И.В. Андрианов
Л.И. Маневич

АСИМПТОТОЛОГИЯ:

идеи, методы, результаты

АСЛАН
Москва
1994

И.В. Андрианов, Л.И. Маневич

АСИМПТОТОЛОГИЯ:

ИДЕИ,

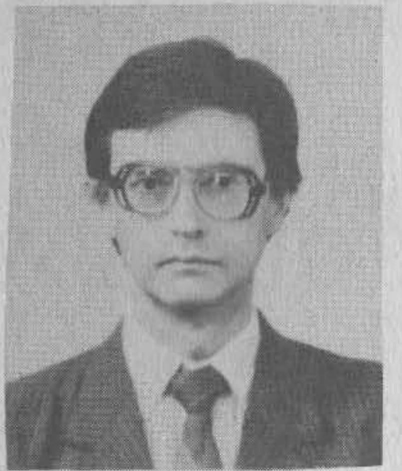
МЕТОДЫ,

РЕЗУЛЬТАТЫ

9

АСЛАН

Москва
1994



Андрианов Игорь Васильевич,
доктор физико-математических наук,
профессор Днепропетровского
Инженерно-строительного института

Маневич Леонид Исакович,
доктор технических наук,
зав. сектором Института Химической
Физики Российской Академии Наук,
профессор Московского
Физико-технического института

И.В. Андрианов, Л.И. Маневич

Асимптотология:
идеи, методы, результаты
1994

ISBN 5-87793-010-9

Подписано к печати 21.02.94. Формат 60×88 1/16. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Физ. печ. л. 10,0. Тираж 1000 экз. Зак.290
Христианско-просветительское издательство «Аслан»,
изд. лицензия ЛР № 062738 от 16.06.93 г.

Отпечатано в Подольском филиале
142110, г. Подольск ул. Кирова, 25

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Асимптотические методы — наверное, самая романтическая область современной математики. Они нашли широкое распространение в механике, физике и других точных науках. Более того, асимптотические идеи пронизывают все остальные области человеческого знания, всю нашу жизнь. Асимптотические методы до конца не формализуются, и в этом их прелесть, здесь остается большой простор для фантазии, догадки и интуиции исследователя, что граничит с искусством. По асимптотическим методам написано много книг, но для чтения их необходима хорошая математическая подготовка. Авторы попытались впервые изложить асимптотические идеи и методы на популярном уровне, доступном широкому кругу читателей. При этом они не ударились в крайность, когда в популярной книге по естественным наукам нет места формулам. В их книге математика осталась, (видимо, иного и не могло быть, ведь популярно излагаются математические методы), но эта математика на уровне хорошего школьного образования. Вместе с тем, авторам удалось продемонстрировать на простых примерах все основные идеи асимптотических подходов и методов, подробно рассказать о результатах их применения в различных областях знания, начиная от астрономии, механики, физики и кончая биологией, психологией, искусством. Рукопись книги дополнена весьма уместным и глубоким приложением, где изложена работа Р.Г. Баранцева «Что такое асимптотические методы? (попытка определения)».

В заключение хочу отметить, что для пропаганды асимптотических методов данная книга будет иметь существенное значение. Книга найдет большой круг читателей, начиная от школьников, студентов, научных работников и кончая специалистами по асимптотическим методам.

Доктор физико-математических наук,
профессор

В.М. Александров

Авторы выражают глубокую признательность д.ф.-м.н., профессору В.М. Александрову, чьи ценные замечания способствовали улучшению рукописи книги; д.ф.-м.н., профессору Р.Г. Баранцеву, любезно предоставившему материалы раздела «Что же такое асимптотические методы? (попытка определения)», а также к.т.н., генеральному директору фирмы «Алеана Интернешнл» А.Н. Писанко за финансовую помощь, обеспечившую выход настоящей книги.

Книга иллюстрирована рисунками профессора, д.ф.-м.н. А.Т. Фоменко, которому авторы глубоко признательны за разрешение использовать его картины в качестве иллюстраций.

ВВЕДЕНИЕ

Сочинить книгу не удивительно и не трудно, но сделать ее полезной — вот это совсем другое дело.

Новейший и совершенный парижский кондитер, лимонадчик и дистиллятор. Москва, в типографии Н. Степанова при Императорском театре, 1829 г.

Почти любая физическая теория, сформулированная во всей своей общности, очень сложна с математической точки зрения. Поэтому и при создании теории, и в дальнейшем ее развитии особую роль играют простейшие предельные случаи, допускающие аналитическое решение. При этом обычно уменьшается число уравнений, понижается их порядок, нелинейное уравнение заменяется линейным, исходная система в некотором смысле усредняется и т.п. За этими идеализациями, сколь бы различными они не казались, стоит высокая степень симметрии, присущая в соответствующем пределе математической модели рассматриваемого явления.

«Образно говоря, симметрия и законы сохранения выполняют роль железного каркаса, на котором держится здание физической теории» [11].

Однако: «Природа не терпит точных симметрий. Большинство симметрий возникает при некоторой идеализации задач, учет влияния более сложных взаимодействий приводит к их нарушению. Даже законы сохранения, связанные с пространственной симметрией, крайне мало, но все же нарушаются неоднородностью Вселенной во времени и пространстве» [68].

Асимптотический подход к сложной задаче состоит, по сути, в трактовке исходной (недостаточно симметричной) системы как близкой к некоторой симметричной. Принципиально важно, что определе́ние поправок, учитывающих отклонения от предельного случая, гораздо проще, чем непосредственное исследование исходной системы. На первый взгляд, возможности такого подхода ограничены узким диапазоном изменения параметров, определяющих систему. Однако опыт исследования различных физических задач показывает, что при значительном изменении параметров системы и удалении ее от предельного симметричного случая существует другая предельная система, часто с менее очевидной симметрией, к которой также применим асимптотический анализ.

Это позволяет описать поведение системы во всем диапазоне изменения параметров, опираясь на небольшое число предельных случаев. Такой подход, в максимальной степени соответствуя физической интуиции и способствуя ее развитию, в то же время приводит к формированию новых физических понятий. Так, одно из важнейших в гидромеханике понятий пограничного слоя имеет ярко выраженный асимптотический характер и связано с локализацией той области, где влиянием вязкости жидкости пренебречь нельзя — у границ обтекаемого тела. Аналогичные явления в механике деформируемого твердого тела и теории электричества называются соответственно краевыми и скин-эффектами. Подобные примеры далеко не единичны.

Не менее важно, что асимптотический метод помогает установить связь между различными физическими теориями. А.Эйнштейн отмечал, что «лучший жребий физической теории — послужить основой для более общей теории, оставаясь в ней предельным случаем» (цит. по [68]). Таким образом, асимптотический подход — не только полезный рабочий инструмент, но и некоторый философский принцип, позволяющий выявить соответствие между сменяющими друг друга физическими теориями и определить область применимости «старой» теории.

Несколько слов о принятом в этой книге «уровне популярности». «Книги о науке, предназначенные для неспециалистов, большею частью стремятся ошеломить читателя («Трепещите и благоговейте!», «Ка́к далеко мы продвинулись!» и т.д.) вместо того, чтобы просто и ясно рассказать о целях и методах. Здравомыслящий человек, прочитав несколько таких книг, совершенно падает духом. Он приходит к выводу, что ум его слишком слаб и лучше оставить чтение. Вдобавок, все описания даются в сенсационной манере, которая претит разумному читателю. Короче говоря, не читатель виноват, а издатели и авторы. Мое предложение сводится к следующему: ни одну научно-популярную книгу не следует издавать, пока не будет установлено, что ее в состоянии понять толковый и беспристрастный человек» [44].

Эти слова А.Эйнштейна может вспомнить каждый читатель научно-популярной книги (в том числе, естественно, и этой), если что-то (или все) ему покажется непонятным, неинтересным и ненужным.

Нельзя также не вспомнить слова Г.Вейля [28]: «Авторы научно-популярных книг и журналисты, когда им приходится иметь дело с физикой, позволяют себе прибегать к различным сравнениям; беда, однако, состоит в том, что они оставляют читателя в неведении относительно того, насколько точно их остроумные аналогии передают суть дела; поэтому они чаще сбивают читателя с толку, чем проясняют вопрос».

С другой стороны, авторы могут утешаться словами того же Эйнштейна: «Всякий, кто хоть раз пытался популярно изложить какое-либо положение, знает какие огромные трудности стоят на этом пути. Можно преуспеть в доходчивости, уйдя от изложения сущности проблемы и ограничившись лишь смутными намеками на нее, и таким образом обмануть читателя, внушив ему иллюзию понимания. Можно, наоборот, квалифицированно и точно изложить проблему, но так, что неподготовленный читатель скоро потеряет мысль автора и лишится возможности следовать за ней дальше» [44].

Каждый автор по-своему пытается решить указанные проблемы и пройти по лезвию бритвы между этими опасностями, используя часто диаметрально противоположные подходы.

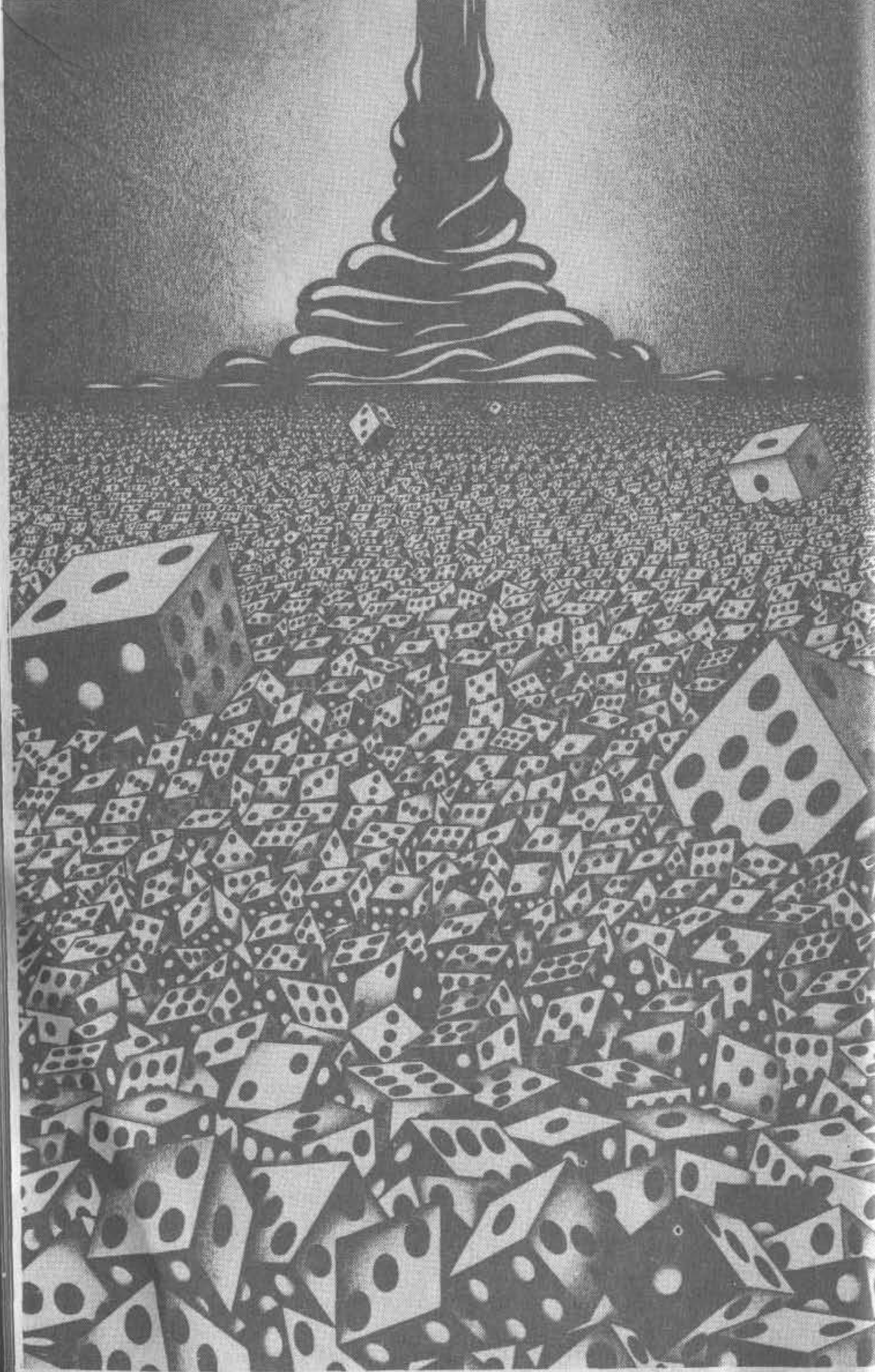
Так, В.С.Барашенков в замечательной книге [12] не использует ни одной формулы и ни одного рисунка. В то же время И.Л.Розенталь построил свое блестящее изложение современных физических проблем [90] на том соображении что: «Единственное средство избежать профанации темы книги, это разделить с читателями бремя ответственности. Предполагается, что будущий читатель прослушал курсы физики и математики в объеме технического вуза».

С.Вайнберг и С.Хокинг в научных бестселлерах [23] и [113] не приводят ни одной формулы (правда, Вайнберг переносит некоторые формулы в дополнение и дает в приложении словарь терминов).

Единого подхода к популяризации, следовательно, нет, да и, наверное, быть не может. Авторы настоящей книги решили сначала дать основные идеи чисто описательно, а затем на простых примерах показать, «как это делается».

При этом они старались следовать мысли Галилея: «Кое-кто предпочитает для изложения философских тем ту же математическую строгость, лишенную изящества и упражнений манеру изложения, принятую у чистых геометров, которые не вставят ни одного слова, не продиктованного абсолютной необходимостью. Я же, напротив, не отношу к дефекту трактата, хотя бы и устремленного к одной цели, насыщение его разнообразными сведениями, лишь бы они не были совершенно изолированными, лишенными всякой связи с основным содержанием; более того, я нахожу, что благородство, величие и великолепие, придающие нашим поступкам и деяниям изысканность и совершенство, заключены не в вещах необходимых (хотя и пренебрегать ими значило бы совершить наибольшую, решающую ошибку), а в вещах необязательных, лишь бы они не стояли особняком, а находились бы в некоторой, пусть незначительной, связи с основным направлением» [33].

ЧТО ТАКОЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ



Метод важнее открытия, ибо правильный метод исследования приведет к новым, еще более ценным открытиям

Ландау Л.Д.

Если смысл слова «симметрия» — «соразмерность», то построение асимптотики часто сводится к поиску резких, отчетливо выраженных несоразмерностей (большое — малое, длинное — короткое, медленное — быстрое и т.д.). Физик или инженер обычно использует представление о различном характере процессов или параметров уже на этапе построения модели или расчетной схемы. Остановимся на некоторых идеях асимптотического упрощения, часто используемых в физике и технике, не прибегая к строгим определениям.

Уменьшение размерности системы

Освободите вопрос от всего лишнего и сведите его к простейшим элементам

Декарт Р.

Высокий порядок алгебраических или дифференциальных уравнений, большое число таких уравнений — все это проявление одной из принципиальных трудностей, возникающих при решении физических задач, которую называют иногда «проклятием размерности». Для ее преодоления выработаны два диаметрально противоположных подхода. Если отдельные элементы рассматриваемой системы сильно различаются по своим характеристикам, то можно ввести малые параметры, представляющие их отношения, и осуществить асимптотическую редукцию размерности (уменьшить число степеней свободы).

Типичный пример такой ситуации — задача трех тел в небесной механике. Как правило, массы этих тел (например, Солнца, Юпитера и Земли) заметно различаются, поэтому в системе есть малые параметры, отражающие «неравноправие» масс, и возможна асимптотическая редукция размерности. Такая редукция лежит в основе классических методов небесной механики, причем в качестве предельного высокосимметричного случая выступает точно решаемая задача двух тел. Небесная механика — первая область естествознания, в которой асимптотический метод (теория возмущений) сыграл фундаментальную роль. Более того, сам этот метод был фактически вызван к жизни насущной необходимостью ответа на вопросы, поставленные небесной механикой.

Вот что писал об этом П.С.Лаплас — один из создателей той модификации асимптотического подхода, которая и получила название «метод возмущений»: «Если бы планеты подчинялись только действию Солнца, то описывали бы вокруг его эллиптические орбиты. Но они влияют одна на другую, а также и на само Солнце. Из-за этих взаимных притяжений происходят возмущения и в эллиптических движениях. Эти возмущения необходимо определить. Точное решение этой проблемы превосходит существующие в настоящее время возможности анализа (*И в конце XX века тоже — авт.*). К счастью, малость масс планет по сравнению с массой Солнца, небольшие эксцентриситеты и взаимные наклоны большинства их орбит сильно облегчают эту задачу».

Так что сам термин «возмущение» в названии метода берет свое начало в небесной механике.

Использование асимптотических методов далеко не всегда оговаривается специально, а иногда даже и не осознается до конца. Так, в инженерной практике чрезвычайно широкое распространение получили модельные системы с одной степенью свободы. Ясно, что использование таких моделей всегда предполагает асимптотическую редукцию размерности и принципиальную возможность определения соответствующих поправок, но четкое указание этого факта можно встретить нечасто.

Регулярные асимптотики и пограничные слои

Отклонения реальной системы от ее предельной идеализации могут иметь различный характер. Иногда они малы во всей области изменения параметров. Так бывает, если параметры исходной системы претерпевают незначительные изменения. Например, если рассматривается слабо анизотропная среда, то для построения первого приближения можно перейти к изотропному случаю. Если отклонения реального процесса от идеализированного малы во всей рассматриваемой области или во всем рассматриваемом временном диапазоне, то говорят о регулярном возмущении.

О важности учета малых составляющих решения говорит следующий пример [89]. Некоторое время считалось, что черная

дыра — массивное коллапсирующее тело — не может излучать. Однако в 1974 г. С.Хокинг показал, что это заблуждение, основанное на следующем обстоятельстве. Согласно общей теории относительности, радиус коллапсирующего тела изменяется по закону

$$r = r_g\ [1 + \exp(-\frac{ct}{r_g})]$$

где c — скорость света, а r_g — гравитационный радиус, т. е. минимальный радиус черной дыры. В этом выражении обычно пренебрегали крайне малым экспоненциальным членом. Если же его учесть, то оказывается, что черные дыры не только могут, но и должны излучать фотоны с длиной волны порядка r_g.

Часто основное в системе можно «поймать» уже в первом приближении.

Так, планету Земля можно описать как шар, как эллипсоид и как геоид. И первое, и второе и даже третье описания приблизительны, хотя точность их возрастает. Но не надо думать, что чем точность выше, тем описание лучше. Подлинную революцию произвело именно представление о Земле как о шаре и, скорее всего, это представление навсегда останется «самым главным».

С другой стороны, нередко отклонения истинного решения от первого приближения велики, но локализованы в малой области. Так, если жидкость обтекает тело, то всюду, за исключением узкой зоны у поверхности тела, течение можно считать потенциальным и не учитывать вязкость жидкости. Правда, вблизи поверхности учет вязкости необходим, но он упрощается именно за счет малости зоны пограничного слоя. Это хорошо видно на фотографии эксперимента по обтеканию кругового цилиндра потоком вязкой жидкости [2] (рис. 1.1).

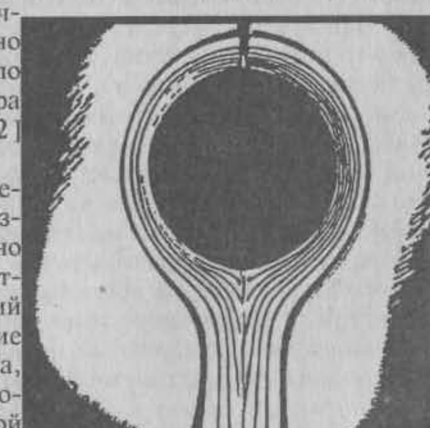


Рис. 1.1.

Локализованные быстро изменяющиеся состояния могут возникать не только у границ, но и во внутренних зонах рассматриваемой области (внутренний пограничный слой). Это явление проиллюстрировано на рис. 1.2а, где приведена компьютерная модель деформации сферической оболочки под действием внешнего давления, и на рис. 1.2б —

Рис. 1.2а.

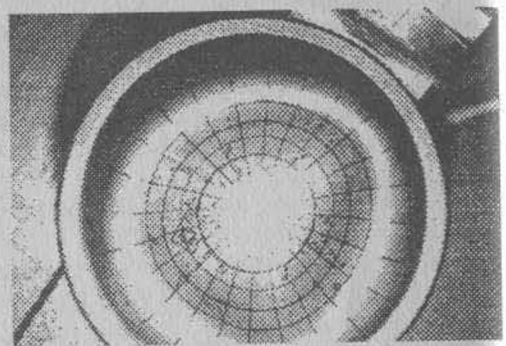


Рис. 1.2б.

фотография эксперимента по потере устойчивости полусферической оболочки, нагруженной в полюсе сосредоточенной силой.

Любопытный пример скин-эффекта можно наблюдать в задачах теплопроводности [67]. Речь идет о распространении годовых колебаний температуры вглубь Земли. Скорость распространения тепла для грунта средней влажности составляет 9 м/год. Почва оттаивает приблизительно на глубину скин-эффекта δ (порядка 1.5 м/год). При глубине 10 м годовые колебания температуры составляют примерно 0.1°C. Из-за скин-эффекта при глубине, существенно большей δ, температура приближенно равна средней годовой температуре и, если она меньше нуля, то образуется вечная мерзлота.

Интересное развитие получил метод пограничного слоя в сочетании с идеей «промежуточной асимптотики» [13]. Грубо ее можно описать так. Пусть исходное дифференциальное уравнение имеет некоторое семейство автомодельных, самоподобных решений. Вообще говоря, они не удовлетворяют заданным начальным и (или) граничным условиям. При этом могут встретиться два случая. Первый — автомодельное решение разрушается (в этом случае можно говорить о его неустойчивости). Второй — появляются локализованные состояния, «выбирающие» определенное решение из данного класса автомодельных.

Невырожденность пограничного слоя обеспечивает устойчивость. В частности, идея промежуточной асимптотики в сочетании с понятием пограничного слоя позволяет понять роль частных асимптотических решений в нелинейных теориях. А именно: «В нелинейных задачах точные частные решения иногда кажутся бесполезными, поскольку нет принципа суперпозиции, нельзя непосредственно найти решение задачи с произвольными начальными условиями. Асимптотическое поведение является ключом,

который частично играет роль, утраченную принципом суперпозиции. Дело в том, что, как правило, эти частные решения представляют собой асимптотики широкого класса других решений, отвечающих другим начальным условиям» [49].

Асимптотические ряды

Ряды теории возмущений не обязательно должны сходиться. В асимптотических методах используется математический аппарат особой природы — асимптотические ряды. Впервые четкое понятие о таких рядах, расходящихся, но в некотором смысле приближающих рассматриваемые функции, ввели Т.Стильтьес и А.Пуанкаре. Кратко можно сказать, что сходящийся ряд представляет функцию при $x = x_0, n \to \infty$, а асимптотический — при $n = n_0, x \to x_0$ (рис. 1.3).

Часто для понимания сложных вещей нет ничего лучше, чем читать классиков, поэтому приведем обширную цитату из «Новых методов небесной механики» А.Пуанкаре [84]:

«Геометры и астрономы (сейчас мы бы сказали — чистые и прикладные математики — авт.) по-разному понимают слово «сходимость». Геометры, всецело озабоченные достижением безукоризненной строгости и зачастую совершенно безразличные к продолжительности сложных вычислений (выполнимость которых они предполагают, не задумываясь о ее практическом осуществлении), говорят, что некоторый ряд сходится, если сумма его членов стремится к какому-то определенному пределу, даже в том случае, когда первые члены убывают чрезвычайно медленно. В противоположность этому астрономы обычно говорят, что некоторый ряд сходится, если, например, первые двадцать членов этого ряда убывают очень быстро, несмотря на то, что последующие члены неограниченно возрастают.

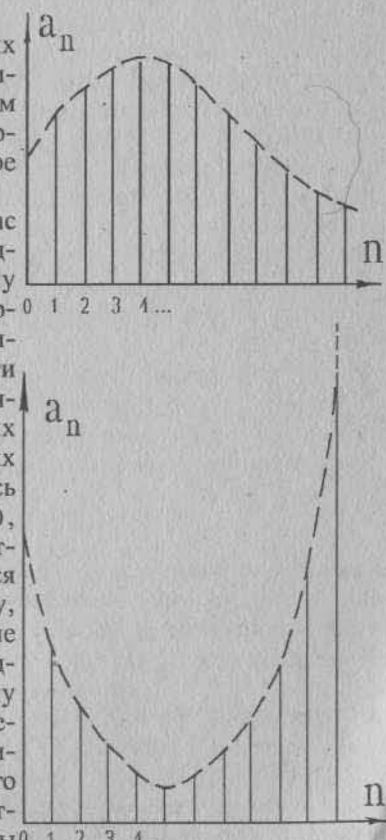


Рис. 1.3.

В качестве простого примера рассмотрим два ряда, общий член которых имеет вид:

$$1000^n/n! \text{ и } n!/(1000)^n$$

Геометры скажут, что первый ряд сходится, и причем быстро, поскольку его миллионный член много меньше 1/999 999. Но второй ряд они будут считать расходящимся, поскольку общий член этого ряда неограниченно возрастает.

Астрономы же, наоборот, будут считать первый ряд расходящимся, поскольку первые 1000 членов этого ряда возрастают, а второй сходящимся, так как его первые 1000 членов убывают, причем сначала это убывание происходит очень быстро.

Обе точки зрения законны: первая в теоретических исследованиях, вторая в численных приложениях. Обе господствуют безраздельно, но в различных областях, и границы этих областей необходимо четко различать.

Астрономы не всегда четко знают границы применимости своих методов, но ошибаются они редко. То приближение, которым они довольствуются, обычно лежит в тех пределах, где их методы применимы. Кроме того, интуиция позволяет им предвидеть правильный результат, если бы они и совершили ошибку, то сравнение с наблюдениями позволило бы исправить ее надлежащим образом.

Все же я полагаю, что будет уместно внести в этот вопрос несколько большую точность, и именно это я собираюсь сделать, хотя по самой своей природе рассматриваемый вопрос не слишком пригоден для этого.

Итак, мы должны рассмотреть соотношение новой природы, которое может существовать между функцией аргументов x и ε, которую мы будем обозначать символом $\varphi(x, \varepsilon)$, и расходящимся рядом, расположенным по степеням ε:

$$f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots + \varepsilon^p f_p + \ldots \qquad (1.1)$$

Коэффициенты $f_0, f_1, \ldots$ могут быть функциями, зависящими лишь от x и не зависящими от ε, или же зависящими одновременно и от x, и от ε.

Положим

$$\varphi_p = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots + \varepsilon^p f_p.$$

Если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\varphi - \varphi_p)\, \varepsilon^{-p} = 0, \qquad (1.2)$$

то я буду говорить, что ряд (1.1) является асимптотическим

представлением функции φ и употреблять запись

$$\varphi(x,\varepsilon) = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots$$

Соотношения вида (1.2) я буду называть асимптотическими равенствами.

Ясно, что если параметр ε очень мал, то разность $\varphi - \varphi_p$ также будет очень мала, и хотя ряд (1.1) и будет расходиться, сумма $p + 1$ его первых членов будет служить очень хорошей аппроксимацией функции φ».

О нетривиальности понятия асимптотического ряда говорит следующий факт: «Сама мысль, что функция может быть определена расходящимся асимптотическим рядом, была совершенно чужда сознанию девятнадцатого века».

Когда Борель открыл, что его методы суммирования дают «правильный» ответ для многих классических расходящихся рядов, он решил совершить путешествие в Стокгольм к Миттаг-Леффлеру. Миттаг-Леффлер вежливо выслушал все то, что Борель хотел сказать, а затем, положив руку на полное собрание сочинений своего учителя Вейерштрасса, сказал по латыни: «Мастер запрещает это» (М.Кац, цит. по [87]).

Сам Вейерштрасс в письме к С.В.Ковалевской подчеркивал, что «достоинство исследований Пуанкаре состоит больше в отрицательных, а не в положительных результатах». Он же писал Миттаг-Леффлеру: «Работа Пуанкаре астрономов не очень-то ободрит, так как уничтожает некоторые их давнишние иллюзии и опровергает многое из того, что казалось им прежде обоснованным.

Например, доказывается расходимость рядов, к которым приводят методы Ньюкомба, Линдстедта и других».

Однако быстро пришло понимание того факта, что на самом деле исследователи получили новый высокоэффективный аппарат.

Первый том «Новых методов небесной механики» А.Пуанкаре вышел в 1982 г., а уже в 1898 г. Парижская академия объявила конкурс на тему «Исследование возрастающей роли расходящихся рядов в анализе», на котором первым призом был отмечен мемуар Э.Бореля.

Метод осреднения

Во многих физических задачах одни переменные меняются медленно, а другие — быстро. Возникает естественная мысль: нельзя ли сначала изучить глобальную структуру системы, отвлекаясь от ее локальных особенностей, а затем уже исследовать систему локально. На это и направлен метод осреднения, основная

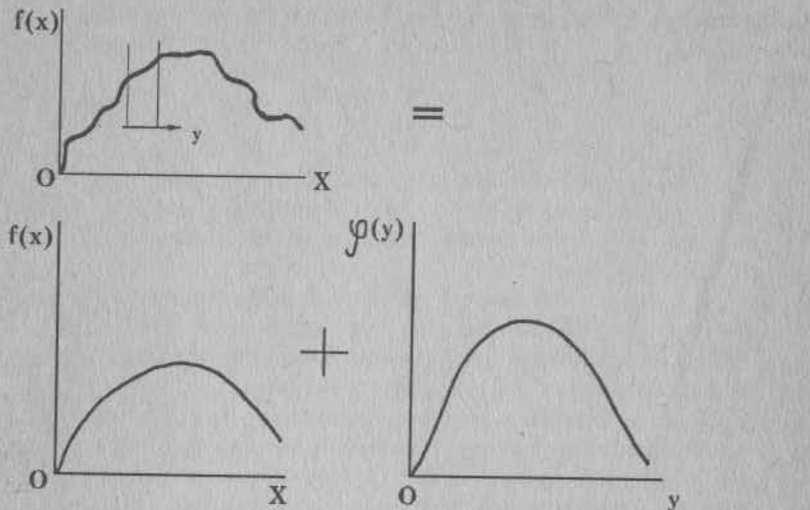


Рис. 1.4.

идея которого — разделение быстрых и медленных составляющих решения.

П.С.Лаплас писал: «Самый простой способ анализа различных возмущений заключается в том, чтобы вообразить себе планету, движущуюся в согласии с законами эллиптического движения по эллипсу, элементы которого плавно изменяются, и одновременно представить себе, что настоящая планета колеблется вокруг этой воображаемой линии по очень малой траектории, свойства которой зависят от ее периодических возмущений».

Современный метод осреднения дифференциальных уравнений с частными производными на идейном уровне можно описать так. Сначала выделяется некоторая периодически повторяющаяся краевая задача — задача на ячейке. Решение ее в местных (локальных) координатах строится (рис. 1.4) известными аналитическими или численными методами.

Далее производится осреднение по локальным переменным (рис. 1.5), и получается уравнение с медленно изменяющимися коэффициентами, описывающее глобальное поведение среды.

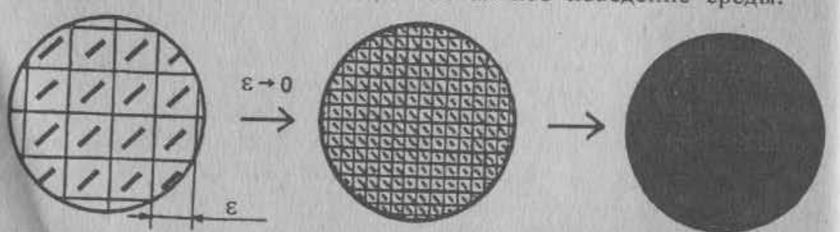


Рис. 1.5.

Существенно, что при подобном подходе определяются не только интегральные, но и локальные характеристики среды или процесса.

Принцип осреднения является одним из глобальных философских принципов, на которых зиждется наше знание. Последнее время даже высказываются мысли о том, что пространство и время имеют дискретный характер, а мы воспринимаем лишь их средние характеристики. В то же время метод осреднения является и мощным аналитическим аппаратом решения разнообразных задач нелинейной механики, механики сплошных сред, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с быстропеременными коэффициентами.

Интересен вопрос: насколько оправдано применение строгой математической техники метода осреднения для определения эффективных характеристик материала? Нельзя ли обойтись простыми физическими соображениями? Например, в теории композитных материалов методы осреднения идут от классических работ Фойгта (1887) и Рейсса (1929) [20]. Фойгт предложил находить эффективные коэффициенты осреднением исходных параметров впрямую. В соответствии с этим подходом эффективная жесткость K композита, содержащего две компоненты с жесткостями K_1 и K_2, такова:

$$K = c\,K_1 + (1 - c)\,K_2,$$

где c — концентрация первой компоненты.

В соответствии с подходом Рейсса осредняются коэффициенты обратных величин

$$1/K = c/K_1 + (1 - c)/K_2.$$

Здесь имеется аналогия с определением сопротивления электрическому току последовательно и параллельно соединенных проводников, а общий физический принцип таков: осреднению подлежат аддитивные величины (т. е. величины, которые можно складывать).

Показано, что осреднение по Фойгту дает верхнюю, а по Рейссу — нижнюю оценки, однако насколько они широки? Об этом можно судить по рис. 1.6, на котором приведены результаты построения эффективной жесткости K для подверженного кручению стержня, имеюще-

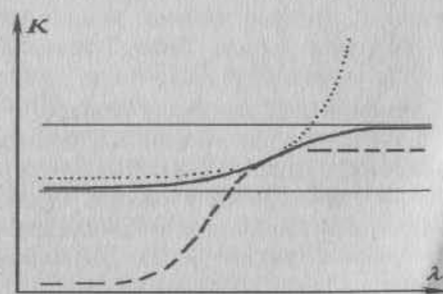


Рис. 1.6.

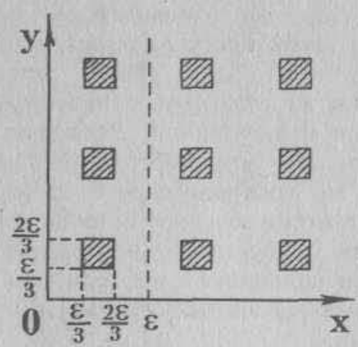


Рис. 1.7.

го изображенную на рис. 1.7 структуру. Сплошная кривая — точное решение, точками и пунктиром обозначены результаты осреднения по Фойгту и Рейссу соответственно, буквой λ обозначено отношение жесткостей материалов. Как видно, область, в которой можно достаточно точно оценивать осредненные характеристики на основе физических соображений, весьма узка.

Континуализация

Если рассматриваемая система состоит из множества однотипных элементов, то асимптотический подход приводит уже не к редукции размерности, а, напротив, к ее повышению. Так мы приходим к весьма важному классу физических моделей, в котором дискретные системы заменяются континуальными (непрерывными).

Рассмотрим для примера продольные колебания цепочки, состоящей из равных масс m, соединенных пружинами одинаковой длины L и жесткости C (рис. 1.8 а). При плавной пространственной форме колебаний, характеризуемых в каждой точке kL ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) смещением u_k, эту цепочку можно заменить сплошным стержнем (рис. 1.8 б), переходя таким образом от системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$mu_{k,tt} = C\,(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$$

к одному уравнению в частных производных

$$u_{,tt} = (CL^2/m)u_{,xx}$$

где $u_{,tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u_{,xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Степеней свободы стало больше, а относительная простота этого предельного случая медленных колебаний обусловлена симметрией уравнения в частных производных, не меняющегося при произвольном сдвиге вдоль стержня. С уменьшением пространственного периода колебаний растет погрешность приближенных решений, полученных таким путем. Второй предельный случай для рассматриваемой системы соответствует колебаниям с минимально возможной длиной волны (рис. 1.8 в). Их форму легко рассчитать

и использовать как первое приближение при исследовании коротковолновых колебаний системы. При этом решение разыскивается в виде произведения предельной пилообразной формы на медленную модулирующую функцию (рис. 1.8 г).

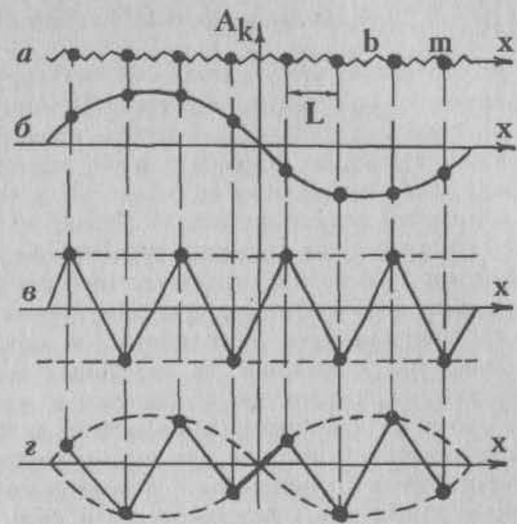


Рис. 1.8.

Приведем высказывание Э.Шредингера, раскрывающее эффективность метода континуализации [119]: «Допустим, мы бы рассказали древнему греку, что возможно проследить путь отдельной частички жидкости. Древний эллин не поверил бы, что ограниченный человеческий ум может дать решение столь запутанной задачи. Дело заключается в том, что мы научились владеть всем процессом с помощью одного дифференциального уравнения».

Вообще же результатами, полученными на основе метода континуализации (впрочем, как и на основе других приближенных теорий), следует пользоваться с осторожностью. Приведем поучительный пример. Пусть крайняя масса конечной цепочки масс, соединенных пружинами одинаковой жесткости, сдвинута на величину a, после чего исследуются возникающие колебания. Может ли в процессе колебаний амплитуда какой-либо массы превзойти a?

Если рассмотреть аналогичную задачу для продольных колебаний стержня (континуальная модель нашей задачи), то ответ отрицателен: амплитуда колебаний любой точки стержня не превосходит a. На этом основании многие исследователи (и в их числе, например, Н.Е.Жуковский) сделали аналогичный вывод и для дискретной цепочки масс. Замечательно, однако, что этот вывод оказался ошибочным: дальнейшее аналитическое исследование и численные расчеты [130] его опровергли! Дело в том, что в процессе колебаний заметной становится роль «пилообразных» форм колебаний (см. ранее), которые не могут быть достоверно описаны на основе модели продольных колебаний стержня.

Локальная и нелокальная линеаризация

Даже малое число степеней свободы или локализованность решения не гарантируют преодоления математических трудностей, если уравнения физической теории нелинейны. В этом случае на помощь приходит линеаризация — асимптотический метод, использующий представление о процессах малой интенсивности.

Линейный подход позволил сформировать такие фундаментальные понятия, как спектр, собственная функция, нормальные колебания. Последнее означает, что для линейной системы с n степенями свободы при отсутствии трения всегда можно выбрать такие «нормальные» координаты, в которых она описывается уравнениями колебаний не связанных между собой маятников. Это понятие естественно обобщается и на непрерывные системы, для которых решение выбирается в виде ряда Фурье по тригонометрическим или другим периодическим функциям пространственных переменных. Иными словами, любое движение линейной системы представляется в виде линейной комбинации нормальных колебаний.

Принципиально важно, что такие колебания выделены не только математически, но и физически. Так, под действием внешней силы «резонировать» в системе будут именно нормальные колебания.

Если рассматривать линейную систему как первое приближение к нелинейной (в этом суть локальной линеаризации), то при учете нелинейных поправок в уравнениях второго и последующих приближений появляются фиктивные внешние нагрузки, вызывающие резонансы нормальных колебаний. Избежать этого удается, «подправив» параметры нормальных линейных колебаний.

Однако сильно нелинейные системы, особенно высокой размерности, нельзя описать ни в каком приближении метода локальной линеаризации. Поэтому до недавнего времени сочетание высокой размерности с сильной нелинейностью выглядело непреодолимой преградой для конструктивного исследования физической системы. Но в последние годы был открыт весьма широкий класс многомерных нелинейных систем, допускающих такое исследование. Эти системы, получившие название интегрируемых, имеют частные решения в виде уединенных волн — солитонов, представляющих собой в некотором смысле аналог нормальных колебаний в линейных системах. Возникло нелинейное обобщение метода Фурье — метод обратной задачи рассеяния, в котором солитоны играют фундаментальную роль, во многом представляя собой аналог разложению Фурье. Метод обратной задачи рассеяния можно трактовать как нелокальную линеаризацию исходного нелинейного уравнения. Иначе говоря, скрытая симметрия нелинейного уравнения позволяет найти преобразование, сводящее построение широкого класса решений к анализу линейных уравнений.

В рамках асимптотического подхода интегрируемые системы, в свою очередь, могут выступать в качестве приближения при анализе близких к ним, но не интегрируемых.

Оценка погрешности асимптотических решений

«Физик очень редко может позволить себе отказаться от «прикрытия» каким-либо малым параметром. Как правило, такой параметр находится, если его достаточно хорошо поискать.

Мы почти всегда оказываемся в тисках определенных разложений, и разнообразие наших возможностей связано с разнообразием нашей изобретательности при использовании рядов. По существу, наш успех или неудача связаны с тем, насколько хорошо мы понимаем суть нелинейного явления, чтобы найти ему адекватную близкую реализацию, упрощающую исследование» [48].

Вопрос: «До каких значений ε его можно считать малым (большим)»? — один из наиболее острых в асимптотических методах. М.Гелл-Ман пишет [35]: «На деле всякий теоретик в своей собственной работе полагает какие-то параметры малыми, а затем нападает на других, поступающих так же, обвиняя их в «неестественности».

В приложениях полученные ряды часто являются сходящимися в достаточной широкой области, однако доказать сходимость и определить ее область, как правило, не просто. Даже в тех случаях, когда это удается сделать, оценки носят слишком пессимистический характер, так как получаются на основе ряда усиливающихся неравенств. Доказательство асимптотического характера построенных разложений получить обычно легче, однако и дает оно значительно меньше. По сути, асимптотичность свидетельствует, что данное решение равномерно пригодно или равномерно непригодно — и не более того, так как входящие в оценки постоянные обычно неизвестны. Самый честный (и, как естественное следствие, самый трудный) путь состоит в доказательстве асимптотичности с последующей оценкой погрешности в некоторых предельных — «лучшем», «худшем» и «промежуточном» — случаях. Эти понятия трудно формализуемы, но, как правило, достаточно ясны в конкретных физических задачах. Если же не приводить таких оценок, то нет никаких оснований выдавать доказательство асимптотичности за полное обоснование построенных приближений.

Отметим еще, что доказательство асимптотичности часто требует большого труда. На практике бывает проще получить решение задачи другим приближенным методом (численным, вариационным и т.д.), по крайней мере в некоторых частных случаях, и сравнить его с решением на основе метода возмущения.

Большое значение имеют точные решения. Если в некоторых случаях (например, для определенных значений параметров) они существуют, возможно не только численное, но и аналитическое сравнение путем разложения этих решений в ряды по используемым малым параметрам. В любом случае «честность — лучшая политика», и всегда следует приводить доводы, на которых зиждется уверенность в правильности полученных тем или иным методом результатов.

Кредо физика было изящно сформулировано проф. В.И.Юдовичем, предложившим «теорему»: «Любая разумная асимптотика может быть обоснована».

Расширение области применимости метода возмущений

Общий недостаток асимптотических методов — локальность получаемых решений. Иными словами, они позволяют найти решения задачи лишь в небольших пределах изменения параметров системы. На практике же часто нужно выйти за эти пределы. Поэтому в последнее время большое внимание уделяется методам расширения области применимости асимптотических методов.

Если представленный ряд сходится при $a \le \varepsilon \le b$, то можно попытаться расширить область его сходимости при помощи аналитического продолжения. Так, в гидромеханике часто эффективно преобразование Эйлера

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon/(1+\varepsilon),$$

переносящее особенность из точки $\varepsilon = -1$ в бесконечно удаленную точку.

Применение такого подхода затруднено необходимостью определения положения особенности при наличии небольшого числа членов разложения.

Для расходящихся рядов часто эффективны методы суммирования Бореля, Чезаро и других авторов, однако и здесь трудности возникают из-за малого числа членов. Более эффективными могут оказаться методы мероморфного продолжения — метод Паде-аппроксимации, перестройка ряда в цепную дробь или в рациональную функцию по другой схеме. Остановимся кратко на Паде-аппроксимантах [15]. Если задан ряд Маклорена для функции $\varphi(\varepsilon)$,

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, \varepsilon^i, \tag{1.3}$$

то Паде-аппроксимантой $[m/n]$ называется дробно-рациональная функция, коэффициенты которой определяются из того условия, что первые $m+n+1$ членов ряда (1.3) совпадают с первыми $m+n+1$ членами ряда Маклорена для $[m/n]$. Основные преимущества перехода к дробно-рациональной функции состоят в возможности учета особенностей функции и описания нетривиального ее поведения при $\varepsilon \to \infty$.

«Падеоны»

Как уже отмечалось, в физике в последнее время большую популярность приобрело исследование уединенных волн — солитонов. Для построения их используется обычно техника обратной задачи рассеяния, позволяющая линеаризовать задачу (нелокальная линеаризация). Ясно, что такие существенно нелинейные решения, как солитоны, нельзя достаточно хорошо аппроксимировать отрезком ряда квазилинейной теории возмущений при любом числе членов. Однако это можно сделать, применив к отрезку указанного ряда нелинейное Паде-преобразование. Объекты, получающиеся в результате такой процедуры, получили название «падеоны» (по аналогии с солитонами, инстантонами и т.д.). Приведем сначала простой пример. Краевая задача

$$y'' - y + 2y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0 \tag{1.4}$$

имеет точное решение («солитон»)

$$y = (\mathrm{ch}\, x)^{-1} \tag{1.5}$$

Если же искать решение уравнения (1.4) в виде ряда по экспонентам (ряда Дирихле), то оно таково:

$$y = C\, e^{-x}(1 - 0{,}25C^2 e^{-2x} + 0{,}0625C^{-4} e^{-4x} + \ldots), \quad C = \mathrm{const}.$$

После перестройки этого ряда в диагональную аппроксиманту Паде и определения постоянной C приходим к точному решению (1.5).

Запишем теперь уравнение Кортевега — Де Фриза:

$$q_{,t} + q_{,xxx} + 6\lambda\, q\, q_{,x} = 0$$

которое заменой $q = -V_{,x}$ приводится к виду:

$$V_{,t} + V_{,xxx} - 3\lambda V_{,x}^2 = 0.$$

Далее решение можно разыскивать следующим образом:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n V_n(x, t). \tag{1.6}$$

В первом приближении имеем линейное уравнение

$$V_{1,t} + V_{1,xxx} = 0,$$

далее — рекуррентную последовательность

$$V_{n,t} + V_{n,xxx} = 3\sum_{j=1}^{n-1} V_{j,x} V_{n-j,x}.$$

Перестройка первых трех членов ряда (1.6) дает точное выражение солитона.

Указанная техника допускает обобщение и на более сложные случаи.

Сращивание предельных асимптотик

Анализ многочисленных примеров подтверждает, что часто реализуется своеобразный «принцип дополнительности»: если при $\varepsilon \to 0$ можно построить физически содержательную асимптотику, то, как правило, существует нетривиальная асимптотика и при $\varepsilon \to \infty$.

О том, что метод исследования, основанный на изучении предельных случаев,— один из основных инструментов ученого, говорит А.Пуанкаре. Отмечая, что объектом науки являются в первую очередь повторяющиеся, в некотором смысле элементарные (простые) факты, он пишет [85]: «Но где же они — эти простые факты? Ученые искали их в двух крайних областях, в области бесконечно большого и в области бесконечно малого. Их нашел астроном, ибо расстояния между светилами громадны, настолько громадны, что каждое из светил представляется только точкой; настолько громадны, что качественные различия сглаживаются, ибо точка проще, чем тело, которое имеет форму и качество. Напротив, физик искал элементарное явление, мысленно разделяя тело на бесконечно малые кубики, ибо условия задачи, которые испытывают медленные непрерывные изменения, когда мы переходим от одной точки тела к другой, могут рассматриваться как постоянные в пределах каждого из этих кубиков».

Далее А.Пуанкаре приводит простой пример — исследование

некоторой кривой — и отмечает [85]: «Так как ученый желает изучить кривую саму по себе, то он правильно распределит точки, подлежащие наблюдению, и, как только он их будет знать, он соединит их непрерывной линией и тогда будет иметь в своем распоряжении кривую целиком. Но что же он для этого сделает? Если он первоначально определил крайнюю точку кривой, то он не будет оставаться все время вблизи этой точки, а, напротив, он перейдет прежде всего к другой крайней точке. После двух конечных точек наиболее интересной будет середина между ними и т.д.».

Наиболее трудным с точки зрения асимптотического подхода оказывается промежуточный случай $\varepsilon \sim 1$. Правда, в этой области часто хорошо работают численные методы, однако если стоит задача исследовать решение в зависимости от параметра ε, то по крайней мере неудобно пользоваться различными решениями в разных областях. Построение единого решения — нетривиальная задача. На наш взгляд, прогресс в ее решении во многом будет способствовать прогрессу асимптотических методов в целом. Вообще говоря, в рассматриваемом примере мы имеем дело с задачей теории аппроксимации функций. А именно: известно поведение функции в зонах I и III (рис. 1.9), нужно определить ее в зоне II. С этой целью можно использовать разные подходы. Например, иногда удается «сшить» предельные значения исходного оператора и синтезировать краевую задачу, которая, будучи проще исходной, позволяет осуществить гладкую склейку решений. В некоторых случаях для сращивания предельных разложений можно использовать вариационные методы, принимая в качестве аппроксимирующих функций эти предельные разложения. Есть и другие «народные приемы».

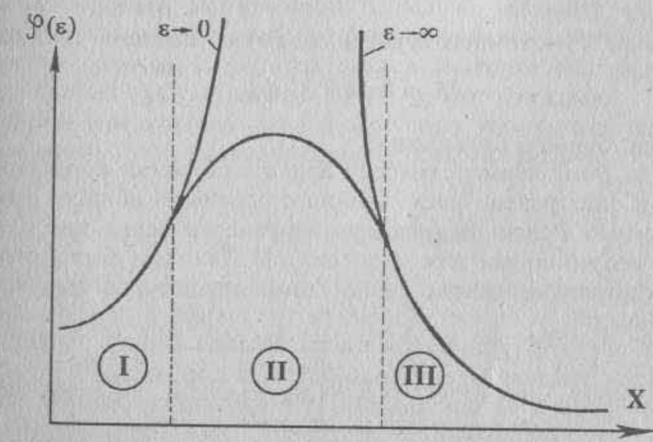


Рис. 1.9.

Весьма перспективным в настоящее время, как нам кажется, является метод двухточечных аппроксимаций Паде.

Дадим определение двухточечных Паде-аппроксимаций [15]. Пусть

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n, \qquad \varepsilon \to 0 \tag{1.7}$$

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \varepsilon^{-n}, \qquad \varepsilon \to \infty \tag{1.8}$$

Тогда двухточечная аппроксимация Паде имеет вид:

$$f(\varepsilon) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varepsilon^i}{\sum_{j=0}^{n} \beta_j \varepsilon^j}, \tag{1.9}$$

где коэффициенты числителя и знаменателя подбираются из условий: разложения выражений (1.9) при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$ должны совпадать с выражениями (1.7) и (1.8) соответственно.

Говоря о сращивании, нельзя не упомянуть о «нобелевской премии за сращивание». Речь идет о построении Планком формулы для интенсивности излучения черного тела.

Суть здесь состоит в следующем. Для энергии излучения абсолютно черного тела в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ классической физикой были даны две формулы: формула Вина

$$dE = C\lambda^{-5} \exp\left(\frac{-b}{T\lambda}\right) d\lambda$$

(b, $C = \mathrm{const}$, T — температура) и формула Рэлея — Джинса

$$dE = 8\pi k T \lambda^4 \, d\lambda,$$

где k — постоянная Больцмана.

Формула Вина асимптотически верна в областях коротких волн ($\lambda T \to 0$) и дает резкие расхождения с опытом в области длинных волн. Формула Рэлея-Джинса асимптотически верна для длинных волн, но неприменима для коротких. М.Планком была получена единая формула на основе сращивания предельных выражений:

$$E = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k T}\right) - 1}$$

«Выражение, пригодное во всей области изменения переменных,

было найдено по двум предельным случаям, т. е. точное соотношение было угадано при помощи интерполяционной процедуры», — пишет А.Б.Мигдал [69].

Отметим еще один удачный пример сращивания предельных асимптотик. В краткой заметке в трудах Датской Королевской академии наук, опубликованной в 1953 г., Г.Гамов с высокой точностью оценил температуру реликтового излучения ($\sim 7^\circ K$, современное значение $\sim 3^\circ K$). При этом Гамов использовал для описания Вселенной асимптотики «малых» и «больших» времен, а затем — процедуру их сращивания. «Самая большая дерзость, которую позволил себе теоретик в работе 1953 г.,— это «сшивание» двух асимптотик вместо использования точного решения. Такого рода прием почти всегда проходит в теоретической физике и приносит, пусть и не обязательно точный, но, несомненно, ясный и осмысленный результат. Он особенно ценен, когда проделывается ориентировочный расчет на предсказание какой-то величины, которую еще только предстоит измерить в будущем эксперименте и о которой известно мало или даже вообще ничего. Гамов самыми простыми средствами осуществил эту операцию «сшивки» и именно из нее извлек элементарным путем окончательный вывод» [112].

Вот еще интересный пример «сшивки» решений: «В феноменологических нелокальных теориях (П.А.М.Дирак, Г.Ватагин и др.) операторы полей, входящие во взаимодействие, искусственно «раздвигаются» при помощи вносимых в теорию извне специальных функций — формфакторов, которые стремятся к единице при малых и к нулю при больших импульсах. С этими функциями связаны надежды на устранение расходимостей» [54].

Остается вспомнить сборник «Физики шутят»: «Если физику нужно исследовать устойчивость стола на четырех ножках, то сначала он рассмотрит стол без ножек, затем — стол с бесконечным числом ножек, а остаток жизни потратит на исследование общего случая устойчивости стола с n ножками». Так вот, сращивание предельных разложений при помощи двухточечных аппроксимант Паде позволит физику быстро решить эту задачу!

Ренормализация

Весьма эффективный способ «улучшения» решений, полученных при помощи теории возмущений, связан с использованием ренормализационной группы (ренормгруппы) [29, 118, 136, 137]. Такое «улучшение» оказывается особенное важным, когда точное решение имеет сингулярность (обращается в бесконечность), не улавливаемую или неправильно определяемую в любом конечном порядке теории возмущений.

Отметим, что некоторая совокупность преобразований образует группу, если:

— результат двух последовательных преобразований из этой совокупности должен снова принадлежать той же совокупности;

— в рассматриваемой совокупности должно содержаться тождественное преобразование;

— для каждого преобразования в данной совокупности должно содержаться обратное преобразование (т. е. результат последовательного выполнения прямого и обратного преобразования должен давать тождественное преобразование).

Существуют группы дискретные и непрерывные. К дискретным группам относится, например, группа вращений квадрата относительно своего центра (проверьте!), к непрерывным — группа сдвигов по времени для уравнения движения маятника (изменение начала отсчета времени ничего не меняет в описании процесса).

В физических задачах часто встречается ситуация, когда можно заранее определить на основе некоторых качественных соображений (или экспериментальных результатов), что некоторые процессы или величины должны быть инвариантными (неизменными) относительно определенных преобразований, переменных и параметров, образующих группу (ренормгруппа). Условие инвариантности позволяет получить функциональные уравнения, связывающие параметры и переменные искомого решения. Точные решения удовлетворяют этим функциональным уравнениям, а приближенные решения теории возмущений, как правило, этим свойством не обладают. Метод ренормгруппы позволяет «улучшить» решение теории возмущений таким образом, что новое ренормгрупповое решение является точным решением соответствующих функциональных уравнений и, в то же время, воспроизводит при разложении в ряд приближения теории возмущений, не удовлетворяющие сами по себе указанным функциональным зависимостям. Таким образом, осуществляется синтез групповой (симметрийной) информации о поведении искомого решения с локальной информацией метода возмущений.

Такова суть процедуры ренормализации, составляющей основу метода ренормгруппы. Но строгая реализация этой процедуры часто связана с огромными техническими трудностями, например, в таких проблемах, как фазовые переходы или турбулентность. Один из способов их преодоления подсказывает совершенно неожиданная асимптотика.

Дело в том, что в воображаемом мире с четырьмя пространственными измерениями эти трудности не возникают, и удается осуществить обычное усреднение. Нельзя ли рассматривать этот случай как предельный, а величину $\varepsilon = 4 - d$ (d — размерность пространства) как малый параметр? В реальном трехмерном мире $d = 3$ и $\varepsilon = 1$, и все же асимптотическое разложение по параметру ε оказывается весьма эффективным при решении сложнейших задач физики критических явлений.

Исключительная важность метода ренормгруппы для критических явлений обусловлена тем, что, как пишет лауреат нобелевской премии К.Вильсон [29], «Подход, основанный на ренормгруппе, дает стратегию для решения проблем, в которых участвует много масштабов длин. Стратегия сводится к тому, чтобы двигаться маленькими шагами — по шагу на каждый масштаб длин.

Подход ренормгруппы сводится к интегрированию по флуктуациям по очереди, начиная с флуктуаций на атомном масштабе, постепенно двигаясь к большим масштабам, пока не будет произведено усреднение по флуктуациям всех масштабов».

Асимптотические методы в век компьютеров

У читателя, возможно, уже возник вопрос: а стоит ли применять асимптотические методы, если в последнее время такое развитие получили ЭВМ? Может быть, проще запрограммировать исходную задачу во всей ее сложности и решать, применяя универсальные численные методы?

На это можно ответить так. Во-первых, применение асимптотических методов оказывается весьма полезным предварительным этапом анализа задачи и в тех случаях, когда результаты получаются численно. Они позволяют выбрать наилучший численный прием и разобраться в обширном, но не упорядоченном числовом материале. «Эффективные вычислительные методы решения той или иной задачи, экономные с точки зрения затраты машинного времени, всегда должны использовать информацию об аналитической природе задачи» [70]. Во-вторых, асимптотические методы хорошо работают в области экстремальных параметров — т.е. там, где численные методы вообще отказывают или встречают большие трудности. Недаром Лаплас говорил, что асимптотические методы «тем более точны, чем более нужны». Нельзя не отметить роль асимптотических методов в многомерных задачах. «Хотя многие считают, что на хорошей ЭВМ можно решить любую задачу, это далеко не так. Если речь идет о задачах на собственные значения, то пока численные расчеты дают надежные результаты только в одномерном случае. Даже двумерная задача представляется уже очень сложной с точки зрения численного счета» [103].

Вот еще компетентное мнение нобелевского лауреата К.Вильсона: «Компьютеры расширяют возможности теоретиков, но даже численные компьютерные методы ограничены на практике числом степеней свободы. Методы численного интегрирования неприменимы при числе переменных интегрирования больше 5–10; уравнения в частных производных также становятся чрезвычайно сложными, когда число независимых переменных превышает 3. Методы Монте-Карло и статистического усреднения позволяют рассматривать некоторые случаи тысяч и даже миллионов переменных, но медленная сходимость этих методов приводит к большим затратам вычислительного времени даже на быстродействующих ЭВМ.

Моделирование на компьютере атмосферного потока, покрывающего все масштабы длин турбулентности, потребовало бы создания сетки с миллиметровым шагом, покрывающей тысячи миль по горизонтали и десятки миль по вертикали; общее число точек сетки было бы порядка 10^{25} — далеко за пределами возможностей любого мыслимого компьютера» [29].

В то же время есть обоснованная надежда на эффективное исследование подобных систем при помощи, например, ренорм-группы.

С.Хокинг писал об одной из своих задач: «Оценки показали, что даже с помощью компьютера работа заняла бы никак не меньше четырех лет, и при этом очень велика вероятность хоть раз ошибиться. Следовательно, в ответе можно быть уверенным лишь в том случае, если кто-нибудь другой повторил бы все вычисления и получил тот же результат, а на это трудно рассчитывать!» [113].

Между тем применение приближенных аналитических подходов позволило преодолеть эту трудность.

В настоящее время возможно создание таких алгоритмов, которые гладкие части решений определяют численно, а для областей резкого их изменения (например, пограничных слоев) используют асимптотические подходы. Наконец, асимптотические методы развивают нашу интуицию и играют большую роль в формировании мышления современного ученого-естественника и инженера (об этом подробнее см. далее). Поэтому асимптотические и численные методы можно рассматривать не как конкурирующие, а как взаимодополняющие.

Развитие ЭВМ, кстати, весьма способствует и развитию асимптотических методов. Например, один из самых трудных этапов их применения — построение высших приближений. Как правило, для сложных задач «вручную» удается построить два-от силы три приближения. Теперь появилась возможность переложить эту рутинную работу на плечи компьютеров, что в некоторых случаях уже сделано.

Правда, нужно отметить, что и для компьютера эта задача непроста, т.к. число членов асимптотического разложения N стремительно нарастает с ростом номера приближения. Во многих случаях N определяется числами Каталана

$$N = (2n)!/[n!\,(n+1)!],$$

так что $N_1 = 1$, $N_2 = 2$, $N_4 = 14$ и т.д.

В качестве конкретного примера соотношения численных и аналитических методов можно рассмотреть механику деформируемого твердого тела.

«Непрофессионалу, возможно, трудно представить себе, насколько физики (как, вероятно, и представители других наук) подвержены моде» [90]. Мода на массированное применение численных методов захлестнула механику деформируемого твердого тела примерно полтора десятка лет тому назад. Особенно это касалось весьма простого с идейной точки зрения и исключительно эффективного метода конечных элементов. На конференциях и симпозиумах доклады, в которых предпочтение отдавалось аналитическим подходам, стали выглядеть анахронизмом, а робкие попытки их авторов напомнить, что цель науки во многом состоит в том, чтобы «вычисления заменить идеями» (по выражению Бурбаки) тонули в хоре скептиков. Шутили, что популярные названия докладов об очередном самом-самом общем численном методе типа «О едином подходе...» звучат как «О единственном...».

Вполне закономерно, что чем меньше выступавший представлял себе, с какой стороны подходить к ЭВМ, тем больше он трактовал численные методы как некую панацею от всех бед и тем больше хаял «устаревшие» и «изжившие себя» аналитические подходы. В то же время ученые, которым приходилось много и серьезно считать, прекрасно понимали роль аналитических приемов, тем более в случаях, когда, по выражению В.И.Феодосьева, «машину нужно проводить на руках».

Сейчас можно считать, что эта «детская болезнь» в основном преодолена, и аналитические методы — «старое, но грозное оружие» (А.Б.Мигдал),— в целом сохранили свое значение.

Достоинства и недостатки асимптотических методов

Кратко сформулируем основные достоинства и недостатки асимптотических подходов.

К достоинствам, в первую очередь, относятся:

1. Существенное упрощение решения. Часто удается даже получить его в аналитическом виде.

2. Асимптотический метод легко сочетается с другими подхо-

дами — численными, вариационными и т.д. Так, после упрощения исходной краевой задачи можно эффективно использовать метод конечного элемента или прогонки. Асимптотический метод позволяет уловить структуру решения и, тем самым, вид аппроксимирующих функций в методах Бубнова-Галеркина, Канторовича и других вариационных подходах.

3. Асимптотические методы тесно связаны с физической сутью задачи и, в то же время, позволяют лучше проникнуть в нее.

4. Асимптотические методы часто позволяют выяснить математическую и физическую основу сугубо приближенных инженерных методик, уточнить их и повысить достоверность получаемых на основе таких подходов решений.

5. Асимптотические методы часто дают возможность единого подхода к различным, на первый взгляд, задачам, позволяют выявить их скрытое внутреннее единство и общность.

В то же время, естественно, асимптотические методы не панацея. Главный их недостаток заключается в том, что не всегда первое приближение обеспечивает нужную точность, построение же последующих приближений часто представляет очень трудоемкую задачу. Далее, оценка точности асимптотических приближений и пределов применимости получаемых при их помощи решений — весьма нетривиальная проблема.

Наконец, чисто субъективное препятствие к применению асимптотических методов в настоящее время может, на наш взгляд, заключаться в следующем. Представим ситуацию, когда перед исследователем стоит выбор: использовать имеющийся пакет прикладных программ, основанных, например, на методе конечного элемента, или попытаться подвергнуть предварительно исходную задачу анализу и упрощению. Какой путь он выберет? Обращение к пакету не требует, на первый взгляд, особых затрат «серого вещества» (другое дело, что «отрезвление» часто наступает после больших затрат времени, сил и средств, когда все равно приходится прибегать к аналитическому исследованию).

Подчеркнем еще раз простую мысль: основные идеи асимптотического упрощения явно или чаще неявно используются инженером. Выбор метода асимптотического исследования, введение малых параметров в систему — это существенно неформализуемая часть исследования. Здесь должны помочь опыт и интуиция, анализ физической сути задачи, экспериментальных и численных результатов. Но после того, как малые параметры уже введены и метод исследования выбран, ни к чему «изобретать велосипед»: можно воспользоваться каким-либо известным и хорошо разработанным приемом.

Несколько слов о малых параметрах. Они могут входить в систему с самого начала или вводиться искусственно. Например,

в качестве естественных малых параметров в теории оболочек выступают величины:

h/R — отношение толщины оболочки к радиусу;

a/b — отношение характерных размеров (например, длины пластинки к ее ширине);

ω^{-1}, где ω — безразмерная частота колебаний;

A — безразмерная амплитуда колебаний;

w/R, где w — нормальный прогиб;

отношение изгибных жесткостей конструктивно-орторопной оболочки или отношение жесткости на сдвиг такой оболочки к ее жесткости на растяжение-сжатие.

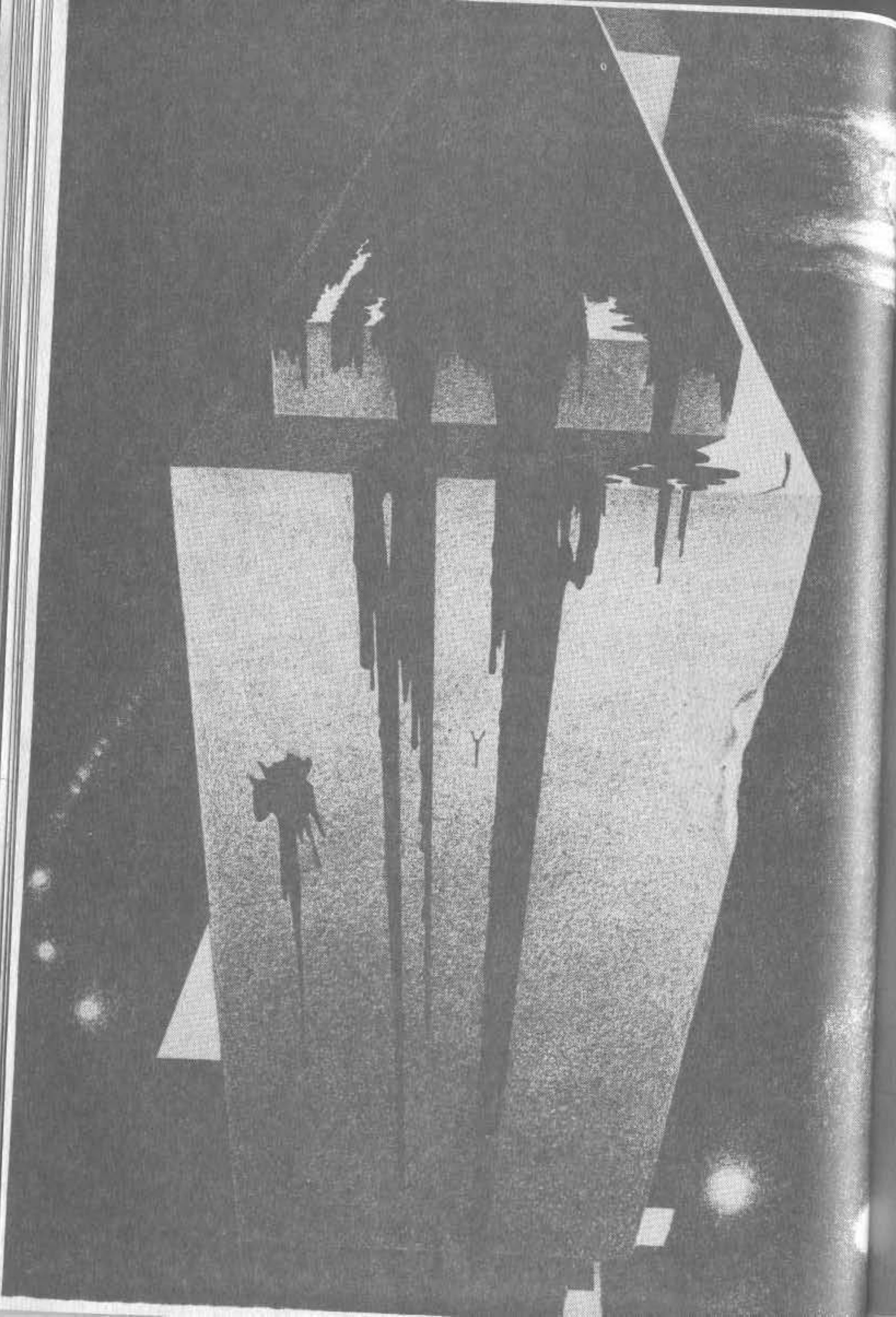
Параметр $\varepsilon \ll 1$ может также характеризовать малое отклонение исходной области от круговой, исходной переменной толщины от постоянной, отношение стрелы подъема пологой оболочки H к радиусу кривизны R и т.д. Возможны различные варианты, когда некоторый параметр может быть как малым, так и большим.

Если «подходящего» малого (большого) физического параметра найти не удается, можно попытаться ввести его в уравнения искусственно. При этом «существенной проблемой, характерной для прикладной математики, является проблема нулевого приближения. Она состоит в выборе некоторого объекта или семейства таких объектов, вблизи одного из которых должно оказаться искомое решение. Этот выбор может опираться на ожидаемый характер решения и часто делается уже при построении математической модели. Чтобы успешно разыскать нечто, всегда желательно хотя бы приблизительно знать, что именно разыскивается. Указанное семейство можно построить различными неэквивалентными способами, существенно влияющими на простоту и точность дальнейшей процедуры, при этом велика роль аналогий и интуиции» [19].

Простейший способ состоит во введении параметра ε таким образом, чтобы при $\varepsilon = 0$ получалась упрощенная задача, а при $\varepsilon = 1$ — исходная. Однако при этом встает серьезная проблема сходимости ряда теории возмущений при $\varepsilon = 1$. Здесь могут оказаться полезными методы аналитического и мероморфного продолжений, обобщенного суммирования и т.д.

Наконец, в асимптотических методах еще недостаточно обращается внимания на такой аспект. Если можно построить асимптотику при $\varepsilon \to 0$, то нельзя ли получить разумные упрощения при $\varepsilon \to \infty$? Часто подобный вопрос физически обоснован. Далее можно попробовать построить по предельным решениям составное выражение, описывающее решение при любом ε (например, при помощи двухточечной аппроксимации Паде).

НЕМНОГО МАТЕМАТИКИ



При изучении наук примеры полезнее правил

И.Ньютон

— И к чему, скажите, все эти вычисления,— спросил ординарец,— которые ученые проделывают, словно какие-то фокусы?
— Ни к чему,— ответил капитан,— в этом-то и вся их прелесть!

(Жюль Верн, «Гектор Сервадак», 1877)

Настоящая глава посвящена более формальному изложению асимптотических методов. «Что такое асимптотика? Ответить на этот вопрос почти столь же трудно, как и на вопрос «Что такое математика?» [105]. Довольно условно далее под асимптотическим упрощением мы будем понимать упрощение, достигнутое в результате того или иного предельного перехода. Асимптотическое решение задачи можно условно разделить на три этапа. Первый — выделение (или введение) малых (больших) параметров в системе, второй — собственно асимптотическое упрощение, третий — оценка погрешности.

Первый этап наименее формализуем. Именно здесь лежит существенное отличие в подходах асимптотического и чистого математика, для которого исследование начинается с момента, когда в системе уже есть малый параметр. Общих рецептов асимптотика, естественно, нет, однако предварительный анализ размерностей и порядков входящих в исходные краевые задачи величин, рациональное обезразмеривание и выделение естественных безразмерных параметров являются правилом [132]. Одним из критериев естественной асимптотики может быть следующее положение: если при $\varepsilon \to 0$ получается содержательная асимптотика, то, как правило, при $\varepsilon \to \infty$ также можно получить радикальные упрощения (своеобразный «принцип дополнительности» асимптотик).

Однако не следует думать, что творческий этап применения асимптотики кончается на выборе или введении малых параметров.

«Попробуем найти асимптотику какого-либо (нетривиального) решения. Необходимо прежде всего угадать (и другого слова тут не подберешь), в каком виде эту асимптотику следует искать. Разумеется, этот этап — угадывание вида асимптотики — никакой формализации не поддается. Аналогии, опыт, физические соображениями, интуиция, «случайная» догадка — вот тот арсенал средств, которыми пользуется любой исследователь» [105].

Вопрос об оценке погрешности весьма нетривиален. Ему посвящена обширная литература, в которой высказываются подчас прямо противоположные взгляды. Свое личное мнение и некоторые рекомендации, основанные на собственном опыте, мы высказали ранее.

Аппарат теории возмущений

В дальнейшем нам часто предстоит использовать математический аппарат особой природы — асимптотические ряды, о которых говорилось выше.

Для обозначения того факта, что данный асимптотический ряд представляет некоторую функцию, будем использовать символ «~» — асимптотически равно. Если в асимптотическом ряде оставлен только первый член, то мы получаем асимптотическое представление

$$f(\varepsilon) \sim f_0(\varepsilon)$$

Важным является вопрос, на каком члене можно обрывать асимптотический ряд, чтобы он давал наилучшее приближение. Обычно оптимальным является обрывание асимптотического ряда на наименьшем члене либо на члене, предшествующем наименьшему.

Как правило, поведение функции оценивается сопоставлением с известными функциями, которые называются калибровочными функциями или функциями сравнения.

Простейшие и наиболее распространенные из них:

$$\ldots, \varepsilon^{-n}, \ldots, \varepsilon^{-1}, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n, \ldots,$$

или

$$\varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_n}, \ldots,$$

где

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$$

Используются также функции $\ln \varepsilon$; $\ln\left|\ln \varepsilon\right|$; ...; $\exp(\varepsilon^{-1})$; $\exp(-\varepsilon^{-1})$; $\sin \varepsilon$; $\cos \varepsilon$; $\operatorname{tg} \varepsilon$; $\operatorname{sh} \varepsilon$; $\operatorname{ch} \varepsilon$; $\operatorname{th} \varepsilon$ и т.д.

Подбор подходящих для данной задачи калибровочных функций — нетривиальная задача.

Асимптотическую последовательность, связанную с задачей, нельзя задавать произвольно. Она должна быть достаточно полной, чтобы описывать, например, логарифм, если он появится в решении задачи. С другой стороны, существует неограниченная возможность выбора различных частных асимптотических последовательностей. Скажем, функцию $\sin 2\varepsilon$ можно представить в виде следующих разложений:

$$\sin 2\varepsilon \sim 2\varepsilon + \frac{4}{3}\varepsilon^3 + \frac{4}{15}\varepsilon^5 + \ldots$$

$$\sin 2\varepsilon \sim 2\operatorname{tg}\varepsilon - 2\operatorname{tg}^3\varepsilon - 2\operatorname{tg}^5\varepsilon + \ldots$$

$$\sin 2\varepsilon \sim 2\ln(1+\varepsilon) + \ln(1+\varepsilon^3) - 2\ln(1+\varepsilon^3) + \ldots$$

$$\sin 2\varepsilon \sim 6\left(\frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}\right) - \frac{756}{5}\left(\frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}\right)^5 + \ldots$$

Две последние формы иллюстрируют то обстоятельство, что выбранные последовательности не обязательно эквивалентны: порядок соответствующих членов неодинаков. Однако и асимптотическая последовательность, и само асимптотическое разложение определяются единственным образом, если выбрана величина возмущения и функции сравнения.

Именно неоднозначность представления искомой функции в виде асимптотической последовательности дает большое поле деятельности для исследователя.

Один из способов исследования возмущенной задачи состоит в том, чтобы заранее предположить, какую форму будет иметь решение в виде ряда. Для этого необходимо угадать подходящую асимптотическую последовательность. Простейшей возможной является последовательность целых степеней ε. Могут встречаться также и дробные степени, особенно в задачах сингулярных возмущений, а также, к сожалению, логарифмы, синусы и экспоненты.

Естественно возникает вопрос, как удостовериться в правильности сделанного выбора асимптотической последовательности. По-видимому, общего правила не существует, но некоторую помощь могут оказать следующие принципы [25]:

— сомнительные случаи проверяются: лишний член выпадает при построении для его коэффициента однородной задачи, решением которой (если оно единственно!) является нуль;

— итерации иногда (но не всегда!) автоматически приводят к надлежащей последовательности.

При сравнении поведения функции $f(\varepsilon)$ с калибровочной функцией при $\varepsilon \to 0$ используется один из двух символов Ландау O или o, а именно:

$$f(\varepsilon) = O\,[g(\varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

если существует положительное число A, не зависящее от ε, и значение $\delta > 0$, такие, что $\left|f(\varepsilon)\right| < A\left|g(\varepsilon)\right|$ для всех $|\varepsilon| < \delta$.

Это условие может быть заменено следующим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right| < c < \infty$$

Если, кроме ε, функция f зависит и от другой переменной x, а $g(x, e)$ — калибровочная функция, то по-прежнему пишем

$$f(x, \varepsilon) = O\,[g(x, \varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{2.1}$$

если существуют положительное число A, не зависящее от ε, и $\varepsilon_0 \to 0$ такие, что

$$\left|f(x, \varepsilon)\right| \le A\left|g(x, \varepsilon)\right| \text{ для всех } |\varepsilon| \le \varepsilon_0.$$

Если для любого сколь угодно малого положительного числа δ величина A и ε_0 не зависят от x, то говорят, что соотношение (2.1) выполняется равномерно по x.

Мы пишем

$$f(\varepsilon) = o\,[g(\varepsilon)] \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

если для любого сколь угодно малого положительного числа δ, не зависящего от ε, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\left|f(\varepsilon)\right| \le \delta\left|g(\varepsilon)\right| \text{ при } |\varepsilon| \le \varepsilon_0.$$

Это условие может быть заменено следующим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{\left|f(\varepsilon)\right|}{\left|g(\varepsilon)\right|} = 0$$

Если

$$f = f(x, \varepsilon) \text{ и } g = g(x, \varepsilon)$$

то говорят, что (2.1) выполняется равномерно по x, если δ и ε_0 не зависят от x.

Рассмотрим теперь возможность выполнения простейших действий над асимптотическими рядами. Правила сложения и вычитания могут быть обоснованы в общем случае. Если, например,

$$f(x, \varepsilon) \sim \sum f_n(x)\,\varphi_n(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$
$$g(x, \varepsilon) \sim \sum \delta_n(x)\,\varphi_n(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $\varphi_n(\varepsilon)$ — асимптотическая последовательность, то

$$\alpha f(x, \varepsilon) + \beta g(x, \varepsilon) \sim \sum[\alpha f_n(x) + \beta\,\delta_n(x)]\,\varphi_n(\varepsilon).$$

Если $f(x, \varepsilon)$ и $f_n(x)$ — интегрируемые функции x, то

$$\int_\alpha^x f(x, \varepsilon)\,dx \sim \sum \varphi_n(\varepsilon)\int_\alpha^x f_n(x)\,dx \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Если же $f(x, \varepsilon)$ и $\varphi_n(\varepsilon)$ интегрируемые функции ε, то

$$\int_0^\varepsilon f(x, \varepsilon)\,d\varepsilon \sim \sum f_n(x)\int_0^\varepsilon \varphi_n(\varepsilon)\,d\varepsilon \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Правило умножения для общего случая не определяется, поскольку в формальном произведении рядов $\sum f_n(x)\,\varphi_n(\varepsilon)$ и $\sum \delta_n(x)\,\varphi_n(\varepsilon)$ встречаются все произведения вида $\varphi_n(\varepsilon)\,\varphi_m(\varepsilon)$, которые в общем случае невозможно расположить так, чтобы получить асимптотическую последовательность. Иными словами, умножение определено в тех случаях, когда в результате получается асимптотическое разложение. Это имеет место для всех асимптотических последовательностей, для которых произведения $\varphi_n\,\varphi_m$ либо образуют асимптотическую последовательность, либо имеют асимптотическое разложение. Важным классом таких последовательностей является набор степеней ε. Так, если при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$f(x, \varepsilon) \sim \sum f_n(x)\,\varepsilon^n \text{ и } g(x, \varepsilon) \sim \sum \delta_n(x)\,\varepsilon^n,$$

то при $\varepsilon \to 0$ справедливо соотношение

$$C_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f_m(x)\,\delta_{n-m}(x); \quad f(x, \varepsilon)\cdot g(x, \varepsilon) = \sum C_n(x)\,\varepsilon^n.$$

Возведение в степень не может быть обосновано для общего случая. Формальное проведение этой операции, когда она не обоснована, приводит к неравномерностям.

В общем случае не обосновано также дифференцирование асимптотических разложений по переменной x или по параметру возмущения ε. Как и возведение в степень, дифференцирование может привести к неравномерностям.

Необходимо также кратко остановиться на следующем вопросе. В задачах с возмущением по параметру функции, подлежащие разложению, могут зависеть от одной или большего числа переменных, не считая параметра возмущения. Если построить асимптотическое разложение функции $f(x, \varepsilon)$, где x — скалярная или векторная переменная, не зависящая от ε, по асимптотической последовательности $\delta_m(\varepsilon)$, то получим

$$f(x, \varepsilon) \sim \sum f_m(x)\, \delta_m(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.2}$$

Говорят, что разложение (2.2) равномерно пригодно, если

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m(x)\, \delta_m(\varepsilon) + R_N(x, \varepsilon), \qquad R_n(x, \varepsilon) = O\,[\delta_N(\varepsilon)]$$

равномерно для всех рассматриваемых x.

В противном случае говорят, что разложение является неравномерно пригодным (сингулярным). Для того, чтобы условия равномерности выполнялись, необходимо, чтобы для каждого m слагаемое $f_m(x)\,\delta_m(\varepsilon)$ было мало по сравнению с предыдущим.

Поскольку при $\varepsilon \to 0$ имеем $\delta_m(\varepsilon) = O\,[\delta_{m-1}(\varepsilon)]$, для равномерности разложения мы должны требовать, чтобы для всех рассматриваемых x $f_m(x)$ было не более сингулярным, чем $f_{m-1}(x)$.

Простой пример

Для иллюстрации технической стороны асимптотического метода рассмотрим простой алгебраический пример. Биквадратное уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

заменой $z = x^2$ сводится к квадратному и легко решается

$$x_{1,2} = \pm 2, \qquad x_{3,4} = j\sqrt{2}, \qquad j = \sqrt{-1}$$

Возможность такого упрощения — следствие симметрии исходного уравнения (замена x на $-x$ не меняет его).

Пусть исходное уравнение описывает некоторую физическую систему, и ее параметры претерпевают малые изменения, вследствие чего уравнение приобретает вид:

$$y^4 - \varepsilon y^3 - 2y^2 - 8 = 0 \tag{2.3}$$

При этом говорят, что система получила малое возмущение,

выражение εy^3 называют возмущающим членом, а ε — малым параметром. Отмеченная ранее симметрия нарушилась, и решение нового уравнения уже нельзя записать в простой форме. Но корни его y_i $(i = 1 - 4)$ не должны сильно отличаться от x_i, поэтому можно положить $y_i \approx x_i$. Погрешность такой замены определяется величиной отброшенного члена εy^3.

Чтобы уточнить решение, представим его в виде ряда

$$y_i = x_i + \varepsilon\, y_i^{(1)} + \ldots,$$

где многоточие соответствует членам с более высокими степенями.

Подставляя это выражение в возмущенное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем

$$y_i^{(1)} = x_i^2 / (4\,(x_i^2 - 1)) \tag{2.4}$$

Вычисление поправок можно без труда продолжить, но с ростом ε отклонения от точного решения неизбежно будут увеличиваться.

Рассмотрим теперь противоположный случай больших возмущений. Тогда обратная величина ε^{-1} мала, причем корни уравнения (2.2) разделяются на две группы. При $\varepsilon^{-1} \to 0$ три корня стремятся к нулю, а четвертый неограниченно возрастает. Но для обеих групп по-прежнему можно построить разложения по малому параметру ε^{-1}.

$$y_1 = \varepsilon + O(1), \tag{2.5}$$

$$y_2 = -2\varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-2}),$$

$$y_{3,4} = 0 + O(\varepsilon^{-2})$$

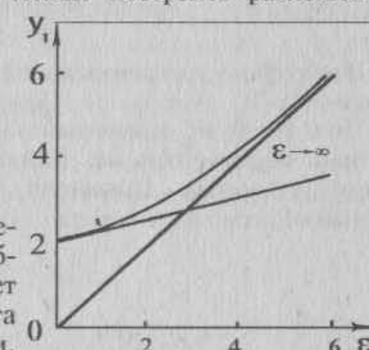


Рис. 2.1.

На рис. 2.1 показаны решения (2.4) и (2.5). Существует область, в которой асимптотика не дает удовлетворительного результата. Эта область, где «малые» ε уже велики, а «большие» — еще малы.

Для компенсации этого дефекта можно использовать двухточечную аппроксиманту Паде, которая для первого корня уравнения (2.3) имеет вид:

$$y_1 = \frac{2 + 0{,}573\varepsilon + 0{,}12\varepsilon^2}{1 + 0{,}12\varepsilon} \tag{2.6}$$

Полученное на основе асимптотик при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$, выражение (2.6) удовлетворительно описывает точное решение при любых значениях ε (рис. 2.1)

Регулярная и сингулярная асимптотики

Теперь поясним основные идеи регулярной и сингулярной асимптотик, приведя несколько примеров поведения решений различных уравнений (алгебраических и дифференциальных) в зависимости от изменения малого параметра ε.

Рассмотрим сначала квадратное уравнение

$$x^2 - 2\varepsilon x - 1 = 0 \tag{2.7}$$

Его точное решение

$$x_{1,2} = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 1}$$

дает в пределе при $\varepsilon \to 0$ два различных корнях

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Раскладывая точное решение в ряд Маклорена по ε, можно определить корни исходного уравнения с любой точностью

$$x_1 = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots$$

$$x_2 = -1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots$$

Изобразим графическое поведение корней уравнения (2.7) (рис. 2.2).

При $\varepsilon \to 0$ не происходит никаких качественных изменений, а лишь количественные. Найденные предельные значения могут потом уточняться. Подобную асимптотику будем называть регулярной. Рассмотрим теперь квадратное уравнение вида:

$$\varepsilon^2 x^2 - 2x - 1 = 0 \tag{2.8}$$

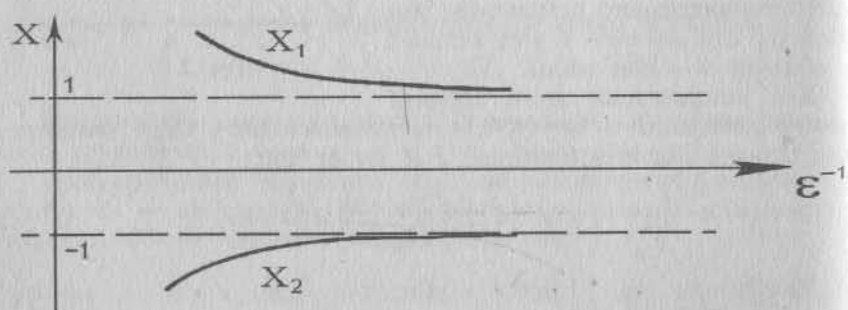


Рис. 2.2.

Здесь в пределе $\varepsilon \to 0$ приходим к уравнению, имеющему лишь один корень $x_1 = 1/2$. Для выяснения ситуации выпишем точное решение

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon} \tag{2.9}$$

и разложим подкоренное выражение в ряд Маклорена

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^4 + \ldots$$

$$x_2 = 2\varepsilon^{-2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^4 \ldots$$

Теперь ясно, что при $\varepsilon \to 0$ второй корень «уходит в бесконечность» (рис. 2.3). Исходное уравнение при малых ε имеет малый и большой корни, и второй корень в пределе $\varepsilon \to 0$ теряется.

Асимптотики такого типа, когда при $\varepsilon \to 0$ происходят качественные изменения решения системы, будем называть сингулярными.

Почему мы не получили второй корень? Дело, очевидно, в том, что при переходе к пределу мы считали x не зависящим от ε, а для второго корня это неверно. Для нахождения второго корня необходимо выполнить аффинное преобразование x, представив его в виде $x = \varepsilon^{-\alpha} x^*$ $(\alpha > 0)$, где x^* уже не зависит от ε, а α — пока неопределенный параметр. Такой прием преобразования неизвестных называется «растяжением переменной». Подставляя «растянутую» переменную в исходное уравнение, получаем

$$\varepsilon^{2-2\alpha} x^{*2} - 2\varepsilon^{-\alpha} x^* - 1 = 0 \tag{2.10}$$

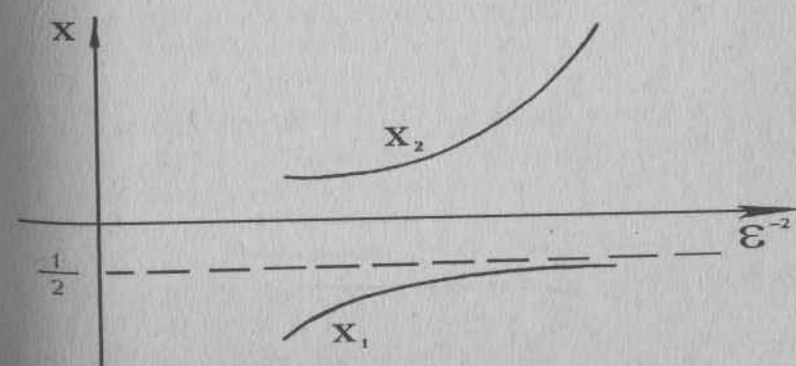


Рис. 2.3.

Какие же значения может принимать α? При $\alpha > 2$ в уравнении (2.10) остается только первый член, и $x^* = 0$. При $0 < \alpha < 2$ имеем

$$-2\varepsilon^{-\alpha} x^* = 0$$

и снова $x^* = 0$.

Единственное непротиворечивое значение, которое может принимать α, это $\alpha = 2$, что подтверждается и точным решением. При $\alpha = 2$ уравнение (2.10) можно переписать так:

$$x^{*^2} - 2x^* - \varepsilon^2 = 0$$

При $\varepsilon \to 0$ отсюда имеем два корня:

$$x_1^* = 2; \qquad x_2^* = 0.$$

Первый и есть искомый большой корень. Второе же значение соответствует уже вычисленному малому корню, поэтому рассматривать его нет нужды.

Рассмотрим новое квадратное уравнение

$$x^2 + 2x + 2\varepsilon = 0 \qquad (2.11)$$

После перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ имеем два корня, один из которых нулевой.

$$x_1^* = -2; \qquad x_2^* = 0.$$

Это понятно из точного решения:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2\varepsilon},$$

раскладывая которое в ряд Маклорена по ε, получаем

$$x = 2 + \varepsilon - \ldots$$

$$x_2 = -\varepsilon + \ldots$$

Поведение корней уравнения (2.11) изображено на рис. 2.4.

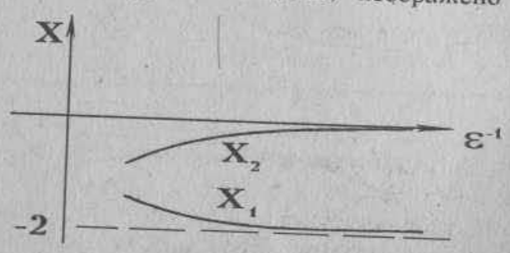


Рис. 2.4.

Задачи указанного типа мы тоже будем относить к сингулярным.

Конечно, нулевой корень уточняется в следующем приближении, но иногда желательно сразу знать его ненулевое значение. По аналогии с предыдущим примером нетрудно догадаться, что здесь нужно выполнить «сжатие» переменной. Для этого положим

$$x = \varepsilon^{\alpha} x^*, \qquad \alpha > 0$$

Тогда исходное уравнение (2.11) примет вид

$$\varepsilon^{2\alpha} x^{*^2} + 2\varepsilon^{\alpha} x^* + 2\varepsilon = 0$$

Единственное непротиворечивое значение α есть $\alpha = 1$. При таком α имеем

$$\varepsilon x^{*^2} + 2x^* + 2 = 0,$$

и после перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ находим

$$x_1^* = -1, \text{ или } x = -\varepsilon.$$

Рассмотрим теперь физический пример — линейные колебания маятника при наличии демпфирования (рис. 2.5). Исходное дифференциальное уравнение и начальные условия запишем так:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0, \qquad (2.12)$$

при $t = 0$; $x = x_0$; $\dot{x} = \dot{x}_0$, (2.13)

где t — время, x — смещение, m, c и β — соответственно масса, жесткость и коэффициент демпфирования. Изучим поведение этой простой системы в трех различных случаях, когда малы: *А)* демпфирование; *Б)* масса; *В)* жесткость.

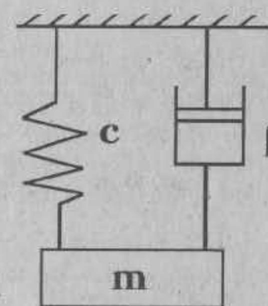


Рис. 2.5.

А. В первом случае приходим к предельному ($\beta \to 0$) уравнению, не содержащему никаких особенностей

$$m\ddot{x}^{(0)} + cx^{(0)} = 0. \qquad (2.14)$$

При решении этого уравнения могут быть удовлетворены оба начальных условия (2.13).

Некоторая неудовлетворенность остается от того, что решение уравнения (2.14), в отличие от решения исходного уравнения

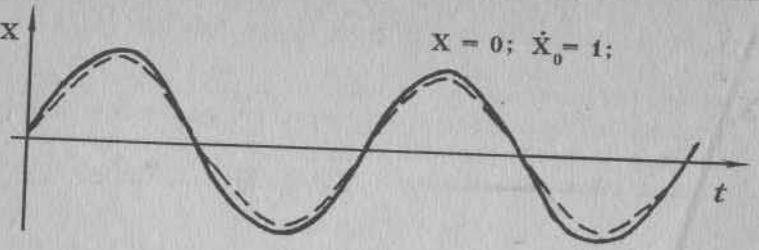


Рис. 2.6.

(2.12), не затухает при $t \to \infty$. Можно ли исправить этот недостаток в следующих приближениях? Ответ здесь положительный, однако само построение следующих приближений нетривиально и имеет ряд тонкостей. Удовлетворимся следующим интуитивно ясным замечанием. Решение предельного ($\beta = 0$) уравнения (2.14) не может, конечно, равномерно хорошо приближать решение исходного уравнения (2.12) на бесконечном промежутке времени. Однако при малом демпфировании указанные решения будут мало отличаться друг от друга на достаточно большом и стремящемся к бесконечности при $\varepsilon \to \infty$ промежутке времени (рис. 2.6).

Следовательно, при $\beta \to 0$ имеем регулярно возмущенную задачу. Это, впрочем, ясно и из аналогии между поведением корней характеристического уравнения для (2.12) и рассмотренного выше квадратного уравнения (2.7).

Б. Пусть теперь мала масса ($m \to 0$). Физически данная ситуация может быть реализована при колебаниях небольшой массы в вязкой жидкости. Предельную систему

$$\beta \dot{x}^{(0)} + c\, x^{(0)} = 0 \tag{2.15}$$

называют «системой с 1/2 степенью свободы», так как уравнение системы с одной степенью свободы имеет второй порядок, а уравнение (2.15) — первый. Ясно, что решение уравнения (2.15) не может удовлетворять одновременно обоим начальным условиям (2.13). В частности, из уравнения (2.15) имеем при $\varepsilon = 0$ «навязанное» значение скорости

$$x(0) = \frac{c\, x_0}{\beta}.$$

Построим графики точных и приближенных значений смещений и скоростей при $\dot{x}_0 = 0$ (рис. 2.7).

Значение смещений определяется довольно точно, причем равномерно точно. Если же судить по скоростям, то вырожденная система (2.15) ведет себя иначе, чем реальная, лишь в самом

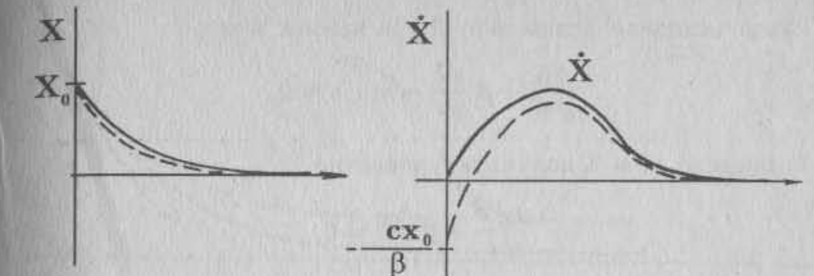


Рис. 2.7.

начале движения, по прошествии промежутка времени скорости вырожденной и реальной системы становятся практически неразличимы.

«Полное игнорирование массы системы приводит к формальной возможности мгновенного изменения скорости от заданного начального значения до «навязанного» уравнением значения — $c\,x_0/\beta$. Такой разрыв скорости означает бесконечное ускорение при конечных силах; это возможно лишь постольку, поскольку масса системы полагается равной нулю. В действительности же начальная сила упругости $c\,x_0$, действуя на весьма малую массу, вызывает очень большие ускорения, то есть очень быстрый, хотя и не мгновенный, рост скорости.

Таким образом, обсуждаемое несоответствие между числом постоянных и числом начальных условий имеет только локальное (по времени) значение. Подобные конфликты, возникающие в теориях вырождения систем, — «вынужденная дань идеализации». Л.И.Мандельштам любил говорить, что «идеализация мстит за себя» [81].

Можно ли было сразу догадаться о возникающей здесь ситуации? Да, если усмотреть аналогию между характеристическим уравнением для уравнения (2.12) и разобранным выше примером (2.8). В пределе $m \to 0$ мы теряем при решении характеристического уравнения большой корень ($x_2 \to \infty$ при $m \to 0$), а в результате составляющую, имеющую множителем экспоненту с большим отрицательным показателем. Эта составляющая быстро затухает при удалении от начала движения. Она особенно существенна при определении скоростей, так как сильно возрастает при дифференцировании.

Анализируя характеристическое уравнение, нетрудно понять, что для нахождения состояния типа пограничного слоя нам необходимо выполнить здесь «растяжение» независимой переменной:

$$t = m\,\tau.$$

Тогда исходное уравнение (2.12) примет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta\frac{dx}{d\tau} + m\,c\,x = 0.$$

В пределе $m = 0$ получаем уравнение

$$\frac{dx^{(n)}}{d\tau} + \beta\,x^{(n)} = 0, \qquad (2.16)$$

описывающее искомый погранслой.

Хотелось бы обратить внимание на следующее обстоятельство. При исследовании сингулярных задач теории дифференциальных уравнений, когда некоторые решения сначала теряются, а затем достраиваются, происходит разделение (его называют асимптотическим разделением или расщеплением) исходного уравнения на ряд уравнений более низкого порядка (в данном случае вместо одного уравнения 2-го порядка (2.12) имеем два уравнения первого порядка (2.15) и (2.16)). При этом возникает нетривиальная задача: какие граничные условия ставить для полученных уравнений? В нашем модельном примере понятно, что для уравнения (2.15) должно быть поставлено условие

$$x^{(0)}(0) = x_0$$

а для уравнения (2.16) — условие

$$\dot{x}^{(n)} = \dot{x}_0 + \dot{x}^{(0)}(0)$$

В. Мала жесткость пружины $(c \to 0)$. Тогда предельное уравнение $(c = 0)$

$$m\,\ddot{x}^{(0)} + \beta\,\dot{x}^{(0)}(0) \qquad (2.17)$$

формально имеет второй порядок, и его решение может удовлетворить обоим граничным условиям (2.13). Однако оно не является равномерно пригодным для всех значений t (см. рис. 2.8).

Это и ясно, так как решение исходного уравнения (2.12) содержит две экспоненты с отрицательными показателями (у одной из них он очень мал и стремится к нулю при $c \to 0$) и затухает при $t \to \infty$. Здесь желательно знать малый корень характеристического уравнения с точностью до ε. Этого можно добиться, выполнив «сжатие» независимой переменной:

$$t = c^{-1}\,\tau$$

Тогда уравнение (2.12) примет вид

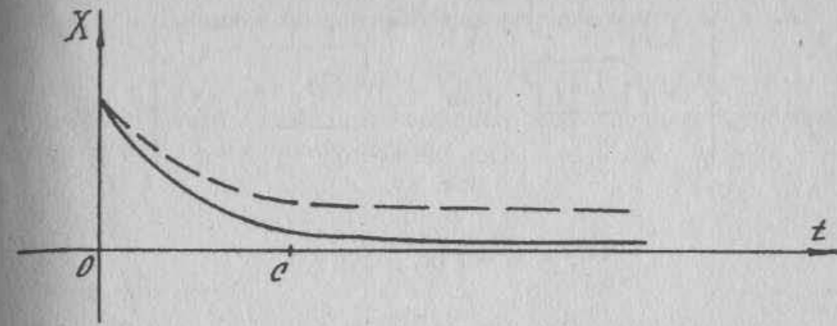


Рис. 2.8.

$$m\,c\,\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta\frac{dx}{d\tau} + x = 0$$

Предельное $(c \to 0)$ уравнение таково

$$\beta\,\frac{dx^{(1)}}{d\tau} + x^{(1)} = 0$$

В исходных переменных

$$\beta\,\dot{x}^{(1)} + c\,x^{(1)} = 0.$$

Начальные условия нетрудно поставить, если учесть,что уравнение (2.17) имеет более быструю изменяемость по t:

$$\dot{x}^{(0)}(0) = \dot{x}_0 + \dot{x}^{(1)}(0)$$

$$x^{(1)} = x_0$$

Асимптотическая декомпозиция

Существенную роль на практике часто играет асимптотическая редукция размерности системы или асимптотическая декомпозиция (расщепление системы на подсистемы меньшей размерности). Для иллюстрации рассмотрим простой пример — колебания двухмассовой системы, изображенной на рис. 2.9. Соответствующие уравнения таковы

$$m_1\,\ddot{x}_1 + c_1\,x_1 + c\,(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2\,\ddot{x}_2 + c_1\,x_2 + c\,(x_2 - x_1) = 0 \qquad (2.18)$$

Приведем систему (2.18) к безразмерному виду

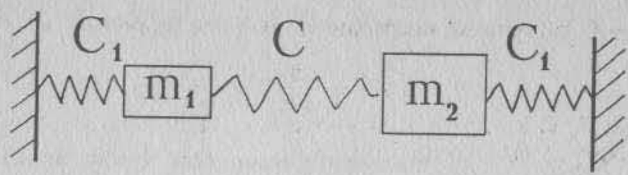


Рис. 2.9.

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) = 0$$

$$\varepsilon_1 \frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 + \varepsilon(x_2 - x_1) = 0 \tag{2.19}$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \frac{m_2}{m_1}; \quad \varepsilon = \frac{c}{c_1}; \quad \tau = (c_1/m_1)\,t,$$

Рассмотрим возможности приближенной декомпозиции и редукции системы (2.19).

Естественно сначала «поиграть» параметром связи ε. При $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon_1 \approx 1$ («слабая связь») система (2.19) «развязывается» в первом приближении

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = 0$$

$$\varepsilon_1 \frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 = 0 \tag{2.20}$$

Однако и при «сильной связи» ($\varepsilon \to \infty$, $\varepsilon_1 \approx 1$) возможно существенное упрощение. Действительно, тогда из уравнений (2.19) имеем приближенное равенство

$$\varepsilon(x_1 - x_2) = 0,$$

Отсюда

$$x_1 = x_2$$

Как получить второе уравнение (подобная ситуация вообще характерна для асимптотической редукции размерности)?

Рассмотрим простой алгебраический пример

$$x + \varepsilon y = f$$

$$x + \varepsilon \alpha y = \delta, \tag{2.21}$$

При $\varepsilon \to 0$ получаем противоречивую систему

$$x = f, \quad x = \delta$$

Чтобы избежать этого противоречия, надо сначала преобразовать систему (2.21) таким образом

$$x + \varepsilon y = f$$

$$\varepsilon(1 - \alpha)\,y = f - \delta$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$x \approx f; \quad y = (f - \delta)\,\varepsilon^{-1}(1 - \alpha)^{-1}.$$

Поступим так же и в нашем случае, преобразуя систему (2.19) к виду

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) = 0; \tag{2.22}$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \varepsilon_1 \frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_1 + x_2 = 0. \tag{2.23}$$

Теперь при $\varepsilon \to \infty$ из уравнения (2.22) имеем $x_1 = x_2$, а уравнение (2.23) можно записать так

$$(1 + \varepsilon_1)\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + 2x_1 = 0 \tag{2.24}$$

Физическая суть уравнения (2.24) очевидна: оно описывает колебание суммарной массы $m_1 + m_2$ на двух пружинах жесткости c_1.

Перейдем теперь к параметру ε_1, считая $\varepsilon \sim 1$. Ясно, что случаи $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_1 \to \infty$ принципиально не отличаются (с точностью до замены x_1 на x_2).

При $\varepsilon_1 \to 0$ ($m_1 \gg m_2$) имеем

$$x_2 = \frac{x_1}{1 + \varepsilon}; \tag{2.25}$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \frac{1 + \varepsilon + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon}\,x_1 = 0.$$

С физической точки зрения уравнения (2.25) описывают колебания большой массы m_1, которая «тянет» за собой малую массу m_2.

При этом теряется периодический режим, и из элементарных соображений ясно, какой: большая масса стоит, малая колеблется.

В этом случае $x_1 = 0$, и для недостающего режима имеем уравнение

$$\varepsilon_1 \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon)\, x_2 = 0 \tag{2.26}$$

Исходная система приближенно разбита на подсистемы (2.25) и (2.26).

Асимптотика при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$

Ранее было высказано соображение о том, что почти всегда, если существует физически осмысленная асимптотика при $\varepsilon \to 0$, должна существовать и асимптотика при $\varepsilon \to \infty$.

Рассмотрим в этой связи пример колебания балки на нелинейном упругом основании жесткости c:

$$E J\, w_{,xxxx} + c\, f(w) + \rho\, F\, w_{,tt} = \varphi(x, t). \tag{2.27}$$

Поделим обе части уравнения (2.27) на EJ и сделаем замену переменных

$$t = \tau\, l^2 \sqrt{\frac{\rho F}{E J}}, \qquad x = \zeta\, l,$$

где l — длина балки.

Тогда имеем

$$w_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} + \varepsilon\, f(w) + w_{,\tau\tau} = \overline{\varphi}(\zeta, \tau), \tag{2.28}$$

где

$$\overline{\varphi}(\zeta, \tau) = \frac{l^4}{E J}\varphi; \qquad \varepsilon = C\, l^4/(E J).$$

Если основание слабое ($\varepsilon \to 0$), то вместо уравнения (2.28) получаем в первом приближении линейное уравнение колебаний балки

$$w_{0,\zeta\zeta\zeta\zeta} + w_{0,\tau\tau} = \overline{\varphi},$$

а нелинейное упругое основание учтется в следующих приближениях

$$w_{1,\zeta\zeta\zeta\zeta} + w_{1,\tau\tau} = -\varphi(w_0) \text{ и т.д.}$$

Однако нетрудно убедиться, что и при $\varepsilon \to \infty$ мы имеем физически вполне осмысленную асимптотику: в первом приближении основание перемещается как жесткое целое

$$\varepsilon\, f(w_0) = \overline{\varphi}(\xi, \tau),$$

а изгиб балки учтется в уравнениях следующих приближений:

$$\varepsilon\, f_1(w_0 + \varepsilon^{-1} w_1) = -w_{0,\xi\xi\xi\xi} - w_{0,\tau\tau} \text{ и т.д.}$$

где функция f_1 получается после подстановки выражения $w_0 + \varepsilon^{-1} w_1$ в функцию $\varepsilon\, f(w_0)$, вычитания $\overline{\varphi}(\xi, \tau)$ и линеаризации относительно w_1.

Осреднение

Рассмотрим колебания цепочки из n одинаковых масс m, связанных пружинами жесткости c.

Отклонение i-й частицы y_i удовлетворяет уравнению

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = c\,(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \tag{2.29}$$

$$1 \le i \le n.$$

Нетрудно проверить, что n возможных собственных форм колебаний можно представить в таком виде:

$$y_i = \delta_i \sin\frac{k\pi i}{n+1} \cos(\omega_k t + \varphi_i), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.30}$$

Частоты ω_k даются формулой

$$\omega_k = 2\sqrt{c/m}\, \sin\frac{\pi}{2(n+1)} \tag{2.31}$$

Ясно, что, если масс много, расстояние между ними невелико и рассматривается достаточно плавная форма колебаний (рис. 2.10), то можно приближенно заменить колебания цепочки масс на

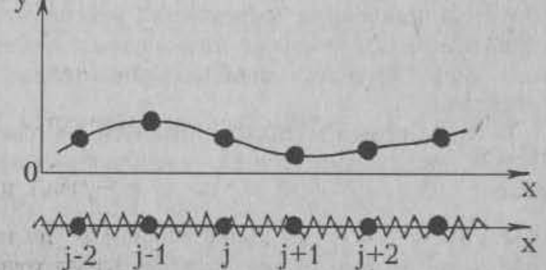


Рис. 2.10.

колебания непрерывного тела — стержня. Математически такой переход можно осуществить по-разному. Самый простой путь, пожалуй, следующий. Будем считать, что уравнения (2.29) описывают разностную аппроксимацию некоторого континуального объекта. Тогда y_i можно рассматривать как значения в точке x_i некоторой функции непрерывного аргумента x.

Представив далее правую часть i-го уравнения системы (2.29) в несколько измененном виде

$$\frac{d^2 y_i}{d t^2} = \frac{c\, l^2}{m} \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{l^2} \right), \tag{2.32}$$

замечаем, что ее можно трактовать как конечно-разностную аппроксимацию в точках $x = k\, l,\ k = 1, 2, \ldots, n$ второй производной

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

Точнее, если записать разложение в ряд Маклорена разностей

$$y_{i+1} - y_i = y_{x+l} - y_x = y'\, l + y''\, \frac{l^2}{2} + \ldots, \tag{2.33}$$

$$y_{i-1} - y_i = y_{x-\alpha} - y_x = -y'\, l + y''\, \frac{l^2}{2} - \ldots,$$

подставить эти выражения в уравнения (2.32) и, считая l малой величиной, отбросить в разложениях (2.33) все члены порядка выше второго по l, то перейдем к уравнению продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = f^2 \frac{\partial^2 (x, t)}{\partial x^2}, \qquad f^2 = \frac{c l^2}{m}. \tag{2.34}$$

Осуществив переход к уравнению (2.34) мы, по существу, континуализировали (осреднили) исходную систему. Понятно, что уравнением (2.34) нужно пользоваться с осторожностью, поскольку оно дает хорошее приближение только для первых частот колебаний.

В то же время в рассматриваемой системе отчетливо выделяется второй предельный случай — «пилообразное» решение (рис. 2.11), когда

$$y_{i+1} = -y_{i-1} = -y;$$

и y_i удовлетворяет уравнению

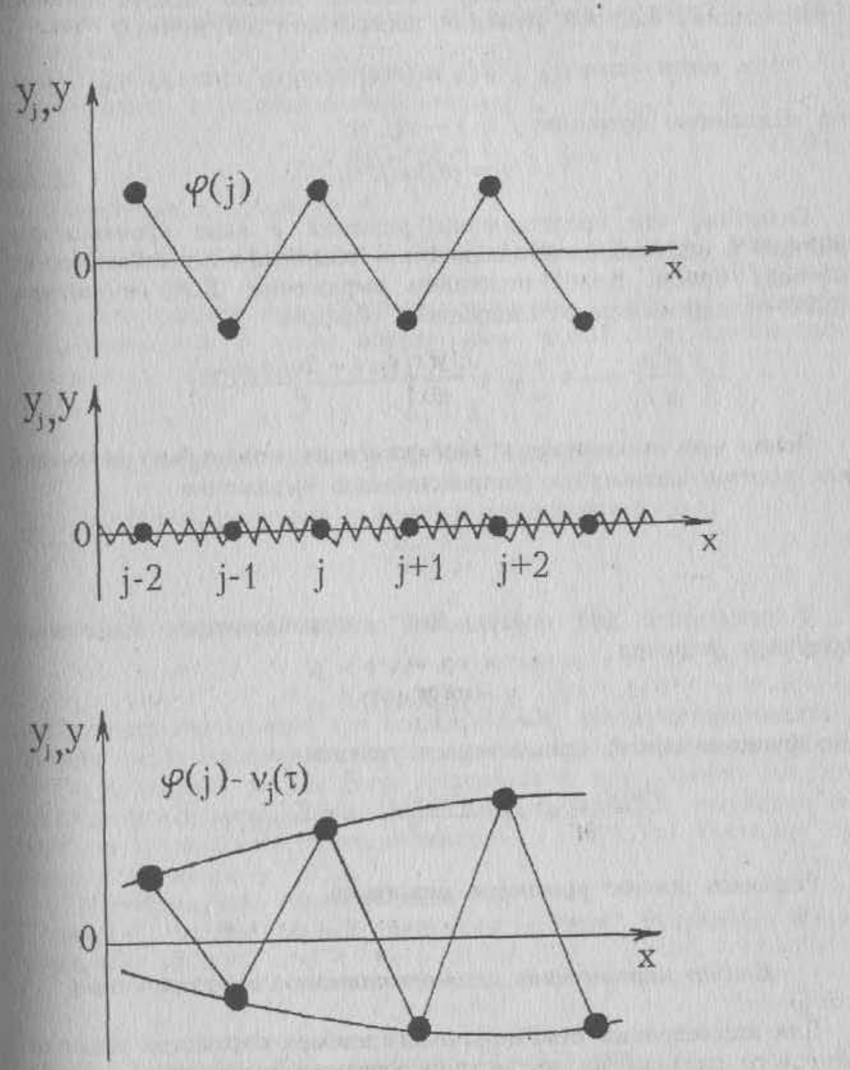


Рис. 2.11.

$$m\,\frac{d^2 y_i}{d\,t^2} = -4\,c\,y_i \tag{2.35}$$

Близкое к пилообразному решение можно искать в виде произведения быстрой функции дискретного аргумента j

$$\varphi(j) = (-1)^j$$

на медленную функцию j и t — $v(j, t)$:

$$y_j = \varphi(j)\,v(j, t). \tag{2.36}$$

Отметим, что представление решения в виде произведения быстрой и медленной составляющих — обычный в асимптотических методах прием. Далее подставим выражение (2.36) в систему (2.29) и перепишем ее следующим образом:

$$\frac{d^2 v_j}{d\,t^2} = -4\,\frac{c}{m}\,v_j + \frac{c\,l^2}{m}\left(\frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{l^2}\right). \tag{2.37}$$

Ясно, что выражение в скобках снова можно рассматривать как конечно-разностную аппроксимацию выражения

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}.$$

В результате для определения высокочастотных колебаний получаем решение

$$y_i = \varphi(i)\,v(x_i, t),$$

где функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = -f^{2}\,\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - 4\,\frac{c}{m}\,v(x, t).$$

Решается данное уравнение без труда.

Выбор параметров асимптотического разложения

Для иллюстрации неоднозначности выбора параметра асимптотического разложения рассмотрим модельный пример: алгебраическое уравнение

$$x^5 + x = 1. \tag{2.38}$$

Будем искать действительный корень этого уравнения, точное

значение которого можно определить численно, например, методом Ньютона: $x = 0{,}75487767\ldots$.

Малый параметр явно в уравнение (2.38) не входит, следовательно, есть свобода выбора формального малого параметра ε. Рассмотрим различные возможности введения подобного малого параметра.

1. Приближение слабой связи [127] (терминология идет от задач физики со слабой нелинейностью)

$$\varepsilon\,x^5 + x = 1 \tag{2.39}$$

Представив x рядом по ε

$$x = a_0 + a_1\,\varepsilon + a_2\,\varepsilon^2 + \ldots, \tag{2.40}$$

подставляя разложение (2.40) в уравнение (2.39) и производя расщепление по ε (т. е. приравнивая члены при одинаковых степенях ε), получаем

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = -35,$$
$$a_4 = 285, \quad a_5 = -2530, \quad a_6 = 23751$$

Может быть получено замкнутое выражение для a_n

$$a_n = [(-1)^n\,5n!\,]/[n!\,(4n+1)!\,]$$

и определен радиус сходимости R ряда (2.40)

$$R = 4^4/5^5 = 0{,}08192$$

Следовательно, при $\varepsilon = 1$ ряд (2.40) заведомо расходится, причем очень быстро, так что сумма первых шести членов равна 21476. Ситуация может быть подправлена при помощи метода Паде-аппроксимант. Строя аппроксиманту [3/3] и вычисляя ее при $\varepsilon = 1$, получаем значение корня $x = 0{,}76369$ (отличие от точного значения — 1,2%).

2. Приближение сильной связи [127].

Введем теперь малый параметр ε при линейном члене уравнения (2.38)

$$x^5 + \varepsilon\,x = 1 \tag{2.41}$$

Представив решение уравнения (2.41) в виде

$$x = b_0 + b_1\,\varepsilon + b_2\,\varepsilon^2 + \ldots,$$

после стандартной процедуры метода возмущения имеем

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = -1/25, \quad b_3 = -1/125,$$

$$b_4 = 0, \quad b_5 = 21/15625, \quad b_6 = 78/78125$$

И в этом случае можно построить общее выражение для коэффициентов

$$b_n = -(\Gamma\,[4n - 1)/5\,])/(2\Gamma\,[(4 - n)/5\,]\,n!)$$

и определить радиус сходимости: $R = 5/4^{4/5} = 1{,}64938.....$

Теперь можно просчитать значение $x(1)$ по первым шести членам: $x = 0{,}75434$ (отличие от точного на 0,07%).

Методика получения ряда теории возмущений, описанная выше, чрезвычайно проста и наглядна, и недаром после ее появления казалось, что все проблемы решаются, причем достаточно просто. «В тридцатые годы под расслабляющим влиянием квантовомеханической теории возмущений математический уровень физика-теоретика свелся к рудиментарному владению латинским и греческим алфавитами» (Рес Йост, цит. по [87]). Однако, увы, (или к счастью — в зависимости от точки зрения) — ряды теории возмущений по константе связи часто расходятся так быстро, что крайне трудно (а иногда и просто невозможно) подыскать адекватный метод суммирования [127]. Приходится искать новые параметры разложения, не всегда имеющие ясный физический смысл. Один из таких подходов — переход в пространство более высокой размерности N, а затем построение ряда теории возмущений по параметру $1/N$ [52]. Другие возможности описаны ниже.

3. Возмущение показателя степени. Квазилинейная асимптотика [127].

Введем «малый параметр» δ в показатель степени

$$x^{1+\delta} + x = 1 \tag{2.42}$$

и представим x в виде

$$x = c_0 + c_1\,\delta + c_2\,\delta^2 + \ldots . \tag{2.43}$$

Коэффициенты ряда определяются без труда

$$c_0 = 1/2, \quad c_1 = 0{,}25\,\ln 2, \quad c_2 = -0{,}125\,\ln 2, \ldots$$

Радиус сходимости ряда (2.43) $R = 1$, а вычислять его нужно, как легко убедиться, при $\delta = 4$. Прибегая к Паде-аппроксимации [3/3], находим $x = 0{,}75448$, что лишь на 0,05%, отличается от точного результата, а вычислив c_i до $i = 12$ и построив Паде-аппроксиманту [6/6], найдем $x = 0{,}75487654$ (погрешность 0,00015%).

4. Возмущение показателя степени. Существенно нелинейный случай.

Теперь введем параметр λ так:

$$x^{\lambda} + x = 1, \quad \lambda \gg 1. \tag{2.44}$$

Преобразуем уравнение (2.44) к виду

$$\lambda\,\ln x = \ln(1 - x)$$

и введем новую переменную $y = 1 - x$, тогда относительно y получаем

$$\lambda\,\ln(1 - y) = \ln y$$

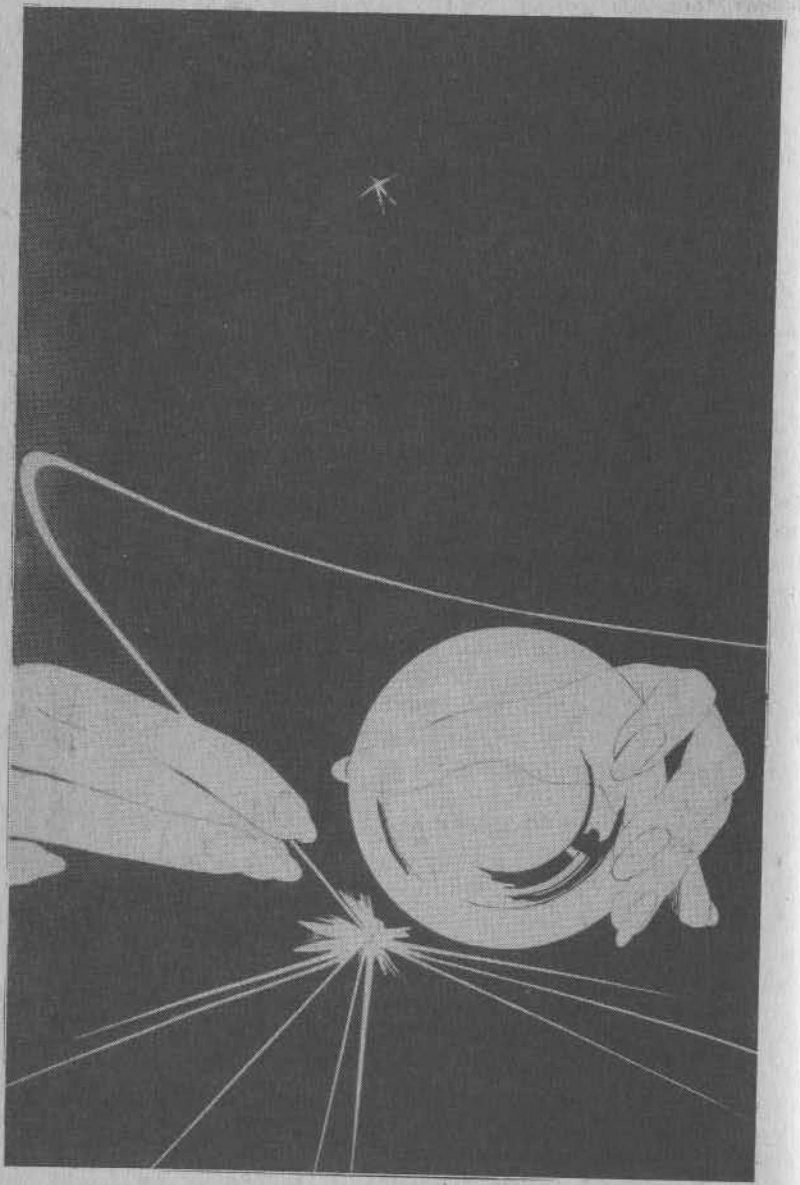
Нетрудно видеть, что

$$y \approx \lambda^{-1}\ln\lambda$$

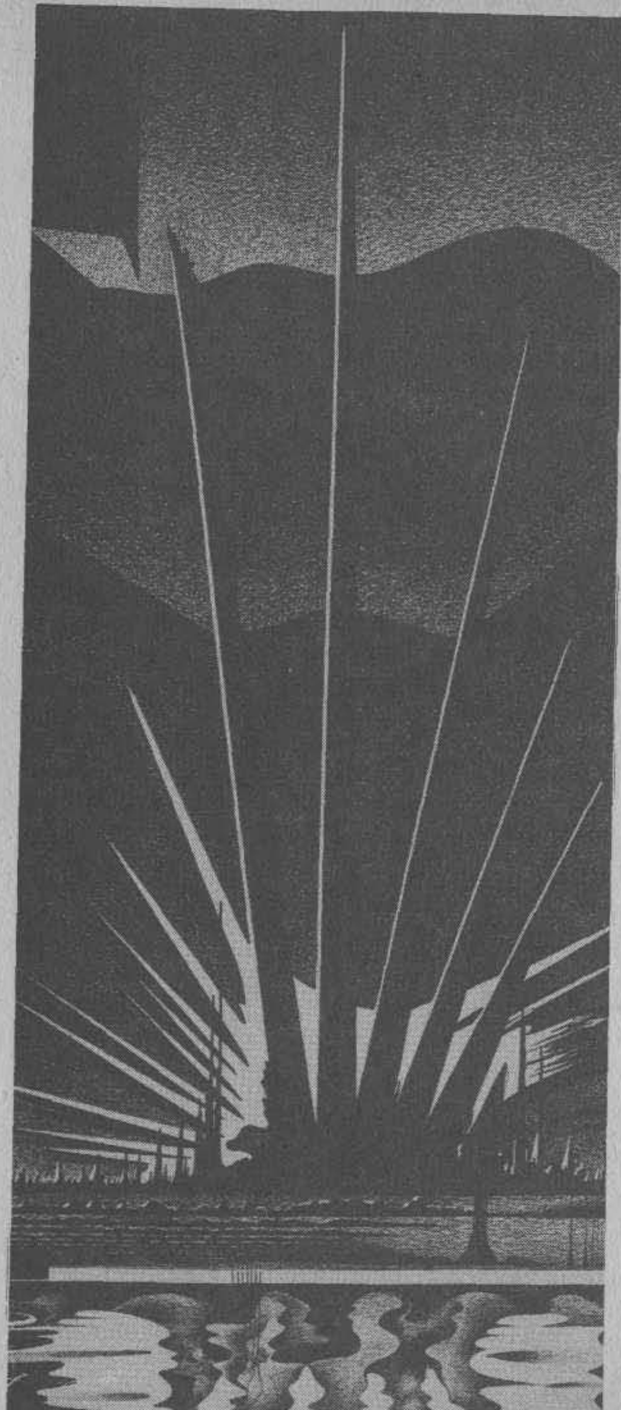
В нашем случае $\lambda = 5$, и в первом приближении

$$x = 1 - \lambda^{-1}\ln\lambda = 0{,}6781.$$

Далее процесс можно продолжить.



КАК РАБОТАЮТ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ



Благодарю тебя, Создатель, что ты сделал все нужное простым, а сложное ненужным

Сковорода Г.

Нам деньги платят не за то, чтобы усложнять, а чтобы упрощать!

Тимофеев-Рессовский Н.В.

С. Хокинг отмечал творческую роль методов упрощения в достижении истинного понимания: «Если мы и найдем полную систему основных законов, перед нами на много лет вперед будет стоять вызовом нашему интеллекту задача разработки новых приближенных методов, с помощью которых мы могли бы успешно предсказывать возможные результаты в реальных сложных ситуациях. Полная, непротиворечивая единая теория — это лишь первый шаг: наша цель — полное понимание всего происходящего вокруг нас и нашего собственного существования» [113].

Мы кратко охарактеризовали различные модификации асимптотического подхода, применяемые в физических задачах. Если теперь сосредоточить внимание на какой-либо конкретной области физики, можно убедиться, что достигнутый ею уровень развития определяется в значительной степени существованием естественных для этой области малых (больших) параметров.

Подчас сам прогресс в той или иной области физики неразрывно связан с существованием характерных асимптотических параметров. В частности, малость постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ (e — заряд электрона, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света) позволяет в рамках квантовой электродинамики с высокой точностью рассчитывать взаимодействие фотона и электронов.

Все основные результаты квантовой электродинамики, с поразительной точностью описывающие экспериментальные данные, получены именно благодаря возможности применения теории возмущений, в которой решения уравнений ищутся в виде разложений по степеням α. Аналогичные параметры для сильновзаимодействующих частиц — адронов (к которым относятся, например, протоны и нейтроны) превышают α во много раз. Это главная причина принципиальных трудностей, в свое время тормозивших развитие теории сильных взаимодействий. Только открытие кварковой структуры адронов и явления «асимптотической свободы», заключающегося в ослаблении взаимодействия между кварками и связывающими их глюонами на малых расстояниях, резко изменило ситуацию и привело к рождению новой теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики.

Рассмотрим с точки зрения роли асимптотических методов в различных физических теориях несколько примеров.

Небесная механика

Роль небесной механики в становлении и развитии асимптотических методов исключительно велика. Выше уже неоднократно отмечалось, что и метод возмущений (и даже сам этот термин), и различные варианты метода осреднения, и понятие асимптотического ряда зародились в небесной механике. Асимптотические методы сыграли важную роль в разработке теории движения Луны и других планет, вычислении времен солнечных и лунных затмений, открытиях новых планет. Вот на последнем вопросе стоит задержаться несколько подробнее. Одно из самых замечательных достижений не только небесной механики, но и всех точных наук — это открытие Нептуна. Обычно, когда говорят об открытии Адамсом и Леверье «на кончике пера» новой планеты, то подчеркивают, что это было триумфом системы Коперника, закона всемирного тяготения Ньютона. Это, конечно, верно, но в не меньшей степени открытие Нептуна было одним из первых триумфов метода возмущений.

Приведенный пример интересен еще и тем, что здесь, по-видимому, в первый раз была решена обратная задача теории возмущений. Методы решения прямой задачи (определения возмущения данного небесного тела от другого) были уже разработаны. Адамсу и Леверье пришлось по известным возмущениям, производимым неизвестным небесным телом, определить траекторию движения последнего. Далее эта методика была усовершенствована Ловеллом, который предсказал положение Плутона.

В настоящее время расчеты движения искусственных небесных тел основываются, как правило, на методах осреднения или возмущений.

Теория пластин и оболочек

Важным разделом теории упругости является теория пластин и оболочек, т. е. тел, у которых два размера существенно превышают третий. В результате появляется естественный малый параметр относительной тонкостенности h. Отсюда вытекает свойство оболочки локализовать изгиб в малой окрестности зоны действия возмущения. Поэтому в теории оболочек асимптотические методы являются наиболее адекватными сути дела как с физической, так и с математической точек зрения. Кроме того, в теории оболочек, как науке с явно выраженным прикладным характером, наиболее важным является вопрос о построении приближенных методов расчета и, в частности, вопрос об устранении в исходных соотношениях тех величин, которые не могут заметно повлиять на окончательные результаты и лишь вносят в расчет неоправданные существом дела трудности.

Неудивительно поэтому, что именно в теории оболочек получили значительное развитие идеи современной асимптотической теории дифференциальных уравнений.

Высокая прочность оболочек определяется способностью воспринимать краевые и поверхностные нагрузки за счет равномерных по толщине деформаций растяжения. Это область безмоментного состояния, которое описывается исходными уравнениями в пределе $h \to 0$. В хорошо спроектированной оболочке при надлежащем закреплении торцов зоны сильного изгиба имеют малую протяженность. Здесь реализуются напряженные состояния, называемые в теории оболочек краевыми эффектами (рис. 3.1). Определение их существенно облегчается за счет локализации и быстрой изменяемости.

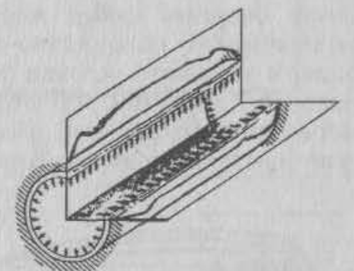


Рис. 3.1.

Интересно отметить, что сами уравнения теории оболочек могут быть получены из уравнений трехмерной теории упругости в результате асимптотического перехода $h \to 0$. При этом оказывается, что известные гипотезы Кирхгофа-Лява (нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь, а прямолинейные волокна, перпендикулярные срединной поверхности, остаются перпендикулярными ей и после деформации) описывают первое приближение. В окрестности же торцов оболочки и в местах резкого изменения напряженного состояния возникают существенно трехмерные напряженные состояния.

В теории пластин и оболочек малый параметр вполне очевиден. Однако нередко случается, что в общей математической формулировке проблемы малые параметры, казалось бы, отсутствуют. Так, зависимость свойств в некоторой точке среды от выбранного направления (анизотропия) или положения (неоднородность) долгое время считалась лишь усложняющим фактором. Действительно, многие методы, развитые ранее для изотропной однородной среды со свойственными только ей симметриями, оказываются в этой ситуации непригодными. Однако, как выяснилось впоследствии, возможно и целесообразно рассматривать особые предельные случаи сильной анизотропии или неоднородности, на которые до этого просто не обращали внимания. Разработка и применение соответствующих асимптотических методов вызвали быстрое и всестороннее развитие теории таких сред. Полученные при этом уравнения в ряде случаев выглядят даже проще, чем их «изотропные и однородные» аналоги. Подобная ситуация характерна и для теории подкрепленных оболочек.

Тонкостенная оболочка, сочетающая высокую прочность и малый вес, простоту и технологичность изготовления, стала одной из наиболее распространенных конструкций в современной технике — авиа-, ракето-, судостроении, химическом машиностроении. Важнейшая «издержка» тонкостенности — опасность потери устойчивости, возникающая при действии в оболочке сжимающих напряжений. Как правило, для повышения несущей способности целесообразно не увеличивать толщину оболочки, а подкреплять ее продольными и поперечными силовыми элементами (рис. 3.2). С точки зрения проектирования конструкций постановка ребер представляет сложную и требующую всестороннего анализа задачу. Введение ребер жесткости может привести к сильной неоднородности напряженно-деформированного состояния конструкции и ухудшить условия ее работы. Все это требует достаточно детального анализа. На практике обычно переходят к схеме однородной анизотропной оболочки. Жесткостные и инерционные характеристики подкрепляющих элементов «размазываются» по поверхности оболочки, которая теперь рассматривается как однородная, но наделенная некоторыми новыми свойствами в соответствии с конструктивными особенностями объекта («конструктивная ортотропия»).

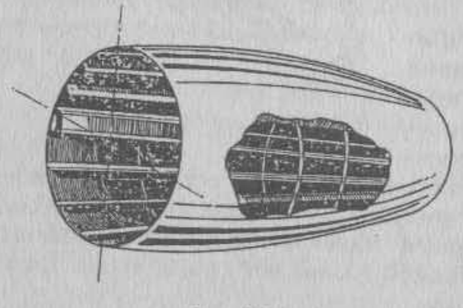


Рис. 3.2.

Введение конструктивной ортотропии дает возможность отвлечься от особен-

ностей силового взаимодействия между ребрами и обшивкой и радикально упростить задачу. В то же время конструктивно-ортотропная схема позволяет достаточно точно определять только глобальные характеристики (частоты колебаний), но не локальные (напряжения).

Оказалось, что преодолеть этот недостаток можно, последовательно применяя метод осреднения, основанный на разделении быстрых и медленных составляющих решения. В качестве осредненного решения выступает решение уравнений конструктивно-ортотропной теории, а для построения следующих приближений используется метод нескольких масштабов. Очень существенно, что уточненное решение, позволяющее определять все компоненты напряженно-деформированного состояния, оказывается не более сложным, чем полученное по конструктивно-ортотропной схеме [3].

Здесь проявляется интересная особенность асимптотических методов. Ребристая оболочка, естественно, более сложна для расчета, чем гладкая. Однако наличие новых параметров и новой структуры (системы ребер) приводит к новым, более широким, чем в изотропном случае, возможностям при асимптотическом интегрировании.

Второй пример связан с перфорированными пластинами и оболочками. Расчет подобной системы (рис. 3.3,а) сильно осложнен из-за многосвязности области.

Ясно, что и здесь можно применить метод осреднения, но как быть с решением задачи на ячейке (т. е. выделенном периодически продолжающемся участке с одним отверстием)? На практике обычно рассматривают

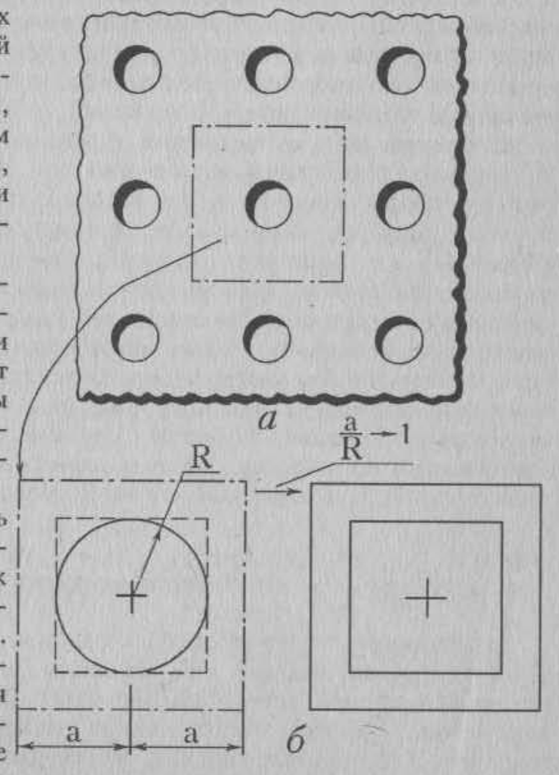


Рис. 3.3.

два случая. Если отверстие мало, то рассчитывают полуплоскость с отверстием. Если же отверстия велики, то круглое отверстие заменяется квадратным (рис. 3.3,б), а исходная пластина (оболочка) — стержневой решеткой. При асимптотическом подходе оба эти результата получаются с использованием разложения по параметру $\varepsilon = R/a$. В первом случае $\varepsilon \to 0$, во втором $\varepsilon \to 1$. Далее можно эти предельные решения срастить (например, при помощи двухточечной аппроксиманты Паде) и получить решение для отверстия любого радиуса.

Анализ как приведенных, так и множества других инженерных методов расчета показывает, что природа почти всякого разумного упрощения — асимптотическая. Какова же в этом случае могла бы быть роль строгих асимптотических подходов (могла бы, потому что, к сожалению, случаи непосредственного применения асимптотических методов в технической практике не слишком многочислены)? Это, во-первых, строгая оценка области применимости того или иного упрощения (иначе эту область пришлось бы устанавливать путем дорогостоящих (часто даже натурных) экспериментов или длительных расчетов на ЭВМ). Во-вторых, часто асимптотика указывает на тонкие эффекты, существенно влияющие на работоспособность конструкции. Это, например, различные концентрации напряжений, обусловленные пограничными слоями, не учитываемыми в грубых схемах.

Наконец, рассмотрим важнейший для техники вопрос об оптимальном проектировании. Это обратная по отношению к расчету исходной системы задача. При решении ее нужно многократно обращаться к решению прямых задач. Как эти решения определять? Можно использовать, например, весьма точные численные алгоритмы. Но тогда на каждом шаге оптимизации придется тратить много машинного времени, а таких шагов могут быть тысячи! Можно взять грубую инженерную схему — но велика опасность попасть в область, где она неприменима, или «пропустить» важные эффекты. Именно здесь, на наш взгляд, хороши асимптотические подходы, сочетающие простоту с достаточной точностью и четкой оценкой области применимости.

Физика полимеров

Возможности и пути использования присущих конкретной области физики малых или больших параметров могут быть осознаны в полной мере далеко не сразу. Яркий пример — физика полимеров, которая долгое время находилась на периферии теоретической физики, хотя и имела ряд важных достижений, включая объяснение физической природы упругости резины.

Несколько лет назад академик А.Б.Мигдал, выступая в телевизионной программе «Очевидное — невероятное», на вопрос о его отношении к полимерной тематике ответил примерно так: «Молекулы здесь слишком длинные...». И это, безусловно, указывает на главную трудность, если иметь в виду детальную теорию, описывающую физические эффекты на всех пространственных и временных масштабах. Но стоит изменить постановку задачи и поставить вопрос о свойствах полимерного вещества, обусловленных именно спецификой макромолекул, как возникает основа для создания содержательной и глубокой теории. При этом ее достижения решающим образом обусловлены наличием естественных для полимерных систем малых и больших параметров.

Первым очевидным большим параметром для таких систем является число атомов в цепи $N \gg 1$. Наличие этого параметра позволяет рассматривать даже отдельную полимерную молекулу как макроскопическую систему и использовать эффективную процедуру усреднения, лежащую в основе статистической физики. Изучение асимптотического поведения полимерных систем при $N \to \infty$ стало одной из важнейших задач физики полимеров. В частности, такая фундаментальная характеристика, как средний размер r полимерного клубка в растворе или расплаве полимера, определяется соотношением $r \sim N^{\alpha}$, где величина показателя степени α зависит от физических условий, в которых находится полимерная система. Кроме того, полимерным системам присущи малые параметры, обусловленные характерной для них иерархией взаимодействий. Ковалентное взаимодействие (химическая связь) атомов вдоль цепи намного сильнее всех других («физических») взаимодействий. Это позволяет в обычных условиях считать последовательность атомов вдоль цепи фиксированной. Различные физические взаимодействия также заметно отличаются по интенсивности. Простейшая асимптотика соответствует пренебрежению всеми физическими взаимодействиями (при фиксированных длинах связей). Следующий шаг состоит в учете физических взаимодействий между звеньями полимерной цепи, «ответственных» за ее сопротивление изгибу и скручиванию (по — прежнему без изменения длин связей). Наконец, могут быть «включены» и взаимодействия между близкими в пространстве (но не соседними по цепи!) звеньями скрученной и изогнутой полимерной цепи.

Неупорядоченные системы

Основы теории неупорядоченных систем были заложены в работах И.М.Лифшица на основе асимптотических методов. В своей пионерской работе по теории неупорядоченных систем он принимал следующие предположения [1]: «Малые возмущения могут быть двух принципиально различных родов:

Значительный процент узлов занят чужими атомами, однако эти чужие атомы мало отличаются от «своих».

Чужими атомами занято сравнительно малое число узлов, однако эти атомы существенно отличны от «законных».

На основе этих предположений И.М.Лифшиц исследовал самоусредняющиеся величины (величины, которые становятся достоверными в макроскопическом пределе) и показал, что свойством самоусредняемости обладает дипольный момент единицы объема.

Далее при построении теории использовались разложения по степеням возмущения и концентрации.

Асимптотика, теория систем и системный анализ

Системный подход — это значит: сначала подумай, а потом сделай!
Тимофеев-Рессовский Н.В.

Один из основателей теории систем У.Эшби отмечал: «Теория систем должна строиться на методах упрощения и, по сути дела, представлять собой науку упрощения. Я убежден, что в будущем теоретик систем должен стать экспертом по упрощению».

«Системный анализ — это дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы требует анализа сложной информации различной физической природы» [72].

Разумеется, современный системный анализ ориетирован на массированное применение ЭВМ, но при этом роль асимптотических методов как на этапе подготовки информации, так и на этапах решения и анализа полученных результатов исключительно велика.

Асимптотика и инженерное дело

Всякое уравнение длиной более двух дюймов скорее всего неверно!
Неизвестный инженер

Существует мнение, что хороший инженер спроектирует машину и без глубокого знания теории. В самом деле, в своих воспоминаниях [57] академик А.Н.Крылов пишет о замечательном русском инженере-самоучке П.А.Титове, проектировавшем «на глаз» и никогда не ошибавшемся. Да ведь и вообще, «Профессиональное знание отличается от дилетантского или ученического тем, что оно не может быть исчерпывающе выражено на рассудочном уровне, низведено до инструкции, недвусмысленного указания, что надо делать в той или иной ситуации. Профессиональное знание в значительной мере является бессознательным» [26]. Так нужно ли инженеру хорошо знать теорию, в частности, владеть основами асимптотического упрощения? Да, считаем мы, поскольку теория содержит в концентрированном виде анализ огромного числа реальных ситуаций, опыт и практику большого числа исследователей. «Нет ничего практичнее хорошей теории», ибо именно хорошая теория формирует настоящего профессионала.

«Даже в постановке задач, которая основывается прежде всего на содержательном анализе проблемы, огромную роль играет математическая культура исследователя. Надо уметь не только ясно понять смысл задачи, но и сформулировать ее так, чтобы она была доступна для анализа математическими средствами» [72]. Кроме того, «Сам выбор вида, в котором разыскивается асимптотическое представление решения, диктуется не какими-либо общими, формализуемыми соображениями, а проникновением в конкретное математическое содержание рассматриваемой задачи. На этом этапе решающую помощь могут оказать физическая интуиция и опыт асимптотического исследования различных задач» [72].

Паде-аппроксиманты в теории композитных материалов

Указанную область мы выбрали не случайно — она близка научным интересам авторов. Подобные описанным ниже решения, естественно, можно легко встретить и в других разделах физики.

Первый пример — определение вязкости суспензии, т. е. жидкости со взвешенными в ней частицами. Впервые решение этой задачи получил (в приближении малой концентрации взвешенных частиц) А.Эйнштейн в знаменитой работе [122] — первой работе по теории броуновского движения. Кстати, это была диссертация Эйнштейна на соискание степени доктора философии, представленная в 1905 г. профессорами А.Клейнером и Г.Букхардтом на естественно-математической секции высшего философского факультета Цюрихского университета.

Считая взвешенные частицы твердыми равномерно распределенными сферами одинакового радиуса, А.Эйнштейн получил формулу для отношения эффективной вязкости взвеси к вязкости жидкости

$$\mu = 1 + 5/2c, \tag{3.1}$$

где c — объемная концентрация взвешенных частиц.

Формула Эйнштейна дает хорошее приближение только для малых концентраций, что хорошо видно из рис. 3.4, на котором треугольниками отмечены экспериментальные результаты, а прямая 1 соответствует формуле (3.1).

Построение следующего приближения потребовало больших усилий, в результате которых было найдено [56]

$$\mu = 1 + 5/2c + 5c^2, \tag{3.2}$$

Однако формула (3.2) не дает существенного улучшения результатов (см. кривую 2 на рис. 3.4).

Значит ли это, что усилия по построению следующих приближений пропали даром? Ни в коем случае — ведь есть еще аппроксимации Паде. Перестроенное по Паде выражение (3.2) дает:

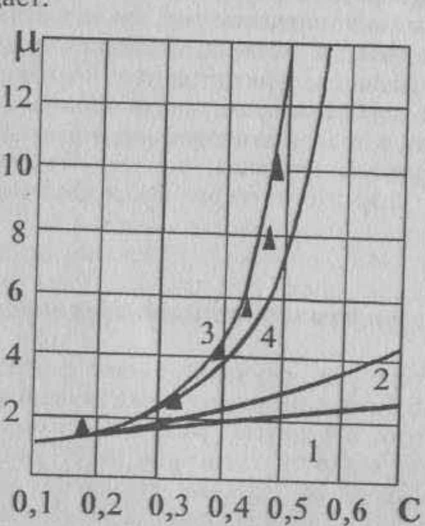


Рис. 3.4.

$$\mu = 0{,}5\,(2 + c)/(1 - 2\,c)$$

и прекрасно совпадает с экспериментальными данными (кривая 3 на рис. 3.4).

Применение Паде-преобразование к формуле Эйнштейна, в результате чего получается формула

$$\mu = 1/(1 - 5/2\,c),$$

также существенно улучшает соответствие теоретических экспериментальных данных (кривая 4 на рис. 3.4).

Другой пример касается формулы Максвелла, описывающей эффективную теплопроводность среды l со сферическими включениями, расположенными в углах кубической решетки [56]

$$\lambda = \lambda_1\,(p + 2\,c\,q)/(p - c\,q),$$

где $p = 2\,\lambda_1 + \lambda_2$, $q = -\,\lambda_1 + \lambda_2$; λ_1, λ_2 — коэффициенты теплопроводности исходной среды и включений соответственно.

Эту формулу можно трактовать как сращивание при помощи двухточечной аппроксиманты Паде формул, полученных осреднением впрямую (по Фойгту) и через осреднение обратных величин (по Рейссу). Она удовлетворительно описывает эффективную теплопроводность для любых концентраций включений.

Пример решения сложной технической задачи

Все бегут, бегут, бегут,
а он горит!

(Черный юмор мая 1986 г.)

Интересен пример применения асимптотических методов для анализа теплового режима активной зоны аварийного блока Чернобыльской атомной электростанции. Ситуация здесь неизмеримо осложнялась недостатком натурных данных, отсутствием аналогов и необходимостью принятия быстрых решений.

«Ясно, что ни любое конечное число сценариев, «проигранных» на ЭВМ, ни набор конкретных упрощенных точно решаемых моделей не могут дать надежного прогноза поведения реального процесса.

Успех математического моделирования связан с правильным определением доминирующего фактора среди множества явлений, составляющих процесс.

Наличие доминирующих факторов в моделируемом процессе означало существование больших параметров в данной системе уравнений. Именно это дало надежду выявить «катастрофические» асимптотические решения соответствующего класса задач. Мы считали, что малые параметры и коэффициенты, которые фигурировали в модели, находятся в «общем положении». Были обнаружены уравнения и законы, которые справедливы для асимптотических решений модели «почти для всего» разумного класса неопределимых величин» [64].

При решении задачи о фильтрации раскаленного газа через пористую среду применение метода осреднения позволило получить относительно простые дифференциальные уравнения и аналитически исследовать процесс. Оказалось, что наиболее приемлемой является модель фильтрационного охлаждения —

модель фильтрации газа через саморазогревающуюся пористую среду в поле сил тяжести.

Исследование устойчивости стационарного процесса привело к открытию нового физического явления — сухого кипения, которое возникает при превышении критического значения тепловыделения в завале. В свою очередь, понимание физики процесса позволило правильно сконструировать «саркофаг», оставив отверстия для воздушного охлаждения активной зоны аварийного реактора.

Асимптотика и искусство

В искусстве, как и в науке, нужно знать, чем можно пренебречь

Померанчук И.Я.

Вопрос о соотношении симметрии и искусства широко освещен в литературе. Достаточно вспомнить книги Г.Вейля [27], А.В.Шубникова и В.А. Копцика [121], И.И. Шафрановского [117] и многих других. Гораздо меньше уделено внимания соотношению асимптотики и искусства. Между тем многое говорит о том, что для искусства интересно именно первое несимметричное приближение. Приведем слова О.Ренуара: «Природа не терпит пустоты, как говорят физики», но они могли бы и дополнить свою аксиому, прибавив, что она не терпит также и симметрии. Два глаза, даже на самом красивом лице, всегда чуть-чуть различны, нос никогда не находится в точности над серединой рта, долька апельсина, листья на деревьях, лепестки цветка никогда не бывают в точности одинаковыми».

Итак, именно «ε-отклонения» представляют интерес для живописи. С другой стороны, П.Сезан считал, что нужно рассматривать лишь «предельные соотношения», поскольку «все в природе сферично и цилиндрично». Такой подход в изобразительном искусстве, по сути, есть асимптотическая аппроксимация сложных пространственных тел при помощи набора простых геометрических объектов. И.И.Шафрановский [117] отмечает: «Думается, что правильный путь лежит посередине. Важно исходить из основных законов природной симметрии, выявляя вместе с тем и чуть заметные отклонения от них, обусловленные динамикой движущейся и развивающейся материи».

Понятие об отклонении от симметрии как о переходе от статики к динамике поддерживает и Г.Вейль. В частности, он цитирует статью Фрея «К проблеме симметрии в изобразительном искусстве»: «Симметрия означает покой и скованность, асимметрия же, являющаяся ее полярной противоположностью, означает движение и свободу». Итак, малое отклонение от симметрии (первое

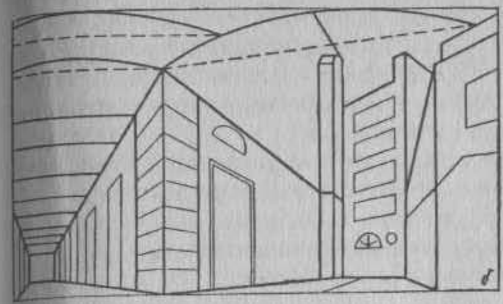


Рис. 3.5.

приближение по ε) означает движение от одной симметрии к другой. Современному изобразительному искусству часто присуще резкое, «асимптотическое» выделение присущих объекту черт: цвета — В.Кандинский, К.Малевич, формы — П.Пикассо, Ж.Брак и т.д.

Асимптотический подход позволяет с единых позиций рассмотреть существующие в живописи системы перспективы — «скелета» художественного изображения, не касаясь психологических и биофизических аспектов зрительного восприятия. Можно убедиться, что зрительная перспектива в живописи отнюдь не исчерпывается наиболее распространенной линейной ренессансной перспективой (рис. 3.5).

Построение перспективы реального мира — геометрическая задача, которой посвящены серьезные теоретические исследования [86].

Реальная зрительная перспектива является нелинейной, причем степень нелинейности существенно зависит от угловых размеров изображаемого объекта и в некоторых случаях проявляется весьма существенно (рис. 3.5).

Эффекты нелинейной перспективы объективно проявляются, например, при широкоугольном фотографировании при помощи камеры-обскуры. Так, рис. 3.6 — «Художник, рисующий забор», — иллюстрирует нелинейность реальной перспективы. Перспективное уменьшение высоты забора по мере удаления вправо и влево приводит к тому, что объективно прямые линии — края забора — переходят в кривые линии на изображении. Очевидно, дальше края забора можно приближенно изображать в сходящейся линейной перспективе, а централь-

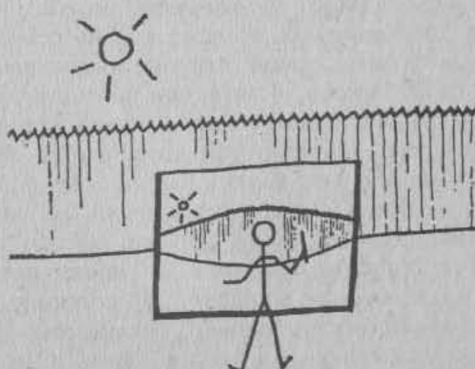


Рис.3.6.

ную часть — в параллельной.

На рис. 3.5 (И.Меллер, «Тоннель», прорисовка) художник видит одновременно перспективу улицы и подворотню (угол между ними 90°, а угол зрения человека 130°). Чтобы увязать эти два плана на плоскости картины, он использует «сращивание» двух линейных перспектив (кусочно-линейная перспектива).

Рассматривая нелинейную перспективу с позиций асимптотического метода, можно математически осуществить переход от нелинейной перспективы к различным вариантам линейной.

Введем параметры, характеризующие относительные размеры объекта

$$\varepsilon_x = H/L, \qquad \varepsilon_y = a/L, \qquad \varepsilon_z = b/L,$$

где H, a, b — высота, ширина (перпендикулярно лучу зрения) и длина (вдоль луча зрения) объекта, L — расстояние до него.

В случае малых и примерно одинаковых ε_x, ε_y и ε_z получаем параллельную перспективу («коробок спичек в интерьере»), при малых ε_x и ε_y и немалом ε_z получаем линейную ренессансную перспективу.

Если угловые размеры объекта велики и существенно проявляются нелинейные эффекты, для преодоления психологического противоречия между натурной прямой и ее криволинейным изображением нелинейную перспективу заменяют кусочно-линейным приближением. Изображения изломов перспективных прямых при этом, как правило, избегают, маскируя их другими объектами.

На примере картины художника И.Меллера, изображенной в системе ренессансной перспективы, видно, что для «стыковки» двух перспектив пришлось «задрать» потолок тоннеля (см. рис. 3.5).

Нам кажется, что «асимптотические» идеи проявляются в искусстве в самых неожиданных местах. Известно, что Достоевский был любимым писателем А.Эйнштейна. «Достоевский дает мне больше, чем любой другой мыслитель, больше, чем Гаусс»,— писал Эйнштейн. В глубоких исследованиях Б.Г.Кузнецова сделана попытка объяснить это тем, что Достоевский всегда стоит в своем творчестве на позициях «решающего эксперимента» — а именно этот подход в науке был близок Эйнштейну. Может быть, произведения Достоевского было бы интересно проанализировать с точки зрения Н.А.Бердяева: «У Достоевского был гениальный дар раскрытия глубины и обнаружения последних пределов. Он никогда не остается в середине, не останавливается на состояниях переходных, его всегда влечет к последнему и окончательному».

Наконец, немного о соотношении анализа и синтеза в современном искусстве. «Классическое искусство, подобно фото-

графии, настаивало на принципе детального изображения, в то время как современное искусство стремится, абстрагируясь от деталей, оперировать символами, подчеркивая таким образом самое существенное в предмете. Оба эти принципа представлены в науке. «Современная мода», несомненно, отдает предпочтение проникновению вглубь предмета, наращивая степень точности используемых инструментов. Этот метод чрезвычайно эффективен, но в безудержной погоне за деталями можно потерять из виду целое» [93].

Иными словами, в наш «век анализа» мотивы упрощения и доведения до предела преобладают и в науке, и в искусстве. Будем ждать прихода века синтеза.

Асимптотика в картинках

Раз уж речь зашла об искусстве, коснемся вопроса о роли изобразительного искусства в обучении [78, 97, 108, 109, 125].

Эффективная методика изучения иностранного языка Г.Лозанова основана на включении в работу обоих полушарий головного мозга. Достигается это введением в процесс обучения музыки, картин, физических действий и т.д.

«Математика — это язык» (Гильберт), поэтому вполне естественно, что наглядные изображения математических понятий весьма способствуют их усвоению.

«Только устоявшаяся формальная традиция препятствует широкому распространению графических изображений в научной математической литературе. Опыт лектора подсказывает мне, что огромную роль в скорейшем усвоении материала играет удачно подобранный геометрический образ» [108].

Известно, что левое полушарие мозга отвечает за логическую или аналитическую деятельность, правое — за картинную или синтетическую. «Сила человеческого мозга в значительной степени заключается в согласованной деятельности двух интеллектуальных центров — «левого» и «правого» мозга, в одновременной способности к анализу и синтезу» [124]. По-видимому, в стимулировании такой совместной деятельности обоих полушарий и состоит смысл введения наглядных изображений при изучении иностранных языков или математики, т. е. в формировании специалиста из новичка. «Специалист от дилетанта отличается в первую очередь тем, что в памяти специалиста имеются цельные представления (картины), процедуры (алгоритмы для получения искомых величин из искомых данных); специалист применяет такую процедуру и сообщает лишь качественный результат» [26].

Глубокое понимание специалиста, как правило, связано с наличием простой модели или аналогии происходящего, и любые приемы создания подобных аналогий заслуживают внимания.

«Профессиональное знание, в отличие от ученического, состоит не только и не столько из общих принципов, сколько из знания ряда конкретных случаев, способности видеть реальную сложность проблемы и интуитивно предвидеть целесообразные решения» [120].

Известный голландский художник М.Эшер считается «певцом симметрии» [27]. Картины же нашего современника, математика и художника А.Т.Фоменко, как нельзя лучше характеризуют многие понятия асимптотики [108, 109, 139].

Асимптотика и психология

Признаком научного мышления является способность довольствоваться лишь приближением к истине и продолжать творческую работу, несмотря на отсутствие окончательных подтверждений.

Фрейд З. [111]

Асимптотическая математика в определенном смысле адекватна творческой работе нашего мозга (насколько об этом можно судить на уровне разработки указанной проблемы в наше время).

«В условиях естественного отбора, в которых формируется мозг, предпочтение отдается быстрым, хотя и приближенным решениям, а не точным, но медленным» [116].

Каким же образом мозг осуществляет эту установку? В какой-то степени об этом можно судить, исследуя, как наш мозг формирует эвристические правила общего характера. Исследования психологов показывают, что при решении задач основные эвристические принципы таковы [60]: «Рассмотреть экстремальные случаи», «Сблизить две или несколько переменных, присвоив им одинаковое значение», «Определить наиболее интересную эвристику», «Выбрать ту концепцию, которая требует меньше машинного времени».

Естественно, что при решении задач физики, химии, биологии, техники исследователь применяет подобные подходы.

Близкими вопросами много занималась гештальт-психология. «В самых различных связях она вскрыла мощное стремление психики к образованию простых образов. Если, например, в темной комнате перемещать электрическую лампочку, попеременно зажигаемую и выключаемую, то наблюдатель воспримет достаточно часто повторяющиеся вспышки света как непрерывный процесс. Он будет видеть непрерывную световую линию, хотя

воспринимаемые световые точки в действительности образуют дискретную последовательность. Наше представление подсознательно идеализирует множество вспышек света, воспринимая это множество в виде возможно более простой непрерывной линии.

Эрнст Мах отчетливее, чем кто-либо до него, проанализировал такого рода процессы, особенно имея в виду возникновение естественнонаучных понятий и образов. В стремлении человека к образованию простых, наглядных и логических образов он распознал общий закон, названный им принципом экономии мышления при образовании понятий.

Особое, «априористическое» положение эвклидова понимания пространства объясняется фундаментальными принципами, управляющими образованием человеческих понятий. «Априори» лежит не в области логического и даже не в области рационально представимого; оно сводится к «психологическому» обстоятельству; к преобладающей тенденции человеческой психики строить мир понятий на основе принципов дополнения, идеализации и экономии» [76].

Процессу обучения свойственны предельные переходы, т. е. оно носит асимптотический характер.

«Любое познание есть огрубление реальности, и это проявляется прежде всего в выделении взаимно противоположных характеристик изучаемых объектов. Наше познание неизменно носит антонимический характер, т. е. мы всегда характеризуем реальность с помощью антонимов. Все наши идеи и принципы — это приблизительно верное отражение действительности, а не сама действительность» [8].

Опора на приближенные по своей сути результаты составляет основу научного метода, создание которого — несомненная заслуга западного мира. О глубокой нетривиальности подобного подхода говорит тот факт, что «Эллинические, исламские и китайские ученые и изобретатели не смогли предвосхитить мысленных экспериментов Ньютона, в которых идеализированные явления (например, движение тела в вакууме) использовались для научного объяснения реальных явлений» [88]. Иными словами, вывод асимптотических правил из операционной области мозга в сознание оказался им не по силам.

Основное преимущество асимптотических алгоритмов, обуславливающих их конкурентоспособность,— возможность быстро и просто дать качественный ответ о пригодности или непригодности данной модели. Вот почему можно предполагать, что наш мозг, в основном, работает «асимптотически». Поэтому использование асимптотических алгоритмов (естественно, в сочетании с современными компьютерами) может оказаться вполне адекватным, например, в медицине.

Биология и асимптотика

Авторы отдают себе отчет в трудностях отмеченной проблематики и в целом согласны с тем, что [36]: «Отсутствие единого языка создает в биологии, медицине, психологии, лингвистике и других областях знаний, изучающих живые системы, эффект вавилонского столпотворения. Панацеей от него считается так называемая математизация — проникновение заимствованных из математики методов. При этом, однако, забывают,что математика развивалась на материале и в тесной связи с более «простыми» научными областями, изучающими объекты неживой природы, — инженерным делом, физикой, астрономией и т.д. Поэтому механический перенос математических методов в области, о которых говорилось выше, не оправдан. В отличие от физики, для которой математический язык органичен и незаменим, положение в биологии, например, принципиально другое. Статистика и изредка дифференциальные уравнения являются для биологов полезными средствами, но, несомненно, носящими лишь вспомогательный характер».

Итак, с одной стороны, асимптотические методы могут сыграть лишь вспомогательную роль при решении некоторых дифференциальных уравнений биологии, медицины и т.д. Это тем более обосновано, что «Увлеченность строгими теориями, как бы они ни были интересны математически, не только почти бесполезна практически для биологии, но и может отрицательно повлиять на продуктивность междисциплинарных исследований» [66].

Все же мы осмелимся высказать следующую мысль: асимптотическая математика, хотя, естественно, не может в полной мере претендовать на роль некоей новой «математики для биологии», все же стоит к ней ближе, чем математика классическая [16]. Попробуем обосновать этот тезис.

На пути построения любой достаточно общей биологической теории необходимо преодолеть три проблемы [51]. Во-первых, найти методы разумного сжатия информации о подсистемах, достаточные для получения обобщенных характеристик, позволяющих встраивать модели подсистем в общую модель системы. Эту проблему, с легкой руки Р.Беллана, часто называют «проклятием размерности».

Во-вторых, выяснить организацию и механизм связей элементов в условиях нелинейных процессов (снятие «проклятия перебора»).

В-третьих, необходимо построить операторы отражения внешних по отношению к системе параметров на внутренние («проклятие размытости границ»). По своей сути, это асимптотические задачи, причем «проклятие размерности» асимптотика

научилась снимать довольно хорошо (методы осреднения, декомпозиции, ренормгруппы). Два других проклятия еще ждут своих добрых волшебников.

Исследование атмосферы, океана и биосферы

Трудности изучения климата обусловлены тем, что исходные уравнения отличаются пространственной и временной разномасштабностью, жесткостью и нелинейностью (жесткой называется система с резко различающимися по изменяемости решениями). Так, пространственный спектр атмосферных движений — от 10^{-2} до 10^{7}–10^{8} м, временные масштабы — от долей секунды до месяцев. Среди этих явлений мелкомасштабная турбулентность, атмосферные приливы, циклоны, гравитационные волны и т.д. Поэтому весь спектр вопросов, связанных с моделированием циркуляции атмосферы и океана, практически невозможно продемонстрировать на основе полных уравнений. Как уже отмечалось, прямой счет вряд ли приведет к цели [29]. Необходима асимптотическая обработка исходных уравнений, создание маломерных моделей и т.д. Однако уровень развития современной асимптотической математики далеко не в полной мере отвечает запросам климатологов, океанологов и других специалистов. Особенно это касается вопросов неустойчивости и размерности [71, 82, 138].

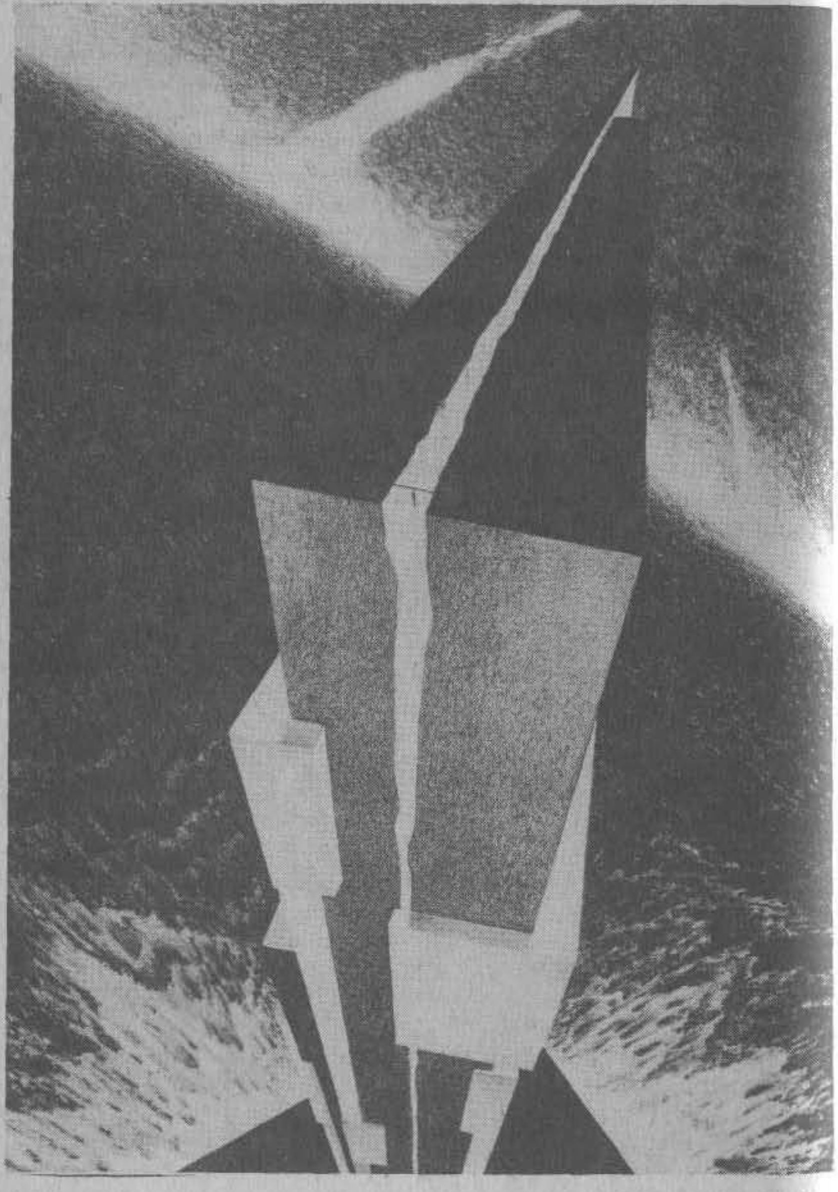
Образование новых понятий

«Новые физические понятия создаются на только в процессе обобщения физических теорий, но и обратным путем: они могут возникнуть в результате применения приближенных методов к более точной теории» [107].

Как правило, появление новых понятий связано с появлением нового математического аппарата, хотя процесс этот не однозначен и, бывает, что появление нового физического понятия стимулирует развитие математических методов. Так происходило, например, с понятиями пограничного слоя и краевого эффекта, эффективной жесткости и т.д. Интересно проанализировать в этом плане ряд новых понятий, введенных в теорию дифракции В.А.Фоком [106], ибо: «Каждое новое физическое понятие (кругосветные и прострельные волны, земной шар как экран, принцип локальности, поперечная диффузия, дальность горизонта при сверхрефракции и др.) связано с эффективным математическим аппаратом, развитым В.А.Фоком [24]».

Одним из наиболее эффективных подходов, предложенных В.А.Фоком, является метод параболического уравнения. «Математический путь к методу параболического уравнения был следующим. Давно было известно, что из уравнений Максвелла, делая надлежащие аппроксимации (т. е. учитывая малость длины волны λ по сравнению со всеми характерными размерами и длинами), можно получить уравнения геометрической оптики. Расчеты на ее основе достаточно просты: строятся лучи и лучевые трубки, по которым энергия поля перемещается примерно как несжимаемая жидкость по трубам. Если же, учитывая малость длины волны, вместе с геометрооптическими слагаемыми учитывать члены, пропорциональные λ (но не λ^2), то мы придем к методу параболического уравнения. С физической точки зрения дополнительные члены учитывают просачивание поля через стенки лучевых трубок перпендикулярно лучам, т. е. направление потока энергии не совпадает с направлением луча в данной точке, а составляет с ним малый угол. Это явление было названо поперечной диффузией волновой амплитуды» [24].

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ



Асимптотическое соответствие физических теорий

«Движение науки нужно сравнивать не с перестройкой какого-нибудь города, где целые здания немилосердно разрушаются, чтобы дать место новым постройкам, но с непрерывной эволюцией зоологических видов, которые беспрестанно развиваются и в конце концов становятся неузнаваемыми для простого глаза, но в которых опытный глаз всегда откроет следы предшествовавшей работы прошлых веков. Итак, не нужно думать, что вышедшие из моды теории были бесплодны и не нужны» [85].

Эти положения, столь ясно высказанные А.Пуанкаре, не сразу стали общепризнанными. В процессе развития науки каждая новая теория рассматривалась обычно как отрицание уже существующей, т. е. на первый план выдвигалась несовместимость старых и пришедших им на смену представлений и концепций. Лишь после того, как сформулированный Н.Бором принцип соответствия сыграл важную конструктивную роль в создании квантовой механики, преемственность научных теорий стала предметом всестороннего изучения физиков и философов.

Хотя и сегодня есть различные, в том числе и взаимоисключающие, точки зрения на соотношение сменяющих друг друга теорий, можно непосредственно убедиться в существовании вполне определенной математической связи между ними. Эта связь и выражается асимптотическим соответствием, появляющимся в разнообразных, зачастую далеко не очевидных формах. Иначе говоря, существуют различные типы предельных переходов от новой теории к старой, как правило, при нулевых или бесконечных значениях некоторых параметров или переменных.

Новая теория может рассматриваться как обобщение существующей (вспомним приведенные во введении слова А.Эйнштейна), однако это обобщение не только количественное, но и качественное, поэтому она включает и совершенно непредвиденные в рамках старой теории возможности. Часто такие возможности наиболее отчетливо проявляются в противоположных предельных случаях, когда параметр, полагавшийся малым, становится большим, или наоборот. Эффекты, игравшие ранее главную роль, оказываются теперь несущественными, так что новое содержание физической теории воспринимается, как говорится, в чистом виде.

Попытаемся ниже на некоторых примерах проследить это соответствие для различных физических теорий.

Как отмечает Н.Н.Моисеев, «Наряду с феноменологическими моделями стали возникать еще и модели асимптотические. Дальнейшее накопление знаний приводило к появлению новых феноменологических моделей, а те модели, которые раньше были феноменологическими, постепенно превращались в асимптотические модели. Количество асимптотических моделей отражает в известной степени зрелость науки. Оно показывает достигнутую глубину понимания связей между отдельными фактами и явлениями.

Современная физика — это логически связанная система математических моделей. Огромную роль в этом процессе сыграло развитие идей асимптотического анализа».

Механики Аристотеля и Галилея-Ньютона

Проанализируем в этом аспекте прежде всего переход от теории принудительных движений Аристотеля к механике Галилея-Ньютона, который дает хороший пример радикального изменения научных концепций, отхода от господствующих длительное время представлений, взглядов и методов. Тем не менее даже при столь революционном изменении обнаруживается асимптотическое соответствие, оставляющее аристотелеву механику действенной для поступательных движений при сильном трении. Но это не так уж удивительно, ведь Аристотель в своих рассуждениях опирался на интуитивные представления, вытекающие из повседневного опыта наблюдений за движущимися объектами при ограниченном диапазоне изменения внешних условий и, безусловно, содержащие зерно истины.

Очень интересны в этом плане исследования психологов [62], которые показывают, что, не зная выводов современной теории или недостаточно глубоко усвоив их, люди и сегодня приходят к объяснениям, типичным для Аристотеля и его последователей. Сюда относятся представления о силе как причине движения, об остановке движущегося тела вследствие исчерпания сообщенной ему движущей силы — «импетуса», о вертикальном падении тела, брошенного с горизонтально движущегося объекта, наконец, о различном времени падения тел разного веса. В упомянутых исследованиях психологов отмечается удивительное сходство взглядов античных или средневековых философов и многих наших современников, взглядов, представляющих собой естественный итог наблюдений в земных условиях.

Как правило, в этих исследованиях делается упор на несовместимость основных представлений Аристотеля с ньютоновской механикой. Между тем в сфере обычного человеческого опыта, т. е. в земных условиях, эти представления не часто терпят фиаско. И такое положение дел можно объяснить с позиций механики Ньютона именно асимптотическим соответствием, о котором шла речь в предыдущем разделе. Это соответствие удается установить, несмотря на глубочайшие идейные различия старой и новой теории и кардинальное противоречие философских концепций, из которых они проистекали.

В подтверждение сказанного рассмотрим, например, движение тела под действием постоянной силы F в среде с коэффициентом трения α. Аристотель не выделял силу трения как таковую, трение для него было естественным и неотъемлемым атрибутом движения. Он также не формулировал закон движения на математическом языке. Но если это сделать, то «закон движения по Аристотелю» (в предположении линейной зависимости силы сопротивления от скорости v) запишется так:

$$\alpha v = F$$

Если сила постоянна, то постоянна и скорость. Увеличение силы вызывает рост скорости, а при отсутствии силы движения нет. Эти выводы, в общем-то, соответствуют наблюдениям за движением в земных условиях, когда трение достаточно велико.

По Ньютону сила трения относится к внешним силам, а закон движения материальной точки массой m при тех же предположениях имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = F - \alpha v,$$

так что при отсутствии начальной скорости и постоянной силе

$$v = \frac{F}{\alpha} (1 - \exp(- \frac{\alpha}{m} t)). \qquad (4.1)$$

При движении спустя некоторое время второе слагаемое окажется пренебрежимо малым по сравнению с единицей, и мы имеем «закон Аристотеля». Но как могли оставаться незамеченными отклонения от этого закона при меньших временах? Дело в том, что при большом трении переходный режим, описываемый вторым членом правой части уравнения (4.1), заканчивается очень быстро после «включения» силы (по сравнению с достаточно длительным временем наблюдения). Остается главное, наиболее заметное, и это главное соответствует механике Аристотеля. Наблюдения за движением при малом трении сразу же показали бы значительные отклонения от постоянной скорости, медленное приближение к ней на большом интервале времени. Но таких наблюдений не было в сфере повседневного опыта древних греков. Лишь идеализированный мысленный эксперимент привел Галилея через 2000 лет к представлению о движении по инерции — одному из основных исходных представлений физики Нового времени.

«Уже самый первый принцип физики Галилея (принцип инерции) противоречит аналогичному принципу физики Аристотеля. Означает ли это, что Аристотель допустил грубые ошибки или что его наблюдения были слишком примитивны и малочисленны, чтобы привести к открытию правильного принципа? Отнюдь, Аристотель был реалистом и учил тому, что подсказывали наблюдения. Метод Галилея был более утонченным и поэтому более успешным. Галилей идеализировал явление, игнорируя одни факты и подчеркивая другие. Пренебрегая трением и сопротивлением воздуха и предполагая, что движение происходит в абсолютно пустом эвклидовом пространстве, Галилей открыл фундаментальный принцип» [53].

Сказанное выше подтверждает важность методологии при обработке экспериментальных результатов: без хорошей теории разобраться в них трудно.

С физической точки зрения приближение Аристотеля сохраняет значение как асимптотика движения при достаточно больших временах: чем значительнее трение, тем раньше это приближение становится применимым. С математической же точки зрения мы сталкиваемся здесь с сингулярным возмущением. В этом случае существует дополнительная асимптотика, которую легко обнаружить, анализируя поведение точного решения при малом показателе экспоненты

$$v \approx \frac{F}{m} t.$$

Она описывает равноускоренное движение тела под действием силы тяжести в среде сопротивления. Это решение справедливо при любом трении для достаточно малых времен. Чем меньше коэффициент трения, тем шире область его применимости, и тем позднее мы выходим на асимптотику Аристотеля. Соответствующее малым временам уравнение движения

$$m - \frac{dv}{dt} = F$$

представляет собой математическую запись второго закона Ньютона.

Здесь мы попадаем в область механики консервативных или гамильтоновых систем (для которых справедлив закон сохранения механической энергии), которая допускает и виды движения, абсолютно чуждые механике Аристотеля — колебания, периодические вращения. Теория консервативных систем — важнейшая асимптотика в механике Ньютона, поскольку описываемые ею режимы движения (в частности, периодические и почти периодические) во многих физических системах оказываются очень хорошим приближением к реальности.

Но и приближение Аристотеля имеет свою область применимости, когда трение становится достаточно большим, как, например, при движении молекул полимеров в растворах. Такие системы называют сферхдемпфированными, а динамические процессы в них — релаксационными, т. е. стремящимися к равновесию.

Механика Ньютона и специальная теория относительности

Создание теории относительности привело к ломке глубоко укоренившихся и считавшихся единственно возможным представлений ньютоновской механики о независимости пространства и времени, об абсолютном времени и т.д. Однако механика Ньютона, как и следовало ожидать, не была отвергнута специальной теорией относительности, а стала ее асимптотическим пределом. Характер асимптотического соответствия этих двух теорий легко проследить на примере частицы с массой покоя m, движущейся под действием постоянной по времени силы F со скоростью v. Согласно специальной теории относительности

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2 c^{-2}}}$$

где c — скорость света, $v_0 = F\,t/m_0$.

Решение в рамках механики Ньютона ($v = v_0$) соответствует асимптотике «малых» времен или скоростей. Первая поправка к этому решению при $v \to c$ очень мала для реальных в земных условиях скоростей.

В теории относительности есть и дополнительная асимптотика «больших времен», уже не имеющая никакого отношения к ньютоновской механике. Действительно, $v \to c$ при $t \to \infty$, а выражение для скорости при учете первой поправки примет вид

$$v = c\,(1 - 0{,}5 v_0^2\, c^{-2})$$

Именно в области «больших времен» отчетливо проявляются основные релятивистские эффекты — новое правило сложения скоростей, новое понятие одновременности, невозможность существования абсолютно твердых тел и т.д., отражающие всю глубину идейного переворота, совершенного теорией относительности.

Интересно проследить, какие новые эффекты по сравнению с ньютоновской механикой дают первые приближения общей теории относительности [17]. Оказалось, что первое приближение позволяет уловить отклонение луча света гравитационным полем, красное смещение спектральных линий, излучаемых атомами, в гравитационном поле, запаздывание электромагнитных сигналов при их распространении в гравитационном поле, геодезическую прецессию гироскопа (увлечение гироскопа вращающимися телами). Определение прецессии орбит планет требует построения второго приближения. Наконец, значительно более сложно определение гравитационных волн — здесь мы сталкиваемся с очень тонким явлением. Условно можно сказать, что в первых приближениях теории возмущений определяются эффекты, явления же требуют более сложного аппарата.

Геометрическая и волновая оптики

Изучение соотношения между волновой и геометрической оптиками интересно как само по себе, так и для понимания связи между классической и квантовой механиками.

Долгое время считалось, что для описания распространения света достаточно элементарных геометрических построений, лежащих в основе геометрической оптики. После обнаружения дифракции света надолго восторжествовала волновая оптика, при этом геометрическая оптика казалась лишь кустарным рецептом, не отражающим фундаментальных закономерностей природы. Лишь в 20-х годах удалось четко установить, что переход от волновой оптики к геометрической связан с пренебрежением длиной волны λ $(\lambda \to 0)$ по сравнению с размерами объекта. Поскольку для видимого света λ имеет порядок 10^{-7} м, во многих случаях геометрическая оптика оказывается хорошим приближением к реальности.

Математически переход от волновой оптики к геометрической осуществляется при помощи так называемого метода ВКБ (Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна). Суть его такова.

В точке с координатами (x, y, z) составляющая электромагнитного поля в световой волне u представляется в виде

$$u = A\,(x, y, z, \lambda)\exp(-j\,\varphi(x, y, y)/\lambda),$$

$$A = A_0 + A_1\lambda + \ldots,$$

где A — амплитуда волны, φ — ее фаза, $j = \sqrt{-1}$.

После подстановки выражения для u в волновое уравнение и группировки членов, содержащих одинаковые степени λ, получается нелинейное дифференциальное уравнение для определения φ, называемое уравнением эйконала. Именно оно и соответствует приближению геометрической оптики. Для определения коэффициентов разложения A_i получается рекуррентная последовательность линейных дифференциальных уравнений, называемых уравнениями переноса.

В геометрической оптике предполагается, что световые лучи распространяются вдоль определенных кривых. Край пучка кажется резким, однако на самом деле интенсивность границы света меняется хотя и быстро, но непрерывно в пограничном слое, толщина которого порядка длины волны λ.

Асимптотику, описывающую чисто волновое явление дифракции, можно построить, используя понятие пограничного слоя. На примере метода ВКБ интересно посмотреть, насколько бывает трудно установить автора того или иного асимптотического метода [101]. Действительно, этот метод, насколько известно, впервые применил для исследования эллиптического движения планет вокруг Солнца Франческо Карлини (1783–1846) в 1817 г. На это не обратили особого внимания, хотя в 1850 г. Якоби восстановил эту работу Карлини в немецком переводе. В 1837 г. Жак Лиувилль (1808–1882) и Георг Грин (1793–1841) снова открыли этот метод, в дальнейшем усовершенствованный в 1912 г. Рэлеем (1842–1919), а в 1915 г. — немецким физиком Рихардом Гансом. Наиболее систематические результаты получил в 1924 г. Гарольд Джеффрис (1891–1989) [45].

Однако эти работы остались незамеченными, а название метод получил после публикации в 1926 г. статей Грегора Вентцеля (1898–1978), Хендрика Антони Крамерса (1889–1969) и Леона Бриллюэна (1889–1969). Предыдущие решения, в частности, весьма общее решение Джеффриса, не были замечены. Да и сам Джеффрис в 1956 г. отмечал, что он «просмотрел более раннее исследование Ганса».

Классическая и квантовая механики

При построении волновой (квантовой) механики Э.Шредингер опирался на следующую аналогию: «Известно, что классическая механика неверна при малых размерах и большой кривизне траекторий; не является ли это обстоятельство вполне аналогичным известной неприменимости геометрической оптики, т. е. оптики с «бесконечно малой длиной волны», в случае «препятствий» или «отверстий», сравнимых по размерам с действительной конечной длиной волны? Быть может, классическая механика представляет полную аналогию с геометрической оптикой и, подобно последней, отказывается служить и не согласуется с действительным положением вещей при размерах и радиусе кривизны траектории, приближающихся по величине к некоторой длине волны» [119].

Связь между классической и квантовой механиками в определенном смысле аналогична той, что существует между геометрической и волновой оптиками.

Переход от квантовой механики к классической формально описывается методом ВКБ. Суть такого перехода заключается в том, что заданное в некоторый начальный момент времени распределение вероятностей координат частицы «перемещается» по законам классической механики.

При очень малом импульсе частицы p квазиклассическое приближение теряет смысл. Это происходит, в частности, вблизи «точек поворота», в которых $p = 0$ и где по законам классической механики частица остановилась бы и стала двигаться в обратном направлении. В квантовой механике возможно принципиально неклассическое явление — туннелирование частицы через потенциальный барьер. Оно также описывается асимптотикой, использующей именно малость импульса.

При создании квантовой механики в наибольшей мере проявилась эвристическая роль идеи асимптотического соответствия. Эта роль особенно возрастает в наше время, когда предпринимаются попытки построения единой теории, объединяющей все фундаментальные взаимодействия природы. В рамках такой теории сами понятия электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного взаимодействий должны стать асимптотическими.

«Простые теории» в физике

«Глубокое понимание связано с наличием какой-либо простой модели или аналогии» [26]. Построение подобной «простой» физической теории может осуществляться диаметрально противоположными способами. Один из них сформулирован в приписываемой Н.Е.Жуковскому фразе: «Искусство механика состоит в составлении интегрируемых уравнений». С точки же зрения Постона и Стюарта: «Деятельность физика в значительной мере состоит в том, чтобы приходить к трудным уравнениям и затем искать что-нибудь, что заменило бы их решение».

В первом случае речь идет о «физической интуиции», «удачной идеализации» или «асимптотике на интуитивном уровне».

Ученики И.М.Лифшица вспоминают [1]: «Все, знавшие Илью Михайловича, хорошо помнят, что всякий раз, приступая к обсуждению какой-либо работы, он прежде всего спрашивал: «А какой у Вас малый параметр?» — имея в виду, что в большинстве решаемых теорфизических задач непременно используется малость той или иной величины».

Авторам настоящей книги приходилось слышать, что похожие мысли высказывал Л.Д.Ландау. На наш взгляд, это подчеркивает большую роль методов возмущений в физике и неформальный характер выбора малого параметра. Чтобы удачно выбрать малый параметр, нужно глубоко проанализировать физическую суть задачи и качественно представлять искомое решение — искусство, которым блестяще владели и И.М.Лифшиц, и Л.Д.Ландау, и, например, такой известный современный физик, как лауреат Нобелевской премии 1991 г. П.-Ж. де Жен. «Своеобразный научный почерк П.-Ж. де Жена — умение выделить в изучаемом явлении лишь самое существенное, отбросить все второстепенное, это существенное свести к возможно более простой модели и описать ее простыми, но адекватными теоретическими методами. В этом отношении стиль де Жена напоминает стиль Ландау, который говорил о себе как о «тривиализаторе» [95].

Другой подход к построению простых физических теорий — дедуктивный. Классическим представителем этого направления был В.А.Фок. В частности, он писал: «Всякая физическая теория имеет своей целью получение такой картины явления, которая воспроизводила бы количественным и качественным образом все существенные его черты. Эта цель может считаться достигнутой только в том случае, когда полученное решение имеет довольно простой вид. Если же аналитическая форма строгого решения отличается сложностью, то его можно рассматривать только как первый шаг в действительном решении задачи. Следующий шаг должен состоять в выводе формул, пригодных для численных расчетов. Этот второй шаг может оказаться столь же трудным, как и первый» [107].

«Куб теорий»

Связь между различными теориями может быть наглядно изображена графически или в виде таблицы. Первоначально это сделал В.Паули [83] (см. табл. 4.1, где c — скорость света, $\hbar$ — постоянная Планка, γ — гравитационная постоянная).

Предельные переходы в физических теориях рассматривались и в знаменитой статье Ландау, Гамова и Иваненко [34], в которой утверждалось: «Введение новых постоянных и редукция к меньшему числу отобразились в истории физики как смена теорий и их постепенное объединение. При этом основную роль играли два эвристических положения:

1. Степень общности теории, представлящей данную постоянную.

2. Проба постоянной на предельный переход».

Затем по идее М.П.Бронштейна А.Л.Зельманов предложил «куб теорий», изображенный на рис. 4.1 [50].

Здесь НМ — ньютоновская теория без гравитации, НГ — нерелятивистская ньютоновская теория гравитации, КМ — квантовая механика, КТМ — квантовая теория поля, НКГ — нерелятивистская квантовая гравитация, ТВ — «теория всего» (английский эквивалент — TOE (Theory of Everything)).

При этом возможность построения последовательной НКГ сомнительна. Кроме того, «Задача построения единой фундаментальной теории в плоскости $1/c = 0$ или $\hbar = 0$ или $\gamma = 0$ — утопичны» [79].

Представляло бы интерес построение различных асимптотик в «углах куба», т. е., например, теорий, «близких» к СТО, ОТО и т.д.

Таблица 4.1

Область 1	Область 2	Область 3
$c = 0$	$c < \infty$	$c < \infty$
$\gamma = 0$	$\gamma = 0$	$\gamma \neq 0$
$\hbar = 0$	$\hbar = 0$	$\hbar = 0$
Механика Галилея-Ньютона, термодинамика и классическая статистическая механика	Электродинамика Максвелла-Лоренца и оптика, СТО	Релятивистская теория гравитации

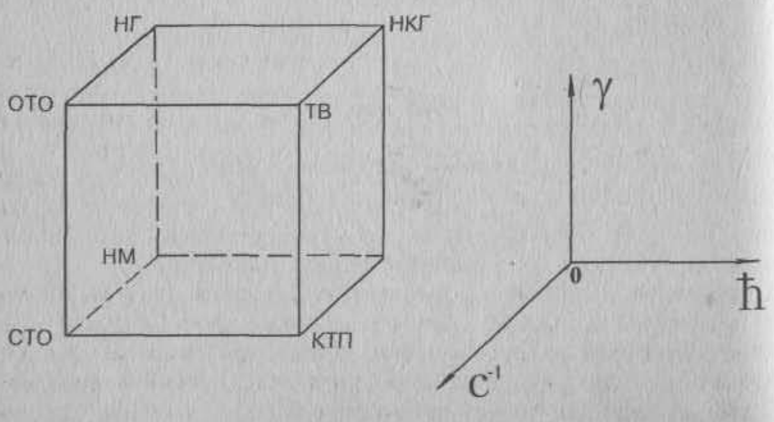


Рис. 4.1.

Асимптотические методы и формирование физического мышления

«В процессе обучения физике мы, по всей видимости, переоцениваем роль совершенно исключительных проблем, поддающихся точному решению с помощью элементарных функций, и не уделяем достаточного внимания гораздо более общей ситуации, в которой используются различные приближенные методы решения... Искусство выбора подходящего приближения, проверки его непротиворечивости и отыскания, по крайней мере, интуитивных соображений по поводу удовлетворительности данного приближения, является куда более утонченным, чем искусство нахождения строгого решения уравнения» [80].

На наш взгляд, для механиков и физиков был бы весьма полезен курс асимптотических методов. Разумеется, многие понятия могут быть изложены при чтении курса дифференциальных уравнений, классической механики и др. Даже в курсах математического анализа можно дать понятие о шкалах роста и убывания, главных членах в сумме, асимптотических выражениях, проверке формул на основе предельных переходов. И все же нельзя не учитывать особую роль асимптотических подходов, являющихся, в определенном смысле, формализацией «физического» образа мышления.

Подобный спецкурс должен уделять существенное внимание таким трудно формализуемым понятиям, как выбор малых параметров и оптимального метода упрощения, «дополнительности» асимптотик.

Определенное место должны найти в нем методы расширения области применимости полученных разложений, сращивания асимптотик при различных предельных значениях параметров, оценки погрешностей построенных разложений на «физическом уровне строгости».

«Прежде чем подвергать проверке правильность любого предложения относительно зависимости между теми или иными величинами в природе, мы можем мысленно, еще до его сравнения с экспериментальными данными, проверить, покрывает ли оно всю область допустимых значений независимых переменных. Иногда неприемлемость предполагаемой зависимости сразу проявляется в некоторых простых предельных случаях. Лейбниц, сформулировав свой принцип непрерывности [59], учил нас рассматривать покой не как противоположность движения, а как его предельный случай. Исходя из непрерывности, Лейбниц сумел a priori опровергнуть предложенные Декартом законы соударения тел. Мах дает следующую рекомендацию: «Составив определенное заключение на основании одного конкретного случая, надлежит постепенно и как можно шире модифицировать сопутствующие ему обстоятельства, стремясь, насколько это возможно, остаться при первоначальном заключении. Не существует иного способа, который с большей надежностью и меньшими умственными усилиями приводил бы к простейшему объяснению всех явлений природы» [53].

Связь между физическими теориями и установление их иерархии должны прослеживаться на протяжении всего обучения, но могут найти определенное место и в указанном спецкурсе.

Полезно подчеркивать асимптотический характер понятий (пограничный слой, эффективная жесткость и т.д.) и соотношений. Например, говоря о методе линеаризации, Р.Пайерлс [80] подчеркивает: «Многие привыкают считать закон Ома в качестве закона природы, а не обычного линейного приближения. Поучительно поэтому представить себе те эффекты, которыми пренебрегли при формулировке линейного закона, и оценить их величину в некоторых практически интересных случаях». Поучительны также такие примеры, как закон Гука, закон теплопроводности Фурье и т.д. «Чтобы понять физические законы, мы должны усвоить себе раз и навсегда, что все они в какой-то степени приближенные» (А.Эйнштейн).

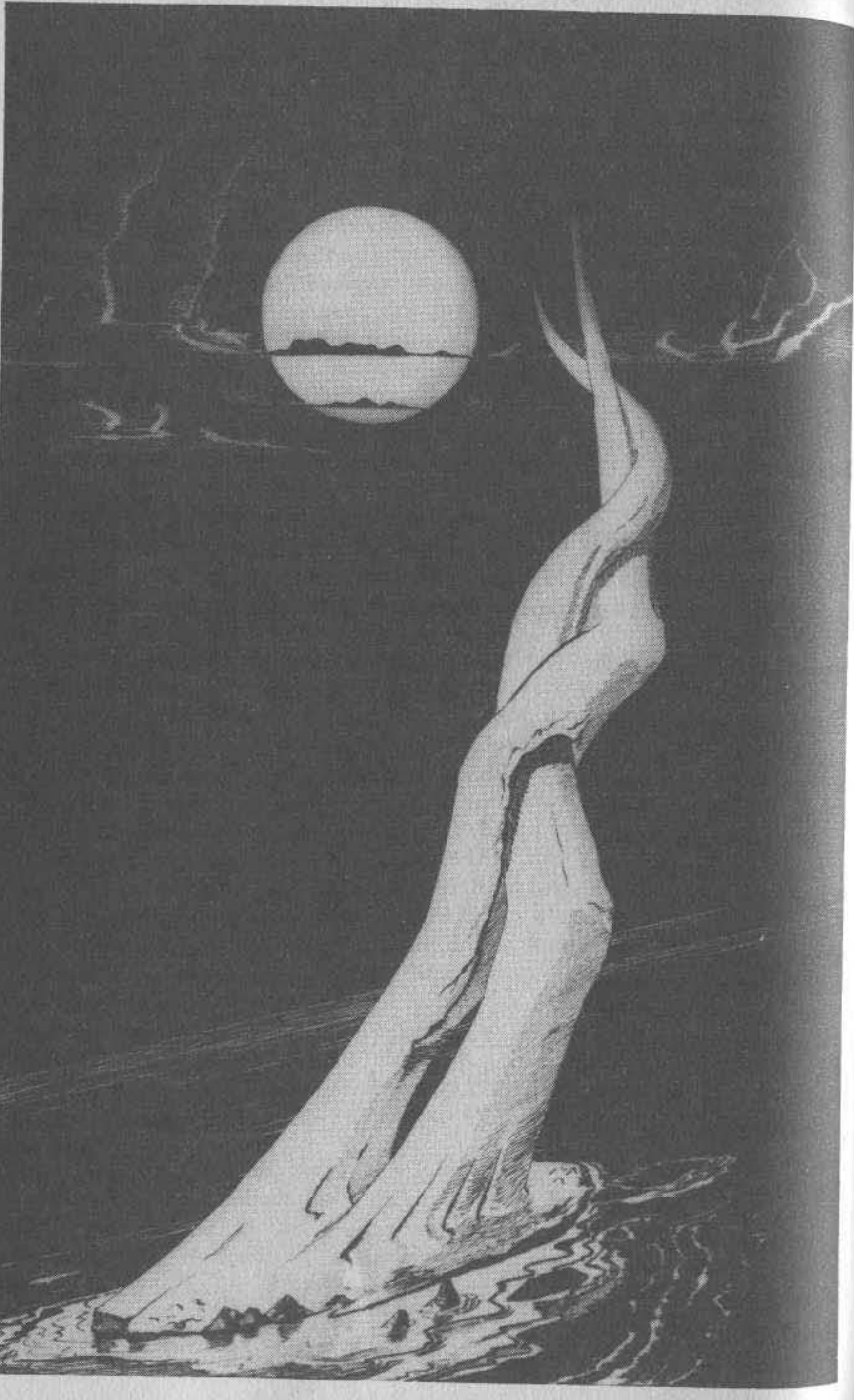
При изложении гидромеханики также полезно подчеркнуть, что «модель Навье-Стокса — это асимптотика больцмановского течения газа при $\lambda \to 0$ (λ — длина свободного пробега молекул) и при некоторых дополнительных предположениях о распределении скоростей. Этот асимптотический подход позволяет ввести понятие плотности, температуры, давления, скорости потока — понятия, которые в условиях свободного молекулярного течения непосредственного смысла не имеют» (Н.Н.Моисеев).

Хороший повод пояснить «асимптотический» характер развития науки может дать следующая идея, высказанная А.Пуанкаре [85] «Законы отражения света Френеля остались бы неоткрытыми, если бы с самого начала существовала догадка о сложности взаимодействующих объектов. Давно уже было сказано, что если бы инструменты Тихо Браге были в десять раз точнее, то мы никогда не имели бы ни Кеплера, ни Ньютона, ни астрономии. Для научной дисциплины составляет несчастье возникнуть слишком поздно, когда средства наблюдения стали слишком совершенными».

Элементы асимптотического подхода, на наш взгляд, были бы полезны и в школьных программах физики и математики. Разумеется, ни в коем случае не за счет введения новых формальных приемов. Соответствующие возможности есть в разделах введения в анализ, в курсах физики. Например, те же законы Ома, Гука можно представить как линеаризацию истинных соотношений.

ФЕНОМЕНОЛОГИЯ И ПЕРВЫЕ ПРИНЦИПЫ — СВЯЗЬ ЧЕРЕЗ АСИМПТОТИКУ

(на примере теории оболочек)



«Постижение истины невозможно без эмпирического фундамента, но чем глубже мы в нее проникаем и чем более широкими и всеобъемлющими становятся наши теории, тем меньше эмпирических знаний требуется для создания этих теорий»

Эйнштейн А. [44]

По А.Эйнштейну, развитие науки определяется как «внешними», так и «внутренними» факторами. Первые обычно связывают с запросами практики или других областей науки, вторые — с внутренней логикой развития самой теории, причем процесс их взаимодействия может быть достаточно сложным и поучительным. Интересно проследить этот процесс на примере какого-либо конкретного раздела прикладной науки — именно потому, что здесь влияние внешних факторов, на первый взгляд, должно быть доминирующим.

В качестве такого примера мы выбрали теорию пластин и оболочек [30, 38, 61], имеющую многочисленные важные приложения и, в то же время, в силу внутренней логики своего развития, способствовавшую формированию ряда общих идей и понятий современной математической физики. Можно вспомнить слова одного из создателей теории оболочек А.Лява [61]: «Большинство людей, благодаря исследованиям которых зародилась и сформировалась теория упругости, интересовались скорее натуральной философией, чем материальным прогрессом, стремились скорее познать мир, чем сделать его более удобным. Даже в таких проблемах технического характера, как теория стержней и пластинок, внимание было сосредоточено скорее на теоретической, чем на практической стороне этих вопросов. Тот факт, что косвенным результатом исследований, которые велись в таком духе, явились значительные успехи в приложениях, имеет немаловажное значение».

Как правило, в прикладной науке внешние стимулы отчетливо проявляются при необходимости решения возникающих практических задач, когда невозможно ждать результатов строгого теоретического анализа. В такой ситуации на первый план выходит «метод гипотез», составляющий основное содержание феноменологического подхода. Напротив, внутренние стимулы побуждают искать пути обоснованного вывода соответствующих уравнений и их решения, как говорят, «из первых принципов». При этом «первые принципы» не являются однозначно определенными, существует их иерархия в соответствии с различными уровнями теории. Более того, некоторая система соотношений может быть следствием «первых принципов» на одном уровне рассмотрения и гипотезами феноменологического характера — на другом.

Для тонких оболочек общая схема построения и анализа теории могла бы выглядеть так. Вначале из соотношений физики твердого тела выводится теория упругости. Затем на основе трехмерной теории упругости строится двумерная теория оболочек. И, наконец, в рамках теории оболочек, остающейся в общем случае достаточно сложной, выводятся приближенные теории, позволяющие эффективно решать конкретные задачи. Однако каждый из выделенных этапов связан с преодолением весьма существенных математических и (или) физических трудностей, и развитие теории оболочек не следовало указанной идеальной схеме. При ретроспективном анализе разобраться в этом процессе позволяет асимптотический подход.

Построение основных соотношений теории пластин и оболочек

Интерес к теории деформируемых поверхностей возник в начале XIX века в связи с экспериментами Хладни [100]. Насущная необходимость быстрейшего объяснения результатов этих экспериментов обусловила феноменологический характер первых теоретических работ. Я.Бернулли второй, рассматривая пластину как систему перекрестных балок, получил уравнение изгибных колебаний, позволившее качественно объяснить эксперименты Хладни, однако не учитывающее взаимодействие балок при кручении. Естественный следующий шаг, связанный с учетом этого фактора,— исходная пластина рассматривается как поверхность, наделенная заданными свойствами («оснащением»). Такие поверхности называются в настоящее время поверхностями Коссера или оснащенными поверхностями. Выбор оснащения (жесткостей пластинки, зависящих в действительности от материала и геометрических свойств трехмерного тонкого тела, каковым является пластинка) позволяет получить конкретную двумерную теорию. По этому пути пошли Эйлер и С.Жермен (которой принадлежит первый удовлетворительный вывод уравнения изгиба пластинки). Это — чисто геометрический и принципиально феноменологический подход к построению теории пластин и оболочек. Если ограничиться этим уровнем рассмотрения, то свойства оснащения (в данном случае жесткости на изгиб и кручение) должны определяться на основе специальных экспериментов. Но внутренняя логика науки направляет усилия ученых на вывод феноменологических уравнений из «первых принципов», при этом одновременно решается и задача определения свойств оснащения.

Пуассон и Навье в качестве таких принципов выбрали соотношения (еще не существовавшей тогда!) молекулярной теории, опираясь на берущее начало у Ньютона убеждение, что свойство упругости может быть объяснено с точки зрения сил притяжения и отталкивания, действующих между мельчайшими частичками тел. Однако физика не была готова тогда к детальному рассмотрению явлений на таком уровне. Интересно, что уже в наше время подобный подход (естественно, на более высоком уровне) оказался адекватным в теории тонких пленок, состоящих из одного или нескольких молекулярных слоев. По самой своей сути это — физические объекты, описание которых методами механики трехмерных сплошных сред принципиально невозможно.

С другой стороны, Коши и тот же Пуассон пытались построить теорию пластин, отправляясь от трехмерной теории упругости, которая незадолго до этого была впервые сформулирована на основе системы гипотез, т. е. являлась феноменологической теорией, но представляла собой систему «первых принципов» для вывода теории пластин. Коши и Пуассон сводили трехмерные уравнения теории упругости к двумерным, раскладывая искомые компоненты напряжений по возрастающим степеням толщинной координаты. Однако здесь возникли трудности уже не физического, а математического характера, и после справедливой критики Сен-Венана и Кирхгофа этот метод был надолго забыт. На природе этих трудностей мы остановимся позже.

Как теперь ясно, шансы на успех первоначально имел лишь феноменологический подход в рамках трехмерной теории упругости. Именно на этом пути первую удовлетворительную теорию изгиба пластин построил Г.Кирхгоф, опираясь на следующую систему гипотез:

— прямолинейные волокна, перпендикулярные к срединной поверхности пластины до деформации, остаются после деформации прямолинейными и перпендикулярными к изогнутой поверхности, сохраняя при этом свою длину;

— отсутствует взаимодействие слоев пластинки, параллельных срединной поверхности, в нормальном к слоям направлении.

В дальнейшем А.Ляв обобщил эти гипотезы на изогнутые поверхности и построил основные соотношения теории оболочек. Отметим, что вывод уравнений Кирхгофа-Лява из уравнений теории упругости (т. е. реализация внутренней логики развития теории оболочек) стал возможным лишь в 60–70 годах XX века [38] — почти через 100 лет после их феноменологического построения!

Итак, при выводе основных соотношений теории пластин и оболочек четко обозначились 4 подхода: вывод непосредственно из соотношений молекулярной теории (первые принципы 1 (ПП 1)); построение соотношений теории оболочек из уравнений трехмерной теории упругости (ПП 2); непосредственное построение соответствующих двумерных теорий как теорий оснащенных поверхностей (феноменология 1 уровня — Ф 1) и, наконец, использование системы гипотез в рамках трехмерной теории упругости (Ф 2).

Включение указанных подходов (кроме чисто феноменологических) в единую схему стало возможным благодаря асимптотическим методам. Так, ПП 1 реализуются при помощи методов континуализации, ПП 2 и Ф 2 — сингулярной асимптотики [38]. При этом оказывается, что многие феноменологические теории — это угаданные асимптотики. Например, гипотезы Кирхгофа-Лява (Ф 2) — первое приближение в асимптотическом процессе сингулярной асимптотики по параметру малой толщины, реализующем выход из ПП 2. В то же время вывод из первых принципов позволяет выявить эффекты, о которых не может идти речь при феноменологических подходах. Так, на расстояниях порядка толщины оболочки от ее края нельзя рассматривать оболочку как двумерную поверхность. Соответствующее напряженное состояние — пограничный слой — получается в результате асимптотического процесса в рамках ПП 2 [38]. Невозможность разделения полного напряженного состояния на «внутреннее» и «пограничный слой» при использовании формальных разложений по толщинной координате в уравнениях трехмерной теории упругости и предопределила неудачу попытки, предпринятой Навье и Пуассоном.

Решение уравнений теории оболочек

> *«Проблема тяготения обратила меня в верующего рационалиста, который ищет единственный надежный источник истины в математической простоте»*
>
> **Эйнштейн А.** [44]

Задачи теории оболочек достаточно сложны даже в настоящее время, когда большая часть из них может быть решена на ЭВМ численными методами; тем более они были сложны в XIX веке.

Подходы исследователей можно условно разделить на математический и физический. Первый привел к точным методам либо строго обоснованным приближенным подходам — например, вариационным,— не связанным с дальнейшим использованием малых

параметров. Второй основывался на принципе соразмерности точности теории и методов ее анализа и попытке снова использовать малые параметры системы. Однако возникла та же ситуация, что и при выводе соотношений теории оболочек из трехмерной теории упругости — уровень математики не позволял в сколько-нибудь нетривиальных случаях делать вполне строгие выводы, и была использована феноменология. Поскольку соотношения теории оболочек в таком контексте можно считать первыми принципами (ПП 3), соответствующую феноменологию назовем феноменологией третьего уровня — Ф 3. В каком-то смысле апогея Ф 3 достигла в работах В.З.Власова [30], который построил целую систему приближенных теорий, практическое значение которых не исчерпано и в настоящее время. Однако, начиная еще с работ Рэлея, возник вопрос о возможности обоснования гипотез и вывода их из общих уравнений, и вот здесь-то в полной мере проявилась мощь асимптотической методологии.

С этой точки зрения чрезвычайно поучительна дискуссия Рэлея и Лява, касающаяся колебаний цилиндрической оболочки, итог которой подвел сам Ляв [61]: «Рэлей из физических соображений пришел к заключению, что средняя поверхность колеблющейся оболочки не испытывает растяжения; в соответствии с этим условием он определил характер смещения точек средней поверхности. Прямое применение метода Кирхгофа привело к уравнениям движения и граничным условиям, которые нелегко согласовать с теорией Рэлея. Последующие исследования показали, что деформация растяжения может иметь место лишь в узкой области вблизи краев, причем здесь она может быть подобрана так, чтобы соблюдение граничных условий было обеспечено; в то же время большая часть оболочки будет колебаться согласно теории Рэлея».

Разумеется, Рэлей прекрасно понимал приближенность своего подхода, но его в данном случае интересовал результат. Сравнение же приближенного решения с экспериментальными данными подтверждало достаточно высокую точность его подхода.

Ляв подошел к этой задаче с другой точки зрения. Рассмотрев оболочку общей геометрической формы и построив на основе обобщенных гипотез Кирхгофа исходные уравнения и граничные условия, он показал, что решение Рэлея не удовлетворяет всем граничным условиям. Построив далее свое решение, свободное от указанного недостатка, Ляв подверг критике решение Рэлея как совершенно неудовлетворительное.

Интересно, что сам А. Ляв при выводе исходных соотношений теории оболочек опирался на феноменологический подход, обобщив гипотезы Кирхгофа (т. е. действовал как физик), а при решении их требовал полной математической строгости!

Ситуация прояснилась благодаря работам Г.Лэмба и А.Бэссета. Ими было построено локализованное у границы напряженное состояние — краевой эффект — и обнаружено разделение оболочки на внутреннюю (где справедливо решение Рэлея) и краевую зоны. По существу, это было первое применение сингулярной асимптотики в теории оболочек (может быть, правильнее было бы говорить о создании сингулярной асимптотики, поскольку понятие краевого эффекта в теории оболочек появилось раньше, чем понятие пограничного слоя Прандтля в гидромеханике).

Таким образом, асимптотический подход позволил согласовать две, казалось бы, диаметрально противоположные точки зрения и, кроме того, привел к появлению нового понятия.

По теории оболочек видно, что речь может идти не только о новых понятиях, но и о новых теориях — например, безмоментной теории и теории краевого эффекта как результате асимптотического расщепления исходных уравнений.

Однако полное осознание того факта, что теория оболочек является по самой своей сути асимптотической теорией, и, самое главное, практическая реализация этого принципа началась в середине нашего столетия с работ А.Л.Гольденвейзера, обобщенных в классической монографии [38].

Вообще для методов расчета оболочек оказался характерным путь: от чисто инженерных, основанных на правдоподобных гипотезах приемов — к математически обоснованным приближенным решениям. Приведем пример.

Широкое распространение в современной технике получили конструкции с периодическими неоднородностями формы и структуры: ребристые, гофрированные, складчатые, перфорированные, слоистые и тому подобные пластины и оболочки.

Инженеры издавна пользовались методом «конструктивной ортотропии», «размазывая» жесткости и плотности неоднородностей по оболочке и переходя к оболочке гладкой, но обладающей различными свойствами в разных направлениях. Обоснование эта чисто феноменологическая схема получила лишь в последние годы в связи с развитием метода осреднения.

Для ребристой оболочки — одного из важнейших объектов инженерной практики — осредненные соотношения можно трактовать как полученные в результате «размазывания» жесткостей и плотностей ребер по оболочке, «быстрое» же решение соответствует изгибу между ребрами [3]. Включение феноменологической схемы конструктивной ортотропии в регулярный асимптотический процесс позволяет находить решение из первых принципов, отправляясь от исходных уравнений теории неоднородных оболочек.

Некоторые выводы

«Мах остроумно пояснял, что ни одна теория не является совершенно правильной, но также едва ли является и совершенно ошибочной. Скорее всего всякая теория должна постоянно совершенствоваться, как организмы по теории Дарвина»

Больцман Л. [21]

Как показано выше, естественным «инструментом эволюции теорий» выступает асимптотический подход. Попробуем сделать некоторые общие выводы. Начнем со случая, когда исходные уравнения или решения находят на основании первых принципов. Сложные модели, которые при этом, как правило, получаются, в дальнейшем претерпевают существенные упрощения. «Простота, хотя и не гарантирует успеха в некоторых областях механики, необходима. Сложная теория в механике, хотя и может оказаться на какой-то момент полезной для чего-то или для кого-то, не ведет к ясности и поэтому не выживает» [102].

Конечно, упрощение, огрубление описания неминуемо односторонне и рано или поздно вступает в противоречие с опытом. «Человеческая мысль, летающая на трапециях звездной Вселенной, с протянутой под ней математикой, похожа на акробата, работающего с сеткой, но вдруг замечающего, что сетки, в сущности, нет» (В.В.Набоков [73]).

Грубая модель нуждается в уточнении (должен быть указан алгоритм, позволяющий строить уточняющие поправки), локализации области применимости, выявлении потерянных эффектов. Естественнее всего можно сделать это при помощи асимптотических методов. В результате «естественного отбора» «динозавры» (слишком сложные теории) «вымирают» или «эволюционируют» (упрощаются), а грубо приближенные схемы «приспосабливаются» за счет усложнения и уточнения. Асимптотический же подход не только играет роль инструмента эволюции, но и выстраивает иерархию приближенных теорий.

Сложнее обстоит дело с феноменологией. Имеет ли дело физик с асимптотикой, когда строит весьма, на первый взгляд, произвольную систему гипотез? Нам кажется — да, поскольку «Физическое мышление — это искусство предельно упрощать саму постановку сложной задачи, искусство заранее находить характерные малые параметры с тем, чтобы использовать их малость уже на стадии вывода исходных уравнений, в которых при этом было бы сохранено все, что составляет суть вопроса. Коротко говоря, это искусство правильной идеализации — излюбленный термин Л.И.Мандельштама» [92].

Иными словами, в этом случае асимптотические оценки выступают на интуитивном уровне, когда отсутствуют сколько-нибудь строгие критерии. В дальнейшем, естественно, наступает время осознанного применения асимптотики, позволяющей снять противоречия и ввести строгие рамки для систем гипотез.

Весьма существенно, что процесс упрощения связан не только с отбрасыванием и пренебрежением, но и с дополнением. «В процессе абстрагирования и идеализации выделяются две характерные тенденции:

1. Устраняются несовершенства, свойственные грубому эмпирическому подходу.

2. Одновременно понятия дополняются и расширяются» [76]. Несколько слов об обосновании достоверности теорий в прикладных науках. Конечно, совпадение теоретических и экспериментальных результатов дает определенную уверенность, но само по себе, как отмечали, например, А.Пуанкаре и Л.Д.Ландау, ничего не доказывает.

В математике непротиворечивость доказывается сведением к арифметике (непротиворечивость которой считается очевидной). В прикладной науке за такой критерий может быть принята асимптотическая выводимость из теории более высокого уровня сложности и, напротив, асимптотическая сводимость к более простой теории.

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что феноменология — необходимый элемент любой естественной науки. Как отмечал фон Нейман [43]: «Когда математическая дисциплина отходит достаточно далеко от своего эмпирического источника (например, когда теория оболочек становится «математической теорией оболочек» — авт.) и лишь косвенно вдохновляется идеями, восходящими к «реальности», над ней нависает весьма серьезная опасность. Она все больше превращается в бесцельное упражнение по эстетике, в искусство ради искусства... При наступлении этого этапа единственный способ исцеления, на мой взгляд, состоит в том, чтобы возвратиться к источнику и впрыснуть более или менее прямо эмпирические идеи».

НЕМНОГО ИСТОРИИ

Зоологи утверждают, что эмбриональное развитие животного резюмирует вкратце историю его предков в разные геологические периоды. Воспитатель должен заставить ребенка пройти через те ступени, которые были пройдены его предками, пройти быстрее, но без пропуска промежуточных этапов. В этом смысле история науки должна быть нашим первым руководителем. Лучший метод для предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук.

Пуанкаре А. [85]

Изучающему любой предмет в высшей степени полезно читать оригинальные мемуары, относящиеся до этого предмета, потому что знание усваивается в полной степени тогда, когда видишь процесс его зарождения.

Максвелл Д.К.

Из истории метода осреднения

Асимптотические методы еще во многом ждут своих историков, несмотря на целый ряд исследований [65, 101, 135]. Трудности здесь обусловлены в первую очередь тем, что многие идеи почти одновременно развивались рядом ученых. Если говорить о методе осреднения, то здесь нужно отметить вклад Л.Эйлера, Ж.Л.Лагранжа, П.С.Лапласа, А.К.Клеро, К.Гаусса, К.Якоби, Хилла, Делоне, А.Пуанкаре, Б.Ван дер Поля, Леверье, Л.И.Мандельштама, Н.Д.Папалекси, Н.М.Крылова, Н.Н.Боголюбова, Ю.А.Митропольского и других. Мы и не беремся за столь обширную задачу, а только наметим пунктиром некоторые этапы.

Среди тех, кто первым начал применять методы возмущений в небесной механике, следует назвать Леонарда Эйлера и Жозефа Луи Лагранжа. Мы уже отмечали, что история методов возмущения берет свое начало в небесной механике, и применялись они первоначально для решения этих задач. Вот что писал Лагранж в «Аналитической механике», изданной в 1788 г.: «Всякое приближение предполагает точное решение какого-либо случая рассматриваемой задачи, при котором мы отбрасываем количества, принимаемые нами в качестве очень малых величин. Это решение образует первую степень приближения, затем его исправляют, учитывая постепенно отброшенные величины. В задачах механики, которые можно разрешить только путем приближения, обычно первое решение находят, принимая во внимание только главные силы, действующие на тело; для того, чтобы это решение распространить на другие силы, которые можно назвать возмущающими, проще всего сохранить форму первого решения, но рассматривать входящие в его состав произвольные постоянные как переменные величины; ибо если величины, которыми мы пренебрегли и которые мы теперь хотим учесть, очень малы, то новые переменные фактически будут почти постоянными и к ним можно будет применить обычные методы приближения.

Мы знаем общий метод варьирования произвольных постоянных интегралов дифференциальных уравнений с целью согласования этих интегралов с теми же уравнениями, но с прибавлением к ним определенных членов, однако та форма, которую мы придали общим уравнениям динамики, имеет то преимущество, что она дает некоторое соотношение между вариациями произвольных постоянных, вводимых при интегрировании, которое особенно упрощает формулы этих вариаций в задачах, где они выражают действие возмущающих сил» (цит. по [135]).

В современной форме метод Лагранжа можно представить так. Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon\, g(t, x)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, а функция g(t,x) периодична по t с периодом 2π.

При малых ε в первом приближении можно заменить решение исходной системы таким:

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

откуда $y = \Phi(t, c)$, $c \equiv \mathrm{const}$.

Лагранж предложил считать в последнем выражении постоянные «с» переменными и искать решение исходного уравнения в виде

$$X = \varphi(t, z)$$

Суть такого подхода в том, что при малом ε форма решения будет, в основном, соответствовать форме решения при $\varepsilon = 0$, а немного изменятся лишь коэффициенты в этом решении.

Далее можно записать новое уравнение относительно z

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon\, G(t, z),$$

причем $G(t, z)$ — функция, периодичная по t с периодом 2π.

Мы снова приходим к сложному уравнению, поскольку правая часть последнего уравнения зависит и от z, и от t. Но, поскольку при малых ε есть основания считать z медленно меняющейся за период функцией t, можно выполнить осреднение правой части, заменив ее функцией, не зависящей от t:

$$\frac{dz}{dt} \approx \frac{d\tilde{z}}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\tau; t)\, d\tau\,.$$

Развил метод Лагранжа П.С.Лаплас в своем труде «О теории всемирного тяготения» (1799 г.).

В математической форме идею Лапласа можно представить следующим образом. Пусть есть уравнение или система уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x), \qquad x(0) = x_0, \qquad \varepsilon \ll 1.$$

Наличие малого параметра ε гарантирует относительно медленную изменяемость решения. Функция $f(t, x)$ раскладывается в ряд Фурье по времени

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f_0(x) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} [\vec{f}_n^{(1)}(x) \cos nt + \vec{f}_n^{(2)}(x) \sin nt\ ].$$

После осреднения правой части по t остается осредненное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f_0(y); \qquad y(0) = x_0.$$

Если средняя часть функции $f(t, x)$ по времени t равна нулю, то

$$X(t) = X_0 + \varepsilon \int_0^t f(\tau, x_0)\, d\tau\,.$$

Большой вклад в развитие и обоснование метода осреднения и применение его к решению конкретных задач внесли А.К.Клеро и К.Якоби.

Б.Ван дер Поль предложил метод медленно меняющихся амплитуд для исследования уравнения вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p^2y = \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right), \tag{6.1}$$

где $\varepsilon \ll 1$, $p^2 \equiv \text{const}$.

В частном случае

$$f = (1 - y^2)\frac{dy}{dt}$$

это уравнение описывает релаксационные колебания (уравнение Ван дер Поля).

Решение уравнения (6.1) записывается в виде

$$y = a(t)\cos pt + b(t)\sin pt. \tag{6.2}$$

Если $\varepsilon = 0$, a и b — постоянные, то выражение (6.2) дает точное решение исходного уравнения. Если ε мало, то a и b будут почти постоянными, т. е. медленно меняющимися функциями t. Поскольку вместо одной неизвестной функции y введено две — a и b, на них можно наложить какое-либо условие. Удобно считать, что

$$\frac{da}{dt}\cos pt + \frac{db}{dt}\sin pt = 0. \tag{6.3}$$

Подставляя соотношения (6.2), (6.3) в исходное уравнение, можно найти выражения для производных от a и b:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{p} f(a\cos pt + b\sin pt,\ -a\,p\sin pt + b\,p\cos pt)\sin pt;$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{p} f(a\cos pt + b\sin pt,\ -a\,p\sin pt + b\,p\cos pt)\cos pt.$$

Если теперь считать, что переменные a и b не успевают получить заметные приращения за один период $2\pi/p$, то производные от a и b почти постоянны, поэтому их можно приближенно заменить средними за период значениями

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/p} f(a\cos pt + b\sin pt,\ -a\,p\sin pt + b\,p\cos pt)\sin pt\,dt;$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/p} f(a\cos pt + b\sin pt,\ -a\,p\sin pt + b\,p\cos pt)\cos pt\,dt.$$

Далее можно перейти к новым переменным — амплитуде A и фазе φ по формулам

$$a = A\cos(pt - \varphi);$$

$$b = A\sin(pt - \varphi).$$

Относительно А и φ получаем уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2\pi\,p}\int_0^{2\pi} f(A\cos\varphi,\ -A\,p\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi;$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = p - \frac{1}{2\pi\,p}\int_0^{2\pi} f(A\cos\varphi,\ -A\,p\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi.$$

Конечно, подход Б.Ван дер Поля представляет частный случай метода вариации произвольных постоянных Лагранжа, однако именно в этом виде метод осреднения начал свой триумфальный путь в области нелинейных колебаний. Возможно, это было связано с особой прозрачностью и физичностью метода Ван дер Поля. Кроме того, как отмечал С.Э.Хайкин, «Интерес метода Ван дер Поля обусловлен тем, что, несмотря на очень существенную идеализацию и ряд серьезных пренебрежений и ограничений, он все же сохраняет и полностью передает существо нелинейной проблемы».

Обоснование метода Ван дер Поля в частном случае выполнили Фату (1928 г.), затем Л.И.Мандельштам и Н.Д.Папалекси (1934 г.), а затем появились классические труды Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова.

Триумф методов возмущений

Длительное время развитие методов возмущений и утверждение закона всемирного тяготения непрерывно связаны, и триумфы их — неотделимы. Л.Эйлер в 1752 г. представил на конкурс Парижской Академии наук сочинение «Исследование неравенств Юпитера и Сатурна». Приведем обширную цитату из этого труда, хорошо демонстрирующую тесную связь между указанными выше понятиями:

«Теория Ньютона, устанавливающая всеобщее притяжение между небесными телами, сразу указывает силы, которые должны возмущать движение Юпитера и Сатурна. В самом деле, эти две планеты, превосходящие в несколько раз по своей величине все остальные, не могут не действовать достаточно заметно одна на другую, особенно когда они близки к соединению. Нет поэтому ни малейшего сомнения, что взаимное притяжение этих двух планет является истинной причиной неправильностей, наблюдаемых в их движениях. Остается только узнать, подчиняется ли эта притягательная сила закону обратной пропорциональности квадратов расстояний, как предполагал Ньютон, или нет.

Действительно, раз этот закон так плохо соответствовал движению апогея Луны, как до сих пор приходилось думать, то мы были вправе сомневаться, что ему подчиняются силы, с которыми другие небесные тела действуют друг на друга. Но с тех пор как господин Клеро сделал важное открытие, что движение апогея Луны вполне согласуется с ньютоновской гипотезой относительно закона притяжения, уже не остается ни малейшего сомнения в справедливости закона обратной пропорциональности квадратам расстояний. И поскольку этот закон столь точно представил, несмотря на все делавшиеся раньше возражения, движения Луны, можно смело утверждать, что Юпитер и Сатурн притягивают друг друга именно по этому закону, и что все неправильности, которые могли бы обнаружиться в их движении, обязательно должны быть следствием их взаимного притяжения. Вот в чем заключается истинная причина всех этих неправильностей, каков бы ни был их характер.

И если выводы, которые были сделаны из теории всемирного тяготения, не оказались в достаточном согласии с наблюдениями, то мы всегда вправе больше сомневаться в правильности вычислений, нежели в справедливости теории. Ибо, несмотря на то, что эта теория легко дает нам дифференциальные уравнения движения планет, какие бы силы на них не действовали, все же легко признать, если хоть немного заняться этими уравнениями, что решение их связано с очень большими трудностями. И какие бы предосторожности не принимались в этой работе, все же мы получим лишь такие приближения, которые не дают возможности судить, насколько результат отклоняется от истины».

Один из наиболее ярких примеров триумфа закона всемирного тяготения Ньютона — открытие планеты Нептун [42]. Но, в то же время, открытие новой планеты явилось и триумфом теории возмущений. А началось все с выявления неправильностей в движении самой удаленной от Солнца из известных в XVIII веке планет — Урана, неправильностей, которые не объяснялись возмущениями Сатурна и Юпитера. В очередной раз некоторыми учеными, например, английским астрономом Дж.Б.Эри (1801–1892 гг.) были высказаны сомнения в справедливости закона Ньютона. Леверье отмечал впоследствии: «Это не первый раз, когда при встрече с необъяснимыми отклонениями от наблюдений брались за пересмотр закона притяжения. Но такие отклонения, как мы знаем, исчезали при более детальных исследованиях (*при учете более высоких порядков возмущений* — ***авт.***). Изменение закона притяжения — это последнее средство, к которому следует прибегать лишь только тогда, когда будут исчерпаны после соответствующего анализа другие причины».

Другой гипотезой было наличие неизвестной возмущающей планеты. Работы по обнаружению этой планеты велись в Англии Джоном Коулом Адамсом (1819–1892 гг.) и во Франции — Урбеном Жаном Жозефом Леверье (1811–1877 гг.). При этом ученым пришлось решать обратную задачу теории возмущений в проблеме трех тел — по известным возмущениям найти траекторию и массу неизвестного небесного тела.

Здесь существовали как принципиальные, так и большие технические трудности, связанные с огромным объемом вычислений.

Хронологически первым положение Нептуна вычислил Адамс, однако его результаты вовремя не увидели свет [42]. Леверье же 31 августа 1846 г. представил в Парижскую Академию наук статью «О планете, которая производит наблюдаемые в движение Урана аномалии. Определение ее массы, ее орбиты и ее нынешнего положения», а 18 сентября послал письмо немецкому астроному Галле с предложением начать поиск новой планеты в указанном им месте. 23 сентября Галле получает письмо и в ту же ночь обнаруживает планету. Впоследствии также «на кончике пера» была открыта американским ученым Персивалем Ловеллом (1855–1916 гг.) планета Плутон. В 1915 г. он представил в Американскую академию наук свой труд «Сообщение о транснептуновской планете», а 13 марта 1930 г. К.Томбо сообщил о ее наблюдении. Правда, это открытие уже не произвело особо сильного впечатления.

Галилей и принцип идеализации

Принцип идеализации — один из основных принципов современной науки. С точки зрения асимптотики он соответствует некоторым предельным переходам и, следовательно, идеализированная ситуация есть нулевое приближение какого-то асимптотического процесса. В осознании этого приема и систематическом использовании его основная заслуга принадлежит Галилею [32].

В своем знаменитом сочинении-памфлете «Saggiatore» («Пробирных дел мастер») [33] — Галилей писал: «Белое или красное, горькое или сладкое, звучащее или безмолвное, приятно или дурно пахнущее — все это лишь названия для различных воздействий на наши органы чувств. Никогда не стану я от внешних тел требовать чего-либо иного, чем величина, фигура, количество и более или менее быстрые движения, для того чтобы объяснить возникновение ощущений вкуса, запаха и звука;

я думаю, что если бы мы устранили уши, языки, носы, то остались бы только фигуры, числа, движения, но не запахи, вкусы и звуки, которые, по моему мнению, вне живого существа являются не чем иным, как только пустыми именами».

Рассматривая движение тел, Галилей делает поистине революционный шаг, пренебрегая сопротивлением среды, и пишет (цит. по [53]): «Дабы рассмотреть этот вопрос научно, следует отбросить все указанные трудности (сопротивление воздуха, трение и т.д.) и, сформулировав и доказав теоремы для случая, когда сопротивление отсутствует, применять их с теми ограничениями, какие подсказывает нам опыт».

Творчество Галилея позволило доказать, что «Математический метод идеализации, несомненно, следует рассматривать как шаг, уводящий нас от реальности, но, как ни парадоксально, именно этот шаг позволяет нам приблизиться к реальности в большей степени, чем учет всех имеющихся факторов» [58].

ТВОРЦЫ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

«История науки не может ограничиваться развитием идей — в равной мере она должна касаться живых людей с их особенностями, талантами, зависимостью от социальных условий, страны и эпохи... Жизнь и деятельность передовых людей — очень важный фактор в развитии науки, а жизнеописание их является необходимой частью истории науки»

С.И.Вавилов

Часто для понимания сложных вещей нет ничего лучше, чем перечитывать классиков. Так, мы глубоко убеждены, что рассуждения о соотношении между асимптотическими и сходящимися рядами, приведенные А.Пуанкаре в первом томе «Новых методов небесной механики», должны войти во все учебники по асимптотическому анализу. Думается, не в последнюю очередь это связано с поиском мотивировок тех или иных понятий, столь необходимых для настоящего проникновение в суть предмета.

Как отмечает И.Р.Шафаревич: «Смысл математического понятия далеко не содержится в его формальном определении. Не меньше (скорее больше) дает набор основных примеров (как правило, в не очень большом числе), являющихся одновременно и мотивировкой и содержательным определением, и смыслом понятия».

При чтении работ классиков невольно возникает естественный человеческий интерес к их личностям и судьбам. Не всегда его просто удовлетворить. Поэтому далее мы приводим биографии ученых, внесших значительный вклад в развитие асимптотических методов. Разумеется, это далеко не полный перечень имен, и выбор их достаточно субъективен.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР [99, 123] (1707–1783 гг.)

Эйлер представляет собой большое и широкое явление, каким был, например, Шекспир.

Трусделл Н.А.

Читайте Эйлера, он учитель всех нас.

Лаплас П.С.

По-видимому, можно считать, что именно Эйлером заложены основы методов возмущения. Как отмечает В.Л.Гинзбург [37], «Фактически Ньютон в «Математических началах натуральной философии» анализ в явном виде вообще не использовал. Все «Начала» построены, если говорить о математике, на геометрических методах и чертежах. Существует точка зрения, что Ньютон и не мог сколько-нибудь широко использовать аналитические методы, ибо они не были еще созданы. Только Эйлер в 1736 г., т. е. через 50 лет после появления «Начал», написал книгу «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически», содержащую близкие к современным аналитические методы».

В мемуарах Эйлера есть как общие идеи методов теории возмущений, так и решения, например, астрономических задач, доведенные до числовых значений.

К концу первой половины XVIII века была в целом построена математическая теория невозмущенного движения небесных тел солнечной системы. Но практические нужды, в первую очередь связанные с мореплаванием, требовали более точного решения. В этой области Эйлером сделано чрезвычайно много. Особенно интересным представляется решение задачи о движении Луны. В ней, по существу, нет настоящего малого параметра, если отправляться от решения задачи двух тел. Поэтому многие предлагаемые до Эйлера решения не приводили к цели. Эйлер же предложил выбирать начальное приближение таким образом, чтобы оно уже включало часть возмущений. Эта простая, ясная и остроумная идея вполне плодотворна и сегодня, и ее нужно иметь в виду исследователям, использующим методы возмущений.

Развитые Эйлером методы позволили Ж.Л.Лагранжу, П.С.Лапласу, У.Леверье, С.Ньюкомбу и другим создать весьма точную теорию движения больших планет. Первоначально лунная теория Эйлера была опубликована в его фундаментальной монографии «Теория движения Луны», написанной по латыни и опубликованной на средства Петербургской академии наук в 1770 г. и 1772 г.

В дальнейшем Эйлер развил свою лунную теорию в двух работах, получивших премии Парижской академии наук в 1770 и 1772 гг. и опубликованных в Париже в 1773 г. Здесь снова Эйлер использовал идею учета в начальном приближении главного возмущающего фактора — части возмущающего воздействия со стороны Солнца. После нахождения первого приближения он построил ряд теории возмущений.

В 1772 г. Петербургская академия наук опубликовала обширный трактат под названием *«Теория движения Луны, трактованная* новым методом, вместе с астрономическими таблицами, из которых положения Луны легко могут быть вычислены для любого времени. Сочинение, сделанное под руководством *Леонарда Эйлера* неимоверным усердием и неутомимым трудом трех академиков — И.А.Эйлера, В.Л.Крафта, А.И.Ленселя». Это был ясный и четкий алгоритм расчета параметров движения небесных тел.

Две работы о движении Сатурна и Юпитера, премированные Парижской академией в 1748 и 1752 годах, положили начало реализации простой и плодотворной идеи о разделении возмущений на классы с последующим нахождением возмущений каждого класса.

Наконец, третий большой мемуар Эйлера о планетных возмущениях, где построена гравитационная теория движения Земли, отмечен двойной премией Парижской академии в 1756 г.

Судьба Эйлера неразрывно связана с Россией.

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 г. в Базеле (Швейцария) в семье священника. Его отец был математически одаренным человеком и даже написал под руководством Якоба Бернулли диссертацию *об отношениях и пропорциях. Он же* был и первым учителем сына. Немного проучившись в латинской школе в Базеле, Леонард продолжил обучение у частных учителей, так как его отец был недоволен уровнем преподавания в школе.

20 октября 1720 г. Эйлер поступает в Базельский университет и начинает в соответствии с пожеланиями отца изучение богословия. Осенью 1723 г. Эйлер *заканчивает философский факультет и получает* степень магистра философии. Продолжая обучение в Базельском университете, он посещает лекции Иоганна Бернулли для избранных студентов. Впоследствии, кроме Эйлера, знаменитыми математиками и механиками стали слушатели этих лекций Клеро, Лопиталь, Крамер и Мопертюи. Уже тогда гений Эйлера был так ярок, что даже весьма ревнивый в научном отношении *Иоганн Бернулли писал:* «После того как мы увидели, с какой легкостью и изобретательностью Эйлер под нашим руководством проникает в святая святых высшей геометрии (*т.е. математики — авт.*), мы больше не сомневались, что высота его ума приведет нас к величайшим результатам».

В 18 лет Эйлер написал свою первую научную работу. В ней рассматривалось поставленная в 1696 г. Иоганном Бернулли задача: по какой траектории должна двигаться в вертикальной плоскости под действием силы тяжести материальная точка, чтобы за кратчайшее время пройти от точки *A* до точки *B*. Искомая кривая, называемая брахистохроной (по-гречески — кратчайшее время), является циклоидой. Работа Эйлера была посвящена движению точки в среде с сопротивлением. В дальнейшем он много внимания уделил аналогичным проблемам и, по существу, создал (наряду с Лагранжем) вариационное исчисление (название, введенное Эйлером).

В 1727 г. Эйлер переезжает в Петербург и становится профессором физики и членом Петербургской академии наук. В 1734 г. Эйлер женится на швейцарке Катарине Гзель. У четы Эйлеров родилось 13 детей, однако лишь 3 сына и 2 дочери прожили достаточно долгую жизнь (несколько забегая вперед, отметим, что у Эйлеров было 38 внуков). *В Петербурге Эйлер вместе с ре*гулярными научными занятиями вел огромную работу и в других областях. Так, он был членом комиссии мер и весов, руководил географическим департаментом (под его *руководством была составлена превосход*ная географическая карта Русского государства), принимал экзамены в гимназии и кадетском корпусе и т.д. Его научные интересы поистине безграничны — построй*ка кораблей, картография, астрономия*, теория рядов, теория чисел, природа приливов и отливов. Начало современной теории непрерывных дробей идет, по существу, от работы Эйлера «О непрерывных дробях» (сам *термин также введен Эйлером)*.

В 1736 г. Петербургская академия публикует книгу Эйлера «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически», в которой ньютоновская механика изложена *на основе математического анализа* (чего не было у самого Ньютона). Интересно, что эта книга — один из первых учебников в современном понимании смысла этого слова.

Всего за первый свой Петербургский период, продлившийся до 1741 г., Эйлер написал 80–90 работ, 50 из которых были опубликованы. Из-за тяжелой в то время обстановки в Петербурге Эйлер покидает Россию, *приняв приглашение* Фридриха II. В 1741–1766 годах он работает в Берлине, состоя членом Прусской академии. За эти 25 лет им написано 380 работ, из которых 267 опубликовано. В 1744 г. в Лозанне выходит книга *Эйлера по вариационному* исчислению «Метод нахождения кривых линий, имеющих свойство максимума или минимума, или приводящих к решению изопериметрической задачи, понимаемой в са*мом широком значении слова»*, о которой известный математик К.Каратеодори сказал: «Это одно из прекраснейших математических произведений, которые когда-либо были написаны».

Больших результатов добился Эйлер в теории чисел. Интересно, что он был феноменальным вычислителем, *легко проделывая* выкладки с огромными числами. В теории чисел он часто работал «экспериментальным» методом, исследуя множество чисел и с непостижимой интуицией обнаруживая в них закономерности. Современники говорили об Эйлере, что он вычисляет, как другие дышат.

Математический анализ в его современном виде стал оформляться после появления книги Эйлера «Введение в анализ бесконечного» (1748 г.), а также трехтомного сочинения по интегральному исчислению (1768–1770 годы, после смерти Эйлера вышел четвертый том). Эйлера называли персонифицированным анализом, и не зря — в его полном собрании сочинений 17 томов посвящены анализу.

В 1763 г. Эйлер назначается исполняющим обязанности президента Прусской академии. Однако отношения его с Фридрихом II все время ухудшались, и Эйлер в 1766 г. *возвращается в Петербург — теперь* уже навсегда. Вскоре после переезда в Россию Эйлер, ранее потерявший один глаз, полностью ослеп. Стоически восприняв удар, он продолжает работу. За время слепоты им *сделана половина всех научных работ!* В частности, в Петербурге Эйлер закончил и опубликовал книги «Полное руководство по алгебре», «Диоптрика», «Полная теория построения и управления кораблями».

18 сентября 1783 г. Эйлер «перестал жить и вычислять». Похоронен он на Смоленском лютеранском кладбище Васильевского острова. Осенью 1956 г. прах Эйлера перенесли на кладбище Александро-Невской лавры.

Среди потомков Эйлера есть немало выдающихся ученых, например, Г.К. фон Эйлер-Шелнин и его сын Ульф фон Эйлер — лауреаты Нобелевской премий по химии.

При жизни Эйлер опубликовал 560 работ, и еще 40 лет после его смерти продолжалось печатание неопубликованного. Таков титанический труд этого человека!

АЛЕКСИС КЛОД КЛЕРО (1713–1765 гг.)

Имя Клеро занимает достойное место в теории возмущений. Одним из первых он обратил внимание на важность учета высших приближений. Дело в том, что после смерти Ньютона уточненные наблюдения показали, что орбиты, по которым движется Юпитер, Сатурн, Луна, значительно отличаются от расчетных. Возник принципиальный вопрос — связано ли это с неточностью вычислений в первом приближении или же нуждается в корректировке закон всемирного тяготения. В числе сомневающихся в ньютоновской теории был сначала и великий Леонард Эйлер. Однако Клеро, проделав громоздкие выкладки, продемонстрировал, что учет высших членов разложений устраняет указанное несоответствие. Эйлер сначала не поверил результатам Клеро, однако после тщательной проверки первым ратовал за присуждение Клеро премии Петербургской академии наук в конкурсе на тему о расхождении расчетных и наблюдаемых траекторий.

Клеро получил эту почетную премию в 1752 г. Вторую премию Петербургской академии наук он получил в 1762 г. за свои исследования по комете Галлея. На этом вопросе также интересно остановиться, тем более, что комета Галлея недавно снова посетила нас.

Ученик Ньютона, Галлей установил на основе анализа рукописей, что наблюдаемая им в 1682 г. комета уже появлялась на небосводе в прошлые годы. Он обнаружил периодичность ее появления и вычислил, что комета движется по сильно вытянутому эллипсу. Время обращения кометы он оценил в 75–76 лет и предсказал ее новое появление в 1758 г. Клеро в связи с этим писал: «Истинные любители науки ожидали комету с нетерпением, потому что она должна была своим появлением подтвердить законы Ньютона, другие же надеялись увидеть философов осмеянными, а их теории поколебленными и утверждали, что она не вернется, а открытие Ньютона и его последователей не подтвердится. Многие из них уже ликовали и смотрели на год задержки в появлении кометы как на доказательство несостоятельности теории. Я хочу показать, что эта задержка не может повредить системе «всемирного тяготения», а, наоборот, составляет необходимое следствие ее, и что комета опоздает не более чем на один год». Дело оказалось в том, что Галлей не учел влияния Юпитера на движение кометы. Клеро разработал теорию вопроса и проделал колоссальные вычисления, в чем ему помогали астроном Лаланд и одна из первых женщин-ученых Н.Р.Лекош. Перед самым появлением кометы Клеро опубликовал свой труд. Вольтер написал к нему эпиграф:

«Кометы, которых боятся, словно
ударов грома,
Полно вам пугать народы,
населяющие Землю!
Двигайтесь по гигантским
эллиптическим путям
Приближайтесь к светилу дня,
удаляйтесь от него
Распускайте ваши пламенные хвосты,
Мчитесь в пространстве, все время
вращаясь...»

По результатам вычислений Клеро комета должна была пройти на ближайшем расстоянии от Солнца 4 апреля 1759 г. На самом деле это случилось всего на 22 дня раньше. В дальнейшем комета Галлея наблюдалась в 1910 г. и, уже на нашей памяти, в 1986 г. Разумеется, сейчас ее появление предсказывается с высокой точностью при помощи ЭВМ. Однако в свое время труд Клеро был настоящим научным подвигом. Кто же был он сам?

Алексис Клод Клеро родился 13 мая 1713 г. в Париже в семье преподавателя математики и члена Берлинской академии наук Клеро, вторым ребенком в семье, в которой был 21 (двадцать один!) ребенок. Алексис к девяти годам читал сочинения Лопиталя по коническим сечениям, в 13 лет представил в Академию свою первую работу. Академики долгое время экзаменовали мальчика, не сразу поверив в то, что он самостоятельно выполнил исследование.

В 1729 г., в возрасте 16 лет, Клеро представил Академии мемуар «Исследования о кривых двоякой кривизны», положивший начало дифференциальной геометрии пространственных кривых. Академия вынесла решение, чтобы мемуар был возможно скорее напечатан, и начала ходатайствовать о принятии юноши в свои ряды. Поскольку по регламенту академии в адъюнкты могли быть приняты лица не моложе 20 лет, потребовалось специальное разрешение, которое Людовик XV дал лишь через два года, в 1731 г. Вскоре после этого Клеро вместе с сопровождавшим его Мопертюи поехал в Базель, к знаменитому Иоганну

Бернулли, учителю Леонарда Эйлера. Затем Клеро участвует в Лапландской экспедиции Мопертюи, посвященной измерению радиуса дуги меридиана. Это мероприятие можно сравнить по важности с измерениями экспедицией А.Эддингтона отклонения лучей света при солнечном затмении, подтвердившими теорию Эйнштейна. По существу, речь шла о подтверждении закона всемирного тяготения Ньютона. Если вся материя подчиняется этому закону, то Земля должна иметь форму эллипсоида, сжатого по оси вращения. По принятой же ранее декартовой теории вихрей — напротив, растянута вдоль меридиана.

Клеро в своем знаменитом мемуаре «Теория фигуры Земли», изданном в Париже в 1743 г., писал: «Изложенная нами теория (*ньютоновская теория тяготения* — **авт.**) находится уже в соответствии с маятниковыми измерениями силы тяжести и с наблюдаемым сжатием Юпитера; если, кроме этого, геодезические измерения, которые мы ожидаем от перуанской экспедиции, дадут, по сопоставлении их с нашими измерениями в Лапландии, для сжатия Земли величину меньшую, чем 1/230, то эта теория получит подтверждение во всей возможной полноте, так что закон всемирного тяготения, уже столь прекрасно согласующийся с движениями планет, окажется в таком же соответствии и с фигурами этих небесных тел».

Организованная, как и Лапландская, Французской академией, Перуанская экспедиция подтвердила справедливость результатов, полученных на основе теории Ньютона. Что касается мемуара Клеро, то Лаплас сказал впоследствии о нем так: «Важность всех этих результатов и изящество, с которым они представлены, ставят это произведение в ряд самых прекрасных работ из области математики».

До Клеро исследованием фигуры Земли занимался Ньютон. Работы Клеро не только продвинули вперед исследования Ньютона, но и до сих пор сохранили большое значение даже для решения ряда чисто практических задач.

Клеро в возрасте 25 лет становится действительным членом Академии по механике, а в 1754 г. избирается почетным членом Петербургской академии наук.

Скончался Клеро неожиданно в возрасте 52 лет от какой-то острой и скоротечной болезни 17 мая 1765 г.

ЖАН ДАЛАМБЕР (1717–1783)

Жан Даламбер много занимался небесной механикой, при решении задач которой он и развивал методы возмущений. В 1747–1756 годах Даламбер построил одну из первых теорий движения Луны и составил весьма точные таблицы. В 1749 г. он построил первую теорию прецессии и нутации* Земли, показав, что эти явления обусловлены гравитационным воздействием Луны.

Наконец, в 1747 г. он представил Французской Академии наук мемуар о нарушении эллиптического движения планет вокруг Солнца под влиянием их взаимного притяжения.

Жан Перон Даламбер родился 16 ноября 1717 г. Мать Даламбера, известная в то время писательница Тансен, решила подкинуть мальчика на ступени небольшой церкви Жан ле Рон в Париже (отсюда и имя), поскольку он был незаконнорожденным. Отец (генерал Детуш), вернувшийся вскоре из-за границы, уговорил жену стекольщика, мадам Руссо, взять на воспитание мальчика, и материально обеспечивал его. С четырех до тринадцати лет Даламбер воспитывался в пансионе, а затем поступил в Колледж имени Мазарини, где поразил всех своими замечательными способностя-

* *Прецессия — медленное вращательное движение оси вращения Земли по круговому конусу, ось симметрии которого перпендикулярна плоскости эклиптики. Период полного оборота составляет примерно 26000 лет.*
Эклиптика — большой круг небесной сферы, по которому происходит видимое годичное движение центра Солнца.
Нутация — небольшое колебание земной оси, накладывающееся на прецессию ее движения.

ми к математике и литературе.

По окончании школы Даламбер выдержал экзамен на бакалавра искусств и посещал еще два года Академию юридических наук, где получил диплом лицензиата прав. Однако работа адвоката не манила его. Некоторое время, под давлением родственников, он изучал медицину, однако затем всецело посвятил себя наукам. Математику Даламбер изучал в основном самостоятельно, часто заново открывая уже известные вещи. В 1741 г. Даламбер, после двух неудачных попыток, избирается адъюнктом Парижской академии наук.

В 1743 г. выходит в свет его знаменитый «Трактат о динамике», в котором введен принцип, получивший название «принципа Даламбера». Суть этого принципа состоит в том, что при составлении уравнений движения можно, наряду с приложенными силами, рассматривать и силы инерции.

В 1744 г. Даламбер выпускает книгу «О равновесии и движении жидкостей», где получает дальнейшее развитие, после труда Д.Бернулли, гидродинамика.

В 1747 г. он представил Академии трактат о нарушении эллиптического движения планет вокруг Солнца под действием их взаимных возмущений.

Из-за радикальных взглядов и манеры открыто излагать свои взгляды Даламбер лишь в 1765 г. избран членом Парижской академии наук*, а членом Французской Академии — в 1754 г. Отметим, что членом Петербургской академии Даламбер был с 1764 г.

Даламбер, наряду с Эйлером,— один из основателей теории дифференциальных уравнений в частных производных. В 1747 г. он опубликовал статью «Исследования по вопросам о кривой, которую образует натянутая струна, приведенная в колебание». В этой и последующих работах на ту же тему Даламбер получил и исследовал уравнение, носящее ныне его имя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

где $u(x, t)$ — отклонение точки от положения равновесия, t — время, x — координата, a — постоянная, характеризующая натяжение струны.

В связи с этой задачей между Даламбером и Эйлером разгорелся знаменитый спор о природе функций, длившийся более полувека с участием Д.Бернулли, Лагранжа, Лапласа и других. Во время этой дискуссии были, в частности, открыты условия аналитичности функции $w = p(x, y) + iq(x, y)$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}; \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}; \tag{7.1}$$

хотя Эйлер и Даламбер и не догадывались об этом. Однако все же условия (7.1) часто называют условиями Даламбера — Эйлера (впрочем, чаще — условиями Коши–Римана). Сама дискуссия была весьма плодотворной, хотя, с современной точки зрения, и Эйлер, и Даламбер высказывали ряд неверных соображений.

Оставил Даламбер свой след и в других разделах математики, в частности, в теории рядов, где имеется признак сходимости Даламбера.

С 1759 г. много сил, времени и энергии отдавал Даламбер редактированию и написанию статей для знаменитой «Французской энциклопедии», издаваемой передовыми учеными того времени во главе с Дидро и Даламбером.

В энциклопедии предполагалось дать основы всех тогдашних знаний и проложить новые пути. Это было не только научное, но и политическое мероприятие, поскольку вокруг энциклопедии объединялись все либеральные и радикальные слои общества.

В 1751 г. вышел первый том энциклопедии, в котором напечатано предисловие Даламбера — «Очерк происхождения и развития наук». В нем автор ставил цель «проследить родословную и связь наших знаний, причины, которые обусловили их зарождение, и черты, которыми они отличаются».

Даламбер рассмотрел три вида наук — о человеке, о природе, изящные искусства. Он же предложил «общее разделение человеческого знания на историю, относящуюся к памяти, на философию, проистекающую из рассудка, и на поэзию, рождающуюся из воображения». В конце работы была

* *Парижская академия объединяла математиков и ученых — естественников, а Французская — литераторов и филологов.*

помещена общая схема человеческих знаний, в составлении которой принимал участие Дидро.

Даламбер вел в энциклопедии разделы математики, физики и механики, написал множество статей по философии, истории, этике, литературе. Только в первом томе было свыше ста его публикаций, многие из которых — статьи по 5–20 страниц. Кроме того, перу Даламбера принадлежат книга «Элементы философии», исторические исследования, «Основы теории и практики музыки». Будучи избранным в 1772 г. секретарем Французской Академии, он написал биографии всех академиков, умерших с 1700 по 1772 гг.

Вольтер писал Даламберу: «Вы единственный писатель, который никогда не говорит ни больше того, ни меньше того, что хочет сказать. Я считаю Вас самым лучшим писателем нашего века».

Личная жизнь Даламбера не богата впечатлениями. Будучи необыкновенным домоседом, он сорок лет прожил в скромной комнате у мадам Руссо, к которой с детства попал на попечение. И только заболев, Даламбер устроился с бо́льшим комфортом. Умер Даламбер 29 октября 1783 г.

ЖОЗЕФ ЛУИ ЛАГРАНЖ (1736–1813)

Жозеф Луи (или Джозеппе Луиджи, поскольку он родился в итальянской семье) Лагранж родился 25 января 1736 г. Отец Лагранжа был казначеем фабрик и строений при герцоге Савойском. В 14 лет Лагранж поступил в Туринский университет и стал изучать право, так как по желанию отца он должен был стать адвокатом, однако в результате общения с физиками и математиками почувствовал влечение к точным наукам. Впоследствии Лагранж говорил, что если бы он имел наследство и, следовательно, мог не учиться, то мог бы и не найти свое признание. В молодости он сделал работу, в которой независимо повторил некоторые результаты Лейбница. Хотя, когда он узнал об этом, то даже заболел от огорчения, его талант был признан, и в 1755 г. Жозеф Луи назначается профессором артиллерийской школы в Турине. Очень рано началась переписка Лагранжа и Леонарда Эйлера (первое письмо датировано 1754 годом). В дальнейшем достижения Лагранжа были во многих отношениях параллельны работам Эйлера. В частности, Лагранж, независимо от Эйлера и совершенно новым способом, пришел к решению ряда изопараметрических задач. Напомним, что это задача типа: *какова должна быть форма замкнутой линии, чтобы при заданной длине она ограничивала наибольшую площадь.* Математически подобные задачи сводятся к минимизации *некоторого интеграла.* Соответствующая ветвь математики получила название вариационного исчисления. Оказывается, что конечный результат можно получить, не рассматривая бесконечного множества возможных решений. Достаточно ограничиться в мысленном эксперименте решениями, бесконечно близкими к искомому действительному решению (пробное решение). Пробное решение, отличающееся от действительного произвольным образом на бесконечно малую величину, называется «вариацией» действительного решения. Вариационное исчисление занимается изучением изменения значения интеграла, вызванного вариациями решения.

На основе вариационного исчисления Лагранж и Эйлер сформулировали принцип наименьшего действия, являющийся одним из самых универсальных принципов механики. Суть его состоит в том, что движение от точки к точке осуществляется таким образом, чтобы некоторый интеграл, называемый действием, принимал наименьшее значение. Построенная на основе принципа наименьшего действия механика носит со времени Эйлера и Лагранжа название аналитической. Появившийся в 1788 г. труд Лагранжа «Аналитическая механика» составил эпоху в развитии механики. В предисловии к своей книге Лагранж писал:

«Читатель не найдет в этой книге рисунков. Развитые мною методы не требуют ни каких бы то ни было построений, ни геометрических или механических аргументов — одни только алгебраические операции в соответствии с едиными правилами».

Большой русский ученый А.Н.Крылов писал об «Аналитической механике» Лагранжа : «Это есть первоисточник всех современных руководств (им же несть числа) теоретической механики, и изучение такого первоисточника в высшей степени поучительно и полезно, только в нем надо поучаться математике и общим методам решения механических вопросов, а не искать частных их приложений в механике и физике».

В этой же книге Лагранжем разработан метод вариации произвольных постоянных — вариант метода осреднения, о котором мы уже говорили выше. Вообще, богатство идей этой книги настолько велико, что ирландский ученый Уильям Гамильтон (1805–1865), сам выдающийся исследователь в области аналитической механики, назвал Лагранжа «Шекспиром математики». Достаточно отметить, что в «Аналитической динамике», наряду с упомянутыми проблемами, рассмотрено вращение тела вокруг неподвижной точки, теория малых (линейных) колебаний, задачи гидромеханики и небесной механики.

Когда в 1766 г. Эйлер вернулся в Петербург, своим преемником на посту президента физико-математического отделения Берлинской Академии наук он назвал Лагранжа. Это место Лагранж занимал с 1766 г. по 1787 г. В 1772 г. он был избран почетным иностранным членом Парижской Академии наук, а в 1776 г. — почетным иностранным членом Петербургской Академии наук. В 1887 г. Лагранж переезжает в Париж и избирается действительным членом Парижской Академии наук. Здесь после окончания «Аналитической механики» Лагранж под влиянием знакомства с рядом выдающихся ученых — Монжем, Л.Карно, Кондорсе, Лапласом, Лавуазье — увлекся философией, историей, медициной, лингвистикой, химией. После революции 1789 г. Лагранж не покинул Францию, ставшую его второй Родиной. Когда в 1793 г. Конвент издал закон, предписывающий каждому иностранцу покинуть страну, в специальном постановлении разъяснялось, что это положение не касается Лагранжа, занимающегося расчетами взрывной силы пороха для нужд обороны.

Лагранж активно участвовал в разработке новой метрической системы, создании Нормальной и Политехнической школ и во многих других важных начинаниях революционной Франции.

Очень ценил Лагранжа Наполеон, называвший ученого «Хеопсовой пирамидой науки».

В последней беседе Лагранж сказал навестившим его друзьям: «Я почувствовал, что умираю, мое тело ослабевает мало-помалу, мои духовные и физические способности незаметно угасают; я с любопытством наблюдаю постепенный прогресс уменьшения сил, и я достигну конца без сожаления, без печали, ибо спуск очень отлогий... Я завершил свой путь, я снискал некоторую известность в математике. Я не питал к кому-либо злобы, я никому не сделал плохого, и я хочу кончить мой путь».

Скончался Лагранж 13 апреля 1813 г.

Трудно не согласиться с оценкой французского ученого Жана Батиста Фурье, сказавшего: «Лагранж был столько же философ, сколько и математик. Он доказал это всей своей жизнью, умеренностью желаний земных благ, глубокой преданностью общим интересам человечества, благородной простотой своих привычек, возвышенностью своей души и глубокой справедливостью в оценке трудов своих современников».

ПЬЕР СИМОН ЛАПЛАС [31] (1749–1827)

Лаплас родился 23 марта 1749 г. в маленьком местечке Бомон в Нижней Нормандии. О детстве Лапласа известно немного, и это не случайно. Лаплас родился и вырос в бедной семье, и он, в отличие от многих других, вышедших из народа ученых, стыдился этого, в зрелые годы даже не поддерживал отношений со своими родителями.

Обучение Лаплас начал в колледже (средней школе), руководимой монахами-бенедектинцами. Еще в колледже он самостоятельно начал изучать сложные математические сочинения. Уже в семнадцать лет рамки провинции стали узкими для Лапласа, и он приезжает в Париж. Эрудиция и талант Лапласа произвели сильное впечатление на Жана Даламбера, и по его представлению Лаплас стал профессором математики в Королевской военной школе в Париже. Лаплас упорно занимался научными изысканиями по теории вероятности (одним из основателей которой он стал), небесной механике и другим разделам чистой и прикладной математики. В 1772 г. Лаплас баллотировался в Академию, но потерпел неудачу.

Связано это было, по свидетельству современников, в первую очередь с плохим характером Лапласа, его самоуверенностью. Не все думали, как Лагранж, который в письме к непременному секретарю Академии Жаку Кондорсе (1743–1799) писал: «Меня несколько удивляет то, что Вы пишите о Лапласе, это — недостаток, свойственный главным образом очень молодым людям — кичиться своими первыми успехами. Однако самонадеянность обычно уменьшается по мере того, как увеличиваются знания». Однако и в дальнейшем характер Лапласа приносил ему немало неприятностей. Что ж, неприязнь к талантливым людям со сложными характерами появилась не в эпоху застоя...

Все же в 1773 г. Лаплас был избран в Парижскую академию наук, правда, не как геометр, а как адъюнкт-механик. В 1785 г. Лаплас стал полноправным членом Академии.

В 1793 г. Лаплас приступил в местечке Мележ к созданию своего знаменитого труда «Изложение системы мира». В Мележ он удалился с семьей, чтобы избежать опасностей, связанных с разразившимся якобинским террором, жертвой которого стал великий химик и друг Лапласа Антуан Лоран Лавуазье (1743–1794).

«Изложение системы мира» вышло в свет в 1796 г. и часто переиздавалось — в 1799, 1808, 1813, 1824 годах. Этому способствовала, кроме глубины и богатства идей, популярность изложения. Значительную часть этого труда составляют разработки метода возмущений, в частности, в форме метода осреднения (см. приведенные ранее отрывки из сочинения Лапласа). Хотя основную идею Лаплас позаимствовал у Лагранжа, он развил метод и приложил его к решению задач о движении Юпитера, Сатурна, других планет и комет. Лаплас занимался изучением кольца Сатурна и доказал, что оно не может быть сплошным или твердым, а должно состоять из частиц, движущихся вокруг планеты самостоятельно. Он также предсказал, что сама планета в результате вращения должна быть сплюснута у полюсов, что вскоре и было блестяще подтверждено астрономическими наблюдениями. Интересно, что само название «небесная механика» было введено Лапласом в 1798 г.

В 1798 г. Лаплас рассмотрел движение спутников Юпитера, которое ранее не поддавалось аналитическому описанию, и создал теорию, которая прекрасно согласовывалась с наблюдениями. Немало сделал Лаплас для определения векового ускорения Луны, формы Земли.

Говоря о Лапласе, нельзя не упомянуть о проблеме малых знаменателей. Дело в том, что проблема «неправильностей» (т. е. отклонений истинных движений от расчетных) в системе Солнце–Юпитер–Сатурн привлекала внимание таких исследователей, как Л.Эйлер и Ж.Л.Лагранж. Однако решить эту задачу им не удалось. Математическую трактовку наблюдаемому явлению дал Лаплас, обнаружив при этом эффект малых знаменателей. Суть этого эффекта состоит в следующем. В общем виде дифференциальные уравнения для средних долгот Юпитера L_1 и Сатурна L_2 можно представить в виде

$$\frac{dL_1}{dt} = \sum_{k_1,k_2=-n}^{n} A_{k_1k_2}\cos(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2);$$
$$\frac{dL_2}{dt} = \sum_{k_1,k_2=-m}^{m} B_{k_1k_2}\cos(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2); \qquad (7.2)$$

где m, n — целые числа, φ_1, φ_2 — некоторые функции времени t, а также L_1 и L_2, а коэффициенты $A_{k_1k_2}, B_{k_1k_2}$ в приближенных теориях считаются постоянными.

Лаплас и другие исследователи полагали

$$\varphi_1(t) = n_1 t + \varphi_{10}$$
$$\varphi_2(t) = n_2 t + \varphi_{20}$$

где n_1, n_2 некоторые постоянные, определяемые движением Юпитера и Сатурна, $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ — постоянные.

После интегрирования системы (7.2) получаем

$$L_1 = A_{0,0} t + \sum_{\substack{k_1, k_2 = -n \\ k_1^2 + k_2^2 > 0}}^{n} \frac{A_{k_1 k_2} \cos[(n_1 k_1 + n_2 k_2) t + \varphi k_1 k_2]}{k_1 n_1 + k_2 n_2} \qquad (7.3)$$

$$L_2 = B_{0,0} t + \sum_{\substack{k_1, k_2 = -m \\ k_1^2 + k_2^2 > 0}}^{m} \frac{B_{k_1 k_2} \cos[(\varphi_1 k_1 + n_2 k_2) t + \psi_{k_1 k_{sub} 2}]}{k_1 n_1 + k_2 n_2},$$

где $\alpha_{k_1 k_2}$ и $\varphi_{k_1 k_2}$ — некоторые постоянные.

До Лапласа при расчете принималось $k_1, k_2 = 1, 2, 3$. Лаплас же обнаружил, что знаменатель выражений (7.3) при $n_1 = 2$, $n_2 = -5$, очень мал. Из-за этого амплитуда соответствующей гармоники велика, и учет ее в теории движения Сатурна позволяет привести в согласие теоретические данные с астрономическими наблюдениями.

Таким образом, появилась задача выделения гармоники с большими амплитудами, обусловленными малостью некоторых знаменателей. Этот эффект, который можно назвать явлением резонанса частот, привлек внимание исследователей.

Так, Анри Пуанкаре считал, что избавиться от малых знаменателей вообще невозможно. Решение проблемы было получено лишь в XX веке немецким математиком К.Зигелем, советскими учеными А.Н.Колмогоровым, В.И.Арнольдом и американцем К.Мозером [41].

Важными были также работы Лапласа о приливах. Джорж Дарвин (сын великого биолога Чарльза Дарвина, один из крупнейших специалистов по теории приливов), писал: «Именно Лаплас впервые выяснил всю трудность вопроса и показал, что вращение Земли является важнейшим фактором в решении задачи. Современная постановка вопроса о явлении приливов всецело дана Лапласом».

Основное отличие работ Лагранжа и Лапласа хорошо обрисовал в некрологе на смерть Лапласа французский ученый Симон Дени Пуассон (1781–1840): «Лагранж, по большей части, видел лишь математическую сторону дела, поэтому он придавал большое значение элегантности формул и обобщенности методов. Для Лапласа математический анализ был орудием, которое он приспособлял к самым разнообразным задачам, но всегда подчиняя данный специальный метод сущности вопроса.

Быть может, потомство скажет, что один был великим геометром, а второй — великим философом, который стремился познать природу, заставляя служить ей самую высокую математику».

Лапласом была высказана знаменитая гипотеза об образовании Солнечной системы. В соответствии с ней планеты медленно сгущались в компактные тела из туманного вещества, при этом первичное туманное Солнце медленно вращалось вокруг своей оси. Хотя гипотеза Лапласа и не подтвердилась, она дала толчок развитию многих исследований, и ее роль исключительно велика.

В качестве интересной подробности астрономических трудов Лапласа отметим, что в 1974 г. немецкий ученый Фукс обратил внимание на работу Лапласа, которую можно трактовать как предсказание существования черных дыр.

В эпоху правления Наполеона Лаплас был в зените славы. Кстати, артиллерийский офицер Наполеон сдавал выпускные экзамены по математике, и Лаплас запомнил эрудированного, талантливого и честолюбивого юношу.

Наполеон даже назначил Лапласа министром внутренних дел, впрочем, Лаплас вскоре показал свою полную непригодность к этому делу.«Первоклассный геометр заявил себя администратором более чем посредственным»,— отмечал в своих воспоминаниях, написанных на острове Святой Елены, Наполеон. Однако Наполеон очень высоко ценил Лапласа как ученого. В отношении «Небесной механики» Лапласа (один из томов который был посвящен Наполеону) Бонапарт писал: «Мне кажется, что «Небесная механика» возвышает блеск нашего века».

Лаплас был убежденным атеистом, так же, как и Наполеон (хотя последний активно использовал религию в своих целях). Неудивительно поэтому, что на ироничное замечание Наполеона о месте Бога в мире Лаплас ответил «Государь, в этой гипотезе я не нуждаюсь».

Хотя Лаплас внес большой вклад в развитие теории вероятности, он был убежденным детерминистом в отношении природы. Известно его высказывание о том, что если ему укажут точное положение всех частиц в какой-то момент времени, то он сможет просчитать их положение в любой следующий момент времени. Сейчас мы знаем, что это не так, и даже если бы некоторое существо (часто называемое «демоном Лапласа») обладало указанной информацией, точное предсказание будущего было бы невозможно, в первую очередь, из-за неустойчивости траекторий частиц, вносящих хаос в движение.

После реставрации Лаплас отрекся от Наполеона, чем вызвал град насмешек в печати. Думается, что в этом вопросе трудно не согласиться с мнением французского математика Фурье: «Мы должны отделить бессмертного творца «Небесной механики» от министра и сенатора».

Скончался Лаплас 5 марта 1827 г. в возрасте семидесяти восьми лет. Последняя его фраза была: «То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, чего мы не знаем».

В связи с биографией Лапласа интересно проследить появление в его работах полуинтуитивного понятия «полусходящихся рядов», трансформировавшегося в дальнейшем в работах Пуанкаре и Стильтьеса в строгое математическое понятие «асимптотических рядов». В «Аналитической теории вероятностей» Лапласа один из параграфов («Общие замечания о сходимости рядов») посвятил «полусходящимся рядам». «Эти ряды сходятся быстро для первых членов, но эта сходимость ухудшается, а затем и кончается, превращаясь в расходимость. Это не мешает употреблению этих рядов, если использовать только первые члены, для которых сходимость достаточно быстра. Ибо остаток ряда, которым пренебрегают, есть некоторая алгебраическая сумма или интеграл, малые по сравнению с предшествующим членом».

После работ Коши, Больцано и Абеля расходящиеся ряды были изгнаны из анализа. И, по выражению Э.Бореля, свыше 40 лет (до работ Пуанкаре и Стильтьеса 1886 г.) на «полусходящиеся (асимптотические) ряды» смотрели как на некий математический курьез, почему-то облегчающий вычисления.

АНРИ ПУАНКАРЕ (1854-1912)

Идеи асимптотического анализа появились очень давно. Но превращению их в самостоятельное направление математики, созданию культуры «асимптотического мышления» мы обязаны А.Пуанкаре.

Моисеев Н.Н.

Анри Пуанкаре родился 29 апреля 1854 г. в Нанси. Его отец, профессор медицинского факультета, и дед, фармацевт, были людьми высокой культуры. Двоюродные братья А.Пуанкаре — сыновья дяди Анри Пуанкаре, Антони Пуанкаре-Раймон, Президент Французской республики и председатель Совета министров («Пуанкаре-война»), и Люсьен, физик и ректор Парижского университета.

А.Пуанкаре в 1862 г. начал учебу в лицее, по окончании которого в 1873 г. поступил в Политехническую школу. С раннего возраста он проявил выдающиеся способности. В 1872 г. Анри занял первое место на общем конкурсе по элементарной математике, проводившемся среди всех лицеев страны, а в 1873 г. — первое место на общем конкурсе по специальной математике. Занятия математикой совершенно не мешали А.Пуанкаре изучать так называемые классические дисциплины. Так, в 1871 г. он стал бакалавром словесности. Однако основные симпатии были отданы, несомненно, математике. Уровень его знаний был таким, что преподаватель математики лицея, обучавший Анри Пуанкаре, говорил о нем своему другу: «У меня в классе есть математическое чудовище».

Во время немецкой оккупации Нанси в 1870 г. Пуанкаре самостоятельно изучил немецкий язык, чтобы узнавать новости из доступных газет. На экзаменах в Политехническую школу — наверное, наиболее прославленное учебное заведение Франции — Анри занял первое место среди всех соискателей.

Впрочем, здесь не мешает остановиться на одном поучительном эпизоде. Будущий великий математик провалился на экзамене по рисованию и черчению. Однако в связи с очевидными выдающимися способностями экзаменующегося он в дальнейшем от этих предметов освобождается. Этот случай, рассказанный другом и соучеником Пуанкаре, известным механиком Полем Аппелем (1855–1930), отмечает в своей статье академик П.С.Александров, противопоставляя его совсем не так счастливо окончившимся аналогичным историям в нашей высшей школе...

Окончив Политехническую школу, А.Пуанкаре, сознательно готовивший себя к весьма престижной тогда профессии инженера, поступает в 1875 г. в Горную школу, после окончания которой в 1879 г. он несколько месяцев работает горным инженером. А 1 августа 1879 г. А.Пуанкаре защищает в Париже докторскую диссертацию на тему «О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных», о которой известный математик Гастон Дарбу (1842–1917), в частности, писал: «Что особенно поражает в этом дебюте, так это отвага, с которой автор обращается к решению самых возвышенных, самых трудных и самых общих вопросов. Он берется за рассмотрение самых важных и самых существенных проблем». Впрочем, эти слова можно было бы отнести к очень многим работам А.Пуанкаре.

Получив приглашение Нантского университета, Пуанкаре с 1879 г. по 1881 г. работает преподавателем на факультете точных наук, а в октябре 1881 г. переезжает в Париж и приступает к работе в столичном университете.

После смерти известного специалиста по небесной механике Франсуа Тиссерана (1845–1896) Пуанкаре возглавил кафедру математической астрономии и небесной механики, которую занимал до самой своей смерти. С 1902 г., кроме того, он заведовал кафедрой теории электричества Высшей школы ведомства связи. Был также с 1893 г. членом бюро долгот, читал лекции по анализу и астрономии в Политехнической школе. В 1887 г. Пуанкаре был избран членом Парижской академии наук, а в 1908 г. — членом Французской академии. Многие зарубежные академии (в том числе Петербургская академия наук) и университеты избрали его своим членом или членом-корреспондентом.

В 1900 г. ему вручают золотую медаль Королевского астрономического общества в Лондоне, в 1901 г. — медаль Сильвестра Лондонского королевского общества. В 1904 г. Казанское физико-математическое общество присуждает Пуанкаре золотую медаль имени Н.И.Лобачевского, а в 1905 г. он получает наиболее высокий научный приз того времени — премию имени Яноша Бояи Венгерской академии наук.

Особо нужно отметить премию шведского короля Оскара III, которую А.Пуанкаре получил в 1889 г. за исследование по небесной механике «О проблеме трех тел и об уравнениях динамики».

Выдающийся немецкий математик Вейерштрасс (1815–1897) писал: «Значение мемуара столь велико, что опубликование его откроет новую эру в истории небесной механики. Он относится к числу наиболее важных математических работ века».

Исследования А.Пуанкаре в области небесной механики были обобщены в трехтомном труде «Новые методы небесной механики».

В первом томе, составившем эпоху в асимптотических методах, А.Пуанкаре анализирует понятие сходимости и дает определение асимптотического ряда (приведенное в нашей книге ранее).

При построении периодических решений возникла трудность, связанная с появлением так называемых секулярных (или вековых) членов, т. е. членов, стремящихся к бесконечности при $t \to \infty$. Появление их легко понять, если рассмотреть разложение по ε в ряд Тейлора функции $\cos(\omega_0 + \varepsilon)t$:

$$\cos(\omega_0+\varepsilon)\,t = \cos\omega_0 t - \sin\omega_0 t\cdot\varepsilon t + \ldots$$

Второй член в разложении является секулярным.

Метод преодоления этой трудности и построения равномерно пригодных разложений разработали Линдстедт (1882 г.), Болин (1889 г.) и Гюльден (1893 г.).

Суть этого подхода состоит в том, что

при поиске периодического решения нелинейной задачи вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = \varepsilon f(u,\dot u),$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $f(u,\dot u)$ — некоторая функция, нужно, наряду с изменением функции u, следить и за изменением частоты ω, поскольку в нелинейной системе нет свойства изохронности, и частота зависит от амплитуды колебаний.

Технически это осуществляется так: вводится новая переменная $\tau = \omega t$, а затем u и ω ищутся в виде разложений по степеням ε:

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \ldots$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots$$

Параметры $\omega_i, i = 1, 2, \ldots$ подбираются из условия отсутствия вековых членов.

Пуанкаре в 1892 г. доказал, что выписанные разложения асимптотические, обосновал описанный метод (который теперь называется методом Линдстедта–Пуанкаре) и широко применял его во втором томе «Новых методов небесной механики». Сейчас различные формы этого метода используются для получения приближенных решений задач асимптотическим методом. Идея заключается в нахождении изменяющегося при возмущении параметра (частоты, волнового числа, волновой скорости, собственного значения, уровня энергии) и разложения их вместе с зависимыми переменными по степеням возмущения. Далее коэффициенты разложения параметра подбираются так, чтобы получить равномерно пригодные разложения.

А.Пуанкаре написал более 500 статей и мемуаров. При этом спектр его трудов огромен. Это практически все разделы математики, некоторые из которых он же и создал (топология, качественная теория дифференциальных уравнений, асимптотические методы), физика (ряд авторов считает А.Пуанкаре, наряду с Х.Лоренцем и А.Эйнштейном, создателем частной теории относительности), философия науки (чтение работ Пуанкаре доставляет огромную радость каждому, занимающемуся научной деятельностью), популярные статьи по небесной механике, геодезии и другим разделам науки, биографии Вейерштрасса, Тиссерана, Эрмита и других ученых и даже доклады по поводу проектов унификации гражданского и астрономического дня, введения десятичной меры для времени или окружности и о новом измерении дуги меридиана.

Исключительно интересны наблюдения А.Пуанкаре о природе математического творчества, ставшие хрестоматийными. Его мысль работала практически все время. Племянник Пуанкаре писал «Он предается своим размышлениям на улице, направляясь в Сорбонну, присутствуя на заседаниях различных научных обществ. Он размышляет у себя в прихожей, в зале заседания в институте, за столом, в кругу семьи, в гостиной, нередко обрывая разговор на середине. Всю работу, сопутствующую открытию, дядя производит в уме, нередко даже не имея возможности проверять свои выкладки или записывать доказательства на бумаге. Он ожидает, что истина прозвучит для него, как раскат грома, и считает, что ему, с его великолепной памятью, не составит труда сохранить истину».

При этом Пуанкаре вовсе не был затворником, много и с удовольствием путешествовал, выступал с изложением своих работ и идей.

Умер А.Пуанкаре после хирургической операции от эмболии 17 июля 1912 года.

«Перестал жить мозг точных наук. Вместе с великим французским математиком от нас ушел единственный человек, разум которого мог охватить все, что создано разумом других людей, проникнуть в самую суть всего, что постигла на сегодня человеческая мысль, и увидеть в ней нечто новое», — писал Поль Пенлеве (1863–1933), французский математик и общественный деятель.

«Преисполненные восхищения, стоим мы перед неисчерпаемыми сокровищами непреходящего знания, извлеченными на свет из глубоких недр этим мастером с присущей ему изобретательностью, интуитивным постижением глубоких взаимосвязей и мощным даром создания логических комбинаций. Чтение отдельных его работ и книг доставляет наслаждение не только разнообразием и фундаментальностью содержащихся в них идей и взглядов, но и формой изложения, отточенностью стиля. Хотя найденные Пуанкаре слова наиболее точно и глубоко передают суть дела, они не тащатся, тяжело ступая и кряхтя под бременем смысловой нагрузки, подобно рыбакам, влекущим сеть сквозь глубокие воды, о нет! Изящно, легко и свободно они парят, подобно чайкам склевывая добычу на лету, окруженные мириадами брызг фантазии...». Так писал о Пуанкаре Г.Вейль, сам большой мастер не только в чистой математике и физике, но и в искусстве излагать свои взгляды.

АНРИ ПАДЕ
(1863–1953)

В уютном зале библиотеки естественных наук РАН в Москве несколько полок занимают увесистые тома индексов цитирования CI. При всей условности оценки научной работы по индексу цитирования определенную информацию он дает. Подавляющее большинство работ «отмирает» очень быстро, ссылаются на них лишь два–три года. Работы, которые держатся в списках CI долго, заслуживают внимания. Вот, например, динамика ссылок на диссертацию Анри Паде: 1980–85 годы — 26, 1986 г. — 5, 1987 и 1988 гг. — по 3. Между тем, эта диссертация защищена более ста лет назад — в 1892 г. Видно, что Анри Паде внес немалый вклад в науку. Однако сведений о нем нет не только в известных энциклопедиях, но даже и в справочниках «Математики» или «Физики», в которых упоминаются и значительно менее заслуженные ученые. И это не случайно. Предложенное А.Паде преобразование длительное время использовалось лишь узкими специалистами, и только с 60-х годов нашего века, уже после смерти А.Паде, началось широкое применение аппроксимаций Паде. Регулярно стали проводиться конференции, посвященные Паде-преобразованию и его приложениям в физике и механике. Выяснилось, что А.Паде воздвиг себе «нерукотворный памятник», хотя при жизни и не узнал об этом.

Анри Эжен Паде родился в Аббвиле (Сомма) 17 декабря 1863 г. Он был сыном Жана-Батиста Домиса Паде и Жозефины Петрониль Элеоноры Тьебольд. Отец Анри был в то время рыночным торговцем сукном. Все их ближайшие предки были ткачами от отца к сыну, а их жены — прядильщицами.

Анри Паде получил среднее образование в колледже Курбе в Аббвиле, где он был блестящим учеником, о чем свидетельствуют полученные им отличия общества содействия старых учеников, высшие и первые награды по математике, физике, химии и черчению. Он получил диплом бакалавра наук с отличием 18 июня 1881 г. в Пилле.

Далее Паде поступает в лицей Святого Луиса в Париже, где он получает в 1883 г. восьмой номер по аналитической геометрии и алгебре у профессора Кретэна. В том же году он сдает конкурсные экзамены в Высшую Нормальную школу и в Политехническую школу.

Его личное дело свидетельствует: «Добрый и усидчивый, очень спокоен». На вступительных экзаменах в Нормальной школе его экзаменаторами были Ж.Таннери (1848–1910) и Э.Пикар (1856–1941) по математике, Бертен по физике и А.Ж.Дебре (1827–1888) по химии. Было 269 кандидатов, из которых принято 61 (Паде был принят девятнадцатым). Вместе с ним поступили Эжен Коссера (1888–1931), известный впоследствии своими работами по моментной теории упругости, Леопольд Жане, работавший во многих областях математики и внесший большой вклад в дифференциальную геометрию, Поль Пенлеве (1863–1933), математик, механик и политический деятель, Люсьен Пуанкаре (1861–1920) — брат президента Франции, двоюродный брат великого Анри Пуанкаре. Коссера сдал десятым, Пенвеле — двадцатым, а первым был Жиль Ринан, ставший близким другом А.Паде на всю жизнь. Паде успешно сдал экзамены и в Политехническую школу, но в меньшем ранге, поэтому он предпочел Нормальную высшую школу. Здесь он провел три года. Его профессорами были П.Таннери (1843–1904), Э.Пикар (1856–1941), П.Аппель (1855–1930), Э.Гурса (1858–1936) и Ж.Буке (1819–1885), его экзаменаторами были Буке, Эрмит (1820–1901) и Г.Дарбу (1842–1917).

В июне 1885 г. Паде становится лиценциатом по физике вместе с П.Пенлеве (1863–1933) и П.Дюгемом (1861–1916), так же, как и по математике. В 1886 г. он сдает шестым кандидатский экзамен по математике, причем Жиль Ринан был первым, Коссера — вторым, Пенлеве — девятым.

Чтобы понять обстановку, в которой занимался Паде, нужно вспомнить следующее. После некоторого спада активности в первой половине XIX века французская математика переживала подъем. В это время работали А.Пуанкаре, Э.Пикар, Ж.Адамар (1865–1963), П.Пенлеве (1863–1933), Э.Картан (1869–1951), Э.Борель (1871–1956), Р.Бэр (1874–1932), А.Лебег (1875–1941), М.Фреше (1878–1973). Почти все эти великие математики окончили Нормальную или Политехническую школы. Обе школы возникли во время Французской революции.

Политехническая школа готовила офицеров и кадры на высшие технические должности. Она считалась более престижной и перспективной с точки зрения карьеры, поэтому выбор Паде говорит о многом. Нормальная школа готовила в основном преподавателей средних учебных заведений, ее предпочитали те, кто выбирал путь педагога или научного работника. Из ее стен вышли Г.Дарбу (1861), Аппель (1873), П.Пенлеве (1883), Э.Пикар (1874), Ж.Адамар (1884), Э.Борель (1889), Э.Картан (1891), А.Лебег (1894), П.Ланжевен (1894) [66].

Анри Паде начинает карьеру преподавателя элементарной математики в различных лицеях, последовательно в Пиможе (2.10.1886–20.10.1886), Каркассоне (21.10.1886–18.10.1887) и Монпелье (19.10.1887–30.08.1888). Затем он просит отпуск с сохранением содержания для занятий в Германии. 18 октября 1889 г. Паде записывается в университет Лейпцига. Во время зимнего семестра он прослушал курс А.Майера (1893–1908) по дифференциальным уравнениям динамики и сдал экзамен 28 марта 1890 г. Другими преподавателями были Вильгельм Шейнер (1826–1908) и Карл Нейман (1832–1899), руководитель математического семинара.

В ходе летнего семестра 1890 г. и в течение всего 1890–1891 г. он был студентом Геттингена, где получил диплом по математике 5 мая 1890 г. Его преподавателями были Феликс Клейн (1849–1925), Герман Шварц (1843–1921), Эрнст Шеринг (1833–1897).

Анри Паде возвращается во Францию, где снова становится преподавателем элементарной математики (в Сен-Сире в Лионе). Здесь он остается до 30 сентября 1893 г. 21 июня 1892 г. в Сорбонне он защитил свою докторскую диссертацию по математике «О приближенном представлении функций рациональными дробями». Жюри было в составе руководителя диссертации Шарля Эрмита (1822-1901) и репортеров (оппонентов) Эмиля Пикара и Поля Аппеля.

Научная работа А.Паде отнюдь не закончилась написанием диссертации. Его перу принадлежат 42 научные работы (все без соавторов), последняя из которых вышла в 1908 г. В дальнейшем А.Паде отошел от активной научной работы, посвятив себя целиком преподаванию и административным обязанностям. У него не было достаточно известных учеников, хотя он был хорошим лектором и педагогом. Отметим еще, что две работы А.Паде, кроме диссертации (заметка в докладах Парижской академии наук в 1893 г. и работа 1894 г. «О сходящихся или расходящихся целых рядах и рациональных непрерывных функциях») имели определенное значение в зарождении теории суммирования расходящихся рядов. Паде не пришел к идее суммирования таких рядов, но достаточно далеко продвинулся в этом направлении и сделал расходящиеся ряды объектом изучения.

12 августа 1893 г. в Аббвилле Паде после двух лет знакомства женится на Елене Кодрон, родившейся 15 января 1876 г. От этого союза родилось три дочери: Марсель в Пилле 9 марта 1895 г. (скончалась в Коломбе 22 ноября 1932 г.), Джульетта в Аббвиле 26 апреля 1896 г. и Одетта в Пуатье 3 мая 1902 г. (скончалась в Сете 4 февраля 1926 г.).

С октября 1893 г. по 16 января 1897 г. Паде — профессор элементарной математики в лицее Федерт в Пилле, где его очень ценят, о чем свидетельствуют сохранившиеся отзывы.

С 1 ноября 1897 г. он проводит две конференции по математике на факультете наук в Пилле. В январе 1897 г. Паде назначается руководителем конференции, пост, который он занимал до 30 октября 1901 г. Он наследовал Эмилю Борелю, назначенному в Париж, а также работал профессором прикладной математики в индустриальном Северном институте и экзаменатором выпускных экзаменов в Высшей коммерческой школе Пилля в 1900 и 1901 гг. Паде становится членом Академии в 1897 г., а в 1900 г. он становится лауреатом премии научного общества Пилля. Вместе с женой Паде принимает участие в первом международном математическом конгрессе, собравшемся в Цюрихе 9–11 августа 1887 г. Второй съезд, на котором также присутствовал Паде, был в Париже 6–12 августа 1900 г.

С 1 ноября 1901 г. по 4 июля 1902 г. Паде вел курс теоретической и прикладной механики на факультете наук в Пуатье. Он наследовал Дюранду (1831–1904). С 1901 г. Паде три года работал экзаменатором в Морской школе.

17 декабря 1906 г. Паде получает Гран-при по математическим наукам, присуждаемый Академией наук. Тема, представленная на конкурс: «Улучшение некоторых признаков сходимости непрерывных рациональных дробей». Членами жюри были К.Жордан (1838–1922), А.Пуанкаре, П.Аппель, Ж.Юбер (1859–1921), М.Леви (1838–1910), Г.Дарбу, Ж.Буссинеск (1842–1929). Представлял работу Паде Эмиль Пикар. Паде разделил приз с Монтессу де Болором (1870–1937) и Ориком.

7 декабря 1906 г. Паде назначается деканом факультета наук в Бордо, обязанности которого он исполнял до 17 ноября 1908 г. Он участвует в 4-м международном математическом конгрессе в Риме 6–11 апреля 1908 г. С 18 ноября 1908 г. Паде исполняет обязанности ректора Академии в Безанссоне. Он был тогда самым молодым ректором во Франции. Паде занимает этот пост до сентября 1917 г. 31 декабря 1909 г. Паде становится кавалером ордена Почетного легиона.

Чисто человеческие качества Паде наглядно проявились в его поддержке молодого серба, попавшего во Францию во время первой мировой войны. С сентября 1917 г. по 1923 г. Паде — ректор Академии в Дижоне, с 1923 по 1934 г.— ректор Академии в Экс-Марселе.

29 января 1927 г. он получает офицерский орден Почетного легиона. Кроме того, Паде становится командором ордена Рояль де Сент Сев, Звезды Эфиопии (1924), Медали физического общества (2.09.1931) и ордена за заслуги в сельском хозяйстве (16.06.1939). 1 декабря 1933 г. Паде уходит в отставку. За два года до смерти он тяжело заболел и ходил с трудом, опираясь на руку сиделки. Умер Анри Паде в Эксе в Провансе, 9 июля 1953 г. На его могиле можно прочесть «Я не знаю, Бог знает»,— текст, который он сам выбрал. Его жена умерла в Эксе 15 декабря 1955 г. и похоронена на том же кладбище.

Говоря об аппроксимации Паде, нельзя не отметить, что «Основная идея метода аппроксимаций Паде была открыта независимо по крайней мере дважды. Авторство Паде основывается на его диссертации 1892 г. Он, по-видимому, не знал о более ранней работе Якоби (1846). Работе Паде *предшествовала также работа* Фробениуса (1881). Еще в 1740 г. Андерссон натолкнулся на аппроксимацию Паде логарифмической функции» [15].

Так заслужено ли название «преобразования Паде»? Надо сказать, что ситуации, подобные описанной выше, в науке не редкость. Так, «Интегрирование встречается уже у Архимеда, дифференцирование — у Паскаля и Ферма, связь между обеими операциями была известна Барроу. Что же сделал Ньютон в анализе? Ньютон изобрел ряды Тейлора — основное орудие анализа» [7].

Между тем мы говорим о формуле Ньютона–Лейбница, рядах Тейлора и называем Ньютона и Лейбница создателями дифференциального и интегрального исчисления. История имеет свою логику, поэтому вряд ли следует ожидать «волны переименований» в научной терминологии. Что касается преобразования Паде, то именно по работам Паде изучали это преобразование ученые, широко применявшие его в своих исследованиях, поэтому название вполне логично.

Составить представление о Паде как о человеке в молодости трудно, зато легко можно судить о нем в зрелые годы — по сохранившимся отзывам членов семьи и окружающих.

Он в шутку определял себя как «старого романтика». Очень любил поэзию и помнил много стихов, в частности, «Майскую ночь» А.Мюссе. В посвященной ему газетной

статье говорится: «Большое впечатление производит лицо этого человека, сдержанное лицо человека севера, оживляемое умными глазами, с интересом глядящими на мир из-за стекол очков. В этом мыслителе в оригинальной гармонии сочетаются математические абстракции и самая возвышенная поэзия». А.Паде был хорошим музыкантом. В молодости он прошел курс обучения по классу скрипки в музыкальной школе в Аббвиле. У него были хороший слух и голос, из композиторов он предпочитал Шумана и Шуберта, у которых особенно любил «Зимний путь», «Веселый мельник» и другие вещи. Его жена играла на рояле, и их семейные концерты собирали детей и близких.

Его в равной мере интересовали искусство и литература, и в его библиотеке Эвклид соседствовал с Вергилием. Много внимания он уделял изучению и комментированию Библии. Эту работу Паде прилежно выполнял до конца жизни. Речь его, правильная и искусная, была очень приятна собеседнику, однако в ней не было и намека на панибратство или вульгарность. Это был очень чувствительный человек, несмотря на внешнюю холодность. Он трогательно относился к своим детям, любил цветы и природу и никогда не любил Париж из-за суеты и загрязненной атмосферы. Анри Паде был искусным кропотливым садовником, окружившим свой дом в Эксе цветами и фруктовыми деревьями. Кроме того, Паде с удовольствием разводил пчел. Живописное зрелище представляла его фигура в черной шляпе с сеточкой и в сапогах. К утреннему чаю в семье всегда был мед. Все, что делал Паде, он основательно изучал. Перед тем, как заняться садоводством, он много ходил смотреть работу крестьян и консультировался у них, когда захотел столярничать — ходил к каретникам. В доме у него были самодельный стол, журнальный столик и стулья, хорошо им выделанные.

Он был близок к природе. В Безансоне часто ходил в лес, организовывал воскресные экскурсии в ботанический сад университета для сбора гербария. Он стал страстным астрономом после того, как отец привил ему любовь к небу, любил альпинизм и длительные прогулки в горах, во время которых был неутомим.

Паде много усилий потратил на внедрение в обучение факультативных курсов гимнастики, швейного ремесла, рисования, пения. Вообще он был строгим инспектором, и при посещении учебных заведений всегда пробовал пищу, проверял, как проветривается помещение. Паде был человеком жестким и требовательным. Он не допускал никакой некорректности или небрежности в разговоре или поведении. Был религиозен, но без набожности. Щепетильно честный, он не допускал покровительства ни в отношении себя, ни в отношении своих детей и близких. Уважение, которое он снискал, было вполне заслуженным.

БАЛТАЗАР ВАН ДЕР ПОЛЬ [77] (1889–1959)

Голландский ученый Балтазар Ван дер Поль внес большой вклад в теоретическую и практическую радиотехнику, теорию колебаний, был организатором многих научных форумов. Ему принадлежит 210 научных трудов.

Балтазар Ван дер Поль родился 27 января 1889 г. в голландском городе Утрехт. Его отец, состоятельный купец, был широко образованным человеком и дал своему сыну хорошее образование. С ранних лет Поль был увлечен медициной, физикой, музыкой и шахматами, не уделяя особенно много внимания классическим наукам. В 1916 г. он окончил с отличием Утрехтский университет по специальности физика и математика. В 1916 г. Ван дер Поль сдает «Докторский экзамен», что соответствовало получению степени магистра. В 1916 году Поль уехал в Англию для продолжения образования. Сначала он работал у Д.Ф.Флеминга — известного специалиста в области радиотелефонии и радиотелеграфии, в 1917–1919 *годах* — в Кавендишской *лаборатории* Кембриджского университета. С 1919 г. в течении трех лет Поль был хранителем частного фонда Тейлора, в который входили музей, библиотека и лаборатория. В 1920 г. Ван дер Поль защищает докторскую диссертацию на тему о распространении радиоволн в ионизированном газе, основанную на проведенных им в Кембридже экспериментах.

С 1922 по 1949 годы Поль работал в известной фирме «Филипс» в Эйндховене. В последние годы он был директором фундаментальным научных исследований в области радио этой фирмы. С 1938 г. Поль одновременно с работой в «Филипсе» — профессор Дельфтского университета по теоретической радиотехнике. Он был почетным президентом международного научного радиотехнического союза, членом Королевской голландской академии, многих иностранных научных обществ и комитетов. Умер Балтазар Ван дер Поль 6 октября 1959 г.

В своей работе Ван дер Поль испытал несомненное влияние Лапласа и Оливера Хевисайда (1850–1925 гг.). Н.М.Крылов и Н.Н.Боголюбов писали о творчестве Поля: «Основателем применения методов нелинейных колебаний в радиотехнике следует считать голландского физика Балтазара Ван дер Поля, который, нестрогими методами, получил, однако, важные результаты».

Что касается строгости, то здесь можно вспомнить высказывание отца кибернетики Н.Винера о том, что в серьезных работах строгость не является чем-то самодовлеющим и, как правило, может быть внесена достаточно квалифицированным профессионалом-математиком. Главное — наличие плодотворной идеи. О вкладе Б. Ван дер Поля в теорию осреднения мы уже говорили. Но, кроме этого, Ван дер Поль, по сути, впервые серьезно исследовал явление релаксационных автоколебаний (сам этот термин введен Полем и характеризует колебания, возникшие при действии непериодических сил). Часто причиной возбуждения автоколебаний является сухое трение. Продемонстрировать автоколебания можно при помощи такого устройства: деревянный брусок на пружине лежит на резиновой ленте. При движении ленты деревянный брус совершает колебания. Физически причина их заключается в том, что сила трения между бруском и лентой больше при меньших скоростях движения, чем при больших. При колебаниях возникает переменная составляющая силы трения, направление которой совпадает с направлением скорости колебаний. Возникающие колебания неустойчивы. Эталонное уравнение автоколебаний было получено Ван дер Полем, носит его имя и имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

где x — координата, ε — положительная постоянная.

Нетрудно качественно проанализировать уравнение Ван дер Поля. Пока колебания малы и $x^2 < 1$, коэффициент при dx/dt (а этот член в уравнении описывает трение) отрицателен. Такое трение приводит к нарастанию колебаний («раскачивает систему»). При возрастании колебаний x увеличивается. Если $x^2 > 1$, то трение становится положительным и уменьшает амплитуду колебаний.

В результате двух противоположных влияний раскачка колебаний будет постепенно замедляться, а движение неограниченно приближаться к режиму колебаний с постоянными амплитудами, при котором указанные влияния уравновешиваются.

Автоколебательные системы описывают множество явлений, начиная от флаттера авиационных конструкций и самовозбуждения электронных генераторов (именно в связи с этой задачей Поль вывел свое уравнение) и кончая биением сердца и периодическими изменениями численности животных в определенных условиях, поэтому важность исследований Ван дер Поля трудно переоценить.

АЛЕКСАНДРМИХАЙЛОВИЧ ЛЯПУНОВ [115] (1857–1917)

Выдающийся русский математик А.М.Ляпунов родился 25 мая 1857 г. в Ярославле. После смерти отца, известного астронома, соратника Н.И.Лобачевского, последовавшей в 1870 г., А.М.Ляпунов начал обучение в третьем классе Нижегородской гимназии, которую окончил с золотой медалью в 1876 г. В этом же году он поступил сначала на естественное отделение физико-математического факультета Петербургского университета, но через месяц перешел на математическое отделение. В 1880 г. он получил золотую медаль за сочинение на предложенную факультетом тему. Окончив в том же году курс со степенью кандидата, он был оставлен при университете для подготовки к званию профессора по кафедре механики.

Большое влияние на А.М.Ляпунова, по его собственным словам, оказали сначала лекции, а затем советы и указания Пафнутия Львовича Чебышева (1821–1891), великого русского математика и механика. П.Л.Чебышевым была поставлена перед А.М.Ляпуновым задача о фигурах равновесия вращающейся жидкости. Суть ее такова: жидкая однородная масса, равномерно вращающаяся вокруг своей оси, может сохранять форму эллипсоида, пока угловая скорость вращения ω не превосходит некоторого предела ω_0. При $\omega > \omega_0$ эллипсоидальные фигуры равновесия невозможны, но было неясно, возможны ли при скоростях, немного превышающих критическую ($\omega = \omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \omega_0$), другие фигуры равновесия, непрерывно изменяющиеся при изменении ε и совпадающие с исходным эллипсом при $\varepsilon = 0$.

Чебышев убедил Ляпунова, что только такими сложными вопросами и имеет смысл заниматься молодому творчески одаренному ученому. По-видимому, П.Л.Чебышев сразу правильно распознал выдающийся талант А.М.Ляпунова. Используя, по существу, асимптотический подход, А.М.Ляпунов сначала (в 1882–1883 годах) построил первое приближение задачи. Защитив в 1885 г. диссертацию на степень магистра прикладной математики, он перешел в Харьковский университет на кафедру механики. В течение двух лет А.М.Ляпунов читал совершенно оригинальные курсы механики. Изданные несколько лет назад (при жизни А.М.Ляпунов не хотел слышать об издании своего курса механики, считая изложение известных истин не достойным издания как научного труда), эти лекции и в настоящее время представляют большой интерес. Блестящий лектор, Ляпунов снискал любовь и уважение весьма требовательной и сначала, как вспоминал известный математик В. А. Стеклов (1864–1926 гг.), слушавший эти лекции, отнюдь не дружественно настроенной студенческой аудитории.

Выполненные за несколько лет работы могли бы составить выдающуюся докторскую диссертацию, но А.М.Ляпунов, отличавшийся исключительно высокой требовательностью к себе, отказался это сделать. Отказался он также до получения докторской степени и от звания исполняющего должность экстраординарного профессора, что повышало жалование вдвое. Только в 1892 г. вышел отдельным изданием Харьковского математического общества его основополагающий труд «Общая задача об устойчивости движения». В ней, в частности, было введено понятие устойчивости, носящее сейчас название «устойчивость по Ляпунову» (если близкие вначале траектории не разойдутся далеко во время движения, то движение называется устойчивым по Ляпунову).

Для решения вопроса об устойчивости движения приходится искать решения систем дифференциальных уравнений в виде рядов. При этом первое приближение не решает вопроса: движение, устойчивое в первом приближении, может оказаться в действительности неустойчивым.

Еще Лагранжем была поставлена задача: дать ответ об устойчивости решения, не решая саму исходную систему. Ряд выдающихся ученых занимался этой проблемой. В частности, для некоторых случаев решение было получено великим французским математиком Анри Пуанкаре. Однако лишь труды А.М.Ляпунова позволили построить теорию с очень широкими границами применимости, причем основное значение этой теории даже не в конкретных результатах.

Академик Н.Н.Моисеев отмечал: «Значение теории малого параметра Ляпунова-Пуанкаре состоит не только в том, что она дает метод отыскания периодических решений квазилинейных уравнений. Для целого ряда задач, которые решаются в рамках этой теории, сейчас имеются более эффективные методы, пригодные, кроме того, для более широкого класса уравнений. Дело заключается в другом: эта теория дает очень много для понимания того, как должны строиться методы исследования новых задач. Изучение генезиса целого ряда современных исследований может показать, что у их истоков находятся идеи и методы, впервые сформулированные в теории Ляпунова–Пуанкаре».

В 1900 г. А.М.Ляпунов был избран член-корреспондентом, а в 1901 г. — академиком по кафедре прикладной математики, оставшейся вакантным после смерти П.Л.Чебышева. Оставив с этого времени педагогическую деятельность, он в течении 15 лет занимался задачей о фигурах равновесия вращающейся жидкости. В серии работ, содержащих более 1000 страниц текста (при этом большая часть выкладок была опущена) А.М.Ляпунов получил выдающиеся результаты в том направлении, где потерпели поражение многие выдающиеся умы. Даже Анри Пуанкаре, много занимавшийся указанной задачей, не смог получить столь общих результатов.

Успех Ляпунова, в частности, объяснялся тем, что он по-новому подошел к выбору малого параметра, приняв в качестве такового отклонение искомой поверхности от некоторой сферы. Он не только указал способ построения решения в любом приближении, но и доказал сходимость построенных им приближений, чего не сделал до него никто, даже А.Пуанкаре.

Кстати говоря, интересно отметить различие в подходе к физическим задачам А.Пуанкаре и А.М.Ляпунова. А.Пуанкаре часто говорил: «Можно сделать много возражений, но в механике нельзя требовать такой же строгости, как в чистом анализе». А.М.Ляпунов же утверждал: «Непозволительно пользоваться сомнительными суждениями, коль скоро мы решаем определенную задачу, будь то задача механики или физики — все равно, которая поставлена совершенно определенно с точки зрения математики. Она становится тогда задачей чистого анализа и должна трактоваться, как таковая».

В результате титанической работы А.М.Ляпунову не только удалось доказать существование бесчисленного множества фигур равновесия, отличных от эллипсоидальных, но и показать ошибочность ряда полученных другими учеными результатов.

Летом 1917 г. Ляпунов с тяжело больной туберкулезом женой уехал в Одессу. 31 октября, в день смерти жены, А.М.Ляпунов выстрелил в себя, а через три дня скончался.

Как отмечал В.А.Стеклов, А.М.Ляпунов представлял собой лучший тип идеалиста 60-х годов. Все свои силы он отдавал науке и часто говорил, что без научного творчества жизнь для него ничего не стоит. Многие годы он работал до 4-5 утра, а иногда и ночи напролет, не позволяя себе почти никаких развлечений.

ЛЮДВИГ ПРАНДТЛЬ [126] (1875–1953)

Существует легенда, что о ком-то из больших ученых говорили: «Все, что он может делать — это решать задачи с пограничным слоем. Но, конечно, он может любую задачу поставить как задачу о пограничном слое». В каждой шутке есть доля истины — так и в этой легенде нашел отражение тот бесспорный факт, что понятие пограничного слоя и связанная с ним математическая техника нашли широкое применение во многих отраслях естествознания. А создателем теории пограничного слоя был Людвиг Прандтль.

Людвиг Прандтль родился 4 февраля 1875 г. во Фрейзинге (Бавария). Окончив высшее политехническое училище Мюнхена, он с 1901 г. работал профессором высшего технического училища в Ганновере а с 1904 г.— в Геттингенском университете. В течении 22 лет, с 1925 г., он был бессменным директором института гидроаэродинамики им. Кайзера Вильгельма в Геттингене. Скончался Прандтль после продолжительной болезни в Геттингене в возрасте 79 лет 15 августа 1953 г.

Творчество Л.Прандтля — а он оставил след во многих областях механики — весьма поучительно. Инженер по образованию и, если можно так выразиться, по убеждению, он всегда подчеркивал, что наиболее эффективное приближение к действительности нельзя получить на основе формального решения. Для этого нужно глубокое проникновение в физическую суть явления. К решению сложных проблем он применял простые математические подходы — в этом и была главная отличительная черта его метода. Таково происхождение теории пограничного слоя, которая возникла при исследовании потока жидкости и описывается весьма скромными математическими сред-

ствами. Впервые само понятие «пограничный слой» возникло в работе Л.Прандтля «О движении жидкости с весьма малым трением», опубликованной в 1904 г. Суть задачи состоит в том, что учет при обтекании тел (или при течении в канале вблизи стенок) одновременно сил инерции и трения, обусловленного вязкостью, встречает серьезные математические трудности.

Прандтль сумел показать, что при больших числах Рейнольдса* Re, характеризующих отношение сил инерции к силам вязкости**, проблема распадается на две: в удаленной от обтекаемого тела области жидкость ведет себя как идеальная (вязкость можно не учитывать) и есть узкий пограничный слой, где учет трения необходим, но задача существенно упрощается именно за счет узости этого слоя и, следовательно, быстрой изменяемости искомого решения в направлении, нормальном к обтекаемой поверхности. Характерная ситуация изображена на рис. 1.1.

Здесь уместно вспомнить работы замечательного советского ученого-физика академика В.А.Фока (1898–1974 гг.), в которых он подчеркивал, что приближенные (в частности, асимптотические) методы способствуют возникновению новых физических понятий. Яркий пример — пограничный слой, понятие, появление которого, в определенном смысле, обязано невозможности проинтегрировать сложные исходные уравнения!

Что касается других работ Л.Прандтля, то он внес значительный вклад, как теоретический, так и экспериментальный, в теорию турбулентности, динамическую метеорологию (одним из создателей которой был он сам), теории несущего крыла и флаттера; можно вспомнить трубку Прандтля, предназначенную для одновременного измерения полного и статического давления в потоке, аэродинамические трубы его конструкции.

Занимался Л.Прандтль также вопросами упругости и пластичности. Ему принадлежит, например, пленочная аналогия в задаче о кручении стержней.

Стремясь к наглядности, Прандтль везде, где это можно было, делал эскизы возможных линий потока, ускорений и сил, а затем исследовал их. Эти эскизы, выполненные на старых конвертах, ставших ныне предметом коллекционирования, служили основой многих важнейших открытий. С минимальными деталями, всегда хорошо читаемые и позволяющие вносить коррективы и осуществлять дальнейшее развитие, они представляли одновременно научный результат и произведение искусства, а также открывали широкие перспективы для дальнейшего творчества.

Блестящий успех лекций Л.Прандтля обуславливался огромным трудом по их подготовке. В этих лекциях, а также на семинарах и в дискуссиях он всегда стремился к ясности и пунктуальности.

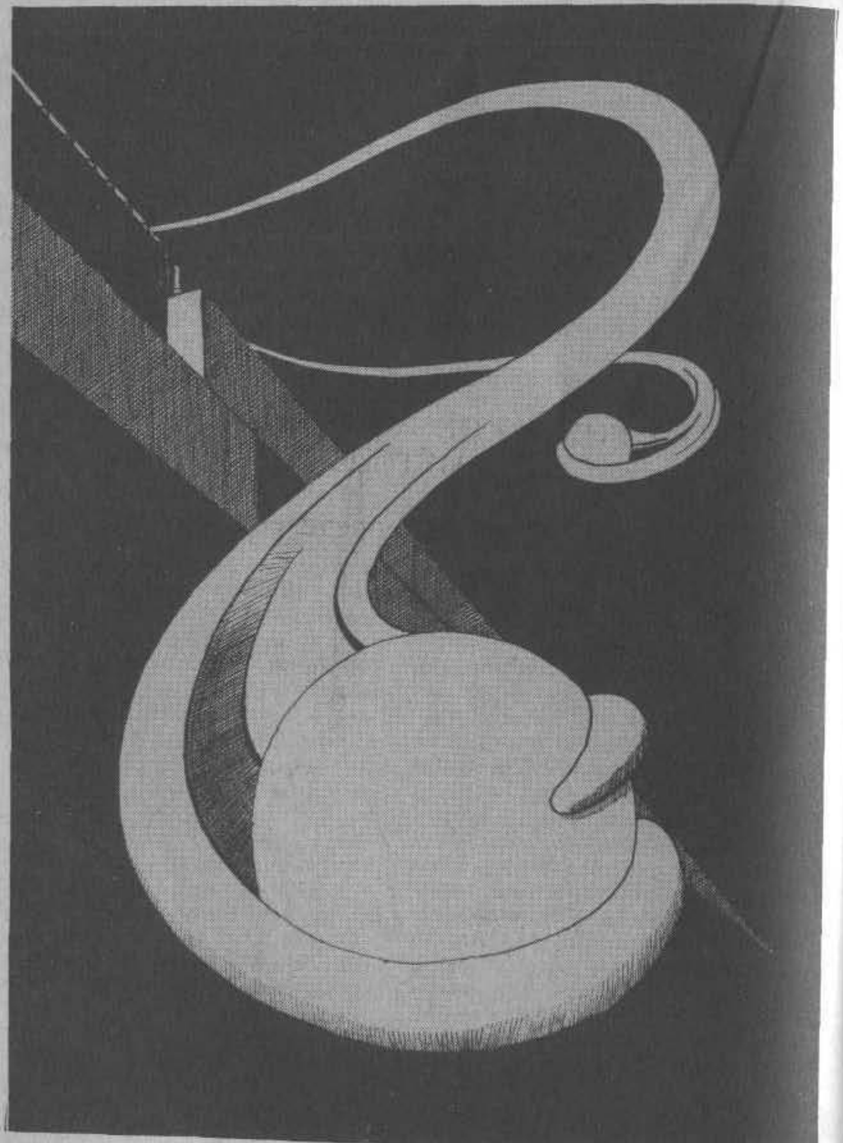
Как отмечали современники, в личной жизни он был трогательно беспомощным. Невозможно было представить его коварным или злым***.

---

* *Осборн Рейнольдс (1842–1912) — английский физик и инженер.*

** $Re = \rho v l/\mu$, *где* ρ *— плотность жидкости,* v *— характерная скорость (например, скорость потока),* l *— характерный линейный размер (например, диаметр трубы),* μ *— коэффициент вязкости жидкости.*

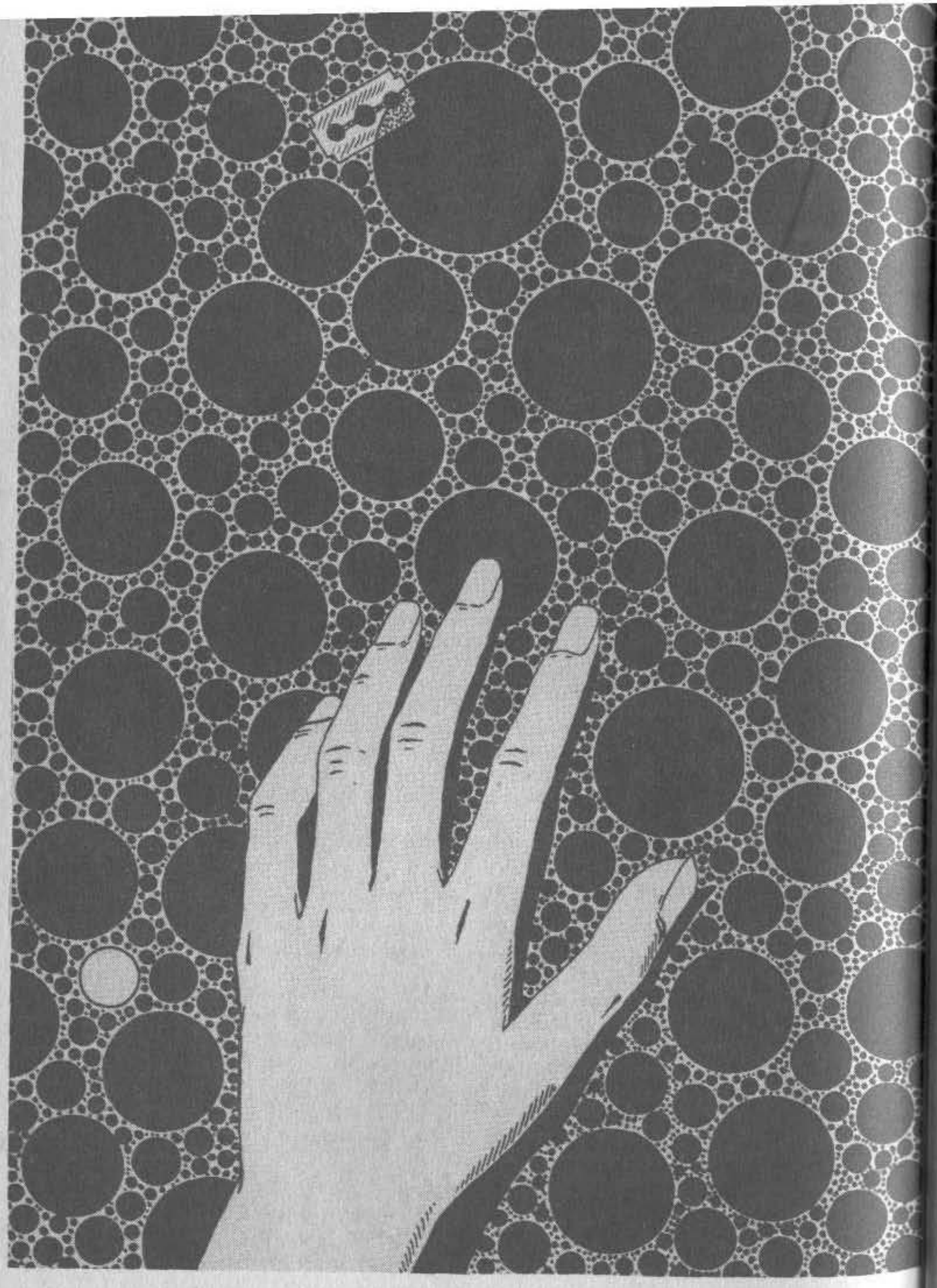
*** *Раньше, возможно, нам было бы трудно совместить это утверждение с тем фактом, что Л.Прандтль оставался директором института и в мрачные годы фашистской диктатуры. После «Зубра» Д.Гранина мы можем себе представить подобную ситуацию.*



Р.Г.Баранцев

ЧТО ЖЕ ТАКОЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ?

(попытка определения)



1. Асимптотические методы или новая математика?

Знакомство с асимптотикой обычно начинается с понятия асимптоты, определяемой как линия, к которой неограничено приближается рассматриваемая кривая с удалением на бесконечность. Слово asymptotos по-гречески означает несовпадающий. Конечно, одна лишь несовпадаемость еще не дает асимптотичности, так что этимологически этот термин звучит односторонне. Однако он удачно подчеркивает, что приближение не превращается в совпадение. Это свойство как раз и характеризует асимптотические явления в широком смысле.

В физике и других областях науки мы постоянно встречаемся с процессами, имеющими асимптотический характер. Например, затухание колебаний, выход на орбиту, стабилизация возмущенных движений и т.п. Если под параметром процесса понимать не только время, а любую переменную, от которой зависит рассматриваемая величина, то круг асимптотических явлений значительно расширяется. Сюда относится и действие взрыва на больших расстояниях, и поведение материалов вблизи границ, и влияние малой вязкости на течение жидкости. Общим свойством таких явлений оказывается наличие особых выделенных подпространств, окрестность которых изучается. В перечисленных примерах это бесконечно удаленная точка, граница материала, невязкая жидкость.

Взглянем теперь на асимптотические явления в обобщенном плане. Любой объект исследования, вообще говоря, не является однородным. Существуют области резкого изменения количества: разрыв, излом, обращение в нуль или бесконечность и т.д. Переход количества в качество воспринимается как особенность, и такие области, естественно, выделяются как особые. Они могут быть точками, линиями, поверхностями и вообще некоторыми многообразиями размерности $m < n$, где n — число независимых координат и параметров рассматриваемого объекта. Асимптотическая ситуация возникает, когда исследуют окрестности особых многообразий, причем не фиксированные, а уменьшающиеся. Явления, характерные для такого подхода, принято называть асимптотическими.

Это определение, очевидно, не претендует на строгость, ибо включает понятия особенности и характерности, в значительной мере условные. Действительно, какое изменение количества считать качественным и какое поведение характерным, остается не вполне ясным. Однако было бы рискованным спешить освобождаться от этой условности, если мы стремимся ухватить суть асимптотического подхода.

Неопределенность упорно сопровождает асимптотическое мышление, привлекая к нему математиков романтического склада и отталкивая сторонников предельно строгих рассуждений. После того как А.Пуанкаре ввел понятие асимптотического ряда, в курсах математического анализа появились разделы, посвященные асимптотическим разложениям. Однако первая половина XX века не стала периодом расцвета асимптотических методов. К середине века асимптотические главы не только не выросли в монографии, но в большинстве курсов вообще исчезли. Оканчивая университеты, студенты не знали ни метода перевала, ни явления Стокса.

За последние десятилетия положение заметно изменилось. Актуальность асимптотических методов в прикладной математике выросла многократно. Методы возмущений, усреднения, пограничного слоя становятся предметом монографических исследований. Квазиклассическая механика, теория дифракции, теория оболочек выросли благодаря асимптотическому подходу. Жизненность и перспективность асимптотических методов подтверждается также тем фактом, что активное взаимодействие численных методов с аналитическими происходит как раз через асимптотику.

С оживлением асимптотической деятельности возродился интерес и к самим методам, к тем общим свойствам асимптотики, которые можно изучать независимо от объектов приложения [1]. При этом обнаружилось, что понятие асимптотических методов упрямо не поддается достаточно строгому определению. Так, Н. де Брейн, пытаясь ответить на вопрос «Что такое асимптотика?», не находит ничего лучшего, как назвать асимптотическими оценками раздел анализа, имеющий дело с задачами того же типа, что и в рассматриваемой книге

[2]. Разумеется, перечисление с многоточием вряд ли может сойти за удовлетворительное определение. Тем более, что, с одной стороны, асимптотические оценки пронизывают почти все разделы математики, с другой — асимптотические методы фактически не ограничиваются теми оценками, которые уже формализованы.

Видимо, спецификацию асимптотики надо искать не в предметном, а в методологическом пространстве. Но здесь обнаруживается, что арсенал асимптотических методов включает немало приемов, которые относятся скорее к искусству, чем к науке [3]. М.Крускал [4] ввел даже специальный термин «асимптотология», определив его как искусство обращения с прикладными математическими системами в предельных случаях. Правда, он призвал при этом к формализации накопленного опыта с тем, чтобы превратить искусство асимптотологии в науку.

Таким образом, причина затруднений состояла в том, что формализованные определения оказывались слишком узкими, а достаточно широкие определения не удовлетворяли требованиям научности. Реально сложившаяся конкретная методология не допускала строгой дефиниции в рамках классической математики,— должно быть, не случайно.

Попытаемся подойти к определению асимптотических методов с широких позиций, руководствуясь прежде всего критерием адекватности реальному объекту, не стремясь загонять его в прокрустово ложе абсолютно строгих дефиниций. В качестве первого приближения проще всего назвать асимптотическими методами те, что приспособлены для исследования асимптотических явлений. Однако содержание их таким образом еще не раскрывается. Цель асимптотического подхода заключается в упрощении объекта. Это упрощение достигается за счет уменьшения окрестности рассматриваемой особенности. Причем характерно, что вместе с такой локализацией возрастает и точность асимптотических представлений. Точность и простота обычно встречаются как понятия противоположные, дополнительные. Стремясь к простоте, мы жертвуем точностью, добиваясь точности, не ждем простоты. Однако при локализации эти антиподы сходятся, противоречие разрушается, снимается в синтезе, имя которому — асимптотика [1].

Итак, суть асимптотических методов состоит в том, что они осуществляют синтез простоты и точности за счет локализации; в окрестности некоторого предельного состояния находится упрощенное решение задачи, которое тем точнее, чем меньше эта окрестность. Как отмечал еще Лаплас, асимптотические методы тем более точны, чем более необходимы. Действительно, потребность в них появляется там, где глобальные методы не срабатывают, но именно там, в окрестности особенностей, они наиболее эффективны.

Почему же асимптотические методы претендуют на большее, чем часть классической математики? Что имели в виду К.Фридрихс и Л.Сегел, когда утверждали, что асимптотическое описание является не только удобным инструментом математического анализа природы, но имеет и более глубокое значение [5] и что асимптотический подход — больше, чем еще один приближенный метод, а скорее играет фундаментальную роль [6]? В этом стоит разобраться основательнее.

Асимптотическими методами мы фактически пользуемся не только при решении сформулированных задач, но и при постановке задач и вообще в процессе познания мира. Хотя все в природе взаимосвязано, связи эти неодинаковы, и благодаря этой неравномерности появляется возможность выделения и изучения относительно изолированных систем. Но сами такие системы можно рассматривать как особенности в мире всеобщей связи. А выделение их — локализация в пространстве отношений. Так что постановка задачи выглядит как локализация особенности, а уточненная постановка — как исследование окрестности этой особенности.

Таким образом, асимптотические методы действительно больше, чем математические. Но и внутри математики они занимают особое положение, не находя четкого места в ортодоксальной классификации. Совмещая в себе простоту эвристических представлений с точностью аналитических оценок, асимптотические методы не ограничиваются ролью золотой середины. Главное отличие от методов классической математики состоит в том, что уровень точности

конкурирует с размерами области действия; в заданной области точность асимптотического разложения ограничена [7].

Идеал классической математики — абсолютная точность, и с ее точки зрения всякое ограничение точности квалифицируется как недостаток. Но если жизнь человека не вечна, а истина всегда не полна, то не является ли абсолютизация уходом от жизни? Не оборачивается ли недостижимый идеал сам недостатком с точки зрения динамики жизни? Не свидетельствует ли абсолютная точность классической математики скорее о ее ограниченности? Видимо, назрела пора рассматривать асимптотическую математику как достойного конкурента в борьбе за адекватное количественное описание нашей динамической реальности.

2. Неопределенность — дополнительность — совместность

Как сказано выше, асимптотические методы осуществляют синтез простоты и точности за счет локализации. Фиксируя размеры области, мы ограничиваем возможности как упрощения, так и уточнения. Иными словами, простота и точность связаны соотношением дополнительности, а мерой неопределенности является величина области. Покажем, что соотношение неопределенности имеет место для каждой пары из этих трех компонент асимптотики, а третий параметр всегда выступает в роли регулятора.

Пусть имеется разложение функции $f(x)$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \to 0. \tag{1}$$

Частную сумму этого ряда обозначим через $S_N(x)$, а точность аппроксимации будем характеризовать величиной

$$\Delta_N(x) = |f(x) - S_N(x)|. \tag{2}$$

Простота характеризуется здесь числом N, локальность — длиной интервала x. Рассмотрим попарно взаимосвязь величин x, N, Δ, опираясь на известные свойства асимптотических разложений. При фиксированном x разложение вначале сходится, т. е. точность увеличивается за счет простоты. Если зафиксировать N, то конкурентами становятся точность и величина области. Заданное значение Δ достигается тем проще, чем меньше область. Проиллюстрируем эти закономерности на примере. Рассмотрим интегральную показательную функцию

$$E_i(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi} \xi^{-1}\, d\xi, \quad y < 0. \tag{3}$$

Интегрируя по частям, получаем следующее асимптотическое разложение

$$E_i(y) \sim e^{y} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\, y^{-k}. \tag{4}$$

Положим

$$f(x) = -e^{-y} E_i(y), \quad y = -x^{-1}. \tag{5}$$

Вычисляя частные суммы ряда (4) и величину (2) для разных значений x, составим таблицу

x^{-1}	$f(x)$	$\Delta_m(x)$	m	x^{-1}	$f(x)$	$\Delta_m(x)$	m
3	0,262	0,0340	3	7	0,127	0,0340	7
4	0,207	0,0110	4	8	0,112	0,0314	9
5	0,170	0,0237	5	9	0,101	0,0429	9
6	0,145	0,0212	6	10	0,092	0,0418	11

где m — это значение N, при котором достигается наилучшая точность.

Таким образом, при заданном x точность с ростом N увеличивается до Δ_m, фиксируя N, можно наблюдать улучшение точности с уменьшением x. Заданная точность Δ достигается с ростом N тем дальше, чем больше область, и, самое интересное, начиная с некоторого x, не достигается вообще. Ограниченная точность — существенное свойство асимптотической математики, отличающее ее от математики классической. Лишь в случае сходящихся рядов может быть достигнута абсолютная точность при заданном значении x, но путем, так сказать, абсолютного усложнения, т. е. при $N \to \infty$. В общем случае неопределенность принципиальна [8]. Поэтому асимптотическую математику можно соотносить с классической так же, как квантовую механику с классической механикой.

Чтобы лучше осмыслить эту аналогию, встанем на позиции системной триады, частным случаем которой является триада асимптотики «точность — локальность — простота» [9; 10]. Вообще системная триада выражает единство рациональной, сенситивной и интуитивной сторон мышления, отражающих аналитический, качественный и субстанциальный аспекты познания. Свойство дополнительности, присущее компонентам асимптотики, оказывается общим для всех системных триад.

Соотношение неопределенности Гейзенберга «примиряет» координату и импульс, корпускулу и волну через постоянную Планка, связанную с частотной характеристикой объекта. Иными словами, оно объединяет статику и динамику с позиций ритмики [11]. Таким образом, структура триадного синтеза в асимптотической математике и квантовой механике отличается ориентацией: в первой доминирует качественная мера, во второй — субстанциальная. Приверженцы классической парадигмы всегда стремились устранить «досадную неопределенность» путем отыскания скрытых параметров. Однако этот принцип устоял против всех попыток детерминации, доказав тем самым свою фундаментальность, онтологичность. Тем не менее, дискуссии продолжаются. Последние годы они концентрируются вокруг неравенства Белла для корреляционных функций тройных измерений [12]. Из этого неравенства следует, что теории скрытых параметров, воспроизводящие все результаты квантовой механики, должны быть существенно нелокальными. Таким образом, появляется антитеза детерминизм — локальность, поиски разрешения которой ведут к понятию целостности.

В триаде «элементность — связанность — целостность» [10] последняя компонента выражает субстанциальный аспект системы. Это аспектное значение целостности следует отличать от его интегрального, синтетического значения. В синтезе доминирует замыкание, в субстанциальном аспекте неизбежна открытость [13]. Абсолютная замкнутость, как и абсолютная открытость, невозможны, ибо разрушают само понятие целостности. Это новое проявление принципа неопределенности означает, в частности, что целостность несовместима с полнотой [14], стремление к которой всегда было стратегией научного поиска [15].

Итак, чтобы обрести целостность, надо отказаться от полноты. С каких позиций, по какой мере возможно разрешить этот парадокс? Сменим, для остроты и свежести, конкретизирующий объект. Обратимся к жанру исповеди, классические образцы которой дали Бл. Августин, Ж.Руссо, Л.Толстой. Идеал совершенства, чистоты, полноты предписывает стремление к предельной искренности, без оглядки на цензора, зрителя, внешний суд. Но попробуйте полностью устранить этот второй план — и исповедь погибнет. Точно также необходима условность в театре, а еще раньше она воплощается в детских играх [16]. Стремясь к завершенности, мы с какого-то момента начинаем удаляться от жизни. Значит, статический идеал пора заменить динамическим. Противоречие между полнотой и целостностью разрешается с позиций динамики так же, как антитеза точность — простота путем локализации.

Стремление к совершенству очень часто заводит в тупиковые крайности, выход из которых связан с отказом от абсолютной определенности. Потенциальное равноправие сторон системной триады означает, что тупиком может стать любая из ее вершин. А для разрешения любой антитезы требуется третья позиция. Эти закономерности легко прослеживаются, например, на такой популярной триаде, как «долг — любовь — призвание». Другой пример — согласие трех планов деятельности: над собой, для общества, ради идеи [17]: крайности эгоизма, бюрократизма, фанатизма, к сожалению, хорошо знакомы.

Детерминизм становится помехой на пути к единству [18–20]. Принцип неопределенности открывает этот путь. Абсолютная точность — не идеал, а такой же грех, как абсолютная неточность. Любая теория, имея инвариантную основу, не может и не должна подвергаться предельно точной формулировке [21]. В качестве формального аппарата асимптотическая математика приходит на смену классической.

Название термина «принцип неопределенности» отражает его суть лишь частично, односторонне. В другой ипостаси «принципа дополнительности» он смелее вышел за рамки квантовой механики [22]. Замыкая триадную дефиницию, в субстанциальном аспекте можно предложить название «принцип совместимости».

В работе [23] делается вывод о фундаментальности и единстве трех идей современной физики: дополнительность, соответствие, относительность. Соотношение неопределенности появляется как следствие сохранения третьей величины. В связи с этим следует отметить, что попарное рассмотрение элементов триады при фиксированной мере — дань диадной парадигме. Одновременно включение всех трех компонент должно привести к симметричной форме принципа неопределенности — дополнительности — совместимости. Формальное обобщение сделать нетрудно, перемножая три варианта неравенств вида $\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \geq h_3$. В результате получаем

$$\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 \geq \sqrt{h_1 h_2 h_3} \equiv H.$$

Но надо еще наполнить содержанием и смыслом все эти величины. Если ограничиться физикой, то любопытная вещь выплывает на пути трихотомии Филберта [24]. Различая теорию элементарных частиц, теорию относительности и квантовую механику, имеет соответственно три меры ограничений, задаваемые константами e, c, $\hbar$ известная комбинация которых образует безразмерную постоянную тонкой структуры α. Не она ли определяет универсальный масштаб H?

3. От уничтожающего разделения к утопии единства

Ростки новых идей существуют всегда, но расцветают они лишь в благоприятных условиях, когда общество начинает осознавать в них потребность. Асимптотические методы находились на задворках математики сто лет, прежде чем назрело время их расцвета и плодоношения. Сначала они использовались как эффективный способ решения физических задач, затем стали осознаваться как важный методологический принцип [1; 25]. И только сейчас начинает раскрываться фундаментальная роль асимптотической математики в целом.

Смысл любого объекта изнутри не виден и требует взгляда извне. Чтобы понять онтологическую ипостась асимптотики, нужно посмотреть на нее с более общих позиций системной триады.

Понятие системной триады было предложено нами в работе [9] и развито в [26; 10; 13]. В отличие от вырожденной (одномерной) и переходной (гегелевской), системная триада представляет собой двумерный симплекс элементов одного уровня и моделируется горизонтальным треугольником. Такая структура отражает равноправие и единство трех сторон мышления, упомянутых выше. Появившись при определении асимптотических методов, системная триада понадобилась затем как эвристический принцип упорядочения в теории классификации [13], а также при создании информационной системы в молекулярной газодинамике [27; 28]. Наиболее поразительным было семантическое единство триадного архетипа при всем многообразии его проявлений. Корни этой структуры встречаются в науке, культуре и религии прежних времен [29], но методологически она оказывается новым этапом развития диалектики, отвечающим запросам нашего времени.

Если диада — элементарное орудие анализа, то системная триада — фундаментальная структурная ячейка синтеза. Именно она кристаллизуется в исследованиях по структурированию баз данных для информационных систем в расчете на компьютеры пятого поколения, где существенную роль начинает играть человеческий фактор. Через системную триаду информатика выходит на центральные проблемы таких современных наук, как хронософия, синергетика, экология. Это сингулярные проблемы времени, связанные с качественным изменением сущности; проблемы самоорганизации, связанные с динамической структурой синтеза; проблемы биосферы, связанные с устойчивостью неравновесных процессов.

Производство информационных систем становится доминирующим видом общественного производства [30], и существенное использование системных триад в этой области уже оправдывает их изучение и внедрение. Однако роль системно-триадного синтеза этим не ограничивается. Дело в том, что характерной чертой современности является слияние локальных проблем в глобальные, осознание приоритета общечеловеческих ценностей над групповыми, соединение судеб людей и народов в единую общую судьбу человечества. Опасности подвергается вся глобальная триада «мир — человек — природа» [31]. Проблемы синтеза наук, единства частей и выживаемости человечества становится одной проблемой.

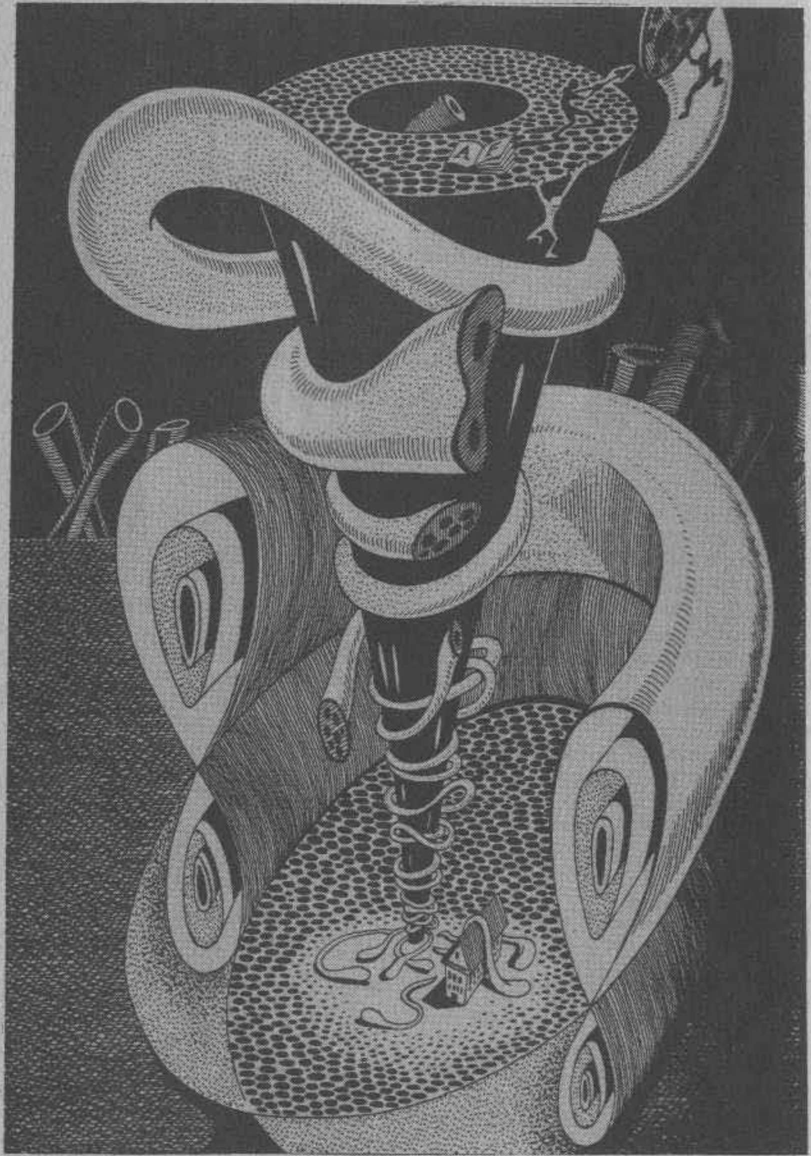
Доминирование отдельных сторон системной триады нарушает гармонию жизненного равновесия. Гегемония анализа сместила критерии ценности в сторону утилитаризма, практицизм привел к экологическому кризису. Научно-техническая революция может обернуться катастрофой, если не подкрепить ее соответствующим подъемом культуры и духа. Автономизация сфер сознания (познавательной, эстетической, нравственной) угрожает сегодня самому единству человеческого духа, и проблема духовного синтеза становится главной проблемой человечества [32]. Лишь на достаточно высоком уровне духовности станет возможным разрешение раздирающих мир экономических, национальных, идеологических противоречий, та победа, в которой не будет побежденных. Та Утопия, которая оказывается единственно возможной Реальностью [33]. «Утопия в наши дни,— утверждает Ч.Айтматов [34],— актуальнее многих злободневных задач, и чем дальше, тем больше она становится настоятельным жизненным делом, когда мы предполагаем, что Личность победит Государство, Культура победит Политику, Совесть победит Насилие».

Мир подошел к рубежу, на котором одномерное мышление становится самоубийственным. Концепция антагонизма изжила себя: бороться приходится не столько «против», сколько «за». Спасение теперь не в уничтожении противника, а в союзе с ним. И дело не только в опасности ядерной войны. К тому же ведут и экология природы, и экология культуры, и экология нравственности. Наряду с разделяющей антитезой появляется потребность в объединяющей постановке вопроса. Триадный синтез восстанавливает связи, разрушенные господствовавшей антитетикой. Он воплощает существенные черты нового мышления, нелинейного по структуре, системного по природе, планетарного по масштабу.

Целостность, будучи субстанциальным аспектом системы, постигается интуитивно. Этим объясняются естественные трудности ее осознания. Попытки формализации обычно приводят к редукционистским версиям, отказ от которых очерчивает границы рассматриваемой субстанции в некотором обобщенном пространстве. Эти границы, отделяя, соединяют, так что целое постигается до конца только вместе с окружением. Как сказал Гете, в то время, когда целое вполне обнаруживает себя, оно указывает на все остальное, и в этом понимании лежит величайшее дерзновение и величайшее смирение [35]. С позиций статического совершенства целостное единство непонятно, нереально, невозможно. Но ведь природа давно уже демонстрирует нам это непостижимое единство в динамике жизни. И как трава сквозь асфальт, целостность сквозь детерминизм пробивается в науке через системные триады. А в математике — через асимптотические методы.

Библиографические ссылки

1. **Баранцев Р.Г.** Об асимптотологии // Вестн. ЛГУ. 1976. № 1.
2. **Брейн Н.Г. де.** Асимптотические методы в анализе. М., 1961.
3. **Бабич В.М., Булдырев В.С.** Искусство асимптотики // Вестн. ЛГУ. 1977. № 13.
4. **Kruskal M.D.** Asymptotology // Math. models in phys. sciences. N. J., 1963.
5. **Фридрихс К.О.** Асимптотические явления в математической физике // Математика. 1957. № 2.
6. **Segel L.A.** The importance of asymptotic analysis in appl. math. // Amer. math. monthly. 1966. Vol. 73. No. 1.
7. **Баранцев Р.Г.** Предисловие редактора перевода к русскому изданию книги А. Найфэ. Введение в методы возмущений. М., 1984.
8. **Баранцев Р.Г.** Принцип неопределенности в асимптотической математике // Методы возмущений в механике. Иркутск, 1984.
9. **Баранцев Р.Г.** Дефиниция асимптотики и системные триады // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск, 1980.
10. **Баранцев Р.Г.** Системная триада дефиниций // Междунар. форум по инф. и документации. 1982. Т. № 1.
11. **Баранцев Р.Г.** Время, динамика, синтез // Темпоральные аспекты моделирования и прогнозирования в экологии. Рига, 1986.
12. **Спасский Б.И., Московский А.В.** О нелокальности и квантовой физике // Успехи физических наук. 1984. Т. 142. № 4.
13. **Баранцев Р.Г.** Системные триады и классификация // Теория и методология биологических классификаций. М., 1983.
14. **Bohm D, Hiley B.** On the intuitive understanding of nonlocality as implied by quantum theory // Found. of Phys. 1975. Vol. 5. No. 1.
15. **Бажанов В.А.** Проблема полноты квантовой теории: поиск новых подходов. Казань, 1983.
16. **Гулыга А.В.** Игровое поведение и творческое мышление // Природа. 1986. № 4.
17. Латышские дайны // Сост. И. Зиедонис. М., 1986.
18. **Popper K.R.** The open universe: An argument for indeterminism. Totowa (N. J.), 1982.
19. **Клайн М.** Математика. Утрата определенности. М., 1984.
20. **Bondi H.** Why mourn the passing of determinacy? // Old and new questions in physics, cosmology, philosophy and theoretical biology. N. Y.; 1983.
21. **Вальков К.И.** Геометрические аспекты принципа инвариантной неопределенности. Л., 1975.
22. **Алексеев И.С.** Концепция дополнительности. М., 1978.
23. **Стригачев А.** Дополнительность и сохранение (к интерпретации принципа дополнительности) // Философская мысль. София, 1982. Т. 38. № 9.
24. **Philbert B.** Der Dreieine. Anfang und Sein. Die Structur der Schöpfung // Stein am Rhein. 1974.
25. **Андрианов И.В., Маневич Л.И.** Две ипостаси асимптотики // Природа. 1987.
26. **Баранцев Р.Г.** Политомические модели системного подхода // Моделирование и прогнозирование в биоэкологии. Рига, 1982.
27. **Баранцев Р.Г.** О триадной структуре информационных систем // Кинетические и газодинамические процессы в неравновесных средах. М., 1986.
28. **Баранцев Р.Г.** Системная структура классификатора в молекулярной газодинамике // Динамика разреженных газов и молекулярная газодинамика. М., 1988.
29. Bibliotheca Trinitariorum. International Bibliography of Trinitarian Literature / Ed. by E. Schadel. Munchen e. a. 1984. Vol. I. 1988. Vol. 2.
30. Производство как общественный процесс (актуальные проблемы теории и практики). М., 1986.
31. **Фролов И.Т.** Время решающих перемен // Вопросы философии. 1985. № 8.
32. **Никитин Е.П.** О природе обоснования // Вопросы философии. 1979. № 10.
33. **Карякин Ю.Ф.** Не опоздать! // Пути в незнаемое. Вып. 19. 1986.
34. **Айтматов Ч.** Выступление на 3-й сессии Иссык-Кульского форума (Гранада, 1988) // Лит. газета. 14 декабря. 1988.
35. **Свасьян К.А.** Философское мировоззрение Гете. Ереван, 1963.



ЛИТЕРАТУРА

1. Академик Илья Михайлович Лифшиц. М., Знание, 1987.
2. Альбом течений жидкости и газа //Сост. и авт. текст М. Ван-Дайка. М., Мир, 1986.
3. **Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И.** Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М., Наука, 1985.
4. **Андрианов И.В., Маневич Л.И.** Две ипостаси асимптотики //Природа, 1987, № 4. С. 85-97.
5. **Андрианов И.В., Маневич Л.И.** Асимптотические методы и физические теории. М., Знание, 1989.
6. **Андрианов И.В., Брезински К.** Второе рождение Анри Паде //Природа, 1991, № 5. С. 126–128.
7. **Арнольд В.И.** Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М., Наука, 1989.
8. **Ахундов М.Д., Баженов Л.Б.** Эволюция, нелинейность и марксизм //Природа, 1991, № 4. С. 3–10.
9. **Бабич В.М., Булдырев В.С.** Искусство асимптотики //Вестник Ленинградского университета, 1977, № 13. С. 5–12.
10. **Баранцев Р.Г.** Об асимптотологии //Вестник Ленинградского университета, 1976, № 1. С. 69–76.
11. **Барашенков В.С.** За пределами теории Эйнштейна — суперсимметрия и супергравитация //Знание — сила, 1987, № 7. С. 29–37.
12. **Барашенков В.С.** Кварки, протоны, Вселенная. М., Наука, 1987.
13. **Баренблатт Г.И.** Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л., Гидрометеоиздат, 1982.
14. **Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.** Осреднение процессов в периодических средах. М., Наука, 1984.
15. **Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.** Аппроксимации Паде. М., Мир, 1986.
16. **Беллман Р.** Математические методы в медицине. М., Мир, 1987.
17. **Берков А.В., Жижин Е.Д., Кобзарев И.Ю.** Теория тяготения Эйнштейна и ее экспериментальные следствия. М., МИФИ, 1981.
18. **Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.** Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев, Наукова думка, 1976.
19. **Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.** Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. М., Наука, 1983.
20. **Болотин В.В., Новичков Ю.Н.** Механика многослойных конструкций. М., Машиностроение, 1980.
21. **Больцман Л.** Статьи и речи. М., Наука, 1970.
22. **Бутузов В.Ф.** Сингулярные возмущения. М., Знание, 1988.
23. **Вайнберг С.** Первые три минуты. М., Мир, 1981.
24. **Вайнштейн Л.А.** Проблемы дифракции в работах В.А.Фока //Природа, 1988, № 11 С. 25–33.
25. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М., Наука, 1967.
26. **Веденов А.А.** Моделирование элементов мышления. М., Наука, 1988.
27. **Вейль Г.** Симметрия. М., Наука, 1968.
28. **Вейль Г.** Математическое мышление. М., Наука, 1989.

29. Вильсон Дж.Н. Ренормгруппа и критические явления //Успехи физических наук, 1983, т.141, № 2. С. 193–220.

30. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.–Л., Гостехтеориздат, 1949.

31. Воронцов-Вельяминов Б.А. Лаплас. М., Наука, 1985.

32. Гайденко П.П. Природа и идеализированный объект //Природа, 1986, № 11. С. 84–92.

33. Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.,Наука, 1988.

34. Гамов Г., Иваненко Д., Ландау Л. Мировые постоянные и предельный переход //ЖРФХО, 1928, т. 60. С. 13–17.

35. Гелл-Манн М. От перенормируемости к вычислимости //Успехи физических наук, 1987, т. 151, № 4. С. 683–698.

36. Гельфанд И.М., Розенфельд Б.И., Шифрин М.А. Очерки о совместной работе математиков и врачей. М., Наука, 1989.

37. Гинзбург В.Л. О физике и астрофизике. М., Наука, 1985.

38. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Наука, 1976.

39. Горелик Г.Е. Размерность пространства. М.,изд-во МГУ, 1983.

40. Горелик Г. CxGxh = ? //Знание — сила, 1988, № 2. С. 21–28.

41. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М., Наука, 1978.

42. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Поиски и открытия планет. М.,Наука, 1975.

43. Данилов Ю.А. Джон фон Нейман. М., Знание, 1990.

44. Дюкас Э., Хофман Б. Альберт Эйнштейн как человек //Вопросы философии, 1991, № 1.С.61–100.

45. Жарков В.Н., Козенко А.В. Крупнейший геофизик 20 века //Природа, 1991, № 1. С. 77–84.

46. Журавлев В.Ф. Основы механики. Методические аспекты //Препринт ИПМ АН СССР. № 251. М., 1985. 46 с.

47. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М., Наука, 1988.

48. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М., Наука, 1988.

49. Зельдович Я.Б. Предисловие к [13], с. 5–10.

50. Зельманов А.Л. Космология //Физический энциклопедический словарь. М., Наука, 1982. Т. 2. С. 491–501.

51. Иваницкий Г.Р. Ритмы развивающихся сложных систем. М., Знание, 1988

52. Йаффе Л. Квантовая механика с большими N и классические пределы //Физика за рубежом, сер. А, 1984. С. 60–88.

53. Клайн М. Математика — поиск истины. М.,Мир, 1988.

54. Киржниц Д.А. Элементарная длина //Природа, 1991, № 10. С. 8–12.

55. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1972.

56. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М., Мир, 1982.

57. Крылов А.Н. Мои воспоминания. Л., Судостроение, 1984.

58. Кузнецов Б.Г. Галилей. М., Наука, 1964.

59. Лейбниц. Два отрывка о принципе непрерывности //Лейбниц. Сочинения, т. 1. М., Мысль, 1982. С. 105–206.

60. Ленат Д.Б. Программное обеспечение систем искусственного интеллекта //В мире науки, 1984, № 11. С. 112–122.

61. Ляв А. Математическая теория упругости. М., Л., Гостехтеориздат, 1935.

62. Мак-Клоски М. Интуитивная физика //В мире науки, 1983, № 6. С. 90–98.

63. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М., Мир, 1983.

64. Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М., Наука, 1987.

65. Матвеев Н.М., Алимова Н.Н. Истоки асимптотических методов в теории уравнений с частными производными //Матем. анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания. Л., Лен. педаг. ин-т, 1988. С. 148–155.

66. Медведев А.Ф. Французская школа теории функций и множеств на рубеже 19–20 вв. М., Наука, 1976.

67. Мешков Н.И., Чириков Б.В. Электромагнитное поле, часть 1. Новосибирск, Наука, 1987.

68. Мигдал А.Б. Поиски истины, М., Знание, 1978.

69. Мигдал А.Б. Квантовая физика и Нильс Бор. М., Знание, 1987.

70. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., Наука, 1969.

71. Моисеев Н.Н. Комментарии к «Эволюции атмосферы, биосферы и климата» В.А.Костицына //Костицын В.А. Эволюция атмосферы, биосферы и климата. М., Наука, 1984. С. 46–96.

72. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М., Наука, 1981.

73. Набоков В.В. Подвиг. Собр. соч. в 4-х т. Т. 2. М., Правда, 1990.

74. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М., Мир, 1984.

75. Налимов В.В. Где взять информацию? //Техника и наука, 1989, № 1. С. 8–9.

76. Неванлинна Р. Пространство, время и относительность. М., Мир, 1966.

77. Нестеренко Е.М. Балтазар Ван дер Поль //Нариси із історії природознавства та техники, 1970, №. 11. С. 13–16.

78. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М., МГУ, 1991.

79. Окунь Л.Б. Фундаментальные константы физики //Успехи физических наук, 1991, т. 161, № 9. С. 177–194.

80. Пайерлс Р. Построение физических моделей //Успехи физических наук, 1983, т. 140, № 2. С. 315–332.

81. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., Наука, 1967.

82. Пархоменко В.П., Стенчиков Г.Л. Математическое моделирование климата. М., Знание, 1986.

83. Паули В. Физические очерки. М., Наука, 1975.

84. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики, т. 2 //Избранные труды, т. 1. М., Наука, 1971. С. 329–744.

85. Пуанкаре А. О науке. М., Наука, 1983.

86. Раушенбах Б.В. Системы и перспективы в изобразительном искусстве. М., Наука, 1986.

87. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Анализ операторов. Том 4. М., Мир, 1982.

88. Розенберг Н., Бардзелли мл. Л.Е. Наука, техника и западное чудо //В мире науки, 1991, № 1. С. 6–15.

89. Розенталь И.Л. Эволюция физики и математика. М.,Знание, 1982.

90. Розенталь И.Л. Геометрия, динамика, Вселенная. М., Наука, 1987.

91. Розенталь И.Л. Элементарные частицы и структура Вселенной. М., Наука, 1984.

92. Рытов С.М. В лаборатории колебаний //Воспоминания об академике М.А.Леонтовиче. М., Наука, 1990. С. 35–48.

93. Селье Г. От мечты к открытию. М., Прогресс, 1987.

94. Сидоров А.Ф. Аналитические методы математической физики и математический эксперимент //Число и мысль, 1987, № 10. С. 75–100.

95. Сонин А.С., Шибаев В.П. Лауреаты нобелевской премии 1991 г. По физике П.-Ж. де Жен //Природа, 1992, № 1. С. 93–96.

96. Степун Ф.А. Мысли о России //Новый мир, 1991, № 6. С. 201–239.

97. Стюарт Йен. Тайны катастрофы. М., Мир, 1987.

98. **Тер-Крикоров А.М.** Нелинейные задачи и метод малого параметра. М., Знание, 1984.

99. **Тиле Р.** Леонард Эйлер. Киев, Вища школа, 1983.

100. **Тимошенко С.П.** История науки о сопротивлении материалов. М., Гостехтеориздат, 1957.

101. **Томилова А.Е.** История возникновения и развития метода ВКБ //Матем. анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания. Л., Лен. педаг. ин-т, 1988. С. 148–155.

102. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., Мир, 1975.

103. **Турбинер А.В.** Задача о спектре в квантовой механике и процедура «нелианеризации» //Успехи физических наук, 1984, т. 144, № 1. С. 35–78.

104. **Успенский В.А.** Что такое нестандартный анализ? М., Наука, 1987.

105. **Федорюк М.В.** Асимптотические методы в анализе //Итоги науки и техники. Современные проблемы. Фундаментальные направления, т. 13, М., ВИНИТИ, 1986. С. 93–210.

106. **Фок В.А.** Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., Наука, 1970.

107. **Фок В.А.** Принципиальное значение приближенных методов в теоретической физике //Успехи физических наук, 1936, т. 16, № 2. С. 1070–1083.

108. **Фоменко А.Т.** О наглядном изображении математических понятий //Химия и жизнь, № 11, 1981. С. 84–89.

109. **Фоменко А.Т., Фукс Д.Б.** Курс гомотопической топологии. М., Наука, 1989.

110. **Фон Нейман Дж.** Математик //Природа, 1983, № 2. С. 88–92.

111. **Фрейд З.** Введение в психоанализ. М.,Наука, 1986.

112. **Френкель В.Я., Чернин А.Д.** От альфа распада до большого взрыва. М., Знание, 1990.

113. **Хокинг С.** От большого взрыва до черных дыр. М., Мир. 1990.

114. **Хоффман Д.** Эрвин Шредингер. М., Мир, 1987.

115. **Цыкало А.Л.** Александр Михайлович Ляпунов. М., Наука, 1988.

116. **Чэрчлэнд П.С.** От идей Декарта к моделированию мозга //В мире науки, 1989, № 9. С. 98–99.

117. **Шафрановский И.И.** Симметрия в природе. Л., Недра, 1968.

118. **Широков Д.В.** Новый метод теоретической физики //Наука и человечество. 1987. М., Знание, 1987. С. 127–137.

119. **Шредингер Э.** Обусловлено ли естествознание окружающей средой? //Эрвин Шредингер. Новые пути в физике. М.,Наука, 1971. С. 21–45.

120. **Шрейдер Ю.А.** ЭВМ как средство представления знаний //Природа, 1986, № 10. С. 14–20.

121. **Шубников А.В., Копцик В.А.** Симметрия в науке и искусстве. М., Наука, 1972.

122. **Эйнштейн А.** Новое определение размеров молекул //Альберт Эйнштейн. Собрание трудов. Т. 3. М., Наука, 1966. С. 75–90.

123. **Юшкевич А.П.** Леонард Эйлер.М.,Знание, 1982.

124. **Яглом И.М.** Почему высшую математику открыли одновременно Ньютон и Лейбниц? //Число и мысль. 1983, № 6. С. 99–125.

125. **Яглом И.М.** Современное искусство и компьютеры. М., Знание, 1990.

126. **Ackeret J.** Ludwig Prandl //ZAMP, 1954, v. 5, № 2. С. 175–176.

127. **Bender C.M., Milton K.A., Pinsky S.S., Simmons L.M.Jr.** A new perturbative approach to nonlinear problem //J.Math. Phys., 1989, v. 20, № 7. С. 1447–1455.

128. **Barantsev R.G.** Asymptotic versus classical mathematics //Topics in Mathematical Analysis, 1989. С. 49–64.

129. **Basdevant J.-L.** The Pade approximants and its physical applicftions //Fortschr. Phys., 1972, v. 20. С. 282–331.

130. **Filimonov A.M., Kurchanov P.F., Myshkis A.D.** Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with n beards when n is large //C.R. Acad. Sci., Paris, serie 1, 1991, vol. 313. С. 961–965.

131. **Kruskal M.D.** Asymptotology //Math. Models in Physical Sciences. № N.J., Prentice-Hall, 1963. С. 17–48.

132. **Lin S.S., Segel L.A..** Mathematical Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences. Philadelphia, SIAM, 1988.

134. **Segel L.A.** The importance of asymptotic analysis in applied mathematics //Amer. Math. Monthly, 1966, vol. 73, № 1. С. 7–14.

135. **Verhulst F.** Perturbation theory from Lagrange to Van der Pol //Nieuw Arch. Wisk., 1984, v.2, № 2. С. 428–438.

136. **Weinberg S.** Why the renorm group is a good thing //Asymptotic Realms of Physics, 1983. С. 178–183.

137. **Wilson K.** *Problems in physics with many seals of length //Scientific American*, 1979, № 8. С. 140–157.

138. **Zeytonian R.** Asymptotic Modeling of Atmosphere Flows. Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1990.

139. **Fomenko A.T.** Mathematical Impressions. 1991. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Опечатки в книге

Андрианов И.В., Маневич Л.И. Асимптотология: идеи, методы, результаты. М.: Аслан, 1994.

стр. 17, строка 10 снизу

должно быть:

вышел в 1882 г.

стр. 41, строка 10 сверху

должно быть:

$$\sin 2\varepsilon \sim 2\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^3 + \frac{4}{15}\varepsilon^5 - \ldots,$$

$$\sin 2\varepsilon \sim 2tg\,\varepsilon - 2tg^3\varepsilon + 2tg^5\varepsilon - \ldots,$$

$$\sin 2\varepsilon \sim 2\ln(1+\varepsilon) + \ln(1+\varepsilon^2) - 2\ln(1+\varepsilon^3) - \ldots,$$

стр. 47, формула (2.9)

должно быть:

$$x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}$$

стр. 47, строка 5 сверху

должно быть:

и разложим его в ряд Маклорена

стр. 52, формула (2.17)

должно быть:

$$m\ddot{x}^{(0)} + \beta\dot{x}^{(0)} = 0$$

стр. 89, строка 3 сверху

должно быть:

где старые здания

стр. 98, таблица 4.1, первая строка

должно быть:

$$c = \infty$$

стр. 98, рис. 4.1, в правом верхнем углу

должно стоять:

КМ

стр. 125, левый столбец, 19, 20 строки сверху

Неточность. Термин «непрерывная дробь» (fractio continua) был введен Валлисом (John Wallis, 1616-1703). Этот термин понравился Эйлеру, который его систематически употреблял.

стр. 129, правый столбец, 18, 19 строки сверху

должно быть:

ряда изопериметрических задач.

стр. 132, формула (7.3)

должно быть:

$$+\sum_{k_1,k_2=-m}^{m} \frac{B_{k_1 k_2} \cos[(k_1 n_1 + k_2 n_2)t + \psi k_1 k_2]}{k_1 n_1 + k_2 n_2}$$