, из формул (6.99), (6.100) получаем решение исходной задачи (6.63)–(6.65).

Описанная методика будет работать тем хуже, чем более высокой частоты колебания рассматриваются. Однако понятно, что в этом случае более адекватной является асимптотика, основанная на разложении по величине, обратной частоте. Тогда в нулевом приближении получаем

линейную краевую задачу (6.83), (6.84) и $u_{0x}(0, t) = 0$, а нелинейные члены в граничных условиях учитываются далее при помощи известных методов построения решения в виде разложения по малому параметру [145–147].

Предложенный подход допускает обобщения на более сложные системы, например, двух- и трехмерные по пространственным переменным. Можно рассматривать и случаи, когда волновое уравнение нелинейно. Отметим, что предлагаемая методика позволяет решать уравнения вида

$$\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x)|x|^{1+2\delta} = 0.$$

Возможно также решение уравнения (6.63) с граничным условием (6.64) и граничным условием

$$u_x + u + \alpha \operatorname{sgn}(u)|u|^{1+2\delta} = 0 \quad \text{при } x = 1.$$

Рассмотрим еще одно важное применение метода малых δ . А именно, исследуем уравнение

$$\ddot{x} + x^{\frac{1}{2n+1}} = 0 \tag{6.101}$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = A \tag{6.102}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Решение уравнения (6.101) может быть найдено в специальных функциях, однако оно неудобно на практике. В пределе $n \rightarrow \infty$ имеем:

$$\ddot{x}_0 + \operatorname{sgn}(x_0) = 0, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{6.103}$$

Аналитическое решение уравнения (6.103) может быть представлено в виде рядов Фурье, получено методом приспособывания или при помощи пилообразных функций В.Н.Пилипчука [89].

Введем параметр $\delta = (2n + 1)^{-1}$, $\delta \ll 1$. Рассмотрим только значения $x > 0$, поскольку для $x < 0$ решение получается симметричным отражением. Используем разложение

$$x^\delta = 1 + \delta \ln|x| + O(\delta^2), \quad (6.104)$$

а решение задачи (6.101), (6.102) будем искать в виде:

$$x = x_0 + \delta x_1 + O(\delta^2). \quad (6.105)$$

Подстановка разложения (6.105) в (6.101), (6.102), с учетом соотношения (6.104), приводит к уравнению

$$\ddot{x}_1 = -\ln|x_0|. \quad (6.106)$$

Решение уравнения (6.106) рассматриваем на 1/4 части периода.

Решение уравнения нулевого приближения (6.103) таково:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2}(t-2A) & \text{при } 0 \leq t \leq 2A, \\ \frac{t^2}{2} - 3At + 4A^2 & \text{при } 2A \leq t \leq 4A; \end{cases}$$

$$x(t+nT) = x(t), \quad T = 4A.$$

Первое приближение имеет вид

$$\ddot{x}_1 = -\ln\left(tA - \frac{t^2}{2}\right), \quad (6.107)$$

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0. \quad (6.108)$$

Интегрируя уравнение (6.107), имеем:

$$x_1(t) = 2At - 3t^2 - t^2 \ln 2 - 4A(A-t) \ln|-2A| + t^2 \ln|2A-t| + \\ + t^2 \ln t + 4A^2 \ln|-2A+t| - 4At \ln|-2A+t|.$$

Окончательно находим:

$$x \approx x_0 + \delta x_1. \quad (6.109)$$

АП дает:

Таблица 6.6.

T	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 100$
Рунге-Кутта	1.2198	1.1651	1.1320	1.1099	1.0598	1.0068
(6.109)	1.3057	1.2077	1.1575	1.1269	1.0644	1.0065
$\Delta_{(6.109)}, \%$	7.04	3.66	2.25	1.53	0.434	0.0047
(6.110)	—	—	—	1.2537	1.0793	1.0066
$\Delta_{(6.110)}, \%$	—	—	—	12.9	1.85	0.0160
(6.111)	—	—	1.2231	1.1612	1.0710	1.0066
$\Delta_{(6.111)}, \%$	—	—	8.05	4.62	1.06	0.0103

$$x \approx \frac{x_0^2}{x_0 - \delta x_1}. \quad (6.110)$$

Экспоненциальная аппроксимация такова:

$$x \approx x_0 \exp(\delta x_1 / x_0). \quad (6.111)$$

Расчеты по полученным формулам сравнивались с результатами численного решения методом Рунге-Кутта (табл. 6.6). Анализ результатов позволяет сделать вывод: наилучшее приближение дает формула (6.109). Относительная погрешность быстро падает с ростом n . Кроме того, экспоненциальная аппроксимация дает результаты лучшие, чем АП.

6.6. Уменьшение порядка дифференциальных уравнений

При расчетах подвесных конструкций во многих случаях пренебрегают изгибной жесткостью и переходят к упрощенным моделям струны или мембраны. Однако это не дает возможности правильно определить высшие частоты и формы колебаний. Рассмотрим для примера колебания конвейерной ленты в рамках одномерной пространственной системы. В простейшем приближении исходное уравнение имеет вид:

$$\rho F w_{tt} - T w_{xx} + E I w_{xxxx} = 0, \quad (6.112)$$

где ρ – плотность материала; T – сила натяжения; F , I – площадь и статический момент поперечного сечения ленты.

Граничные условия примем в виде:

$$w = w_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L. \quad (6.113)$$

Преобразуем исходную краевую задачу (6.112), (6.113), положив $\xi = x/L$; $\varepsilon = EI/(TL^2)$:

$$w_{\tau\tau} - w_{\xi\xi} + \varepsilon w_{\xi\xi\xi\xi} = 0; \quad (6.114)$$

$$w = w_{\xi\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, 1. \quad (6.115)$$

Модель струны получается из соотношений (6.114), (6.115) при $\varepsilon = 0$:

$$w_{\tau\tau} - w_{\xi\xi} = 0; \quad (6.116)$$

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, 1 \quad (6.117)$$

Преимуществом краевой задачи (6.116), (6.117) является второй порядок по пространственной координате, что существенно упрощает выкладки. Покажем, что можно сохранить второй порядок приближенного уравнения по координате, повысив точность аппроксимации. А именно, для дифференциального оператора $-\partial^2/\partial\xi^2 + \varepsilon\partial^4/\partial\xi^4$ применим АП, заменив его следующим:

$$\frac{-\partial^2/\partial\xi^2}{(1 + \varepsilon\partial^2/\partial\xi^2)}.$$

Тогда уравнение (6.114) с точностью до ε^2 можно переписать так:

$$(1 + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}) w_{\tau\tau} - w_{\xi\xi} = 0. \quad (6.118)$$

Граничные условия для уравнения (6.118) имеют вид (6.117). Если модель (6.116), (6.117) аппроксимирует собственные числа исходной задачи с точностью до ε , то модель (6.118), (6.118) – с точностью до ε^2 , при этом порядок уравнения по пространственной координате не изменяется.

Уравнение (6.118) можно получить и другим способом. Для этого нужно подействовать на уравнение (6.114) оператором $1 + \varepsilon \partial^2 / \partial \xi^2$, а затем отбросить члены порядка малости выше второго.

Аналогично можно уменьшить порядок уравнения, описывающего колебания пластины с малой изгибной жесткостью:

$$w_{\tau\tau} - \nabla^2 w + \varepsilon \nabla^4 w = 0. \quad (6.119)$$

Пусть граничные условия имеют вид:

$$w = \nabla^2 w = 0 \quad \text{при} \quad \xi, \eta = 0, 1.$$

Модель мембраны получается из уравнения (6.119) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} w_{\tau\tau} - \nabla^2 w &= 0; \\ w &= 0 \quad \text{при} \quad \xi, \eta = 0, 1. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Уточненная модель такова:

$$(1 - \varepsilon \nabla^2) w_{\tau\tau} - \nabla^2 w = 0.$$

Граничные условия имеют вид (6.120).

ЛИТЕРАТУРА

1. Айрапетян Г.А., Сунчелеев Р.Я. Устойчивость прямоугольной пластины, находящейся в условиях сложной заделки по контуру // Изв. АН УзССР, сер. техн. наук. – 1977. – №2. – С.27 – 31.
2. Александров В.М. О решении одного класса парных уравнений // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 210, №1. – С.55 – 58.
3. Александров В.М., Зеленцов В.Б. Асимптотические методы в задачах об изгибе пластин со смешанными условиями закрепления // Теория пластин и оболочек. – М.: Наука, 1973. – С.20 – 23.
4. Александров В.М., Зеленцов В.Б. Динамические задачи об изгибе прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями закрепления по контуру // Прикл. матем. мех. – 1979. – Т.43, вып.1. – С.55 – 58.
5. Александров В.М., Чебаков М.Л. Об одном методе решения парных интегральных уравнений // Прикл. матем. мех. – 1973. – Т.37, вып. 6. – С.1087 – 1097.
6. Александров В.М., Чебаков М.Л. Метод парных рядов по функциям Бесселя в смешанных задачах теории упругости для круглой пластины // Прикл. мат. мех. – 1977. – Т.41, вып. 3. – С.486 – 493.
7. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. – 312с.
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. – 360 с.
9. Андрианов И.В. Применение метода Паде-аппроксимант для устранения неоднородностей асимптотических разложений // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1984. – №3. – С.166 – 167.
10. Андрианов И.В., Иванков А.О. Применение Паде-аппроксимант в методе введения параметра при исследовании бигармонических уравнений со сложными граничными условиями // ЖВММФ. – 1987. – Т.27, №2. – С.296 – 301.
11. Андрианов И.В., Иванков А.О. Решение смешанных задач теории изгиба пластин модифицированным методом возмущения вида граничных условий // Докл. АН УССР, серия А. – 1988. – №1. – С.33 – 36.
12. Андрианов И.В., Иванков А.О., Колесник И.А. Динамика пластин со смешанными граничными условиями // Изв. Вузов машиностроение. – 1987. – №8. – С.34 – 37.

13. Андрианов И.В., Иванков А.О. Применение метода возмущения вида граничных условий в сочетании с Паде – аппроксимацией для решения смешанных задач теории пластин // Расчет тонкостенных элементов конструкций на прочность, устойчивость, колебания и долговечность. – М.: МАИ, 1988. – С.4 – 7.
14. Андрианов И.В., Иванков А.О. Модифицированный метод возмущения граничных условий для пластин со смешанными граничными условиями // Современные проблемы механики контактных взаимодействий. Днепропетровск. 1990. – С.41 – 44.
15. Андрианов И.В., Иванков А.О. Новый аналитический метод для смешанных задач теории пластин // Труды 15 Всесоюзной конф. по теории пластин и оболочек. Казань, 1990. – С.470 – 475.
16. Андрианов И.В., Иванков А.О., Ефимов А.Е. Вынужденные колебания пластин со смешанными граничными условиями // Теоретичні основи будівництва. – 1993. – Т.1. – С.9 – 12.
17. Андрианов И.В., Иванков А.О., Курпа Л.В. Аналитическое и численное исследование устойчивости пластин со смешанными граничными условиями // Изв.ВУЗов строительство и архитектура. – 1990. – №8. – С.25 – 29.
18. Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. – 224 с.
19. Андрианов И.В., Сазонец О.Н. Асимптотический метод исследования колебаний распределенной системы с нелинейными граничными условиями // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1995. – №52. – С.31 – 37.
20. Андрианов И.В., Сазонец О.Н. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки с нелинейными граничными условиями // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1999. – М.: Тов.научных изданий КМК. – С.55 – 60.
21. Андрианов И.В., Самойленко О.Г. О методе Ишлинского – Лейбензона в теории упругой устойчивости // МТТ. – 2001. – №6. – С.132 – 139.
22. Апресян Л.А. Аппроксиманты Паде // Изв. Вузов Радиофизика. – 1979. – Т.22, №6. – С.653 – 674.
23. Беллман Р. Метод возмущений в приложении к нелинейной механике // Механика. Сб. переводов и обзоров иностр. период. литер. 1957. – №2. – С.154 – 159.
24. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимация Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

25. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. – 448с.
26. Бердичевский В.Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек // ПММ. – 1979. – Т.43, №4. – С.664 – 687.
27. Бернштейн С.Н. Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. – Харьков: изд-во Харьковского ун-та, 1956. – 193 с.
28. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Физматгиз, 1967. – 239 с.
29. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
30. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – Киев: Наукова думка, 1976. – 270 с.
31. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, 1983. – 328 с.
32. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок // Инженерный сборник. – 1961. – Т.31. – С.3 – 14.
33. Болотин В.В. Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей // Проблемы механики сплошной среды. – М.: Изд. АН СССР, 1961. – С.60 – 72.
34. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336с.
35. Бреббия К., Телес Ж., Броубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 525 с.
36. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
37. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Пластины, диски, балки-стенки. – Киев: Госстройиздат УССР, 1959. – 1049 с.
38. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. – Киев: Будівельник, 1970. – 435 с.
39. Ван-Дайк М. Методы возмущения в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. – 309 с.
40. Варвак П.М., Дубинский А.М. Исследование прямоугольных плит при смешанных граничных условиях // Теория пластин и оболочек. – Киев: АН УССР, 1962. – С.444 – 448.
41. Варвак П.М. Справочник по теории упругости. – Киев: Будівельник, 1971. – 418 с.

42. Войцеховская Н.Ф. Устойчивость цилиндрических оболочек с точки зрения математической теории упругости // Докл. АН СССР. – 1982. – Т.266. – №1. – С.59 – 63.
43. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 879 с.
44. Вятчин А.В. О сходимости аппроксимант Паде // Вестник МГУ, серия матем. и механика. – 1981. – Т.4, №3. – С.3 – 6.
45. Гликман Б.Т. Свободные колебания круглой пластинки со смешанными граничными условиями // Изв. АН СССР механика твердого тела. – 1972. – №1. – С.135 – 140.
46. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 356с.
47. Голуб А.П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222с.
48. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек. – Киев: Наукова думка, 1964. – 287 с.
49. Гончар А.А. Полюса строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций // Матем. сб. – 1981. – Т.115, №4. – С.590 – 613.
50. Гончар А.А. О равномерной сходимости диагональных аппроксимант Паде // Матем. сб. – 1982. – Т.118, №4. – С.535 – 556.
51. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Поверхностная устойчивость // Прикладная механика. – 1986. – Т.22. №1. – С.24 – 35.
52. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Устойчивость элементов конструкции // Прикладная механика. – 1986. – Т.22. – №2. – С.3 – 17.
53. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наук.думка. – 1971. – 276с.
54. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Внутренняя неустойчивость // Прикл.механика. – 1985. – Т.21. – №11. – С.3 – 17.
55. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512с.
56. Динамический расчет зданий и сооружений / Барштейн М.Ф., Ильичев В.А., Коренев Б.Г. и др. – М.: Стройиздат, 1984. – 303 с.
57. Долженко Е.П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимации // Матем. заметки. – 1967. – Т.1, №3. – С.313 – 320.
58. Дородницын А.А. Использование метода малого параметра для численного решения уравнений математической физики // Чис-

- ленные методы решения задач механики сплошных сред. – М.: ВЦ АН СССР. – 1969. – С.85 – 100.
59. Дородницын А.А., Меллер И.А. О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье – Стокса // ЖВММФ. – 19868. – Т.8, №2. – С.393 – 402.
 60. Дородницын А.А. Применение метода малого параметра к численному решению дифференциальных уравнений // Соврем.проблемы матем.физики и вычисл.матем. – М.: Наука, 1982. – С.145 – 155.
 61. Ержанов Ж.С., Егоров А.К. Теория процесса складкообразования в толще горных пород (математическое описание). – Алма-Ата: Наука, 1968. – 121с.
 62. Ершов Л.В. О постановке задач устойчивости горных выработок // Докл. АН СССР. – 1962. – Т.143, №2. – С.305 – 307.
 63. Ершов Л.В., Ивлев Д.Д. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв.АН СССР ОТН. – 1957. – № 8. – С.149 – 152.
 64. Зеленцов В.Б. Метод однородных решений в задачах об изгибе пластин со смешанными условиями закрепления по контуру // Изв. АН СССР механика твердого тела. – 1980. – №5. – С.124 – 132.
 65. Каюк Я.Ф. Об аналитическом продолжении решений нелинейных дифференциальных уравнений по параметру // Укр. мат. журнал. – 1967. – №19. – С.131 – 138.
 66. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. – Киев: Наукова думка, 1980. – 168 с.
 67. Кир Л.М., Сталь В. Задачи о собственных значениях прямоугольных пластин при смешанных краевых условиях // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия Е. – 1972. – №2. – С.196 – 204.
 68. Колесник И.А., Иванков А.О. Расчет напряженно – деформированного состояния частично защемленной прямоугольной пластины методом возмущения вида граничных условий // Динамика и прочность машин. – 1988. – Вып.47. – С.26 – 31.
 69. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
 70. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1965. – 232 с.
 71. Крупка З.И. Приближение мероморфных функций рациональными и ускорение сходимости степенных рядов // Докл. АН УССР, серия А. – 1982. – №10. – С.24 – 28.

72. Кублановская В.Н. Применение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе // Труды математич. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1959. – Т.53. – С.145 – 185.
73. Курпа Л.В. Метод R-функций в задачах о собственных колебаниях пластин со смешанными условиями закрепления // Гидроаэромеханика и теория упругости. – 1983. – Вып.31. – С.80 – 84.
74. Легеня И.Д. Об устойчивости толстой прямоугольной свободно – опертой плиты под действием сжимающих нагрузок // Докл. АН СССР. – 1961. – Т.140. – №4. – С.776 – 779.
75. Лейбензон Л.С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферических и цилиндрических оболочек // Сборание трудов, Т.1. – М.: Изд-во АН СССР. – 1951. – С.50 – 86.
76. Линн П., Кумбасар Н. Свободные колебания тонких шарнирно опертых прямоугольных платинок, имеющих узкие трещины // Механика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир, 1984. – С.131 – 144.
77. Литвинов Г.Л. Приближенное построение рациональных аппроксимаций и эффект автокоррекции погрешности // Математическое моделирование. – 1990. – С.99 – 141.
78. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
79. Майборода В.П., Трояновский И.Е., Яганов В.М. Динамический расчет пластин с разрывными граничными условиями // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1984. – №2. – с.105 – 108.
80. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. – Киев – Донецк: Вища школа, 1982. – 152 с.
81. Масловская Л.В. Поведение решений краевых задач для бигармонического уравнения в областях с угловыми точками // Диф. уравнения. – 1983. – Т. XIX, №12. – С.2172 – 2173.
82. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 277 с.
83. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложение в механике // Механика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир, 1978. – 209 с.
84. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы / Рвачев В.Л., Курпа В.Л. и др. – Киев: Наук. думка, 1973. – 121 с.

85. Милосердова И.В., Потапов А.И., Новиков А.А. Импульсные волны в одномерной системе с нелинейными границами // Волны и дифракция. – 1987. – Т.27. – №2. – С.296 – 301.
86. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
87. Муницын А.И. Собственные колебания балки с нелинейными опорами // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1998. – №2. – С.36 – 39.
88. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
89. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1991. – 416 с.
90. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.
91. Пальцев Б.В. О разложении решений задачи Дирихле и смешанной задачи для бигармонических уравнений в ряд по решениям распадающихся задач // ЖВММФ. – 1966. – Т.6, №1. – С.43 – 51.
92. Пальцев Б.В. Метод малого параметра в задаче для системы Озеена // ЖВММФ. – 1967. – Т.7, №5. – С.1144 – 1166.
93. Пальцев Б.В. Сходимость разложений по малому параметру, вводимому в граничные условия, решений краевой задачи для уравнений Навье – Стокса // ЖВММФ. – 1970. – Т.10, №2. – С.383 – 400.
94. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наук.думка, 1980. – 352с.
95. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. – Киев: Наук.думка, 1984. – 600с.
96. Прочность, устойчивость, колебания, т.3 / Под ред. И.Л.Биргера и Я.Г.Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567с.
97. Рахманов Е.А. О сходимости аппроксимаций Паде в классах мероморфных функций // Матем.сб. – 1980. – Т.112, №2. – С.162 – 169.
98. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. Структуры решений задач теории пластин со смешанными граничными условиями // Докл. АН УССР, серия А. – 1983. – №9. – С.34 – 37.
99. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. Киев: Наук.думка, 1987. – 176с.

- 100.Рвачев В.Л., Учишвили Л.А. Об одном методе решения задач изгиба пластинки, защемленной по контуру // Прикл.механика. – 1968. – Т.4, №4. – С.123 – 128.
- 101.Семерджиев Х. Аппроксиманты Паде для функций, заданных тригонометрическими рядами // Научные труды Пловдивского университета. – 1975. – Т.13, №1. – С.409 – 420.
- 102.Семерджиев Х. Тригонометрические аппроксиманты Паде и эффект Гиббса // Сообщения объедин. ин-та ядерных исследований. – 1979. – №Р5 – 12484. – 10с.
- 103.Смирнов В.А. Расчет пластин сложного очертания. – М.: Стройиздат, 1978. – 303с.
- 104.Суэтин С.П. Аппроксимация Паде и эффективное аналитическое представление степенного ряда // УМН. – 2002. – Т.57. – №1. – С.46 – 142.
- 105.Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. – 567с.
- 106.Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 473с.
- 107.Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
- 108.Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М. – Л.: Изд. АН СССР, 1963. – 352с.
- 109.Уфлянд Я.С. Метод парных интегральных уравнений в задачах математической физики. – Л.: Наука, 1977. – 219с.
- 110.Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Гостехиздат, 1956. – 203с.
- 111.Цейтлин А.И. О методе парных интегральных уравнений и парных рядов и его применении к задачам механики // Прикл. мат. мех. – 1966. – Т.30, №2. – С.259 – 266.
- 112.Цейтлин А.И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. – М.: Стройиздат, 1984. – 339с.
- 113.Цейтлин А.И., Гликман Б.Т. Изгиб упругой прямоугольной пластинки со смешанными краевыми условиями // Научные труды ЦНИИСКА. Исследования по динамике сооружений. – М.: 1971. – №17. – С.123 – 142.
- 114.Цейтлин А.И., Гликман Б.Т. Колебания прямоугольной пластинки со смешанными краевыми условиями // Исследования по теории сооружений. – М.: 1972. – Т.19. – С.185 – 194.
- 115.Цейтлин А.И., Гликман Б.Т. Колебания пологой цилиндрической оболочки при смешанных краевых условиях // Научные труды ЦНИИСКА. Динамика сооружений. – 1975. – Вып. 43. – С.4 – 9.

- 116.Цейтлин А.И., Петросян Л.Г. Методы граничных элементов в строительной механике. – Ереван: Луйс, 1987. – 199с.
- 117.Швабюк В.И. Об одной смешанной задаче изгиба тонких плит // Прикл. механика. 1973. – Т.IX, Вып.5. – С.134 – 137.
- 118.Andersen C.M., Dadfar M.B., Geer J.F. Perturbation analysis of the limit cycle of the Van der Pol equation // SIAM J. Appl. Math. – 1984. – Vol.44, N5. – P.881 – 895.
- 119.Andersen C.M., Geer J.F. Power series expansion for the frequency and period of the limit cycle of the Van der Pol equation // SIAM J. Appl. Math. – 1982. – Vol.42, N3. – P.678 – 693.
- 120.Andrianov I.V., Awrejcewicz J. Barantsev R.G. Asymptotic approaches in mechanics: new parameters and procedures // Applied Mechanics Review. – 2003. – Vol.56, N1. – P.87 – 110.
- 121.Andrianov I.V., Awrejcewicz J. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods // Applied Mechanics Review. – 2001. – Vol.54, N1. – P.69 – 92.
- 122.Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Manevitch L.I. Asymptotical Mechanics of Thin-Walled Structures: A Handbook. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. – 535p.
- 123.Andrianov I.V., Danishevs'ky V. Asymptotic approach for nonlinear periodical vibrations of continuous structures // J. Sound Vibr. – 2002. – Vol.249, N3. – P.465 – 481.
- 124.Andrianov I.V., Danishevs'ky V. Asymptotic investigation of the nonlinear dynamic boundary value problem for rod // Technische Mechanik. – 1995. – Vol.15, N1. – P.53 – 55.
- 125.Andrianov I.V., Gristchak V.Z., Ivankov A.O. New asymptotic method for the natural, free and forced oscillations of rectangular plates with mixed boundary conditions // Technische Mechanik. – 1994. – Vol.14, N3/4. – P.185 – 193.
- 126.Andrianov I.V., Ivankov A.O. Solution of stability problem for rectangular plates with mixed boundary conditions on the basis of new asymptotic method // The 5th Conference “Shell Structures: Theory and Applications”, Warsaw, 1992. – P.43 – 46.
- 127.Andrianov I.V., Ivankov A.O. New asymptotic method for solving of mixed boundary value problem // International Series of Numerical Mathematics. – 1992. – Vol.106. – P.39 – 45.
- 128.Andrianov I.V., Ivankov A.O. On the solution of plate bending mixed problems using modified technique of boundary conditions perturbation // ZAMM. – 1993. – Vol.73, N2. – P.120 – 122.
- 129.Andrianov I.V., Kholod E.G., Chernetsky V.A. Asymptotic – based method for a plane elasticity mixed boundary eigenvalue problem //

- Journal Theoretical and Applied Mechanics. – 1994. – Vol.32, N3. – P. 701 – 709.
130. Andrianov I.V., Manevitch L.I. Asymptotology: Ideas, Methods and Applications. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 252 p.
 131. Awrejcewicz J., Andrianov I.V., Manevitch L.I. Asymptotic Approaches in the Nonlinear Dynamics: New Trends and Applications. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. – 310 p.
 132. Baker G.A. Essential of Padé Approximation. – New-York: Academic Press, 1976. – 306 p.
 133. Baker G.A., Jr., Graves-Morris P. Padé Approximants, 2nd ed. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 1996. – 746 p.
 134. Basdevant J.L. The Padé approximation and its physical applications // Fort. Physic. – 1977. – Vol.20, N5. – P.284 – 328.
 135. Bellman R. Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. – 118p.
 136. Bender C.M., Boetcher S. Continued fraction as a discrete nonlinear transform // J. Math. Phys. – 1994. – Vol.35, N1. – P.364 – 367.
 137. Bender C.M., Boetcher S. Determination of $f(\infty)$ from the asymptotic series for $f(x)$ about $x = 0$ // J. Math. Phys. – 1994. – Vol.35, N4. P.1914 – 1921.
 138. Bender C.M., Boetcher S., Milton K.A. A new perturbative approach to nonlinear partial differential equations // J. Math. Phys. – 1991. – Vol.32, N11. – P.3031 – 3038.
 139. Bender C.M., Milton K.A., Moshe Moshe, Pinsky S.S., Simmons L.M.Jr. Logarithmic approximations to polynomic Lagrangeans // Physics Letters Review. – 1987. – Vol.58, N25. – 1987. – P.2615 – 2618.
 140. Bender C.M., Milton K.A., Pinsky S.S., Simmons L.M.Jr. A new perturbation approach to nonlinear problems // J. Math. Phys. – 1989. – Vol.30, N7. – P.1447 – 1455.
 141. Buonomo A. The perturbation solution of Van der Pol's equation // SIAM J. Appl. Math. – 1998. – Vol.59, N1. – P.156 – 171.
 142. Cabay S., Domzy B. Systems of linear equations with dense univariate polynomial coefficients // Journal Assoc. Comp. Mechanics. – 1987. – Vol.34, N3. P. 46 – 60.
 143. Cox S., Zuazua E. The rate at which energy decays in a string damped at one end // Indiana Univ. Math. J. – 1995. – Vol.44. p.545 – 573.
 144. Dadfar M.B., Geer J.F. Power series solution to a simple pendulum with oscillating support //SIAM J. Appl. Math. – 1987. – Vol.47, N4. P.737 – 750.

145. Darmawijoyo, Horssen W.T. van., Clement Ph. On a Rayleigh wave equation with boundary damping // *Nonlinear Dynamics*. – 2003. – Vol.33, N4. – P.399 – 429.
146. Darmawijoyo, Horssen W.T. van. On boundary damped for a weakly nonlinear wave equation // *Nonlinear Dynamics*. – 2002. – Vol.30. – P.179 – 191.
147. Darmawijoyo, Horssen W.T. van. On the weakly damped vibrations of a string attached to a spring-mass-dashpot system // *J. Vibr. Control*. – 2003. – Vol.9, N11. – P.1231 – 1248.
148. Elhage-Hussein A., Potier-Ferry M., Damil N. A numerical continuation method based on Padé approximants // *International Journal of Solids and Structures*. – 2000. – Vol.37. – P. 6981 – 7001.
149. Hamada M., Yutaca Inoue, Hashimoto H. Buckling of simply supported partially clamped rectangular plates uniformly compressed in one direction // *Bull. Japan Soc. Mech. Eng.* – 1967. – Vol.10, N37. – P.35 – 40.
150. He Ji-Huan. A coupling method of homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems // *International Journal of Non-linear Mechanics*. – 2000. – Vol.35. – P. 37 – 43.
151. He Ji-Huan. A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques// *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. – 2000. – Vol.1, N 1. – P. 51 – 70.
152. He Ji-Huan. Homotopy perturbation technique// *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1999. – Vol.178. – P. 257 – 256.
153. Hinch E.J. *Perturbation Methods*. – Cambridge: University Press, 1991. – 160p.
154. Liao S.J. An approximate solution technique not depending on small parameters: a special example // *Int. J. Non-linear Mechanics* – 1995. – Vol.30, N3. – P. 371 – 380.
155. Liao S.J. A second – order approximate analytical solution of a simple pendulum by the process analysis method // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1992. – Vol.59. – P. 970 – 975.
156. Liao S.J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004. – 322 p.
157. Liao S.J., Chwang A.T. Application of homotopy analysis method in nonlinear oscillations // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1998. – Vol.65. – P.914 – 922.
158. Litvinov G.L. Approximate construction of rational approximations and the effect of autocorrection error // *Russian J. Math. Phys.* – 1994. – Vol.1, N3. – P. 313 – 352.

159. Luke Y.L. Computations of coefficients in the polynomials of Padé approximation by solving system of linear equations // *J. Comp. Appl. Math.* – 1980. – Vol.6, N3. – P.213 – 218.
160. Luke Y.L. A note on evaluation of coefficients in the polynomials of Padé approximation by solving system of linear equations // *J. Comp. Appl. Math.* – 1982. – Vol.8, N2. – P.93 – 99.
161. Manevitch L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.O. *Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures.* – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – 264p.
162. Meller N.A., Dorodnitsyn A.A. Application of the small parameter method to the solution of Navier-Stokes equations // *Fluid Dynamics Trans.* – 1971. – Vol.5, N2. – P. 67 – 82.
163. Moenck R.T., Carter J.M. Approximate algorithm to derive exact solutions to systems // *Symp. Algeb. Comp. EUROSAM 1979.* – New York: Springer-Verlag. – P. 65 – 73.
164. Mokhtari R.El., Cadou J.-M., Potier-Ferry M. A two grid algorithm based on perturbation and homotopy method // *C.r. Mechanique.* – 2002. – Vol.330. – P. 825 – 830.
165. Morgül Ö., Rao B.P., Conrad F. On the stabilization of a cable with a tip mass // *IEEE Trans. Autom. Control.* – 1994. – Vol.39, N10. – P.2140 – 2145.
166. Nemeth G., Paris G. The Gibbs phenomenon in generalized Padé approximation // *J. Math. Phys.* – 1985. – Vol.26, N6. – P. 1175 – 1178.
167. Ota T., Hamada M. Fundamental frequencies of simply supported but partially clamped square plates // *Bull. Japan Soc. Mech. Eng.* – 1963. – Vol.6, N23. – P.397 – 403.
168. Shanks D. Non-linear transformation of divergent and slowly convergent sequence // *J. Math. Phys.* – 1955. Vol.34, N1. – P.1 – 42.
169. Szemplinska – Stupnicka W. *The Behaviour of Nonlinear Vibrating System.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. – 340 p.
170. Zorski H. Plates with discontinuous support // *Arch. Mech. Stos.* – 1958. – Vol.X, N3. – P.301 – 313.
171. Zorski H. A semi-infinite strip with discontinuous boundary conditions // *Arch. Mech. Stos.* – 1958. – Vol.X, N3. – P.371 – 398.
172. Van Dyke M. Analysis and improvement of perturbation series // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1974. – Vol.27. – P.423 – 450.
173. Van Dyke M. Computer extension of perturbation series in fluid mechanics // *SIAM J. Appl. Math.* – 1975. – Vol.28. – P.720 – 734.
174. Van Dyke M. From zero to infinite R by computing extension of Stokes series // *Lectures Notes in Mathematics.* – 1977. – Vol.594. – P.506 – 517.

175. Van Dyke M. *Mathematical Approaches in Hydrodynamics*. – Philadelphia: SIAM, 1991.
176. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. – Stanford: The Parabolic Press, 1975p. – 271p.
177. Wang H., Elcrat A.R., Egbert R.I. Modeling and boundary control of conductor galloping // *J. Sound Vibr.* – 1993. – Vol.161. – P.301 – 315.

Наукове видання

Міністерство освіти і науки України
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури

АНДРІАНОВ Ігор Васильович
ДАНІШЕВСЬКИЙ Владислав Валентинович
ІВАНКОВ Андрій Орестович

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ БАЛОК ТА ПЛАСТИН

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради
Придніпровської державної академії будівництва та архітектури,
протокол № 5 від 22 грудня 2009 року.

Підписано до друку 12.01.2010. Формат 60x84 1/16
Папір друк. Ум. друк. арк. 12,5. Облік. - видав арк. 14,3.
Наклад 300 прим. Зам. № 12143

Видавництво Придніпровської державної академії будівництва та
архітектури. 49000, м. Дніпропетровськ, вул. Чернишевського, 24-а.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру ДК № 1291.

Надруковано в типографії видавництва
„СВІДЛЕР А.Л.”
49041, м. Дніпропетровськ, а/с 2493,
тел./факс +38 (056) 776-39-16
<http://svidler.dp.ua>



Игорь Васильевич Андрианов

Доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник Технического университета г. Ахен (Германия). Научные интересы: асимптотические методы, теория пластин и оболочек, механика композитов, нелинейная динамика. Подготовил 1 доктора и 16 кандидатов наук. Автор 14 монографий, 250 научных статей.



Владислав Валентинович Данишевский

Доктор технических наук, профессор Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: асимптотические методы, механика композитов, нелинейная динамика. Автор 1 монографии, 60 научных статей.



Андрей Орестович Иванов

Кандидат технических наук, доцент. Научные интересы: асимптотические методы расчета пластин и оболочек со сложными граничными условиями. Автор 30 научных статей.