



Булатов Виталий Васильевич — доктор физико-математических наук, доктор экономических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, автор более 300 научных работ, в том числе 32 монографий, в области математического моделирования, гидродинамики, экономической теории, информационной безопасности. www.bulatov.su



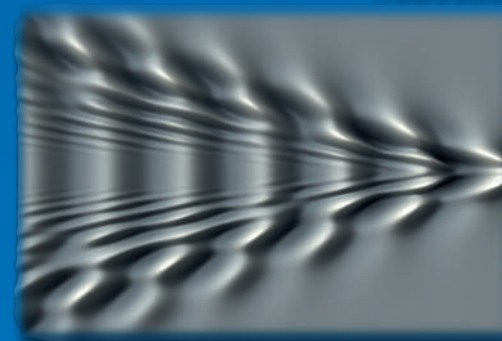
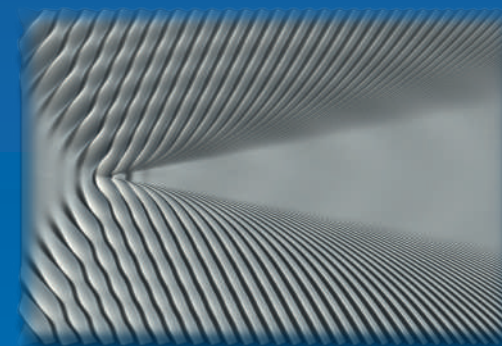
Владимиров Игорь Юрьевич — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН, автор более 60 опубликованных научных работ в области океанологии, гидродинамики, математической физики.

ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТНЫХ
И ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН
В ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ СРЕДАХ



В. В. БУЛАТОВ
И. Ю. ВЛАДИМИРОВ

ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТНЫХ
И ВНУТРЕННИХ
ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН
В ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ СРЕДАХ



В. В. БУЛАТОВ
И. Ю. ВЛАДИМИРОВ

ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТНЫХ И ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ СРЕДАХ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2025

УДК 532.5
ББК 22.253
Б 90

Булатов В.В., Владимиров И.Ю. **Динамика поверхностных и внутренних гравитационных волн в гидрофизических средах.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2025. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-2011-1.

Монография посвящена систематическому изложению фундаментальных проблем волновой динамики природных сильно неоднородных гидрофизических сред (океан, атмосфера Земли). В книге исследованы основные математические модели, описывающие процессы возбуждения и распространения внутренних и поверхностных гравитационных волновых пакетов. Изложены асимптотические методы расчета и анализа волновых полей внутренних и поверхностных гравитационных волн для проведения качественных оценок получаемых решений и оперативного анализа измерений в натурных условиях. Получены точные и асимптотические решения модельных задач, которые описывают основные механизмы волновой генерации и динамики с учетом реальной изменчивости сильно неоднородных сред и различных механизмов возбуждения волновых пакетов. Построены равномерные асимптотики решений, описывающих амплитудно-фазовую структуру волновых полей для модельных и произвольных значений основных параметров гидрофизических природных сред: плотности, солёности, фоновых сдвиговых течений, наличия ледяного покрова. Значительное место в монографии уделено сравнению получаемых аналитических результатов с данными натурных измерений гидрофизических полей.

Книга предназначена специалистам в области гидрофизики, прикладной математики, математического моделирования, гидродинамики, океанологии.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН *Е. Г. Морозов*
(заведующий лабораторией гидрологических процессов
Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН);

доктор физико-математических наук *Т. О. Чаплина*
(ведущий научный сотрудник лаборатории геомеханики
Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН)

ISBN 978-5-9221-2011-1

© ФИЗМАТЛИТ, 2025

© В. В. Булатов, И. Ю. Владимиров, 2025

*Светлой памяти
Владимилова Юрия Владимировича
посвящается*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	9
Обзор литературы	27
Глава 1. Динамика поверхностных волн в плоском случае	40
1.1. Обтекание препятствий двухслойным потоком бесконечной глубины	41
1.1.1. Введение	41
1.1.2. Постановка задачи и ее решение	41
1.1.3. Анализ и численные расчеты для реальных условий моря	53
1.1.4. Заключение	58
1.2. Обтекание препятствий двухслойным потоком конечной глубины	59
1.2.1. Постановка задачи и ее решение	59
1.2.2. Анализ и численные расчеты для реальных условий моря	81
1.2.3. Заключение	90
1.3. Волновая реакция при циркуляционном обтекании подводного препятствия двухслойным потоком конечной глубины	91
1.3.1. Введение	91
1.3.2. Препятствие в нижнем слое	92
1.3.3. Препятствие в верхнем слое	100
1.3.4. Численные расчеты	103
1.3.5. Обсуждение результатов модельных расчетов	106
1.3.6. Заключение	108
1.4. Силовое воздействие потока бесконечно глубокой жидкости на источник под ледяным покровом	109
1.4.1. Введение	109
1.4.2. Постановка задачи	111
1.4.3. Аналитические решения	113
1.4.4. Численные результаты и обсуждение	117
1.4.5. Заключение	120

Глава 2. Динамика поверхностных волн в трехмерном случае	122
2.1. Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины	125
2.1.1. Постановка задачи и интегральная форма решения для возвышения свободной поверхности	125
2.1.2. Построение неравномерной асимптотики решения: интегрирование с помощью вычетов и метода стационарной фазы	127
2.1.3. Построение равномерной асимптотики решения . . .	130
2.1.4. Заключение	135
2.2. Дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины	137
2.2.1. Постановка задачи и интегральные формы решений	138
2.2.2. Построение асимптотик решения	143
2.2.3. Заключение	148
2.3. Гибридные поверхностные волны от гармонического источника возмущений	149
2.3.1. Постановка задачи и интегральное представление решения	149
2.3.2. Фазовая структура гибридных волн	152
2.3.3. Равномерная асимптотика поля гибридных волн . . .	153
2.3.4. Заключение	155
2.4. Дальние поля поверхностных гравитационных волн от быстро движущегося осциллирующего источника возмущений	157
2.4.1. Постановка задачи и интегральные формы решений	157
2.4.2. Построение асимптотик решений	158
2.4.3. Заключение	166
2.5. Равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных волн от вспыхнувшего локализованного источника	167
2.5.1. Введение	167
2.5.2. Постановка задачи и интегральные формы решений	167
2.5.3. Неравномерные асимптотики решений	169
2.5.4. Равномерные асимптотики решений	173
2.5.5. Заключение	176
2.6. Дальние поля возмущений поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником	177

2.6.1. Постановка задачи, интегральные формы решений	177
2.6.2. Построение асимптотик решений	179
2.6.3. Заключение	187
Глава 3. Динамика внутренних гравитационных волн в гидрофизических средах	190
3.1. Динамика дальних полей внутренних гравитационных волн в океане с произвольным распределением частоты плавучести	191
3.1.1. Введение	191
3.1.2. Постановка задачи и аналитические представления решений	192
3.1.3. Результаты численного моделирования	195
3.1.4. Заключение	205
3.2. Равномерные асимптотики полей внутренних гравитационных волн от начального радиально-симметричного возмущения	207
3.2.1. Введение	207
3.2.2. Постановка задачи, интегральные формы решений	208
3.2.3. Равномерные асимптотики решений	210
3.2.4. Результаты численных расчетов	213
3.2.5. Заключение	216
3.3. Асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн от импульсного локализованного источника во вращающейся стратифицированной среде	219
3.3.1. Введение	219
3.3.2. Постановка задачи, интегральные формы решений	221
3.3.3. Асимптотики решений	223
3.3.4. Заключение	229
Глава 4. Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах со средними сдвигowymi течениями	232
4.1. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в океане с произвольными распределениями скорости сдвигowych течений и частоты плавучести	233
4.1.1. Введение	233
4.1.2. Постановка задачи	234
4.1.3. Интегральные представления решения	236
4.1.4. Алгоритм вычисления собственных функций и собственных значений основной вертикальной спектральной задачи	239
4.1.5. Результаты численных расчетов	242
4.1.6. Заключение	255

4.2. Внутренние гравитационные волны в океане при обтекании подводного препятствия сдвиговым течением	257
4.2.1. Введение	257
4.2.2. Постановка задачи	258
4.2.3. Интегральные формы решения и численные результаты	259
4.2.4. Заключение	266
4.3. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в стратифицированной среде с двухмерными сдвиговыми течениями	267
4.3.1. Введение	267
4.3.2. Постановка задачи	268
4.3.3. Интегральное представление решения	270
4.3.4. Результаты численных расчетов	273
4.3.5. Заключение	284
Заключение	287
Литература	299

ВВЕДЕНИЕ

Изучение волновых процессов в неоднородных гидрофизических природных средах превратилось в быстро развивающуюся область, причем результаты этих исследований важны как с фундаментальной точки зрения, так и для технических приложений. Новые экспериментальные и технические возможности стимулируют работу по математическому моделированию и асимптотическому исследованию волновой динамики внутренних и поверхностных гравитационных волн в гидрофизических средах. В настоящее время наблюдается устойчивый рост интереса к изучению волновых движений природных гидрофизических сред, обусловленный проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, охраны и изучения окружающей среды, эксплуатации сложных гидротехнических сооружений, в том числе морских нефтедобывающих комплексов и рядом других актуальных задач науки и техники. Поэтому актуальность рассмотренных в монографии задач определяется не только практическими потребностями, но и большим теоретическим содержанием возникающих здесь фундаментальных научных задач математического моделирования.

Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с генерацией волновых движений в толще жидкости либо на ее поверхности всевозможными источниками возмущений, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы. Однако в ряде случаев адекватное качественное представление

об изучаемом круге явлений можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. В этом отношении особую роль играют задачи математического моделирования динамики внутренних и поверхностных гравитационных волн в гидрофизических средах, в том числе с учетом наличия фоновых сдвиговых течений и ледяного покрова, изложению которых посвящена монография. Даже в рамках линейных моделей их решения достаточно своеобразны и определяют, наряду с нетривиальными физическими следствиями, также и самостоятельный математический интерес.

Первоначально теория волновых движений стратифицированных гидрофизических сред развивалась как теория поверхностных волн, описывающая поведение свободной поверхности жидкости, находящейся в поле силы тяжести. Позднее было понято, что поверхностные волны являются частным примером волн, существующих на границе раздела жидкостей различной плотности, которые, в свою очередь, представляют частный случай внутренних гравитационных волн в неоднородной (стратифицированной) по плотности среде. В реальных природных средах неоднородное распределение плотности может иметь место (как в вертикальном, так и в горизонтальных направлениях), при этом учет неоднородности среды как по вертикали, так и по горизонтали, а также ее нестационарности при исследовании распространения внутренних гравитационных волн требует использования специального математического аппарата. Как правило, рассматривается только случай изменения плотности по вертикали, при этом предполагается, что распределение плотности является устойчивым, т. е. плотность не убывает с глубиной.

Монография посвящена изложению фундаментальных проблем математического моделирования волновой динамики гидрофизических сред для изучения процессов возбуждения и распространения внутренних и поверхностных гравитационных волн с учетом реальной изменчивости природных сред, наличия фоновых сдвиговых течений и ледяного покрова. Построены и изучены новые математические модели генерации внутренних и поверхностных гравитационных волн в произвольно стратифициро-

ванных гидрофизических средах, в том числе с учетом наличия фоновых сдвиговых течений и ледяного покрова, разработаны и верифицированы асимптотические методы их исследования.

Теория волновых движений стратифицированных сред — раздел современной гидродинамики, быстро развивающийся в последнее время, весьма интересный в теоретическом отношении и связанный с важнейшими приложениями в технике (гидротехнике, судостроении, мореплавании, энергетике) и в геофизике (океанологии, метеорологии, гидрологии, охране окружающей среды). Большинство прикладных задач, посвященных генерации волн различными возмущениями, решаются, как правило, в линейной постановке, т.е. в предположении, что амплитуда волновых движений мала по сравнению с длиной волны. Промышленная деятельность на континентальном шельфе, связанная с добычей ископаемых, является важной причиной исследований внутренних и поверхностных гравитационных волн, их характеристики используются для оценки их воздействия на окружающую среду и технологические морские конструкции. Знания о волновой динамике важны для обеспечения безопасности при строительстве и эксплуатации морских платформ на континентальном шельфе, и для этих целей необходимо контролировать воздействие волн. При строительстве нефтяных платформ проводится систематическое измерение волн и течений, поэтому решение фундаментальной проблемы моделирования волновой динамики позволит избежать дорогостоящих натурных измерений.

В настоящее время основное внимание, как правило, уделяется экспериментальному исследованию волновой динамики, детальному теоретическому рассмотрению динамики внутренних и поверхностных линейных волн в средах с модельными распределениями плотности, а также прямому численному моделированию соответствующих уравнений гидродинамики. При исследовании волновых процессов в природных стратифицированных гидрофизических средах (океан, атмосфера) содержательную роль играет математическое и численное моделирование. В экспериментальных и натурных наблюдениях внутренних и поверхностных волн, а также при рассмотрении большого числа

конкретных задач накоплен большой фактический материал, который нуждается в теоретическом осмыслении. Поэтому в настоящее время актуальным стал вопрос о дальнейшем развитии методов математического моделирования процессов внутренних и поверхностных колебаний в стратифицированных гидрофизических средах. Основное внимание в большинстве исследований по данной проблематике уделяется математическому моделированию течений стратифицированной жидкости, в частности задачам, связанным с генерацией волновых движений в глубине жидкости и ее поверхности всевозможными источниками возмущений. Хотя большинство практически важных задач этого класса решается, как правило, в линейной постановке, для дальнейших исследований необходимо оценивать пределы применимости этих приближений и на этой основе искать пути к решению полной нелинейной задачи. Необходимость этого выяснилась, например, при исследованиях рассеивания волн погруженными источниками возмущений, в том числе рельефом морского дна. При этом в основе анализа, как правило, лежат асимптотические методы, что позволяет на базе изучения невозмущенных уравнений формировать соответствующие асимптотические разложения, учитывающие неоднородность и нестационарность природных стратифицированных сред. Относительная простота решения линейных уравнений по сравнению с полной нелинейной задачей, современное развитие соответствующего математического аппарата и вычислительной техники позволяют ответить на многие запросы практики.

Причины возникновения поверхностных и внутренних гравитационных волн в океане и атмосфере очень разнообразны: колебания атмосферного давления, обтекание неровности дна, движение надводного или подводного корабля, деформация в поле плотности, образующиеся по каким-либо причинам турбулентные пятна, подвижка дна или подводное землетрясение, надводный или подводный взрыв и т. п. Одним из механизмов генерации внутренних гравитационных волн может являться, например, возбуждение волновых полей при движении (обтекании) твердых тел, пятен турбулентности, водных линз и иных невол-

новых образований с аномальными характеристиками. При решении задач о генерации внутренних гравитационных волн, например потоком стратифицированной жидкости, обтекающим некоторое нелокальное препятствие, наиболее распространенным является два способа. Первый заключается в численном решении линейаризованной системы уравнений гидродинамики, описывающей внутренние волны, к недостаткам которого следует отнести ограниченность области интегрирования пространства, в котором возможно численное решение задачи. Другой способ состоит в том, чтобы заменить функцию, описывающую форму нелокального источника, или функцией, имеющей достаточно простой вид, или системой точечных источников, взятых с некоторым весом. Очевидно, что при решении задачи таким способом возникает проблема оценки границ применимости использования различных упрощающих аппроксимаций обтекаемого препятствия.

Актуальность исследований по математическому моделированию волновых пакетов в стратифицированных гидрофизических средах связана с тем, что искомое решение в линейной постановке посредством преобразования Фурье представляется в форме квадратур от решения соответствующих вертикальных спектральных задач. После аналитического или численного решения этой задачи волновое поле можно найти численным интегрированием, и, казалось бы, нет необходимости в исследовании асимптотик. Тем не менее получение таких асимптотик весьма актуально как с научной точки зрения, так и для практических приложений. Объясняется это следующими причинами. Во-первых, по мере увеличения времени и расстояния от источников возмущений приходится вычислять интегралы от все более и более осциллирующих функций, и численные расчеты делаются все более и более трудоемкими. Во-вторых, получить из численных расчетов качественное описание уходящих от источника волновых пакетов внутренних и поверхностных волн, их эволюцию во времени и пространстве, их зависимость от характеристик источника и т. п. практически либо невозможно, либо это требует больших расчетов. В то же время асимптотические выражения для волновых полей представляют собой явные формулы,

выражающиеся через известные специальные функции. Их качественный анализ, как правило, не вызывает затруднений. В-третьих, найденные асимптотики позволяют, в принципе, перейти к более реалистической ситуации сред, параметры которых медленно меняются по горизонтали и времени, так как наличие явных аналитических конструкций позволяет учесть изменение параметров среды вдоль трассы распространения волновых пакетов посредством соответствующего изменения аргументов, описывающих поле специальных функций, а также амплитудных фазовых множителей.

Особый интерес к исследованию внутренних и поверхностных гравитационных волн связан также с интенсивным освоением Арктики и ее природных богатств. Внутренние (и частично поверхностные) гравитационные волны пока недостаточно изучены в Арктике, так как двигаются подо льдом и сверху практически не видны, однако доступная информация о движении подводных объектов свидетельствует об их наличии. Но бывают исключения, когда внутренние гравитационные волны достигают льда и поднимают или опускают его с определенной периодичностью, что доступно наблюдению с помощью средств радиолокационного зондирования. Воздействие всех видов волн способно привести к расколу ледового покрытия в Арктике. Кроме того, волны способствуют движению айсбергов и различного рода загрязнений. Поэтому исследования волновой динамики в области Арктического шельфа является важной научной и практической задачей для обеспечения безопасности при строительстве и эксплуатации морских платформ. Проблемы комплексного научного изучения, освоения и использования Арктики особенно важны в связи с особыми национальными интересами (экономическими, оборонными, геополитическими, научными) Российской Федерации в этом регионе и его спецификой. Экономические интересы России в Арктике обусловлены тем, что здесь сосредоточены месторождения ряда важнейших полезных ископаемых, являющихся определяющими для развития экономики всей страны в настоящее время и в еще большей степени — в ближайшей перспективе. Оборонные интересы связаны с базированием

в Арктике основных российских морских стратегических ядерных сил, а также с необходимостью защиты протяженной государственной границы в Северном Ледовитом океане. Научные интересы России в Арктике обусловлены тем, что соответствующее научное обеспечение является необходимым условием для всех видов деятельности в этом регионе, а также важной ролью Арктики в глобальных природных процессах, происходящих на Земле.

Помимо локального влияния внутренних и (отчасти) поверхностных гравитационных волн на процессы обмена в Мировом океане, эти волны также в некотором роде играют роль индикаторов взаимодействия водных масс, отличных по своим характеристикам (в частности, по градиенту плотности), а на малых глубинах могут давать дополнительную информацию о характере рельефа морского дна. Формирование этих водных масс связано с источниками распреснения, вихрями, течениями, фронтами, которые, в свою очередь, участвуют в суб- и мезомасштабных и синоптических процессах вертикального и горизонтального водообмена, вентиляции акватории или ее части, транспорте биогенных элементов или загрязняющих веществ. Мониторинг внутренних и поверхностных гравитационных волн (генерация, распространение, интенсивность проявления, геометрические характеристики, количественные и динамические характеристики, и др.) с привлечением спутниковых данных вносит значительный вклад в получение информации о динамических процессах, что в дальнейшем дает возможность оценивать особенности экологического состояния акватории, рекреационного и транспортного потенциала в целях хозяйственно-промышленной деятельности.

При решении многих актуальных и практических волновых задач геофизической гидродинамики возникает необходимость асимптотического исследования быстро-осциллирующих интегралов. Проблемы вычисления асимптотик таких интегралов возникают также в задачах дифракции, распространения электромагнитных волн в ионосфере и магнитосфере Земли и планет, дифракции лазерного излучения на локальных неоднородностях среды и СВЧ-излучения на телах сложной формы, распространения электромагнитного импульса при радиолокации,

распространения акустических и внутренних гравитационных волн в атмосфере и океане, сейсмических волн в земной коре. Практическое значение асимптотических методов не ограничивается вопросами теории волновой дифракции, так как аналогичные быстро-осциллирующие интегралы возникают также в задачах квантовой механики, например в физической кинематике и в квантово-механической теории соударений. Как известно, равномерные асимптотики всех быстро-осциллирующих интегралов строятся посредством единого аналитического приема. Делается аналитическая взаимоднозначная замена переменных интегрирования, которая приводит фазовую функцию к полиному по переменным возможно более низкой степени, вид которого определяется поведением критических точек в исследуемой области параметров, то есть типом каустики. Коэффициенты полученного полинома являются регулярными функциями параметров. Получающиеся в результате интегралы сводятся к модельным, то есть к простейшим интегралам с аналогичной конфигурацией критических точек. Некоторые из этих интегралов непосредственно совпадают с интегральными представлениями известных специальных функций, другие могут представлять собой новые специальные функции. Важно отметить, что решения большого многообразия конкретных задач сводятся к относительно небольшому числу специальных функций.

Таким образом, построение асимптотик быстро-осциллирующих интегралов сводится к выбору соответствующей специальной функции и нескольких первых ее производных, а также к определению зависимости аргументов специальной функции, а также амплитудных и фазовых множителей, зависящих от параметров задачи. Построенные асимптотики могут быть неравномерными, так как они неприменимы в окрестности тех значений параметров, в которых критические точки (точки ветвления, пределы интегрирования, стационарные точки) сливаются. Поэтому возникает проблема перехода от неравномерных асимптотических разложений к равномерным асимптотикам, применимым при любых расстояниях между критическими точками и описывающим также их слияние и исчезновение. Платой за более широкую

область применения равномерных асимптотик является их более сложный вид — они выражаются через специальные функции: функции Эйри, интеграл Френеля, интеграл Пирси, функции Бесселя–Ханкеля действительного и мнимого аргументов. Выбор специальной функции зависит от типа и числа сливающихся критических точек, а также от основных параметров рассматриваемых конкретных задач геофизической гидродинамики.

Асимптотические выражения, описывающие динамику внутренних и поверхностных гравитационных волн, как правило, представляют собой явные формулы, выражающиеся через известные специальные функции сложного аргумента (функции Эйри, Френеля, функции Бесселя–Ханкеля), и их качественный анализ, как правило, не вызывает затруднений. Кроме того, найденные асимптотики позволяют перейти к более реалистической ситуации сред, параметры которых медленно меняются по горизонтали и времени, так как наличие явных аналитических конструкций позволяет учесть изменение параметров среды вдоль трассы распространения волн посредством соответствующего изменения аргументов, описывающих поле специальных функций, а также амплитудных фазовых множителей. Для проведения прогнозных расчетов параметры моделей волновой генерации подбираются так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемым, в том числе из космоса, к волновым картинам, что дает возможность верифицировать эти математические модели. Предложенные в монографии методы и подходы к исследованию динамики и генерации пакетов внутренних и поверхностных волн сочетают сравнительную простоту и вычислительную мощь аналитических результатов, а также возможность их качественного анализа.

Разработанные методы математического моделирования могут быть использованы для исследования любых других волновых процессов (акустические и сейсмические волны, СВЧ-излучение, волны цунами) в реальных средах со сложной структурой. Значение предложенных методов анализа волновых полей определяется не только их наглядностью, универсальностью и эффективностью при решении разнообразных задач, но и тем, что они могут

явиться некоторой полуэмпирической основой других приближенных методов при математическом моделировании волновых пакетов иной физической природы. Все фундаментальные результаты монографии получены для произвольных распределений плотности и прочих параметров неоднородных сред. Кроме того, основные физические механизмы формирования изученных явлений волновой динамики неоднородных стратифицированных сред рассматриваются в контексте непротиворечивости имеющихся данных натурных измерений волн в реальных средах. Универсальный характер предложенных асимптотических методов математического моделирования пакетов внутренних и поверхностных волн дополняется универсальными эвристическими условиями применимости этих методов. Эти критерии обеспечивают внутренний контроль применимости использованных асимптотических методов, и в ряде случаев на основе сформулированных критериев удастся оценивать волновые поля там, где другие методы неприменимы. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно как для правильной постановки теоретических исследований, так и для проведения оценочных расчетов при натурных измерениях пакетов внутренних и поверхностных волн. Особая роль данных методов обусловлена тем обстоятельством, что параметры природных стратифицированных сред, как правило, известны приближенно, а попытки точного численного решения исходных уравнений с использованием таких параметров могут привести к потере точности.

Динамика жидкости с ледяным покровом привлекает к себе все большее внимание как в связи с успешным применением новых математических методов при исследовании ее задач, так и в силу возможных геофизических и практических приложений. Актуальность этого направления исследований обусловлена, в частности, планами интенсивного промышленного освоения Арктики. Наиболее изучены к настоящему времени задачи о волновых движениях в жидкости с ледяным покровом. При этом задачи о генерации волн в жидкой среде как с ледяным покровом, так и без него представляют значительный теоретический

и практический интерес. В классической гидродинамике разработаны методы решения таких задач, основанные на моделировании локализованных в толще жидкости источников возмущений точечными гидродинамическими особенностями. Научная значимость проблемы математического моделирования распространения волн в среде с ледяным покровом связана с необходимостью построению равномерных асимптотик, описывающих сложную амплитудно-фазовую структуру волновых полей для реальных моделей источников и среды, что приводит к необходимости аналитического исследования особых точек интегральных фурье-представлений решений.

Для решения ряда важных практических задач и приложений, необходимо рассчитать волновые возмущения ледяного покрова, возбуждаемых распределенными в пространстве нелокальными источниками возмущений различной физической природы: природного и антропогенного характеров. Постановка задачи обтекания нелокального пульсирующего источника потоком однородной жидкости, ограниченной сверху ледяным покровом, включает в себя задание определенных граничных условий на его поверхности. Даже в предположении об идеальности жидкости и потенциальности обтекающего источник потока вычисление волновых полей представляет собой весьма сложную в математическом плане задачу. Очевидно, что существенно проще решается задача обтекания системы точечных гидродинамических особенностей, поскольку в этом случае нет необходимости удовлетворять наперед заданным граничным условиям. Это обстоятельство используется при решении задач обтекания тел или непроницаемых границ, моделируемых специально подобранными системами гидродинамических особенностей, которые часто используются при решении модельных задач, где точное воспроизведение формы находящегося подо льдом в потоке жидкости нелокального источника возмущений не имеет решающего значения. Подобный метод в значительной мере может относиться к задаче о генерации волновых возмущений на границе льда и жидкости, так как замена нелокального пульсирующего

источника некоторым набором гидродинамических особенностей существенно упрощает решение. Дополнительного исследования требует вопрос о том, как влияет наличие границ раздела льда и жидкости на картину линий тока, возникающих при обтекании заданных гидродинамических особенностей. Поэтому, в частности, при рассмотрении потоков конечной толщины под ледяным покровом необходимо знать, какой именно нелокальный источник возмущений может моделировать выбранная система гидродинамических особенностей.

Изложенные в монографии методы математического моделирования волновых явлений имеют также важные практические приложения, связанные с разработкой новых систем мониторинга морской среды. Построенные математические модели генерации и распространения внутренних и поверхностных волн могут быть использованы при создании системы глобального дистанционного мониторинга океана, позволяющей определять границы течений, исследовать топографию морского дна и фиксировать изменения подводного рельефа (в том числе и изменение судоходного фарватера), прогнозировать возникновение катастрофических ситуаций в океане (цунами), уточнять координаты скопления планктона и косяков рыб, отмечать различного рода экологические нарушения на участках протяженностью в сотни километров, а также исследовать влияние гидротехнических сооружений на волновую динамику морской среды, в том числе с учетом наличия ледяного покрова. Полученные результаты, а также разработанные методы могут быть использованы специалистами в области численного моделирования неоднородных сред, геофизической гидродинамики, океанологии, при строительстве сложных морских гидротехнических сооружений, а также при решении различных задач прикладной математики и математической физики.

Результаты, изложенные в монографии, были получены в рамках работ по грантам: РНФ (№ 23-21-00194 «Аналитические методы математического моделирования волновой динамики неоднородных гидрофизических сред»), РФФИ (№ 20-01-00111 «Внут-

ренние гравитационные волны в океане: моделирование, неоднородность, нестационарность, течения»; № 15-05-06969 «Уединенные волны и локализованные вихри в океане под ледяным покровом»; № 14-08-00107 «Истоки и стоки потоков в подводных каналах Атлантики», проект № 13-08-00538 «Взаимодействие подводных трубопроводов с морской средой»), а также в рамках выполнения работ по государственным заданиям: FFGN-2024-0005 (В. В. Булатов), FMWE-2024-0016 (И. Ю. Владимиров).

Монография состоит из введения, обзора литературы, четырех глав, заключения и списка литературы.

Глава 1 посвящена плоским задачам динамики поверхностных волн. В разд. 1.1 для двухслойного потока бесконечной глубины исследуются поверхностные возмущения идеальной жидкости, возникающие при обтекании подводного препятствия. Рассматривается препятствие (цилиндрическое тело), моделируемое точечным диполем. При этом оно может быть расположено как над поверхностью раздела слоев, так и под ней. Показано, что в реальных условиях открытого моря за обтекаемым телом возможно образование двух различных типов поверхностных волн. Установлено, что волны первого типа (обусловленные наличием свободной поверхности) образуются при любых значениях величины скорости набегающего потока V и слабо зависят от стратификации, однако в морских условиях они начинают визуально проявляться лишь при относительно больших значениях V (не менее 6 м/с). Параметры волн второго типа (обусловленных наличием слоя скачка плотности) существенным образом зависят от величины его мощности. В морских условиях такие волны образуются, когда величина скорости V не превышает 1–1,5 м/с.

В разд. 1.2 исследуется волновая структура поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводных препятствий потоком двухслойной идеальной жидкости конечной глубины. Показано, что за обтекаемым препятствием возможно образование тех же типов поверхностных волн, что и в случае потока бесконечной глубины. В морских условиях параметры волн, обусловленных наличием свободной поверхности, практически

не зависят от толщины нижнего слоя и мощности скачка плотности в то время как от них существенно зависят параметры и диапазон существования волн, обусловленных эффектом стратификации. Полученные результаты сравниваются с проведенными в разд. 1.1 модельными расчетами обтекания препятствия при условии бесконечной глубины набегающего потока. В итоге выявлены их существенные различия, которые необходимо учитывать при решении практических задач, например мониторинге прибрежных морских акваторий.

В разд. 1.3 получено аналитическое решение задачи о волновом воздействии двухслойного потока конечной глубины на диполь в случае его циркуляционного обтекания. Получены выражения для гидродинамической нагрузки. Исследованы зависимости волнового сопротивления и подъемной силы от скорости потока и циркуляции. Показано, что учет циркуляции может значительно изменить величину гидродинамической реакции, действующей на диполь. Обнаружен эффект резкого (реверсивного) изменения направления действия подъемной силы в относительно узком диапазоне скорости обтекания моделируемого диполем трубопровода. Данный эффект необходимо учитывать при проектировании подводных инженерных конструкций в морской среде и на дне моря.

В разд. 1.4 построены аналитические решения, описывающие силовое воздействие потока бесконечно глубокой однородной жидкости на локализованный источник, находящийся под ледяным покровом. Задача решена в плоской постановке. Получены выражения для волнового сопротивления и подъемной силы для точечного источника (моделирующего затупленное полу-бесконечное тело конечной ширины) и диполя (моделирующего цилиндр). Проведены численные расчеты силового воздействия на источник и диполь в зависимости от скорости набегающего потока и глубины их погружения. Изучены зависимости волнового сопротивления и подъемной силы от скорости набегающего потока жидкости.

Основные результаты, изложенные в главе 1, опубликованы в [1–11].

В главе 2 проведено исследование динамики поверхностных волн в трехмерном случае. В разд. 2.1 построены равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованным источником в однородной жидкости бесконечной глубины. Полученные решения описывают волновые возмущения как внутри, так и вне волнового клина Кельвина и выражаются через функцию Эйри и ее производную. Приведены результаты численных расчетов волновых картин.

В разд. 2.2–2.4 для различных диапазонов скорости потока исследованы дальние поля поверхностных волновых возмущений от осциллирующего источника, обтекаемого тяжелой жидкостью бесконечной глубины. Показано, что при малых скоростях потока возбуждаемые поля представляют собой сумму двух систем корабельных и одной системы кольцевых волн, а при больших скоростях потока образуются только две системы корабельных волн. Построены равномерные асимптотические решения, выражающиеся через функцию Эйри и ее производную, позволяющие описывать дальние поля поверхностных возмущений как вне, так и внутри соответствующих волновых клиньев.

В разд. 2.5 исследованы дальние поля поверхностных волновых возмущений от импульсного источника, вспыхнувшего в тяжелой жидкости конечной глубины. Построены интегральные представления решения, описывающие структуру волновых поверхностных возмущений. Построены равномерные асимптотические решения, выражающиеся через функцию Эйри и ее производную и позволяющие описывать амплитудно-фазовую структуру дальних полей поверхностных возмущений как вблизи, так и вдали от волнового фронта.

В разд. 2.6 решена задача о дальних волновых полях, возникающих на границе раздела льда и бесконечно глубокой однородной жидкости при обтекании локализованного источника возмущений. Получено интегральное представление решения; с помощью метода стационарной фазы построено его асимптотическое

представление для различных режимов волновой генерации. Численные расчеты показывают, что при изменении скоростей потока и толщины льда происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых дальних волновых полей на границе раздела льда и жидкости.

Основные результаты, изложенные в главе 2, опубликованы в [11–19].

Глава 3 посвящена аналитическому исследованию генерации и распространения внутренних гравитационных волн в неподвижной жидкости от различных источников возмущений. В разд. 3.1 решена задача математического моделирования поля ВГВ возбуждаемого точечным источником массы, движущимся в слое стратифицированной среды конечной глубины с произвольным распределением частоты плавучести. Построены дисперсионные поверхности и кривые первых трех мод. Изучены фазовые и амплитудные структуры дальних полей внутренних гравитационных волн от движущихся источников возмущений для различных режимов волновой генерации. Показано, что дальние волновые поля отдельной моды представляют сумму волновых цугов, изучены особенности генерации этих волновых цугов для различных режимов движения источника.

В разд. 3.2 построены равномерные асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн от радиально-симметричного начального возмущения изопикн. С помощью преобразования Фурье–Ханкеля получено аналитическое решение задачи в виде суммы волновых мод. Показано, что асимптотики отдельной волновой моды возвышения изопикн, вертикальной и горизонтальной (радиальной) компонент скорости выражаются через квадрат функции Эйри и его производные.

В разд. 3.3 построены асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн, возникающих от импульсного источника во вращающейся жидкости конечной глубины. В приближении постоянства частоты плавучести построены равномерные и неравномерные асимптотики решений для описания дальних волновых полей, которые выражаются через функцию Эйри и ее

производную. Показано, что на временах, больших нескольких периодов плавучести, и на расстояниях порядка толщины слоя жидкости полученные асимптотики позволяют адекватно описать амплитудно-фазовую структуру дальних волновых полей.

Основные результаты, изложенные в главе 3, опубликованы в работах [11, 16, 20–26].

В главе 4 рассмотрена динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах со средними сдвиговыми течениями. В разд. 4.1 изучена генерация внутренних гравитационных волн, возбуждаемых пульсирующим источником в океане с произвольными распределениями по глубине как частоты плавучести, так и компонент вектора скорости фонового сдвигового течения. С помощью метода Фурье получены интегральные представления решений. Приведены результаты численных расчетов дисперсионных кривых и фазовых картин волновых полей для реальных распределений частоты плавучести и сдвиговых течений, наблюдаемых в океане. Изучена трансформация дисперсионных поверхностей и фазовых структур полей внутренних гравитационных волн в зависимости от параметров генерации. Показано, что при изменении параметров волновой генерации происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн.

В разд. 4.2 аналитически решена задача об обтекании одностороннего подводного препятствия стратифицированным потоком со сдвигом. Получены интегральные представления решения при выполнении условия устойчивости Майлса–Ховарда. Установлено, что решения возникающей спектральной задачи выражаются через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса. Приведены результаты численных расчетов дисперсионных кривых и амплитудно-фазовых картин возбуждаемых волновых полей. Численно изучена трансформация полей внутренних гравитационных волн в зависимости от параметров генерации.

В разд. 4.3 исследована генерация внутренних гравитационных волн точечным пульсирующим источником, находящимся в стратифицированной среде с двухмерными линейными

сдвиговыми течениями. Для различных линейных распределений сдвиговых течений приведены результаты численных расчетов дисперсионных кривых и фазовых картин возбуждаемых волновых полей. Показано, что учет двухмерности сдвиговых течений является причиной заметной асимметрии как дисперсионных кривых, так и линий равной фазы. Численно изучена трансформация фазовых картин полей внутренних гравитационных волн в зависимости от параметров генерации.

Содержание главы 4 опубликовано в работах [11, 27–32].

Представленные в монографии результаты в значительной степени были получены совместно с Юрием Владимировичем Владимировым (1952–2021) и Николаем Николаевичем Корчагиным (1945–2024).

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Геофизическая гидродинамика предлагает большой ряд актуальных задач распространения волн в среде, анизотропия которой связана с эффектами стратификации, вращения, наличия фоновых сдвиговых течений и ледяного покрова. В этих задачах корректное применение асимптотических методов дает возможность исследовать ряд физически интересных эффектов волновой динамики, определяемых свойствами природных гидрофизических сред. В частности, внутренние гравитационные волны (ВГВ) существуют в океане везде, где наблюдается стратификация плотности, и они играют важную роль во всей динамике океанических процессов, особенно в перемешивании и формировании океанической стратификации. Внутренние волны пронизывают всю толщу океана и являются основным механизмом переноса энергии ветра с поверхности в глубину. В полярных районах формируются холодные водные массы высокой плотности, которые, погружаясь в глубинные слои, распространяются в Мировом океане. Солнечные лучи прогревают лишь верхний слой морской воды незначительной толщины. Поскольку в океане наблюдается в целом стационарное распределение плотности по вертикали, отличное от резко выраженного двуслойного, то можно полагать, что оно достигается в процессе медленного перемешивания. Этот физический механизм перемешивания определяется в основном энергией приливов и ветра, и поэтому роль внутренних приливов в вертикальных и горизонтальных океанических обменах является доминирующей. Качественные и аналитические оценки переноса энергии, массы, количества движения, учет влияния внутренних гравитационных волн на процессы перемешивания

в океане, изучение генерации, распространения, неустойчивости, разрушения внутренних и поверхностных волн — основные фундаментальные задачи современной гидрофизики океана.

Для прикладных океанологических исследований, связанных с изучением динамики внутренних и поверхностных гравитационных волн, фундаментальной проблемой является моделирование волновой динамики с учетом реальной изменчивости параметров природных стратифицированных гидрофизических сред. Промышленная деятельность на континентальном шельфе, связанная с добычей ископаемых, является важной причиной исследований внутренних и поверхностных волн в настоящее время. Характеристики волн используются для оценки их воздействия на окружающую среду и технологические морские конструкции. Знания о волновой динамике важны для обеспечения безопасности при строительстве и эксплуатации морских платформ на континентальном шельфе, и для этих целей необходимо контролировать воздействие волн. При строительстве нефтяных платформ проводятся систематические измерения волн и течений, поэтому решение фундаментальных проблем моделирования волновой динамики позволит избежать дорогостоящих натурных измерений [33–37]. Решение проблемы интерпретации результатов мониторинга морской поверхности, осуществляемого с помощью аэрокосмических средств, имеет своей целью создание методов дистанционного зондирования, позволяющих следующее: прогнозировать возникновение катастрофических ситуаций, уточнять координаты скопления планктона и косяков рыб, отмечать различного рода экологические нарушения на участках протяженностью в сотни и тысячи километров, а также определять границы течений, исследовать топографию морского дна и фиксировать изменения подводного рельефа, дистанционно исследовать районы добычи полезных ископаемых [38–45].

Особый интерес к исследованию динамики ВГВ связан с интенсивным освоением Арктики и ее природных богатств. Эти волны пока недостаточно изучены в Арктике, так как они распространяются подо льдом и сверху практически не видны, однако доступная информация о движении подводных объектов

свидетельствует о наличии таких волн [46–48]. Внутренние волны достигают льда и поднимают или опускают его с определенной периодичностью, что доступно наблюдению с помощью средств радиолокационного зондирования. Воздействие волн способно привести к расколу ледового покрытия в Арктике, они способствуют движению айсбергов и различного рода загрязнений [49]. Поэтому фундаментальные исследования волновой динамики в области Арктического бассейна является важной научной и практической задачей, в том числе для обеспечения безопасности при строительстве и эксплуатации морских нефте- и газодобывающих платформ.

Развитие дистанционных методов диагностики состояния поверхности Мирового океана требует глубокого изучения физических механизмов рассеяния этой поверхностью электромагнитного излучения на основе исследования динамики поверхностных гидродинамических образований, вызванных как ветровым волнением и приповерхностными течениями, так и расположенными в океане источниками возмущений [42, 43, 50–53]. В свою очередь, на состояние свободной поверхности влияют находящиеся в толще воды неоднородности, например обтекаемые преграды, изменения глубины океана [38, 41, 42, 54–58]. Так как среди факторов, оказывающих влияние на свободную поверхность моря, особое место занимают внутренние гравитационные волны, то одной из важных научных проблем является разработка методов, которые дают возможность аналитически и численно исследовать эффекты возбуждения отдельных частотных составляющих распространяющихся волновых цугов [59–64]. Для правильной интерпретации данных, полученных при зондировании морской поверхности, нужно знать причины, вызывающие те или иные поверхностные явления [41, 42]. Поэтому в настоящее время остро встает вопрос о развитии методов математического моделирования процессов внутренних и поверхностных колебаний в океане и, в частности, согласования результатов моделирования с данными натурных наблюдений.

Внутренние и поверхностные гравитационные волны в океане и атмосфере изучаются уже достаточно давно, и по данной

тематике опубликовано значительное число работ [65–77]. Тем не менее в последнее время интерес к ним в какой-то степени угасает, о чем можно судить по общему количеству публикаций, посвященных данной проблематике. Вместе с тем сейчас возникают новые направления в исследованиях как внутренних, так и поверхностных волн, о которых ранее не говорилось. Во-первых, стало понятным, что в поле внутренних волн могут появляться аномально большие короткоживущие волны-убийцы, природа которых напоминает природу волн-убийц на поверхности моря [78, 79]. Во-вторых, сдвиговые течения во внутренних волнах приводят к большим изгибающим моментам на опоры нефтяных платформ, что уже приводило к существенной деформации подводных технологических конструкций в ряде районов Мирового океана [80, 81]. Поэтому в настоящее время разрабатывается система мониторинга интенсивных внутренних и поверхностных волн в морских условиях, в какой-то мере аналогичная системе мониторинга цунами. В-третьих, действие ВГВ способно приводить к диффузии осадков, мощному транспорту наносов и размывам дна, особенно в глубоководных районах, где влияние ветровых, в том числе штормовых волн, пренебрежимо мало [63, 82–86].

Поэтому процессы переноса частиц посредством индуцированных волнами потоков активно исследуются в рамках различных прикладных направлений, связанных с гидробиологией (миграция планктона, бентоса), экологией (распространение примесей и загрязнений) и инженерной океанологией. Наконец, классические задачи воздействия внутренних волн на морскую поверхность по-прежнему остаются актуальными [34–39, 41–43, 56, 58, 83, 87–92]. Внутренние гравитационные волны, возникающие, например, при прохождении течений через подводные хребты или по континентальному шельфу, перемещаются вдоль термоклина (слоя максимального скачка плотности), отделяющего слой воды на поверхности океана от глубинных вод. Однажды возникнув, они распространяются, сохраняя свою форму и силу, и способны пройти большие расстояния без затухания. Поэтому внутренние гравитационные волны играют важную роль в ди-

намике океанических вертикальных и горизонтальных обменов, выполняют функцию транспортного средства, перенося биомассу и питательные вещества, так как их амплитуда сопоставима с глубиной поверхностного слоя океана.

Вопросам динамики внутренних и поверхностных гравитационных волн в гидрофизических средах посвящено значительное число работ как российских (И. В. Стурова, В. Ф. Санников, В. А. Боровиков, Э. В. Теодорович, В. А. Городцов, А. М. Тер-Крикоров, К. А. Бежанов, Ю. З. Миропольский, А. Г. Воронович, Ю. Д. Чашечкин, Е. Г. Морозов, С. А. Габов, А. Г. Свешников, Л. В. Черкесов, К. В. Коняев, Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, Ю. А. Степанянц, А. А. Куркин, В. В. Булатов, А. А. Зайцев, А. С. Савин и др.), так и зарубежных (J. Grue, J. Lighthill, J. Miles, J. B. Keller, B. Voisin, E. Kallen, S. A. Thorpe, T. Miloh, E. J. Hopfinger, M. Gitterman, C. Wunsch, B. R. Sutherland, J. Pedlosky, J. N. Newman и др.) авторов. Основное внимание, как правило, уделяется экспериментальному исследованию динамики внутренних и поверхностных волн, детальному теоретическому рассмотрению динамики линейных внутренних гравитационных волн в средах с модельными распределениями плотности, а также прямому численному моделированию на основе соответствующих уравнений гидродинамики. Относительная простота решения линейных уравнений по сравнению с полной нелинейной задачей, современное развитие соответствующего математического аппарата и вычислительной техники позволяют ответить на многие запросы практики [39, 45, 81, 93–98].

Моделирование динамики ВГВ в настоящее время особенно актуально вследствие возросшего количества морских платформ, установленных на шельфовых месторождениях нефти и газа. Известно, например, что в Баренцевом море, глубина которого составляет в районе Штокмановского газового месторождения 300–400 метров, наблюдаются внутренние волны амплитудой до 20 метров; кроме того, существенную часть в вертикальные и горизонтальные обмены этого района Мирового океана вносят дрейфующие айсберги [40, 89, 99, 100]. При моделировании внутренних и поверхностных волн от подобного рода

нелокальных источников возмущений необходимо учитывать особенности этих возмущающих факторов (подводные технологические и природные объекты), неоднородность гидрофизических полей и т. д. Безопасность морских технологических платформ требует исследования гидрофизических полей и расчета нагрузок, которые они могут испытывать. Существенной нагрузкой на подводные платформы является нагрузка от внутренних волн, которая ранее считалась малой по сравнению с нагрузкой от ветровых волн и ветра. Однако внутренние волны могут влиять на подводные конструкции и приводить, в частности, к деформации дна при прокладке протяженных трубопроводов. Существуют оценки, которые показывают, что, например, для ряда районов Мирового океана (Южно-Китайское море, зона Арктического бассейна и другие) влияние внутренних волн на подводные платформы в десятки раз может превышать ветровые нагрузки [51, 56, 81, 99, 100]. Задачи подобной сложности, как правило, допускает только прямое численное моделирование [38, 58, 83, 98, 101]. Однако начальные данные для расчетов такого рода известны лишь приблизительно, что может привести к значительной потере точности получаемых результатов. Кроме того, численный анализ не позволяет проводить качественные оценки получаемых результатов, что является необходимым при проведении, например, экспресс-оценок результатов измерения волн в океане и атмосфере, в том числе методами дистанционного зондирования [41–45].

Анализ двумерных и трехмерных нестационарных волновых движений, возникающих в океане вследствие стратификации его вод, оказывается весьма сложной в вычислительном отношении задачей. Разработан и получил широкое применение численный код MIT, решающий полные уравнения гидродинамики с учетом реального рельефа дна, вращения Земли и турбулентных процессов [102]. Данная модель требует больших компьютерных ресурсов, оправданных только для решения ряда отдельных практических задач океанологии. Тем не менее даже такие полные модели пока еще не учитывают, например, существующую в реальных океанических условиях стабильную фоновую

горизонтально-неоднородную стратификацию. Для учета упомянутого гидрофизического эффекта необходимо вводить внешние силы, удерживающие эту неоднородность стратификации, однако их численная параметризация весьма затруднительна. Существующие в настоящее время другие методы численного моделирования, в том числе с использованием суперкомпьютеров (алгоритм IGW Research [103], алгоритмы Riemann Solver для решения гиперболических уравнений мелкой воды [104, 105], псевдоспектральный алгоритм высокого порядка для решений уравнений гидродинамики HOSM [106–108]), не всегда позволяют эффективно рассчитывать конкретные физические задачи волновой динамики океана и атмосферы с учетом их реальной изменчивости, так как ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют больших вычислительных мощностей, не всегда учитывают физическую специфику решаемых задач, что существенно ограничивает их практическую применимость, особенно при расчетах волновых полей в реальных природных средах [66, 82, 109]. Кроме того, использование мощных численных алгоритмов требует верификации и сравнения с точными аналитическими решениями модельных задач.

Поэтому в современных научных исследованиях при анализе волновых явлений в реальных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) широко применяются упрощенные асимптотические и аналитические модели. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье: искомое решение в линейной постановке представляется в форме многократных квадратур от решения соответствующих вертикальных спектральных задач [59, 61, 110–119]. В результате волновое поле можно найти численным интегрированием, и, казалось бы, нет необходимости в исследовании асимптотик. Тем не менее получение таких асимптотик весьма актуально. Объясняется это следующими причинами. Во-первых, по мере увеличения времени и расстояния от источника приходится вычислять интегралы от все более и более быстро осциллирующих функций, а численные расчеты делаются все более

и более трудоемкими. Во-вторых, получить из численных расчетов качественное описание уходящих от источника волновых пакетов, их эволюцию во времени и пространстве, их зависимость от характеристик источника и т. п. практически либо невозможно, либо это требует значительных вычислительных ресурсов. В то же время асимптотические выражения для волновых полей представляют собой явные формулы, использующие известные специальные функции. Их качественный анализ, как правило, не вызывает затруднений [66, 120–127]. В-третьих, найденные асимптотики позволяют, в принципе, перейти к более реалистической ситуации сред, параметры которых медленно меняются по горизонтали и времени, так как наличие явных формул дает возможность учесть изменение параметров среды вдоль трассы распространения волновых пакетов посредством соответствующего изменения аргументов, описывающих поле специальных функций, а также амплитудных и фазовых множителей [54, 55, 60, 112, 128, 129].

Среди большого многообразия наблюдаемых волновых процессов различной физической природы в океане и атмосфере Земли особое место занимает взаимодействие возбуждаемых волн с течениями [79, 84, 98, 112, 130–137]. Движение стратифицированной среды является одним из основных факторов, влияющих на динамику внутренних гравитационных волн как в естественных условиях, так и в технических устройствах. Если характерный масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин внутренних волн, а характерный масштаб временной изменчивости много больше их периодов, то естественной математической моделью будет случай стационарных и горизонтально однородных сдвиговых течений. В современных научных исследованиях при анализе динамики волн в природных стратифицированных средах с учетом наличия течений применяются асимптотические методы исследования аналитических моделей волновой генерации [132, 138–142]. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и их асимптотическом анализе [67, 143, 144].

В реальных океанических условиях необходимо рассматривать внутренние гравитационные волны, распространяющиеся на фоне средних течений с вертикальным сдвигом скорости, причем вариация скорости по вертикали составляет десятки сантиметров в секунду, то есть имеет тот же порядок, что и максимальные скорости внутренних волн. Такие течения существенно сказываются на распространении внутренних волн. В [79,112] приведены результаты многочисленных исследований по натурным измерениям внутренних волн, течений, а также их взаимодействию в различных областях Мирового океана. В [84] рассмотрена генерация волн сдвиговым течением в проливе Карские Ворота, причем течение меняется с приливной частотой и пакеты внутренних волн появляются с приливной периодичностью за счет сдвиговой неустойчивости. Аналогичные результаты получены в [131] на примере Гибралтарского пролива, где рассмотрены измерения течений и волн, причем амплитуда последних составляет десятки метров. При моделировании генерации внутренних волн в реальном океане точечным источником можно считать крутой склон поперечного хребта в проливе, который обтекается периодическим приливным сдвиговым течением.

Синтез численных, аналитических и асимптотических результатов может дать первоначальные качественные и количественные представления о волновых процессах в реальных гидрофизических средах (океан, атмосфера) с учетом фоновых сдвиговых течений [64, 75, 79, 98, 130, 141, 142, 145–149].

Динамика жидкости с ледяным покровом привлекает к себе все большее внимание как в связи с успешным применением новых математических методов при исследовании ее задач, так и в силу возможных геофизических и практических приложений [150–155]. Актуальность этого направления исследований обусловлена, в частности, объявленными планами освоения Арктики. Наиболее изучены к настоящему времени задачи о волновых движениях в жидкости с ледяным покровом. Обзор основных результатов этой теории можно найти, например, в [80, 156–159]. При этом задачи о генерации волн в жидкой среде как с ледяным покровом, так и без него представляют значительный

теоретический и практический интерес. В классической гидродинамике разработаны методы решения таких задач, основанные на моделировании локализованных в толще жидкости источников возмущений точечными гидродинамическими особенностями [96, 97, 160–163]. В последнее время появились работы, распространяющие этот подход на случай жидкости с ледяным покровом. Рассмотрены задачи о точечном источнике переменной интенсивности в слое жидкости с ледяным покровом и получены общие выражения для потенциала скорости; рассмотрены их частные случаи для импульсного, постоянного и пульсирующего по гармоническому закону источников; приведены асимптотические выражения потенциала скорости установившегося течения при длительной работе пульсирующего источника и потенциала скорости течения на большом расстоянии от источника [164]. В [165] изучены волны, возникающие на ледяном покрове жидкости при импульсном воздействии на лед, а также при мгновенном выбросе некоторой массы точечным источником в толще жидкости. В случае волн, образующихся на ледяном покрове под влиянием такого источника, методом стационарной фазы найдено асимптотическое представление для больших времен в точках с фиксированным отношением расстояния от источника ко времени в системе координат, движущейся с определяемой этим отношением скоростью. Аналогичные результаты для источника с произвольно меняющейся во времени интенсивностью получены в [166].

В рамках линейной потенциальной теории решение задачи о движении сферы в идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины под ледяным покровом при неравномерном сжатии построено в [167]. Исследованы гидродинамические нагрузки, действующие на такую сферу: волновое сопротивление, боковая и подъемная силы, а также прогиб ледяного покрова в зависимости от его толщины, скорости тела, глубины погружения и направления движения. Аналогичное исследование для кругового цилиндра проведено в [168–170].

Влияние сдвига скорости жидкости на деформации ледяного покрова под действием локальной области давления на поверх-

ности льда изучено в работах [171–174]. Кроме того, в статьях [173, 174] найдены волновые силы для случая области, движущейся равномерно и прямолинейно. Исследованы зависимости силовой нагрузки от сдвига скорости, толщины сдвигового слоя жидкости и направления движения области.

Значительный интерес представляют задачи об установлении волн при выходе их источников на некоторый стационарный режим. В работах [175–179] изучены процессы установления волн на свободной поверхности жидкости и на ледяном покрове при равномерном движении точечной гидродинамической особенности и при периодическом изменении ее интенсивности в толще жидкости. В результате установившиеся режимы получены как пределы отклонения ледяного покрова или свободной поверхности жидкости от положения равновесия в любой фиксированной точке в системе координат, связанной с гидродинамической особенностью, при неограниченном возрастании времени. Для вычисления этих пределов использовались свойства обобщенных функций, и такой подход позволил автоматически устранить свободные волны и сразу найти физически осмысленное решение без использования дополнительных условий излучения.



ГЛАВА

ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТНЫХ
ВОЛН В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

1.1. Обтекание препятствий двухслойным потоком бесконечно глубины

1.1.1. Введение

Обтекание подводных неоднородностей (или препятствий) в морской среде приводит к возникновению возмущений, которые могут выходить на поверхность воды. При этом наличие стратификации среды и ее особенности могут обуславливать определенные эффекты в формировании структуры поверхностных возмущений. В реальных условиях открытого моря такими особенностями являются относительно резкие перепады плотности воды, связанные (прежде всего) с наличием сезонного термоклина или иных скачков плотности воды. В этом случае представляет интерес исследование возможных пикноклинных эффектов при обтекании препятствия в окрестности таких скачков плотности. Один из способов моделирования находящегося в потоке препятствия основан на его замене эквивалентной системой гидродинамических особенностей (источников, стоков, вихрей, мультиполей). В соответствии с этим расчет поверхностных возмущений может быть сведен к расчету волн, генерируемых моделирующими препятствие гидродинамическими особенностями [96, 162].

1.1.2. Постановка задачи и ее решение

Итак, рассматривается задача о возбуждении поверхностных возмущений при поперечном обтекании препятствия в виде цилиндрического тела потоком идеальной жидкости, состоящей

из двух слоев постоянной плотности: ρ_1 (верхний слой) и ρ_2 (нижний), при условии $\rho_1 < \rho_2$. Толщина верхнего слоя — H , нижний слой считаем бесконечно глубоким. Поток стационарно обтекает препятствие, локализованное либо над границей раздела слоев, либо под ней.

Цилиндрическое препятствие моделируется точечным диполем с моментом R , внезапно (в момент времени $t = 0$) пришедшим в движение вблизи границы раздела слоев с постоянной скоростью V , направленной горизонтально (вдоль оси x , совпадающей с невозмущенным положением этой границы). Движущийся в направлении отрицательных x диполь поместим вначале на горизонте $z = z_0$ в верхнем слое (рис. 1.1), а затем на горизонте

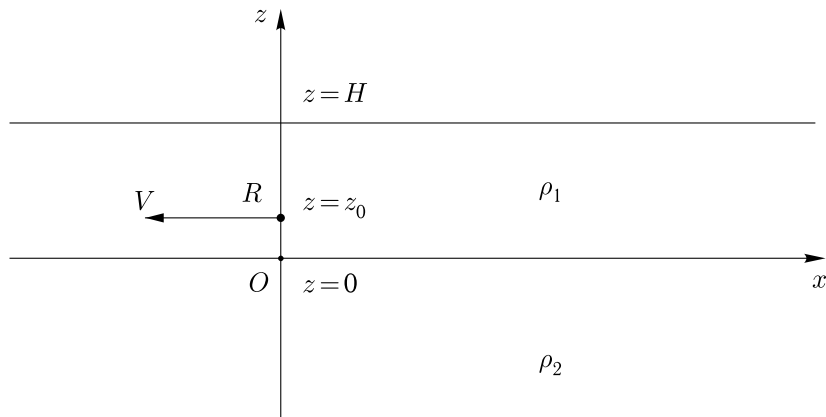


Рис. 1.1. Схема движения диполя в верхнем слое двухслойной жидкости в начальный момент времени

$z = -z_0$ — в нижнем (рис. 1.3, см. **2**). Исследуется установившаяся картина поверхностных волн вдали от диполя. В силу линейности задачи в дальнейшем рассматривается диполь с единичным моментом.

1. Препятствие над слоем скачка. Рассмотрим задачу о возбуждении поверхностных возмущений движущимся над слоем скачка плотности препятствием, расположенным в начальный момент времени в точке $(0, z_0)$. Введем потенциал скоростей $\Phi(x, z, t)$, $\nabla\Phi = \mathbf{U}$, $\mathbf{U} = (u, v)$, где u, v — соответственно

горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости в произвольной точке потока. Тогда для потенциала Φ имеем уравнение Пуассона и соответствующие граничные условия:

$$\begin{cases} \Delta\Phi(x, z, t) = \theta(t)\delta(z - z_0)\delta'(x + Vt), \quad \Phi(x, z, t) \equiv 0 \text{ при } t < 0, \\ \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, $\delta'(\cdot)$ — ее производная, g — ускорение свободного падения;

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \Phi(x, z, t) = \begin{cases} \Phi_1(x, z, t), & z > 0, \\ \Phi_2(x, z, t), & z < 0. \end{cases}$$

Правая часть уравнения Пуассона соответствует движущемуся диполю, находящемуся в произвольный момент времени t ($t > 0$) в точке $(-Vt, z_0)$. Первое граничное условие описывает постоянство давления на свободной поверхности жидкости, второе условие означает равенство вертикальных скоростей по обе стороны границы раздела слоев, а третье условие — равенство давлений по разные стороны этой границы.

Для трансформанты Фурье,

$$\tilde{\Phi}(k, \omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \Phi(x, z, t) dt,$$

задача (1.1) преобразуется к виду (k — волновое число, ω — частота)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2} - k^2\tilde{\Phi} = \frac{k}{\omega - kV}\delta(z - z_0), \\ -\omega^2\tilde{\Phi}_1 + g\frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \quad \frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial z} = \frac{\partial\tilde{\Phi}_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left(-\omega^2\tilde{\Phi}_1 + g\frac{\partial\tilde{\Phi}_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(-\omega^2\tilde{\Phi}_2 + g\frac{\partial\tilde{\Phi}_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(k, \omega, z) &= \begin{cases} \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z), & 0 < z < H, \\ \tilde{\Phi}_2(k, \omega, z), & z < 0, \end{cases} \\ \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) &= \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z), & z_0 < z < H, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z), & 0 < z < z_0. \end{cases}\end{aligned}$$

Решение $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ с точностью до множителя, зависящего только от k и ω , удовлетворяющее первому граничному условию в (1.2), имеет вид

$$\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) = (\omega^2 + gk)e^{k(z-H)} - (\omega^2 - gk)e^{-k(z-H)}. \quad (1.3)$$

Решение $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$ ищется в виде $P(k, \omega)e^{kz} + Q(k, \omega)e^{-kz}$. Для полноты решения последнее нужно «сшить» с решением $\tilde{\Phi}_2(k, \omega, z) = C(k, \omega)e^{-|k|z}$ ($z < 0$) с помощью граничных условий при $z = 0$. На этом пути получим

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) &= (\rho_2(\omega^2 - gk) + \rho_1(\omega^2 + gk))e^{kz} + \\ &\quad + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - gk)e^{-kz}. \quad (1.4)\end{aligned}$$

Окончательно решение $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$ ищем в виде

$$\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) = \begin{cases} A(k, \omega)\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z), & z_0 < z < H, \\ B(k, \omega)\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z), & 0 < z < z_0, \end{cases}$$

где $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ и $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$ определены в (1.3) и (1.4). Для нахождения функций $A(k, \omega)$ и $B(k, \omega)$ воспользуемся условием «сшивки» решения при $z = z_0$, вытекающим из первого уравнения, фигурирующего в задаче (1.2):

$$\begin{cases} A(k, \omega)\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z_0) = B(k, \omega)\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z_0), \\ \left(A(k, \omega)\frac{\partial \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)}{\partial z} - B(k, \omega)\frac{\partial \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} = \frac{k}{\omega - kV}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим выражения для $A(k, \omega)$ и $B(k, \omega)$,

$$\begin{cases} A(k, \omega) = \frac{\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z_0)}{W} \frac{k}{\omega - kV}, \\ B(k, \omega) = \frac{\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z_0)}{W} \frac{k}{\omega - kV}, \end{cases}$$

где

$$W = 4k(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(\omega^2 - gk)(\omega^2 - \omega_1^2(k)),$$

$$\omega_1^2(k) = \frac{gk(\rho_2 - \rho_1) \operatorname{th} kH}{\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th} kH}.$$

Функция $\omega = \omega_1(k)$ представляет собой дисперсионное соотношение для внутренних волн. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \frac{[(\rho_2(\omega^2 - g|k|) + \rho_1(\omega^2 + g|k|)) e^{|k|z_0} + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - g|k|) e^{-|k|z_0}]}{4|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)} \times \\ &\times \frac{[(\omega^2 + g|k|) e^{|k|(z-H)} - (\omega^2 - g|k|) e^{-|k|(z-H)}]}{(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \frac{[(\rho_2(\omega^2 - g|k|) + \rho_1(\omega^2 + g|k|)) e^{|k|z} + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - g|k|) e^{-|k|z}]}{4|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)} \times \\ &\times \frac{[(\omega^2 + g|k|) e^{|k|(z_0-H)} - (\omega^2 - g|k|) e^{-|k|(z_0-H)}]}{(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь важно отметить, что в формулах (1.5) везде вместо k стоит $|k|$, кроме множителя $k/(\omega - kV)$. Это обусловлено тем, что в решении $\tilde{\Phi}_2(k, \omega, z)$ содержится $|k|$ для обеспечения убывания решения с глубиной при всех k (положительных и отрицательных).

В дальнейшем нас будет интересовать величина возвышения поверхности жидкости

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} \right|_{z=H}.$$

Трансформанта Фурье последней связана с $\tilde{\Phi}(k, \omega, z)$ следующим образом:

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{i\omega}{g} \tilde{\Phi}(k, \omega, H).$$

Далее, используя выражение для $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ из (1.5), получим

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{ik}{\omega - kV} \times \frac{\omega [(\rho_2(\omega^2 - g|k|) + \rho_1(\omega^2 + g|k|)) e^{|k|z_0} + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - g|k|) e^{-|k|z_0}]}{2|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}.$$

Обратное преобразование Фурье от $\tilde{\eta}(k, \omega)$ представляется в виде

$$\eta(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}(k, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.6)$$

Здесь контур интегрирования по ω слегка смещен в верхнюю полуплоскость. Интеграл по ω вычислим, замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость с учетом полюсов в точках $\omega = kV$, $\omega = \pm\sqrt{g|k|}$, $\omega = \pm\omega_1(|k|)$.

Установившемся режиму движения диполя в системе координат $\xi = x + Vt$, движущейся вместе с ним, соответствует предел выражения (1.6) при $t \rightarrow +\infty$. При этом вклады полюсов $\omega = \pm\sqrt{g|k|}$ и $\omega = \pm\omega_1(|k|)$ при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю. Например, при учете полюса $\omega = \sqrt{gk}$ и деформации исходного контура интегрирования по k в путь наискорейшего спуска, проходящий через точку стационарности фазы; соответствующие полюса не пересекаются (и не дают вкладов в интеграл), а вклад стационарной точки при $t \rightarrow +\infty$ ведет себя как $O(1/\sqrt{t})$ [180]. Вклад полюса $\omega = kV$ дает

$$\eta(\xi) = \frac{1}{4\pi V} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\rho_2(|k|V^2 - g) + \rho_1(|k|V^2 + g)) e^{|k|z_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(|k|V^2 - g)(1 - \psi(|k|))} + \frac{(\rho_2 - \rho_1)(|k|V^2 - g) e^{-|k|z_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(|k|V^2 - g)(1 - \psi(|k|))} \right] e^{-ik\xi} dk, \quad (1.7)$$

где $\psi(|k|) = \omega_1^2(|k|)/(|k|^2 V^2)$, а контур интегрирования слегка смещен в верхнюю полуплоскость. Для оценки интеграла (1.7)

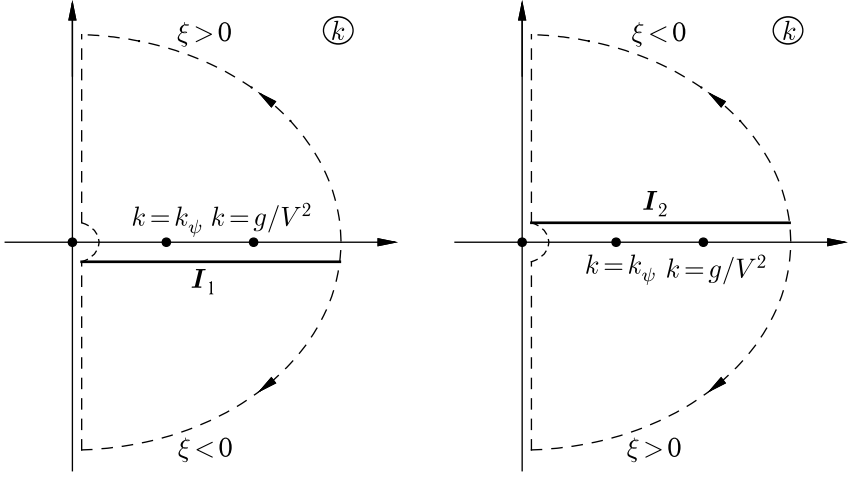


Рис. 1.2. Контуры интегрирования для I_1 и I_2 — сплошные линии, направления замыкания контуров — пунктирные кривые.

разобьем область интегрирования на два интервала (рис. 1.2),

$$\eta(\xi) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{0+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk, \quad I_2 = \int_{0+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk.$$

Сделав в первом интеграле замену $k = -u$, получим

$$I_1 = \int_{0-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon} F(k, z_0) e^{ik\xi} dk.$$

Рассмотрим случай больших положительных ξ . Замкнув контур интегрирования для I_1 в верхней полуплоскости, а для I_2 — в нижней полуплоскости, получим, что $\eta(\xi)$ состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое — интеграл типа Лапласа по мнимой оси, представляющий собой неволновую часть решения. Это слагаемое описывает впадину свободной поверхности непосредственно над рассматриваемым диполем. Можно показать, что при больших ξ его асимптотика есть $O(1/\xi^2)$. Второе

слагаемое, определяющее собственно волновую структуру, есть сумма вкладов двух полюсов $k = g/V^2$ и $k = k_\psi$. Первый полюс соответствует поверхностной моде

$$\eta_{\Pi}(\xi) = -R \frac{2\rho_1 g e^{gz_0/V^2}}{V^3(\rho_2 \operatorname{ch}(g/V^2) + \rho_1 \operatorname{sh}(g/V^2))(1 - \psi(g/V^2))} \sin(g\xi/V^2). \quad (1.8)$$

Второй полюс k_ψ , где k_ψ — действительный корень уравнения $\psi(k) = 1$, отвечает внутренней моде

$$\eta_{\text{В}}(\xi) = -R \left[\frac{(\rho_2(kV^2 - g) + \rho_1(kV^2 + g)) e^{kz_0}}{V(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(kV^2 - g)(-\psi'(k))} + \frac{(\rho_2 - \rho_1)(kV^2 - g)e^{-kz_0}}{V(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(kV^2 - g)(-\psi'(k))} \right] \sin k\xi \Big|_{k=k_\psi}. \quad (1.9)$$

Отметим, что внутренняя мода существует (то есть уравнение $\psi(k) = 1$ имеет вещественный корень k_ψ) в случае, когда значение V меньше некоторого $V_{\text{кр.}}$, которое определяется из соотношения

$$V_{\text{кр.}}^2 = gH \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right). \quad (1.10)$$

При больших отрицательных значениях ξ контуры для вычисления I_1 замкнем в нижней полуплоскости, а для I_2 — в верхней. В этом случае соответствующие полюса вкладов не дадут, а интеграл по мнимой оси по-прежнему ведет себя как $O(1/\xi^2)$. Отметим, что математическое представление поверхностных возмущений (1.8) и (1.9) имеет относительно простую физическую интерпретацию, которую совместно с результатами расчетов амплитуды возмущений рассмотрим позднее.

2. Препятствие под слоем скачка. В аналогичной постановке рассмотрим задачу о возбуждении поверхностных возмущений при движении моделируемого точечным диполем препятствия под слоем скачка плотности жидкости. В начальный момент времени диполь находится в точке $(0, -z_0)$ (рис. 1.3). С введением потенциала скоростей $\Phi(x, z, t)$, $\nabla\Phi = \mathbf{U}$, $\mathbf{U} = (u, v)$ (u, v — соответственно горизонтальная и вертикальная компо-

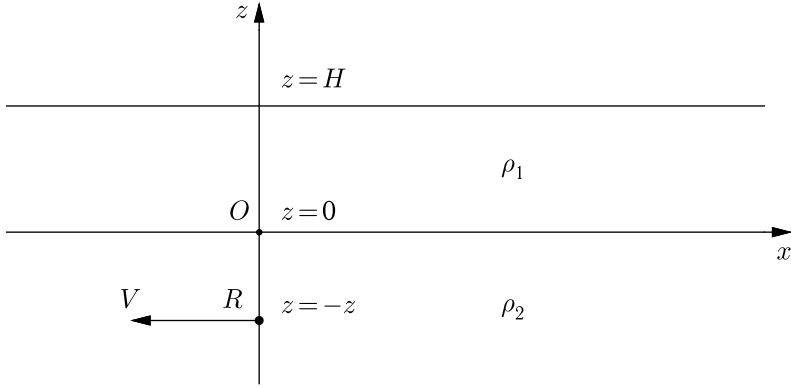


Рис. 1.3. Схема движения диполя в нижнем слое двухслойной жидкости в начальный момент времени

ненты поля скоростей жидкости) математическая постановка данной задачи принимает вид

$$\begin{cases} \Delta \Phi(x, z, t) = \theta(t) \delta(z + z_0) \delta'(x + Vt), \quad \Phi(x, z, t) \equiv 0 \text{ при } t < 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Здесь

$$\Phi(x, z, t) = \begin{cases} \Phi_1(x, z, t), & 0 < z < H, \\ \Phi_2(x, z, t), & z < 0. \end{cases}$$

В терминах трансформанты Фурье потенциала

$$\tilde{\Phi}(k, \omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \Phi(x, z, t) dt$$

задача (1.11) формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\Phi} = \frac{k}{\omega - kV} \delta(z + z_0), \\ -\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left(-\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(-\omega^2 \tilde{\Phi}_2 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0; \end{cases} \quad (1.12)$$

здесь

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(k, \omega, z) &= \begin{cases} \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z), & 0 < z < H, \\ \tilde{\Phi}_2(k, \omega, z), & z < 0, \end{cases} \\ \tilde{\Phi}_2(k, \omega, z) &= \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z), & -z_0 < z < 0, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z), & z < -z_0. \end{cases}\end{aligned}$$

Решение $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$, удовлетворяющее первому граничному условию в (1.12), имеет вид

$$\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) = A(k, \omega)(\omega^2 \operatorname{sh} k(z - H) + gk \operatorname{ch} k(z - H)).$$

Решение $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ ищется в виде $B(k, \omega) \operatorname{sh} kz + D(k, \omega) \operatorname{ch} kz$. Для полноты решения последнее нужно «сшить» с решением $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$ ($z > 0$) с помощью граничных условий при $z = 0$. На этом пути получим

$$\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) = A(k, \omega) [b(k, \omega) \operatorname{sh} kz + d(k, \omega) \operatorname{ch} kz],$$

где

$$\begin{aligned}b(k, \omega) &= \omega^2 \operatorname{ch} kH - gk \operatorname{sh} kH, \\ d(k, \omega) &= \left[-\frac{\rho_1}{\rho_2} \omega^2 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \frac{g^2 k^2}{\omega^2} \right] \operatorname{sh} kH + gk \operatorname{ch} kH.\end{aligned}$$

Для нахождения неизвестной функции $A(k, \omega)$ воспользуемся условиями «сшивки» решений, $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ и $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) = C(k, \omega)e^{|k|z}$ при $z = -z_0$, следующими из первого уравнения в задаче (1.12):

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, -z_0) = \tilde{\varphi}_2(k, \omega, -z_0), \\ \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=-z_0} = \frac{k}{\omega - kV} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (-b \operatorname{sh} kz_0 + d \operatorname{ch} kz_0)A - e^{-kz_0}C = 0, \\ (b \operatorname{ch} kz_0 - d \operatorname{sh} kz_0)A - e^{-kz_0}C = \frac{1}{\omega - kV}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим выражения для A и C :

$$\begin{cases} A(k, \omega) = \frac{e^{-kz_0}}{(\omega - kV)(b - d)}, \\ C(k, \omega) = \frac{-b \operatorname{sh} kz_0 + d \operatorname{ch} kz_0}{(\omega - kV)(b - d)}. \end{cases}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \frac{\rho_2 \omega^2 [\omega^2 \operatorname{sh} |k|(z - H) + g|k| \operatorname{ch} |k|(z - H)] e^{-|k|z_0}}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}, \\ \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \left[\frac{\rho_2 \omega^4 \operatorname{ch} |k|H \operatorname{sh} |k|z + (-\rho_1 \omega^4 + (\rho_1 - \rho_2)g^2|k|^2) \operatorname{sh} |k|H \operatorname{ch} |k|z}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_2 \omega^2 g|k| \operatorname{ch} |k|(z - H)}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} \right] e^{-|k|z_0}, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \left[\frac{-\rho_2 \omega^4 \operatorname{ch} |k|H \operatorname{sh} |k|z_0 + (-\rho_1 \omega^4 + (\rho_1 - \rho_2)g^2|k|^2) \operatorname{sh} |k|H \operatorname{ch} |k|z_0}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_2 \omega^2 g|k| \operatorname{ch} |k|(z_0 + H)}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} \right] e^{|k|z}, \quad (1.13) \end{aligned}$$

где

$$\omega_1^2(k) = \frac{gk(\rho_2 - \rho_1) \operatorname{th} kH}{\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th} kH}$$

— дисперсионное соотношение для внутренних волн. Здесь, как и в формулах (1.5), везде вместо k стоит $|k|$, кроме множителя $k/(\omega - kV)$. Это обусловлено тем, что в решении $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$ содержится $|k|$ для обеспечения убывания решения с глубиной при всех значениях k (как положительных, так и отрицательных).

Далее, как и в первой задаче, проведем расчет величины возвышения поверхности жидкости с использованием процедуры обратного преобразования Фурье. В итоге для трансформанты Фурье с использованием выражения для $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$ из (1.13) получим

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{k}{\omega - kV} \frac{i\rho_2 \omega^3 e^{-|k|z_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}. \quad (1.14)$$

Проводя обратное преобразование Фурье по ω , из (1.14) имеем следующее выражение для стационарной части поверхностных возмущений при $t \rightarrow \infty$ в системе отсчета, связанной с движущимся диполем:

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2\pi V} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2 |k| e^{-|k|z_0} e^{-ik\xi} dk}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(|k| - g/V^2)(1 - \psi(|k|))}; \quad (1.15)$$

здесь $\psi(|k|) = \omega_1^2(|k|)/(|k|^2 V^2)$, $\xi = x + Vt$, а контур интегрирования слегка смещен в верхнюю полуплоскость. Для оценки интеграла (1.15) разобьем область интегрирования на два интервала (рис. 1.2),

$$\eta(\xi) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty + i\varepsilon}^{0 + i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk, \quad I_2 = \int_{0 + i\varepsilon}^{+\infty + i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk.$$

В итоге, проводя процедуры расчетов аналогично первой задаче, получим окончательные выражения для амплитуд двух мод волновой структуры (генерируемых диполем с моментом R): поверхностной моды

$$\eta_{\Pi}(\xi) = -R \frac{2\rho_2 g e^{-gz_0/V^2}}{V^3(\rho_2 \operatorname{ch}(gH/V^2) + \rho_1 \operatorname{sh}(gH/V^2))(1 - \psi(g/V^2))} \sin(g\xi/V^2) \quad (1.16)$$

и внутренней моды

$$\eta_B(\xi) = -R \frac{2\rho_2 k e^{-kz_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(k - g/V^2)(-\psi'(k))} \sin(k\xi) \Big|_{k=k_\psi}. \quad (1.17)$$

Отметим, что как и для первой задачи, внутренняя мода возникает в случае, когда V меньше некоторого $V_{\text{кр.}}$, которое определяется тем же соотношением (1.10), что и для задачи (1.1). Поверхностная же мода в обоих случаях существует при любых значениях величины скорости набегающего потока, как и в классической задаче об обтекании препятствия потоком однородной жидкости бесконечной глубины [160].

1.1.3. Анализ и численные расчеты для реальных условий моря

Механизм генерации поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводного препятствия и описываемых выражениями (1.8)–(1.9) и (1.16)–(1.17), относительно прост и представляется следующим образом. Так, для задачи (1.1) поверхностная мода (1.8) отражает эффект непосредственного обтекания дипольного препятствия потоком жидкости. В этом случае возмущения от него распространяются вверх (с выходом на поверхность, что и описывается (1.8)) и вниз. В последнем случае это вызывает возмущения самого слоя скачка плотности воды, колебания которого в свою очередь эволюционируют как вниз, исчезая на бесконечности (в рамках поставленной задачи), так и вверх, вызывая вторичные возмущения поверхности воды, что и описывается (1.9). При этом очевидно, что по своей энергии (и импульсу) вторичные колебания (за счет внутренней моды) слабее первых (соответствующие расчеты будут рассмотрены ниже).

В условиях задачи (1.11) — обтекание под границей раздела слоев — на распространение возмущений от препятствия вверх существенное влияние оказывает скачок плотности, «забирающая» часть их энергии на свое возбуждение. Остальная часть (с учетом диссипации) идет на генерацию поверхностных

возмущений, описываемых (1.16). В свою очередь возбуждение от скачка, эволюционируя вверх, формирует вторичную (внутреннюю) моду (1.17) на поверхности воды. А возмущение от препятствия вниз полностью исчезает на бесконечности.

На рис. 1.4–1.6 наглядно продемонстрирован эффект влияния скачка плотности на изменение амплитуды поверхностной волны, возникающей при обтекании диполя. Расчеты велись при значениях параметров, соответствующих реальным условиям открытого моря. Так, плотность верхнего слоя моря можно выбрать как $\rho_1 = 1022 \text{ кг/м}^3$, а плотность нижнего (ρ_2) выбрать в пределах $1023 \text{ кг/м}^3 \leq \rho_2 \leq 1029 \text{ кг/м}^3$. Таким плотностям отвечают значения параметра $\delta = \rho_1/\rho_2$ в пределах $0,993 \leq \delta \leq 0,999$. На графиках 1.4–1.6 расчеты проводились для трех вариантов мощности скачка плотности: $\delta_1 = 0,996$, $\delta_2 = 0,998$ и $\delta_3 = 0,999$. Момент диполя R задавался пропорциональным скорости его движения V : $R/V = 1600 \text{ м}^2$. Для исследования влияния глубины локализации скачка расчеты велись при $H = 50 \text{ м}$ и $H = 70 \text{ м}$, а положение препятствия (диполя) ограничивалось тремя горизонтами: $z_0 = 7 \text{ м}$, 4 м и 1 м как сверху (задача (1.1)), так и снизу (задача (1.11)) от уровня границы раздела слоев воды.

На рис. 1.4 приведены кривые амплитуд поверхностной моды B , рассчитанные над слоем скачка плотности (верхние три линии) и под ним (нижние три линии) для случаев $H = 50 \text{ м}$ и $H = 70 \text{ м}$. Здесь следует отметить, что на каждой кривой расположены три группы точек, соответствующие трем значениям δ_i ($i = 1, 2, 3$), что указывает на независимость поверхностной моды от мощности скачка плотности воды, то есть такая мода проявляется непосредственно за счет обтекания диполя. Далее, на графиках видно, что амплитуды возмущений над скачком плотности существенно (в несколько раз) выше соответствующих амплитуд под скачком. Сравнение значений B для двух различных глубин скачков плотности (50 м и 70 м) показывает, что углубление скачка также приводит к существенному уменьшению амплитуды возмущений на поверхности воды.

На рис. 1.5–1.6 приведены кривые, соответствующие амплитудам внутренней моды B , рассчитанные над слоем скачка плот-

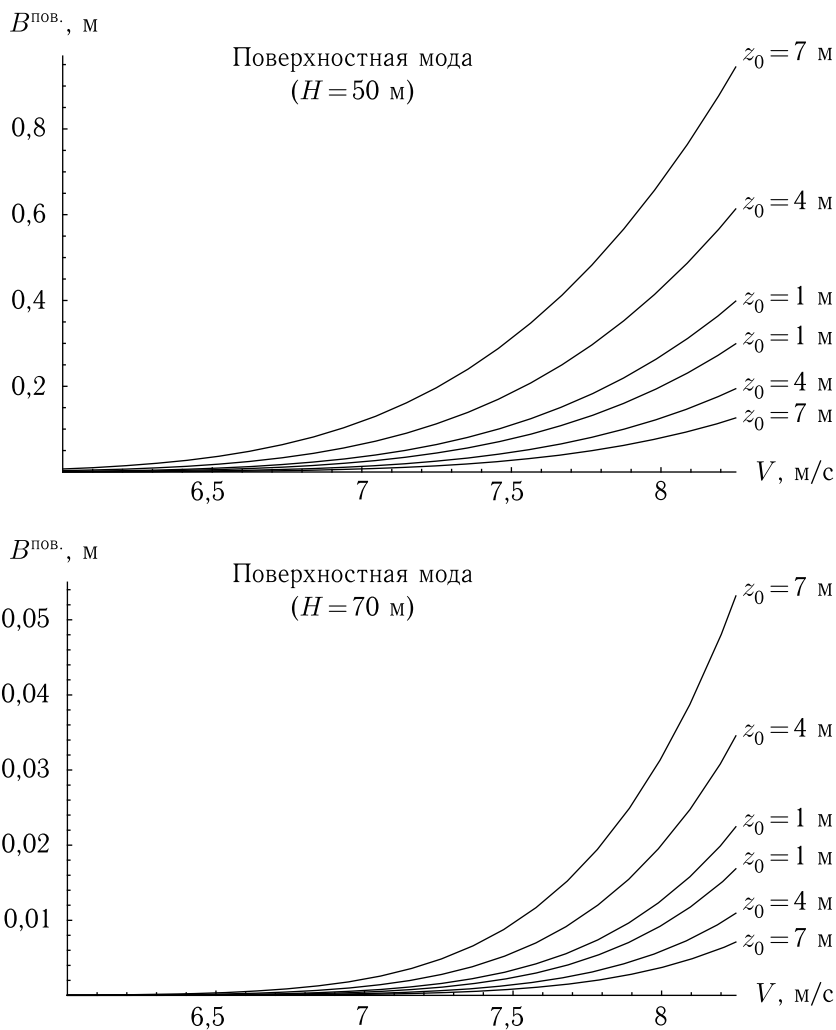


Рис. 1.4. Амплитуды поверхностной моды при обтекании препятствия над слоем скачка плотности и под ним в случаях $H = 50 \text{ м}$ и $H = 70 \text{ м}$

ности (верхние части) и под ним (нижние части) для случаев $H = 50 \text{ м}$ и $H = 70 \text{ м}$. Необходимо отметить, что в обоих случаях с приближением препятствия к слою скачка амплитуда внутренней моды возрастает, то есть уменьшению z_0 соответствует увеличение B . На представленных графиках видно, что проявления амплитуд внутренней и поверхностной моды на интервале

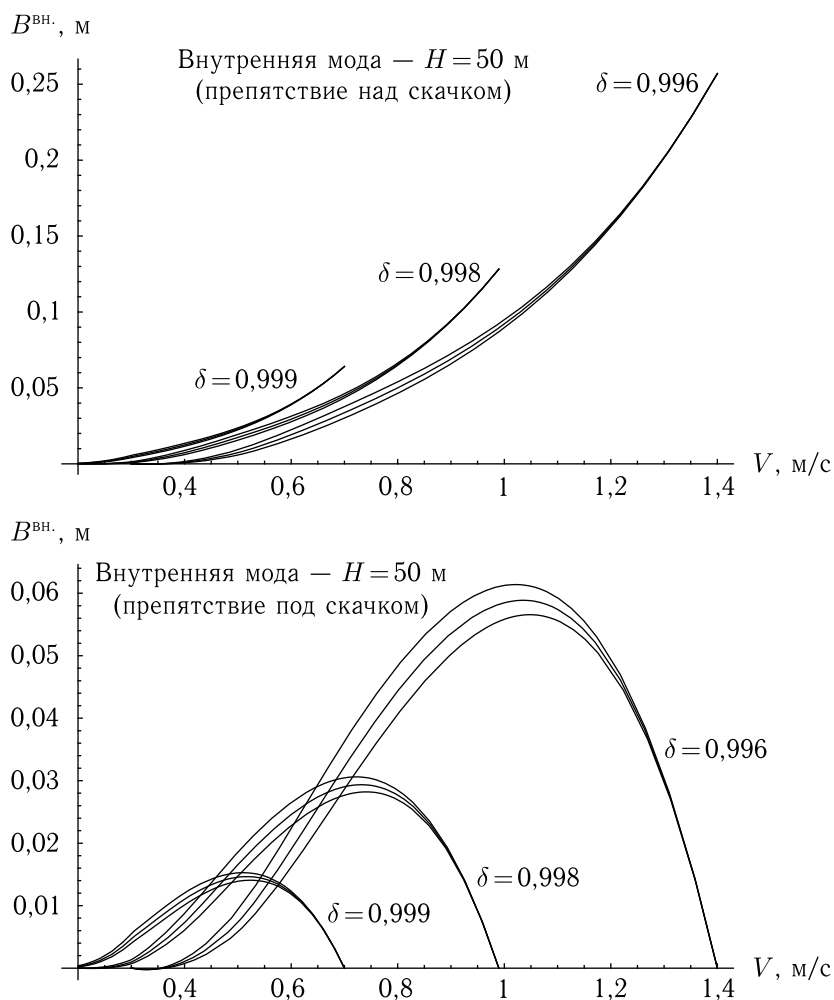


Рис. 1.5. Амплитуды внутренней моды при обтекании препятствия над слоем скачка плотности и под ним в случае $H = 50$ м

скорости обтекания препятствия V существенно разнесены между собой. Так, внутренняя мода в зависимости от δ проявляется лишь при небольших скоростях V , а область проявления поверхностной моды существенно сдвинута в сторону больших V . Это обусловлено «привязкой» внутренней моды к структуре скачка плотности (см. выражение (1.10)).

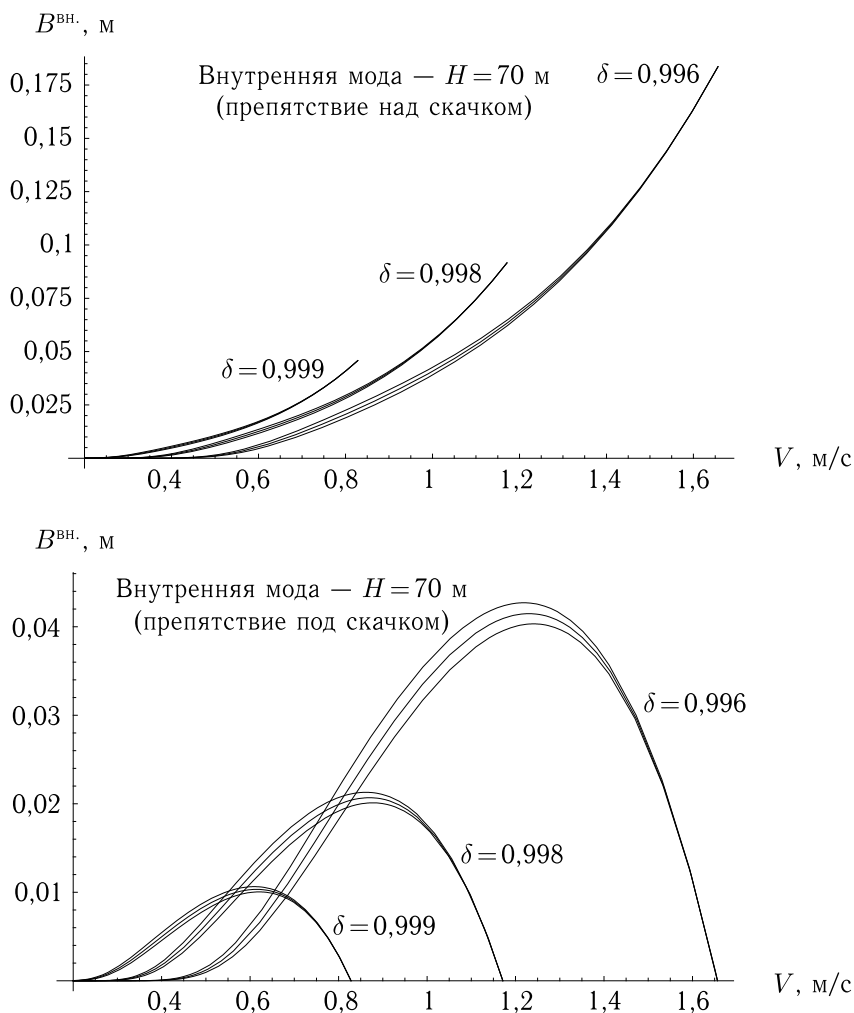


Рис. 1.6. Амплитуды внутренней моды при обтекании препятствия над слоем скачка плотности и под ним в случае $H = 70$ м

Сравнивая амплитуды возмущений внутренней (рис. 1.5–1.6) и поверхностной (рис. 1.4) мод, нужно отметить их существенную разницу в сторону увеличения последней (как и следовало ожидать — см. выше). При этом, в отличие от поверхностной моды, для внутренней моды различно и ее поведение в случаях обтекания диполя над скачком плотности и под ним, причем как

по форме, так и по величине B . Это указывает на характерную роль скачка плотности как неоднородности, блокирующей выход возмущений на морскую поверхность.

Продолжая анализ кривых на рис. 1.5–1.6, отметим, что (как и в случае поверхностной моды) локализация по вертикали скачка плотности также влияет и на эволюцию внутренней моды и ее характеристики на поверхности воды. Однако в последнем случае это влияние несколько меньше.

Заканчивая анализ поверхностных возмущений, возникающих при обтекании препятствия в виде диполя, важно отметить, что параметры подобных поверхностных колебаний воды неоднократно выявлялись при радиолокационном мониторинге морской поверхности, проводимом в рамках специальных натурных экспериментов (см., например, [41]).

1.1.4. Заключение

Исследованы поверхностные возмущения двухслойной идеальной жидкости, возникающие при обтекании в окрестности слоя скачка плотности подводного препятствия, моделируемого точечным диполем. Показано, что в реальных условиях открытого моря за обтекаемым препятствием возможно образование двух различных типов поверхностных волн. Сравнение амплитуд поверхностных возмущений от обтекаемого препятствия, находящегося над и под скачком плотности, выявило их существенные различия, что представляется важным для использования этого эффекта в практических задачах.

1.2. Обтекание препятствий двухслойным потоком конечной глубины

В разд. 1.1 исследовался механизм генерации поверхностных волн, возникающих при обтекании подводных препятствий вблизи скачка плотности в условии бесконечной глубины моря. Было показано, что амплитуды поверхностных волн зависят от мощности скачка плотности, глубины его погружения и относительной локализации препятствия в окрестности самого скачка плотности. В настоящем разделе исследуется подобная задача в модельном океане конечной глубины, и ее результаты сравниваются с результатами, полученными в разд. 1.1.

1.2.1. Постановка задачи и ее решение

Рассматривается двухслойный поток идеальной жидкости, ограниченный горизонтальным дном, стационарно обтекающий точечный диполь с моментом m . Обозначим толщину верхнего слоя через H , нижнего через H_1 , а плотности соответственно будут ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Требуется определить волновую часть возмущений свободной поверхности, распространяющихся вниз по потоку. Начало координат поместим на невозмущенной границе между слоями жидкости, ось x направим вдоль этой границы, а ось y вертикально вверх. Препятствие локализовано либо под границей раздела двух слоев (рис. 1.7), либо над ней (рис. 1.11) на оси y . Решение обеих задач проводим в рамках теории малых возмущений.

1. Препятствие в нижнем слое. Вначале рассмотрим случай, когда диполь находится под скачком плотности, то есть

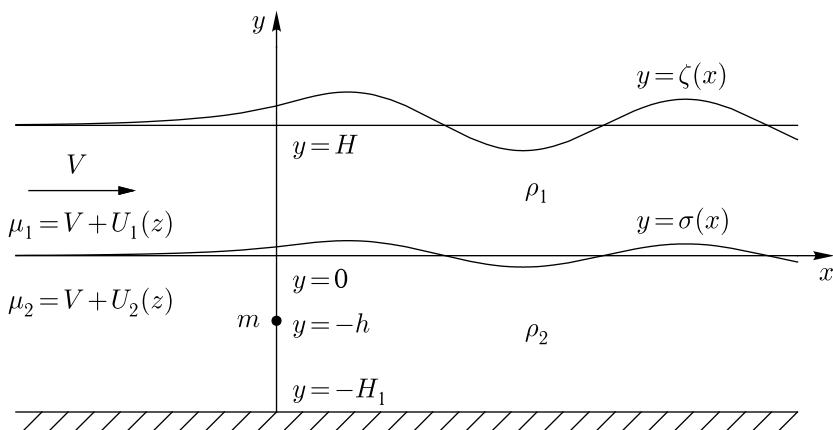


Рис. 1.7. Обтекание диполя, локализованного в нижнем слое двухслойного потока

в точке $(0, -h)$. Пусть скорость установившегося потока при $x \rightarrow -\infty$ равна V . Предполагая течение потенциальным, представим комплексно-сопряженную скорость в каждом из слоев в виде $\mu_j = V + U_j$, $U_j = u_j - iv_j$, ($j = \{1, 2\}$). Обозначим отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного положения $y = H$ через $\zeta(x)$, а величину возвышения границы раздела слоев потока — через $\sigma(x)$. Поскольку вдоль линии тока $y = H + \zeta(x)$ вектор скорости произвольной частицы жидкости коллинеарен ее касательной, то

$$\zeta'(x) = \frac{v_1}{V + u_1} \Big|_{y=H+\zeta(x)}.$$

Линеаризуя данное условие и перенося его со свободной поверхности на прямую $y = H$, имеем кинематическое граничное условие

$$v_1 = V\zeta'(x) \text{ при } y = H. \quad (1.18)$$

Аналогично получаем линеаризованное кинематическое условие вдоль поверхности раздела слоев

$$v_1 = V\sigma'(x), v_2 = V\sigma'(x) \text{ при } y = 0. \quad (1.19)$$

Отсюда имеем одно условие для вертикальных компонент скорости:

$$v_1 = v_2 \text{ при } y = 0. \quad (1.20)$$

Так как возмущения от диполя затухают вверх по потоку, то интеграл Бернулли вдоль линии тока $y = H + \zeta(x)$ можно записать следующим образом:

$$\frac{|\mu_1^2|}{2} + \frac{p_0(x)}{\rho_1} + g(H + \zeta(x)) = \frac{V^2}{2} + \frac{p_0^{(\infty)}}{\rho_1} + gH,$$

где $p_0(x)$ — давление вдоль свободной поверхности, $p_0^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_0(x)$, g — ускорение свободного падения. Считая давление постоянным вдоль всей свободной поверхности, получаем динамическое условие на границе верхнего слоя,

$$\zeta(x) = \frac{V^2 - |\mu_1|^2}{2g} \Big|_{y=H+\zeta(x)},$$

которое посредством линеаризации преобразуется к виду

$$\zeta(x) = -\frac{V}{g} u_1 \text{ при } y = H. \quad (1.21)$$

Продифференцируем равенство (1.21) по x и из получившегося соотношения исключим величину $\zeta'(x)$ с помощью формулы (1.18). В результате придем к граничному условию для компонент вектора скорости:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu v_1 = 0 \text{ при } y = H, \quad \nu = \frac{g}{V^2}. \quad (1.22)$$

Интегралы Бернулли, записанные для линий тока на верхней и нижней сторонах поверхности раздела слоев $y = \sigma(x)$, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1(x) + \frac{\rho_1}{2} |\mu_1^2| + \rho_1 g \sigma(x) &= p_1^{(\infty)} + \frac{\rho_1}{2} V^2 \quad \text{при } y = \sigma(x), \\ p_2(x) + \frac{\rho_2}{2} |\mu_2^2| + \rho_2 g \sigma(x) &= p_2^{(\infty)} + \frac{\rho_2}{2} V^2 \quad \text{при } y = \sigma(x), \end{aligned}$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — давления вдоль соответствующих сторон этой поверхности, $p_1^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_1(x)$, $p_2^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_2(x)$. Поскольку при переходе через поверхность разрыва касательных скоростей давление непрерывно, то $p_1(x) = p_2(x)$, $p_1^{(\infty)} = p_2^{(\infty)}$

и два предыдущих равенства могут быть приведены к одному условию для компонент скорости,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2}(2Vu_1 + u_1^2 + v_1^2) + \rho_1 g\sigma(x) = \\ = \frac{\rho_2}{2}(2Vu_2 + u_2^2 + v_2^2) + \rho_2 g\sigma(x) \text{ при } y = \sigma(x). \end{aligned}$$

Пренебрегая в последнем соотношении квадратами малых величин u_j и v_j ($j = \{1, 2\}$) и перенося его на невозмущенное положение скачка плотности, получаем линеаризованное динамическое условие на границе раздела слоев

$$\rho_1(Vu_1 + g\sigma(x)) = \rho_2(Vu_2 + g\sigma(x)) \text{ при } y = 0.$$

Продифференцируем обе его части по x и в полученное равенство подставим выражения для величины $\sigma'(x)$, следующие из формул (1.19). В результате приходим к граничному условию для возмущений скорости на слое скачка плотности, не содержащему неизвестной функции $\sigma(x)$:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu v_1 \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \nu v_2 \right) \text{ при } y = 0. \quad (1.23)$$

Помимо этого на дне бассейна должно быть выполнено условие непротекания

$$v_2 = 0 \text{ при } y = -H_1. \quad (1.24)$$

Перепишем соотношения (1.22), (1.23), (1.20), (1.24) соответственно в терминах возмущений комплексно-сопряженной скорости:

$$\text{Im} \left[i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = 0 \text{ при } y = H, \quad (1.25)$$

$$\delta \text{Im} \left[i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = \text{Im} \left[i \frac{dU_2}{dz} - \nu U_2 \right] \text{ при } y = 0, \quad (1.26)$$

$$\text{Im } U_1 = \text{Im } U_2 \text{ при } y = 0, \quad (1.27)$$

$$\text{Im } U_2 = 0 \text{ при } y = -H_1, \quad (1.28)$$

где $\delta = \rho_1/\rho_2$, $z = x + iy$. Таким образом, исходная задача сведена к отысканию функций $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.25)–(1.28), причем $U_1(z)$ регулярна в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < H$, а $U_2(z)$ — в полосе $-\infty < x < +\infty$, $-H_1 < y < 0$ всюду, кроме точки $z = -ih$, в которой она имеет

полус второго порядка (так как в этой точке расположен диполь). Возмущение свободной поверхности по отношению к ее равносному положению вычисляется с помощью динамического условия на границе верхнего слоя (1.21).

В соответствии с вышесказанным будем искать комплексно-сопряженную скорость $U_1(z)$ в виде ее разложения в интеграл Фурье по волновым числам, а $U_2(z)$ — как сумму комплексно-сопряженной скорости, индуцированной диполем в безграничном потоке, и регулярной функции, представленной интегралом Фурье:

$$U_1 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(k)e^{ikz} + B(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.29)$$

$$U_2 = \frac{m}{2\pi} \left[-\frac{1}{(z+ih)^2} + \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk \right]. \quad (1.30)$$

Применив равенство

$$-\frac{1}{(z+ih)^2} = \begin{cases} \int_0^{\infty} k e^{-kh} e^{ikz} dk, & \text{если } y > -h, \\ \int_0^{\infty} k e^{kh} e^{-ikz} dk, & \text{если } y < -h, \end{cases}$$

получим из (1.30) выражение для функции $U_2(z)$ в областях нижнего слоя, находящихся над и под точкой локализации диполя соответственно:

$$U_2(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [(k e^{-kh} + C(k))e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk, & \text{если } y > -h, \\ \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + (k e^{kh} + D(k))e^{-ikz}] dk, & \text{если } y < -h. \end{cases} \quad (1.31)$$

Подставив формулы (1.29) и (1.31) для комплексно-сопряженных скоростей $U_1(z)$ и $U_2(z)$ в граничные условия (1.25)–(1.28),

перепишем последние в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\infty} [k(A(k)e^{-kH} + B(k)e^{kH}) + \nu(A(k)e^{-kH} - B(k)e^{kH})] \sin kx \, dk = 0, \\ & \int_0^{\infty} [\delta\{k(A(k) + B(k)) + \nu(A(k) - B(k))\} - \\ & \quad - k(ke^{-kh} + C(k) + D(k)) - \nu(ke^{-kh} + C(k) - D(k))] \sin kx \, dk = 0, \\ & \int_0^{\infty} [A(k) - B(k) - ke^{-kh} - C(k) + D(k)] \sin kx \, dk = 0, \\ & \int_0^{\infty} [C(k)e^{kH_1} - (ke^{kh} + D(k))e^{-kH_1}] \sin kx \, dk = 0. \end{aligned} \right.$$

Выполнение этих равенств эквивалентно одновременному обращению в нуль сомножителей в подынтегральных выражениях, стоящих в квадратных скобках перед $\sin kx$. Отсюда имеем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных функций $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & (k + \nu)e^{-kH}A + (k - \nu)e^{kH}B = 0, \\ & \delta(k + \nu)A + \delta(k - \nu)B - (k + \nu)C - (k - \nu)D = k(k + \nu)e^{-kh}, \\ & A - B - C + D = ke^{-kh}, \\ & e^{kH_1}C - e^{-kH_1}D = ke^{k(h-H_1)}. \end{aligned} \right.$$

Решая ее, получаем следующие выражения для $A(k)$ и $B(k)$:

$$\begin{aligned} A(k) &= \{2k^2(k - \nu)e^{kH} \operatorname{ch} k(H_1 - h)\} / \\ & \quad / \{ (1 - \delta)(k^2 - \nu^2) \operatorname{ch} k(H - H_1) + \\ & \quad + [(1 + \delta)k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{ch} k(H_1 + H) - 2k\nu \operatorname{sh} k(H_1 + H) \}, \\ B(k) &= \{-2k^2(k + \nu)e^{-kH} \operatorname{ch} k(H_1 - h)\} / \\ & \quad / \{ (1 - \delta)(k^2 - \nu^2) \operatorname{ch} k(H - H_1) + \\ & \quad + [(1 + \delta)k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{ch} k(H_1 + H) - 2k\nu \operatorname{sh} k(H_1 + H) \}. \end{aligned}$$

Подставив последние в соотношения (1.29) и (1.21) и воспользовавшись формулами для суммы и разности гиперболических функций, приходим к следующему интегральному представлению искомой величины возвышения свободной поверхности:

$$\zeta(x) = \frac{m}{\pi V} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \operatorname{ch} k(H_1 - h)}{\operatorname{ch} kH \operatorname{ch} kH_1} \times \\ \times \frac{\cos kx dk}{k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)}.$$

Выбрав в качестве характерного вертикального масштаба толщину верхнего слоя H , а в качестве горизонтального — величину $\nu^{-1} = V^2/g$, перейдем к безразмерным переменным,

$$X = \nu x, \quad Z = \frac{\zeta}{H}, \quad \xi = \frac{k}{\nu}, \quad M = \frac{m}{VH^2}, \\ E = \nu H = \frac{gH}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}^2}, \quad E_1 = \nu H_1 = \frac{gH_1}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}_1^2}, \quad (1.32) \\ E_0 = \nu h = \frac{gh}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}_0^2},$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_0$ — числа Фруда соответственно: по глубине верхнего слоя, глубине нижнего слоя и расстоянию от диполя до невозмущенной поверхности раздела. В переменных (1.32) выражение для отклонения свободной границы запишется в виде

$$Z(X) = \frac{ME}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(E_1 - E_0)\xi}{\operatorname{ch} E\xi \operatorname{ch} E_1\xi} \times \\ \times \frac{\cos X\xi d\xi}{\xi^2 + [\delta\xi^2 + (1 - \delta)] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi)}. \quad (1.33)$$

Асимптотическое положение свободной поверхности далеко вниз по потоку (при $X \rightarrow \infty$) определяется неотрицательными нулями знаменателя подынтегрального выражения в (1.33), то есть неотрицательными корнями уравнения

$$\xi^2 + [\delta\xi^2 + (1 - \delta)] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi) = 0.$$

Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon = 1 - \delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$, обозначающий относительный перепад плотности (по условию $0 < \varepsilon < 1$),

и перепишем это уравнение в виде

$$f(\xi, E, E_1) = \varepsilon, \quad (1.34)$$

где

$$f(\xi, E, E_1) = \frac{\xi^2(1 + \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi) - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi)}{(\xi^2 - 1) \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi}.$$

Для его исследования введем следующие обозначения: $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi, E, E_1) = f_0(E, E_1)$, $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial f(\xi, E, E_1)}{\partial \xi} = f_1(E, E_1)$, $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f(\xi, E, E_1)}{\partial \xi^2} = f_2(E, E_1)$. Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в справедливости равенств

$$\begin{aligned} f_0(E, E_1) &= \frac{E + E_1 - 1}{EE_1}; \quad f_2(E, E_1) = \\ &= \frac{2(E^2 E_1 + EE_1^2) - 2(E^2 + 3EE_2 + E_1^2) + 6(E + E_1 - 1)}{3EE_1}. \end{aligned}$$

Помимо этого, из четности f по переменной ξ следует, что $f_1(E, E_1) \equiv 0$. Отметим далее, что, как показывают проведенные численные эксперименты, относительно поведения функции $f(\xi, E, E_1)$, стоящей в левой части уравнения (1.34), имеет место следующее утверждение.

Если $f_2(E, E_1) \leq 0$, то $f(\xi, E, E_1)$ монотонно убывает по ξ на полуинтервале $[0; 1)$; если же $f_2(E, E_1) > 0$, то $f(\xi, E, E_1)$ имеет единственный максимум $\xi_0(E, E_1) \in (0; 1)$, то есть функция $f(\xi, E, E_1)$ возрастает при $\xi \in [0; \xi_0]$ и убывает при $\xi \in [\xi_0; 1)$.

Кроме того, очевидно, что $\lim_{\xi \rightarrow 1^-} f(\xi, E, E_1) = -\infty$. Таким образом, поведение функции $f(\xi, E, E_1)$ на полуинтервале $[0; 1)$ определяется знаком ее второй производной при $\xi = 0$, а уравнение (1.34) может иметь не более двух корней на интервале $(0; 1)$.

На рис. 1.8 на плоскости параметров E, E_1 изображена кривая Γ_2 , определяемая уравнением $f_2(E, E_1) = 0$. Она имеет горизонтальную и вертикальную асимптоты $E_1 = 1$ и $E = 1$ (то есть на Γ_2 $\lim_{E_1 \rightarrow 1^-} E = \infty$, $\lim_{E \rightarrow 1^-} E_1 = \infty$). Кривая Γ_2 симметрична относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов и проходит через точку $(1; 1)$, поэтому в этой точке она пересека-

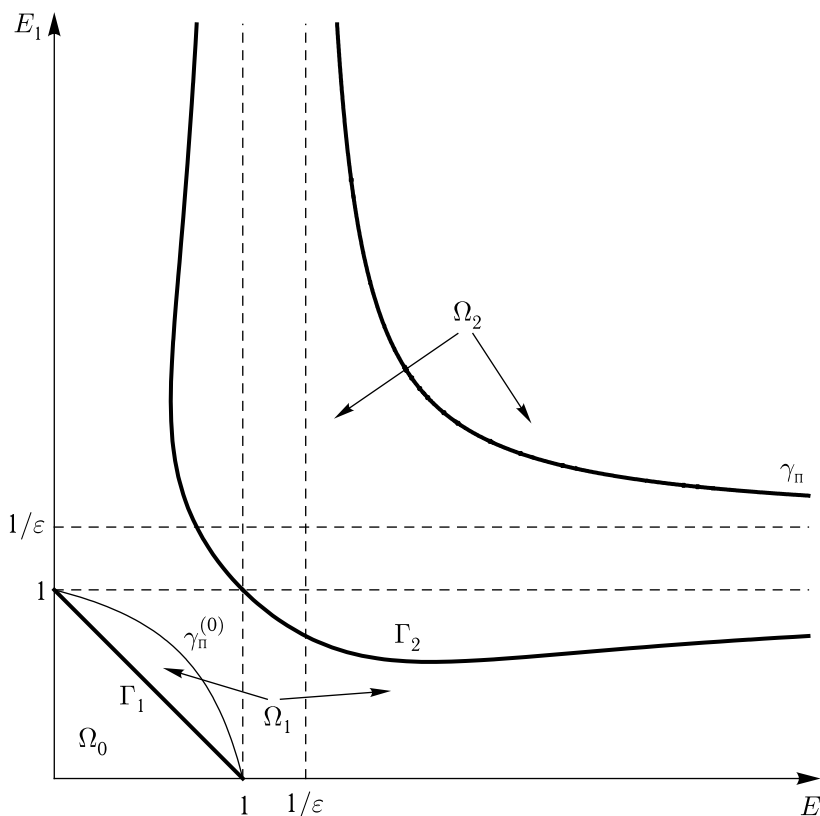


Рис. 1.8. Кривые и области, рассматриваемые на плоскости параметров $(E; E_1)$

ет биссектрису под прямым углом, а прямая $E + E_1 = 2$, перпендикулярная упомянутой биссектрисе и также проходящая через точку $(1; 1)$, является касательной к Γ_2 . Уравнение $f_0(E, E_1) = 0$ задает в первом квадранте отрезок Γ_1 , соединяющий точки $(1; 0)$ и $(0; 1)$. Кривая Γ_2 и отрезок Γ_1 разбивают первую четверть на три области. В области Ω_2 , расположенной над Γ_2 , выполнены неравенства $f_2(E, E_1) > 0$ и $f_0(E, E_1) > 0$; в области Ω_1 , находящейся между Γ_2 и Γ_1 , $f_2(E, E_1) < 0$, $f_0(E, E_1) > 0$; наконец, в области Ω_0 , являющейся внутренностью треугольника с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$, $f_2(E, E_1) < 0$, $f_0(E, E_1) < 0$.

Исследуем теперь вопрос о количестве корней уравнения (1.34) на интервале $(0; 1)$ в зависимости от значений параметров

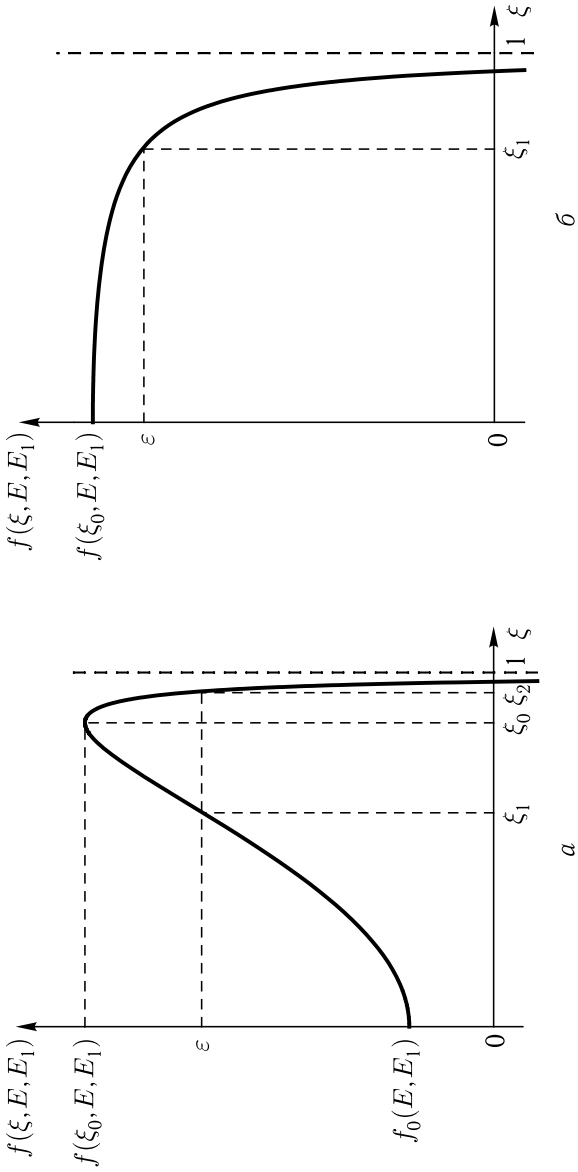


Рис. 1.9. Два качественно различных варианта поведения функции $f(\xi, E, E_1)$ на интервале $(0; 1)$

E, E_1 и ε ($E > 0$, $E_1 > 0$, $0 < \varepsilon < 1$). Вначале сформулируем критерии существования двух корней. Из графических соображений (см. рис. 1.9, *a*) ясно, что этот случай реализуется тогда и только тогда, когда функция $f(\xi, E, E_1)$ (рассматриваемая как функция переменной ξ) имеет локальный максимум в точке $\xi_0 \in (0; 1)$ и значение параметра ε лежит внутри интервала $(f_0(E, E_1), f(\xi_0, E, E_1))$, то есть

$$\begin{cases} f_2(E, E_1) > 0, \\ f_0(E, E_1) < \varepsilon < \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E, E_1). \end{cases}$$

Вопрос о наличии у уравнения (1.34) хотя бы одного корня на интервале $(0; 1)$ решается положительно в каждом из следующих двух случаев.

1. Функция $f(\xi, E, E_1)$ имеет максимум в точке $\xi_0 \in (0; 1)$, и величина ε не превосходит этот максимум (рис. 1.9, *a*), что равносильно выполнению следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} f_2(E, E_1) > 0, \\ \varepsilon \leq \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E, E_1). \end{cases}$$

2. Функция $f(\xi, E, E_1)$ монотонно убывает на интервале $(0; 1)$, и $\varepsilon < \max_{\xi \in [0;1]} f(\xi, E, E_1) = f_0(E, E_1)$ (рис. 1.9, *б*), то есть

$$\begin{cases} f_2(E, E_1) \leq 0, \\ \varepsilon < f_0(E, E_1). \end{cases}$$

Для визуализации полученных критериев на плоскости $(E; E_1)$ сделаем ряд вспомогательных утверждений. Во-первых, нетрудно убедиться, что уравнение $f_0(E, E_1) = \varepsilon$ определяет гиперболу γ с асимптотами $E = 1/\varepsilon$ и $E_1 = 1/\varepsilon$. Отсюда сразу же следует, что ее правая ветвь $\gamma_{\text{п}}$ целиком расположена в области Ω_2 , поскольку, как показано выше, граница $\partial\Omega_2 = \Gamma$ лежит вне области

$$\begin{cases} E > 1, \\ E_1 > 1. \end{cases}$$

Отметим также, что неравенство $f_0(E, E_1) > \varepsilon$ задает область между ветвями гиперболы γ , а неравенством $f_0(E, E_1) < \varepsilon$ определяются области над ее правой ($\gamma_{\text{п}}$) и под левой ($\gamma_{\text{л}}$) ветвями.

Во-вторых, в силу симметрии γ относительно прямой $E = E_1$, являющейся биссектрисой первого и третьего координатных углов, эта прямая пересекает левую ветвь γ под прямым углом. Абсцисса E_0 точки пересечения находится из уравнения $\varepsilon E_0^2 - 2E_0 + 1 = 0$, то есть

$$E_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}.$$

Очевидно, что $E_0 < 1$, поэтому прямая $E + E_1 = 2E_0$ (касательная к левой ветви гиперболы γ и параллельная касательной к кривой Γ , $E + E_1 = 2$) расположена ниже этой касательной. Отсюда следует, что $\gamma_{\text{л}}$ лежит вне области Ω_2 (и не пересекается с ее границей). Обозначим через $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$ часть $\gamma_{\text{л}}$, находящуюся в первом квадранте. Легко видеть, что $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$ расположена над прямой $E + E_1 = 1$, поскольку $\gamma_{\text{л}}$ выпукла вверх и проходит через точки $(1; 0)$ и $(0; 1)$, принадлежащие этой прямой. Таким образом, кривая $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$ лежит в области Ω_1 .

В-третьих, покажем, что при наличии на интервале $(0; 1)$ у функции $f(\xi, E, E_1)$ локального максимума ξ_0 справедливо неравенство $f(\xi_0, E, E_1) \geq 1$. С этой целью рассмотрим уравнение $f(\xi, E, E_1) = 1$ или

$$\xi^2 - (\text{th } E\xi + \text{th } E_1\xi)\xi + \text{th } E\xi \text{th } E_1\xi = 0.$$

Решая его как квадратное относительно ξ (с коэффициентами, зависящими от $\text{th } E\xi$ и $\text{th } E_1\xi$), находим, что оно равносильно совокупности

$$\begin{cases} \text{th } E\xi = \xi, \\ \text{th } E_1\xi = \xi, \end{cases} \quad (1.35)$$

которая имеет хотя бы одно положительное решение, если

$$\begin{cases} E > 1, \\ E_1 > 1, \end{cases} \quad (1.36)$$

поскольку уравнение $\operatorname{th} ax = x$ имеет положительный корень при выполнении условия $(\operatorname{th} ax)'_x|_{x=0} > 1$, то есть при $a > 1$. Заметим, что в силу неравенства $\operatorname{th} E\xi < 1$, справедливого при любых вещественных значениях ξ , все положительные решения рассматриваемой совокупности (если они существуют) лежат на интервале $(0; 1)$. Далее, так как область Ω_2 лежит внутри области, задаваемой неравенствами (1.36), то отсюда получаем, что в случае наличия у функции $f(\xi, E, E_1)$ локального максимума на интервале $(0; 1)$ его величина не меньше единицы.

Докажем, наконец, что уравнение (1.34) не имеет действительных корней ξ таких, что $\xi > 1$. Имеем равенство $\lim_{\xi \rightarrow 1^+} f(\xi, E, E_1) = +\infty$. С другой стороны, воспользовавшись предельными соотношениями $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \operatorname{th} E\xi = 1$ и $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \operatorname{th} E_1\xi = 1$, нетрудно убедиться в справедливости равенства $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi, E, E_1) = 2$. Выше было установлено, что уравнение $f(\xi, E, E_1) = 1$ равносильно совокупности (1.35), все положительные решения которой лежат на интервале $(0; 1)$. Следовательно, это уравнение не имеет корней при $\xi > 1$, а поскольку функция $f(\xi, E, E_1)$ непрерывна по ξ на множестве $(1; +\infty)$, то отсюда заключаем, что при $\xi > 1$ выполняется неравенство $f(\xi, E, E_1) > 1$ и уравнение (1.34) не имеет корней $\xi \in (1; +\infty)$.

Итак, мы показали следующее.

1. Правая ветвь гиперболы γ лежит в области Ω_2 .
2. Часть левой ветви гиперболы γ , находящаяся в первой четверти, расположена вне области Ω_2 .
3. $\max_{0 < \xi < 1} f(\xi, E, E_1) \geq 1$ при условии, что точка с координатами $(E; E_1)$ лежит в области Ω_2 .
4. Все положительные корни уравнения (1.34) удовлетворяют неравенству $0 < \xi < 1$.

С учетом полученных утверждений критерий наличия у уравнения (1.34) двух положительных корней можно привести к виду

$$\begin{cases} E + E_1 - 1 < \varepsilon E E_1, \\ E > 1/\varepsilon, E_1 > 1/\varepsilon. \end{cases} \quad (1.37)$$

Эта система задает внутренность правой ветви гиперболы γ . Условия существования у (1.34) хотя бы одного положительного решения переписываются в виде

$$\begin{cases} E + E_1 - 1 > \varepsilon E E_1, \\ E > 1/\varepsilon, \quad E_1 > 1/\varepsilon \end{cases} \quad (1.38)$$

и определяют область в первом квадранте, расположенную над объединением кривой $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$ (то есть находящейся в нем части левой ветви гиперболы γ) и луча $[1; +\infty)$ на оси абсцисс.

Обозначим теперь через β отношение толщины нижнего слоя жидкости к толщине верхнего: $\beta = H_1/H$. Из формул (1.32) вытекает, что $\beta = E_1/E$. Подставляя βE вместо E_1 в условия (1.37)–(1.38) и решая получившиеся неравенства относительно E , находим, что уравнение (1.34) имеет два положительных корня при

$$E > E_{cr}^{\text{BH}} = \frac{\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2\varepsilon\beta} \quad (1.39)$$

и хотя бы одно положительное решение при

$$E > E_{cr}^{\text{пов}} = \frac{\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2\varepsilon\beta}. \quad (1.40)$$

Отсюда очевидно, что $E_{cr}^{\text{пов}} < E_{cr}^{\text{BH}}$. Заметим, что с физической точки зрения поиск корней уравнения (1.34) эквивалентен отысканию таких волн, фазовая скорость которых равна скорости набегающего потока V . Поэтому данные волны являются стационарными, что и требуется по условию задачи.

Вне левой полуплоскости помимо полюсов на положительной действительной оси подынтегральная функция в (1.33) имеет также бесконечное множество полюсов, расположенных на мнимой оси. В самом деле, подстановка $\xi = i\eta$ ($\eta \in \mathbb{R}$) в (1.34) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & (-\cos E\eta \cos E_1\eta + (1 - \varepsilon) \sin E\eta \sin E_1\eta) \eta^2 + \\ & + \sin(E + E_1)\eta \cdot \eta - \varepsilon \sin E\eta \sin E_1\eta = 0, \end{aligned}$$

имеющему счетное множество действительных решений при любом значении отношения $\beta = E_1/E$.

Вернемся к формуле (1.33) для величины возвышения свободной поверхности. Воспользовавшись тождеством $\cos X\xi \equiv (e^{iX\xi} + e^{-iX\xi})/2$, представим (1.33) в следующем виде:

$$Z(X) = \lim_{M_1 \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_0^{M_1} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{M_1} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi \right) = \\ = \lim_{M_1 \rightarrow +\infty} (J_1(X, M_1) + J_2(X, M_1)),$$

где

$$F(\xi) = \frac{ME}{\pi} \times \\ \times \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(E_1 - E_0)\xi}{\operatorname{ch} E\xi \operatorname{ch} E_1\xi \{ \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi) \}}.$$

Вначале рассмотрим случай положительных X и исследуем функцию $J_1(X, M_1)$. Для получения решения, затухающего вверх по потоку, сместим контур интегрирования в формуле для $J_1(X, M_1)$ в нижнюю полуплоскость, то есть будем понимать J_1 как следующий предел:

$$J_1(X, M_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} Z_1(X, M_1, \varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + M_1} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi.$$

С целью вычисления $Z_1(X, M_1, \varepsilon_1)$ рассмотрим вспомогательный контур Γ^+ , состоящий из отрезка $[-i\varepsilon_1; -i\varepsilon_1 + M_1]$, дуги C_R^+ окружности радиуса $R = \sqrt{M_1^2 + \varepsilon_1^2}$, соединяющей точку $-i\varepsilon_1 + M_1$ с точкой iR , n полуокружностей c_j т.е. $|\xi - i\eta_j| = \varepsilon_1$, $\operatorname{Re} \xi \geq 0$, и системы отрезков

$$d = [-i\varepsilon_1; i(\eta_1 - \varepsilon_1)] \bigcup_{j=1}^{n-1} [i(\eta_j + \varepsilon_1); i(\eta_{j+1} - \varepsilon_1)] \bigcup [i(\eta_n + \varepsilon_1); iR],$$

соединяющих соответствующие точки этих полуокружностей, принадлежащие мнимой оси, а также отрезков $[-i\varepsilon_1; i(\eta_1 - \varepsilon_1)]$ и $[i(\eta_n + \varepsilon_1); iR]$ (рис. 1.10, а). Здесь $i\eta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) — все полюса функции $F(\xi)$, расположенные в верхней полуплоскости на мнимой оси и удовлетворяющие неравенству $\eta_j < R$. Обозначим через ξ_j действительные положительные полюса функции $F(\xi)$, а через s — их количество ($0 \leq s \leq 2$). Поскольку

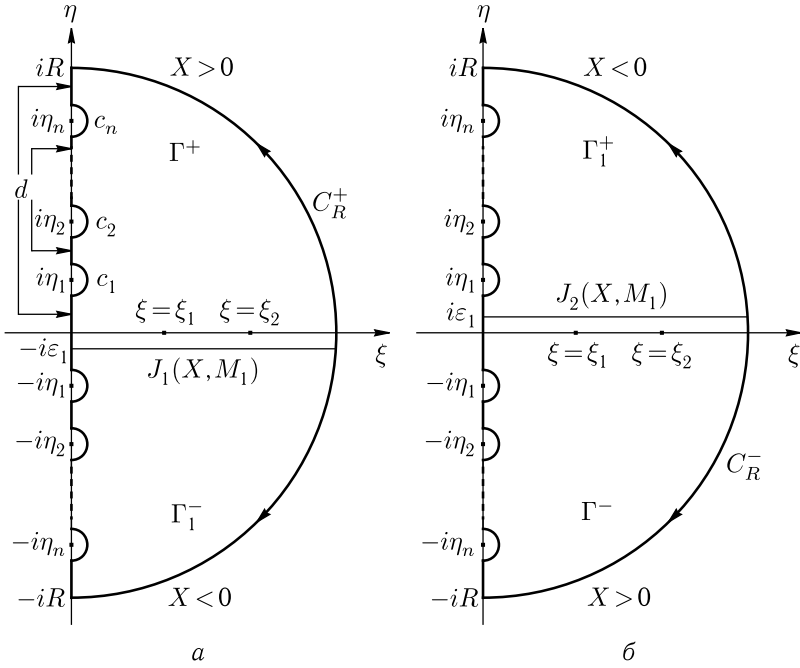


Рис. 1.10. Контуры интегрирования, используемые для вычисления J_1 и J_2

внутри контура Γ^+ $F(\xi)$ регулярна всюду (за исключением особых точек ξ_j), то по основной теореме теории вычетов имеем [181]:

$$\int_{\Gamma^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi = 2\pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{i\xi_j X}. \quad (1.41)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi &= \int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + M_1} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \int_{C_R^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi - \\ &\quad - \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \int_l F(i\eta) e^{-X\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где l — система отрезков d , повернутая на угол $\pi/2$ по часовой стрелке относительно начала координат (то есть l лежит на

действительной оси). Сравнивая (1.41) и (1.42), находим, что

$$Z_1(X, M_1, \varepsilon_1) = \pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{i\xi_j X} + \frac{\pi i}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \frac{1}{2} \int_{C_R^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_l F(i\eta) e^{-X\eta} d\eta. \quad (1.43)$$

Обратимся теперь к интегралу $J_2(X, M_1) = \frac{1}{2} \int_0^{M_1} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi$.

Сместив контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, будем искать $J_2(X, M_1)$ как предел

$$J_2(X, M_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} Z_2(X, M_1, \varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1 + M_1} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi.$$

Рассматривая вспомогательный контур Γ^- , симметричный Γ^+ относительно действительной оси (и ориентированный по часовой стрелке (рис. 1.10, б)), можно показать, что

$$Z_2(X, M_1, \varepsilon_1) = -\pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{-i\xi_j X} - \frac{\pi i}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=-i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \frac{1}{2} \int_{C_R^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_l F(-i\eta) e^{-X\eta} d\eta, \quad (1.44)$$

где C_R^- — дуга окружности, симметричная дуге C_R^+ . Теперь сложим почленно (1.43) и (1.44) и в полученном соотношении устремим величину ε_1 к нулю. Принимая во внимание, что $F(\xi)$ — четная функция и $\operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) = -\operatorname{res}_{\xi=-i\eta_j} F(\xi)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), в результате придем к следующему равенству:

$$\begin{aligned} J_1(X, M_1) + J_2(X, M_1) &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (Z_1(X, M_1, \varepsilon_1) + Z_2(X, M_1, \varepsilon_1)) = \\ &= -2\pi \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) \sin \xi_j X + \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{C_{M_1}^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_{C_{M_1}^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Поскольку в силу леммы Жордана [181]

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \int_{C_{M_1}^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi = 0, \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \int_{C_{M_1}^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi = 0,$$

то, переходя в (1.45) к пределу при $M_1 \rightarrow \infty$, заключаем, что при $X > 0$

$$\begin{aligned} Z(X) &= \lim_{M_1 \rightarrow \infty} (J_1(X, M_1) + J_2(X, M_1)) = \\ &= -2\pi \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) \sin \xi_j X + \pi i \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X}. \end{aligned}$$

В этой формуле первое слагаемое задает волновую структуру поверхностных возмущений, а второе соответствует неволновой части возмущений свободной границы, затухающей вниз по потоку. Для вычисления волновой составляющей поверхностных возмущений $W(X)$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g_1(\xi, E, \gamma, \beta) &= \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(\beta - \gamma) E \xi}{\operatorname{ch} E \xi \operatorname{ch} \beta E \xi}, \quad g_2(\xi, \varepsilon, E, \beta) = \\ &= \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E \xi \operatorname{th} \beta E \xi - \xi(\operatorname{th} E \xi + \operatorname{th} \beta E \xi), \end{aligned}$$

где $\gamma = h/H = E_0/E$. Тогда $F(\xi) = \frac{ME}{\pi} \frac{g_1}{g_2}$, а поскольку $F(\xi)$ имеет в точках $\xi = \xi_j$ полюса первого порядка, то $\operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) = \frac{ME}{\pi} \frac{g_1(\xi_j)}{g_2'(\xi_j)}$ и

$$W(X) = -2ME \sum_{j=1}^s \frac{g_1(\xi_j)}{g_2'(\xi_j)} \sin \xi_j X. \quad (1.46)$$

Связывая найденное выражение для $W(X)$ с условиями (1.39)–(1.40) наличия у уравнения (1.34) положительных решений, получаем, что при $E > E_{cr}^{\text{BH}}$ искомые волновые возмущения представляют собой сумму двух мод — внутренней (то есть возникающей благодаря неоднородности жидкости) и поверхностной (за счет непосредственного обтекания препятствия), причем первая соответствует меньшему корню ξ_1 , а вторая — большему ξ_2 . Если $E_{cr}^{\text{пов}} < E < E_{cr}^{\text{BH}}$, то $W(X)$ состоит из одной лишь поверхностной моды; при $E < E_{cr}^{\text{пов}}$ поверхностные волны за обтекаемым препятствием не образуются и $W(X) \equiv 0$.

Следовательно, внутренняя мода возникает при $E > E_{cr}^{BH}$, а поверхностная — при $E > E_{cr}^{POB}$. Отсюда ясно, что величины E_{cr}^{BH} и E_{cr}^{POB} суть значения параметра E при скорости набегающего потока V , равной максимально возможной фазовой скорости соответственно внутренней и поверхностной моды. А поскольку при $E \rightarrow E_{cr}^{BH}$ или $E \rightarrow E_{cr}^{POB}$ один из положительных корней уравнения (1.34) стремится к нулю, то критические значения E отвечают фазовым скоростям длинных волн.

Для дальнейшего представляется удобным переписать полученные результаты в терминах введенного выше числа Фруда $\mathbf{F}$. Так как $E = 1/\mathbf{F}^2$, то из (1.39) и (1.40) следует, что внутренняя мода существует при

$$\mathbf{F} < \mathbf{F}_{cr}^{BH} = \sqrt{\frac{\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2}}, \quad (1.47)$$

а поверхностная — при

$$\mathbf{F} < \mathbf{F}_{cr}^{POB} = \sqrt{\frac{\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2}}. \quad (1.48)$$

Очевидно, что $\mathbf{F}_{cr}^{BH} < \mathbf{F}_{cr}^{POB}$, то есть поверхностная мода образуется в более широком диапазоне чисел Фруда (или, что то же самое, скоростей потока), нежели внутренняя. Волновая часть возмущений свободной границы запишется следующим образом:

$$W(X) = -2ME \sum_{j=1}^s \frac{q_1(\xi, \mathbf{F}, \gamma, \beta)}{\partial q_2(\xi, \varepsilon, \mathbf{F}, \beta)/\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_j} \sin \xi_j X,$$

где функции

$$q_1(\xi, \mathbf{F}, \gamma, \beta) = \frac{\xi^2 \operatorname{ch}((\beta - \gamma)\xi/\mathbf{F}^2)}{\operatorname{ch}(\xi/\mathbf{F}^2) \operatorname{ch}(\beta\xi/\mathbf{F}^2)}$$

и

$$\begin{aligned} q_2(\xi, \varepsilon, \mathbf{F}, \beta) &= \\ &= \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th}(\xi/\mathbf{F}^2) \operatorname{th}(\beta\xi/\mathbf{F}^2) - \xi(\operatorname{th}(\xi/\mathbf{F}^2) + \operatorname{th}(\beta\xi/\mathbf{F}^2)) \end{aligned}$$

получаются из $g_1(\xi, E, \gamma, \beta)$ и $g_2(\xi, \varepsilon, E, \beta)$ подстановкой $E = 1/\mathbf{F}^2$.

Рассмотрим теперь интеграл (1.33) при $X < 0$. На этот раз для вычисления $J_1(X, M_1)$ будем использовать вспомогательный контур Γ_1^- , представляющий собой объединение горизонтального отрезка $[-i\varepsilon_1; -i\varepsilon_1 + M_1]$ и расположенной под ним части контура Γ^- (рис. 1.10, а), а для вычисления $J_2(X, M_1)$ — контур Γ_1^+ , симметричный контуру Γ_1^- относительно действительной оси (рис. 1.10, б). Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были изложены выше применительно к случаю $X > 0$, получим для величины отклонения свободной поверхности от ее равновесного положения формулу

$$Z(X) = \pi i \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{\eta_j X},$$

показывающую, что поверхностные возмущения перед обтекаемым препятствием имеют непериодический затухающий характер.

2. Препятствие в верхнем слое. Далее в той же постановке исследуем задачу о генерировании волновых возмущений свободной поверхности препятствием, которое моделируется точечным диполем с моментом m , расположенным в верхнем слое двухслойного потока несжимаемой жидкости (рис. 1.11). Все обозначения сохраним теми же, что и в предыдущем случае. Поместим диполь в точку $z = ih$ ($0 < h < H$), а комплексно-сопряженную скорость в j слое μ_j ($j \in \{1, 2\}$), как и ранее, представим в виде $\mu_j = V + U_j$. Математическая формулировка исходной задачи выглядит следующим образом: найти аналитические функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющие граничным условиям (1.25)–(1.28); при этом $U_1(z)$ должна быть регулярна в полосе $0 < \operatorname{Im} z < H$ (за исключением полюса второго порядка в точке $z = ih$)

$$U_1 = \frac{m}{2\pi} \left[-\frac{1}{(z + ih)^2} + \int_0^{\infty} [A(k)e^{ikz} + B(k)e^{-ikz}] dk \right], \quad (1.49)$$

а $U_2(z)$ регулярна в полосе $-H_1 < \operatorname{Im} z < 0$,

$$U_2 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.50)$$

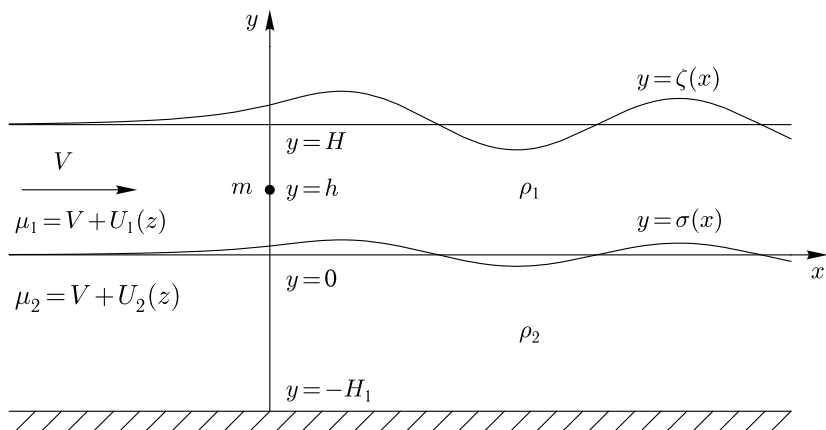


Рис. 1.11. Обтекание диполя, локализованного в верхнем слое двух-
слойного потока

где функции $A(k), B(k), C(k)$ и $D(k)$ подлежат определению. С помощью соотношения

$$-\frac{1}{(z - ih)^2} = \begin{cases} \int_0^{\infty} k e^{kh} e^{ikz} dk, & \text{если } y > h, \\ \int_0^{\infty} k e^{-kh} e^{-ikz} dk, & \text{если } y < h, \end{cases}$$

перепишем выражение для комплексно-сопряженной скорости $U_1(z)$ в областях верхнего слоя, расположенных соответственно выше и ниже диполя:

$$U_1(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [(k e^{kh} + A(k)) e^{ikz} + B(k) e^{-ikz}] dk, & \text{если } y > h, \\ \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(k) e^{ikz} + (k e^{-kh} + B(k)) e^{-ikz}] dk, & \text{если } y < h. \end{cases} \quad (1.51)$$

Подстановка формул (1.50)–(1.51) в граничные условия (1.25)–(1.28) приводит к неоднородной системе линейных уравнений

относительно функций $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ и $D(k)$:

$$\begin{cases} (k + \nu)e^{-kH}A + (k - \nu)e^{kH}B = -k(k + \nu)e^{k(h-H)}, \\ \delta(k + \nu)A + \delta(k - \nu)B - (k + \nu)C - (k - \nu)D = -\delta k(k - \nu)e^{-kh}, \\ A - B - C + D = ke^{-kh}, \\ e^{kH_1}C - e^{-kH_1}D = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем следующие выражения для $A(k)$ и $B(k)$:

$$A(k) = \frac{k[(\delta k + (1 - \delta)\nu) \operatorname{th} kH_1 - k][\nu \operatorname{ch} k(H - h) - k \operatorname{sh} k(H - h)]}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}},$$

$$B(k) = \frac{k(k + \nu)e^{-kH} \{[(1 - \delta)\nu \operatorname{ch} kh - \delta k \operatorname{sh} kh] \operatorname{th} kH_1 - k \operatorname{ch} kh\}}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}}.$$

Далее из (1.21) и (1.49) находим, что

$$\zeta(x) = \frac{Vm}{2\pi g} \left[\frac{x^2 - (H - h)^2}{(x^2 + (H - h)^2)^2} - \int_0^\infty (A(k)e^{-kH} + B(k)e^{kH}) \cos kx \, dk \right].$$

Совершив в этом равенстве переход к безразмерным переменным (1.32), запишем полученную формулу для величины возвышения свободной границы в следующем виде:

$$Z(X) = \frac{ME}{2\pi} \frac{X^2 - (E - E_0)^2}{(X^2 + (E - E_0)^2)^2} + J(X),$$

где

$$J(X) = -\frac{ME}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_1(\xi, E, E_0, E_1, \varepsilon)}{g_2(\xi, E, E_1, \varepsilon)} \cos X\xi \, d\xi, \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} g_1(\xi, E, E_0, E_1, \varepsilon) &= \xi \left\{ e^{-E\xi} [((1 - \varepsilon)\xi + \varepsilon) \operatorname{th} E_1\xi - \xi] \times \right. \\ &\quad \times [\operatorname{ch}(E - E_0)\xi - \xi \operatorname{sh}(E - E_0)\xi] + (\xi + 1) \times \\ &\quad \times \{ [\varepsilon \operatorname{ch} E_0\xi - (1 - \varepsilon)\xi \operatorname{sh} E_0\xi] \operatorname{th} E_1\xi - \xi \operatorname{ch} E_0\xi \} \} / \operatorname{ch} E\xi, \\ g_2(\xi, E, E_1, \varepsilon) &= \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi). \end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральные выражения в (1.33) и (1.52) имеют одни и те же полюса, расположенные на положительной действительной оси. Поэтому волновая структура возмущений

свободной поверхности, возникающих при обтекании препятствия над слоем скачка, будет определяться тем же количеством мод и теми же волновыми числами, что и в рассмотренном выше случае его локализации под слоем скачка. Следовательно, критерии существования внутренней и поверхностной мод останутся неизменными (см. (1.39)–(1.40) или (1.47)–(1.48)).

Вычисляя интеграл $J(X)$ по той же схеме, что и в предыдущей задаче, получим следующее выражение для волновой части поверхностных возмущений за обтекаемым препятствием (то есть при $X > 0$):

$$W(X) = ME \sum_{j=1}^s \frac{g_1(\xi_j)}{g_2'(\xi_j)} \sin \xi_j X. \quad (1.53)$$

Здесь, как и выше, ξ_j — положительные корни уравнения (1.34), а s — их количество.

1.2.2. Анализ и численные расчеты для реальных условий моря

Механизм генерации поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводного препятствия двухслойным потоком бесконечной глубины, проанализирован в разд. 1.1. В рассматриваемой задаче с конечной глубиной потока подобный механизм аналогичен. Однако поиск аналитических выражений, описывающих волновую структуру поверхностных возмущений (1.46) и (1.53), и их анализ в этом случае оказались существенно сложнее.

Расчеты амплитуд возмущений велись при значениях характеристик среды, соответствующих реальным условиям моря. Так, плотность верхнего слоя $\rho_1 = 1023 \text{ кг/м}^3$, а плотность нижнего выбиралась начиная с $\rho_2 = 1024 \text{ кг/м}^3$ и больше. Таким значениям плотностей соответствует минимальное значение параметра ε , равное 0,001. Момент диполя m был выбран пропорциональным скорости потока V : $m/V = 1600 \text{ м}^2$. Невозмущенное положение скачка плотности соответствовало глубинам $H = 50 \text{ м}$ и $H = 70 \text{ м}$, а локализация препятствия (диполя) ограничивалась тремя горизонтами: $h = 7,4$ и 1 м как над скачком, так

и под ним. Отметим, что задание условия $m/V = \text{const}$ продиктовано желанием сделать геометрию моделируемого диполем препятствия независимой от скорости течения V при его значительном удалении от свободной поверхности, слоя скачка и дна бассейна. Действительно, в плоском безграничном потоке однородной жидкости диполь с моментом m моделирует круговой цилиндр [182], радиус которого $r = \sqrt{m/(2\pi V)}$ не зависит от V , если $m/V = \text{const}$. Ясно, что в случае двухслойного потока конечной глубины наличие свободной границы, поверхности раздела плотностей и дна будет оказывать искажающее влияние на форму тела, моделируемого диполем; однако, если диполь удален на достаточно большое расстояние от указанных поверхностей, то это влияние будет пренебрежимо малым.

На рис. 1.12–1.14 для случая $H = 50$ м, $h = 4$ м приведены графики зависимости амплитуд поверхностных волн B от скорости набегающего потока V при различных значениях параметров ε и β . Прежде всего на этих графиках видно, что возмущения за счет внутренней и поверхностной мод проявляются на интервалах скорости потока, существенно разнесенных между собой, $0 - V_{cr}^{BH}$ и $6,5 - 8,5$ м/с соответственно, далее, выходя из области линейности задачи (при больших скоростях поверхностные волны перестают корректно описываться теорией малых возмущений). В первом интервале (при меньших скоростях) «работает» внутренняя мода, во втором — поверхностная. Причем для внутренней моды в соответствии с критерием ее возникновения (1.39) (или (1.47)) характерно расширение диапазона существования при увеличении мощности слоя скачка плотности ε . В целях наглядности сравнения амплитуд $B(V)$ при обтекании препятствия потоками бесконечной и конечной глубины графики на рис. 1.12–1.14 представлены парами (соответственно слева и справа). Результаты расчетов амплитуды внутренней моды для случая локализации диполя под слоем скачка и над ним приведены на рис. 1.12 и 1.13 соответственно. Пары графиков построены для трех значений мощности скачка ε , а правые графики — для шести значений параметра β ($\varepsilon \in \{0,001; 0,002; 0,004\}$, $\beta \in \{0,5; 1; 3; 5; 10; 25\}$). Для каждого

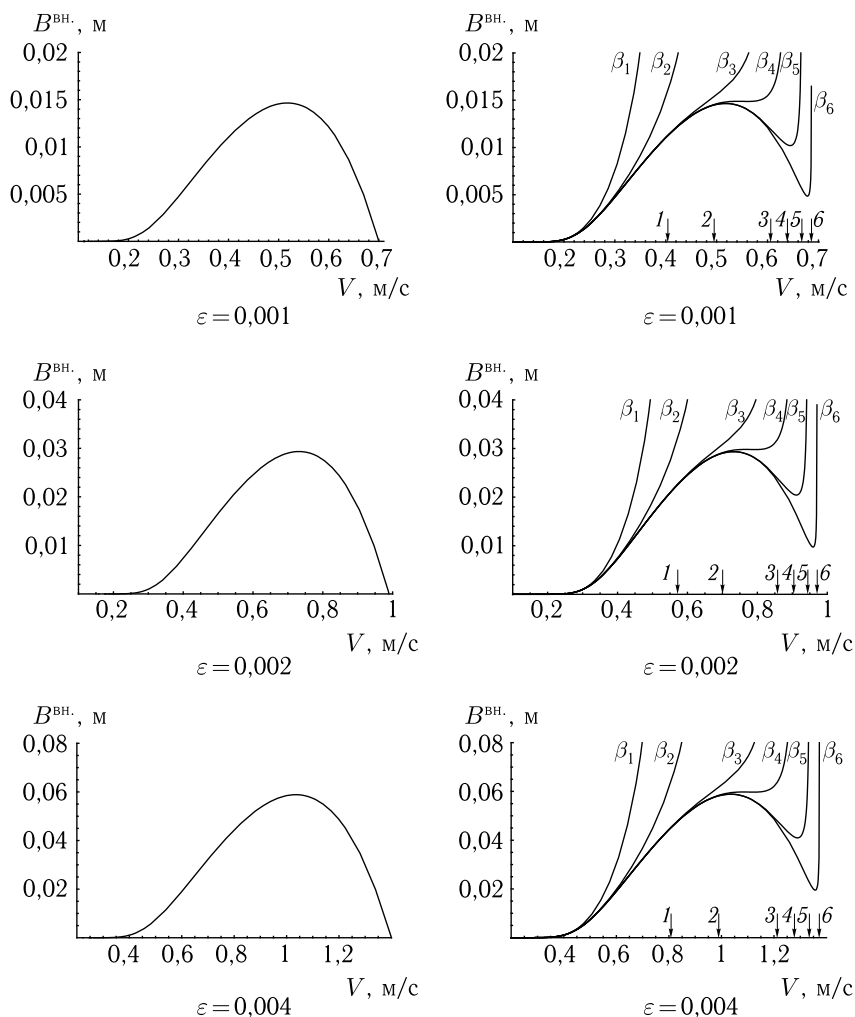


Рис. 1.12. Амплитуды внутренней моды поверхностных возмущений при обтекании препятствия под слоем скачка плотности при бесконечной (левые графики) и конечной (правые) глубинах для шести значений параметра β (соотношения толщин нижнего и верхнего слоев двухслойной жидкости): $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 10$, $\beta_6 = 25$

значения β стрелкой с цифрой, равной номеру индекса у β , указано значение критической скорости (максимальной скорости потока V , при которой возникает внутренняя мода). Как видно, в морских условиях ее величина не превышает 1–1,5 м/с

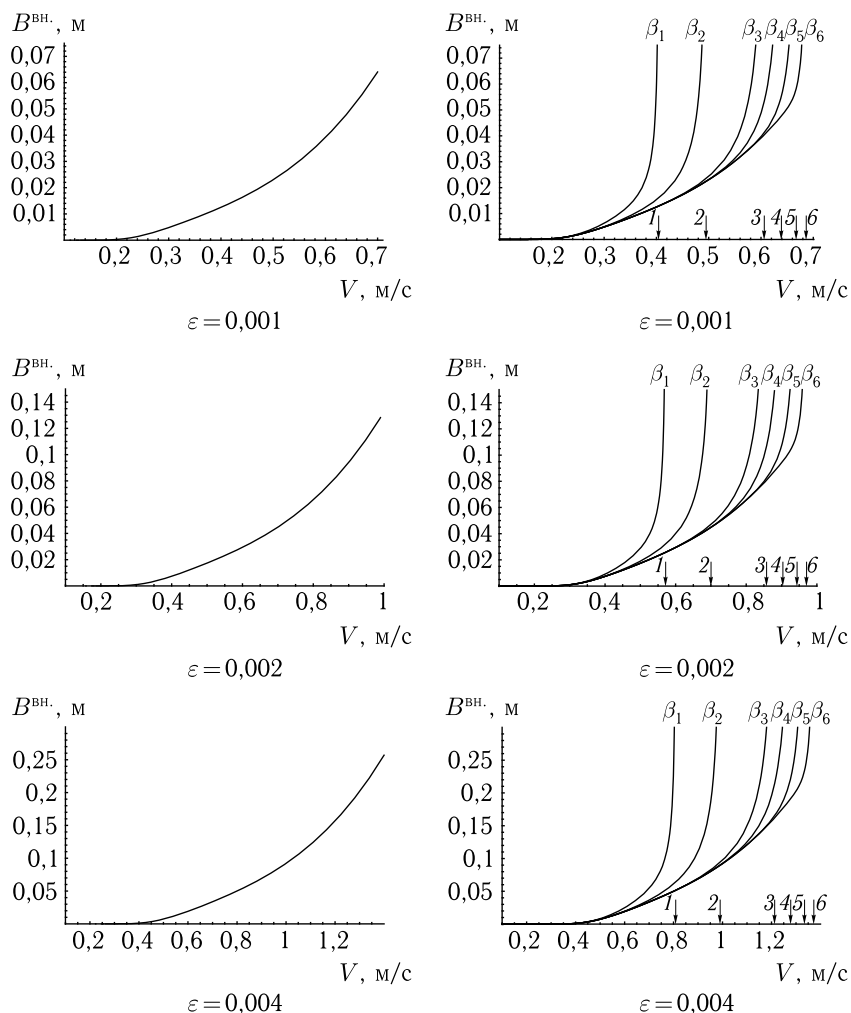


Рис. 1.13. Амплитуды внутренней моды поверхностных возмущений при обтекании препятствия над слоем скачка плотности при бесконечной (левые графики) и конечной (правые) глубинах для шести значений параметра β (соотношения толщин нижнего и верхнего слоев двухслойной жидкости): $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 10$, $\beta_6 = 25$

Для поверхностной моды верхняя пара графиков соответствует обтеканию препятствия под слоем скачка, а нижняя — над ним. При этом величины ϵ были выбраны теми же самыми, что и в случае внутренней моды.

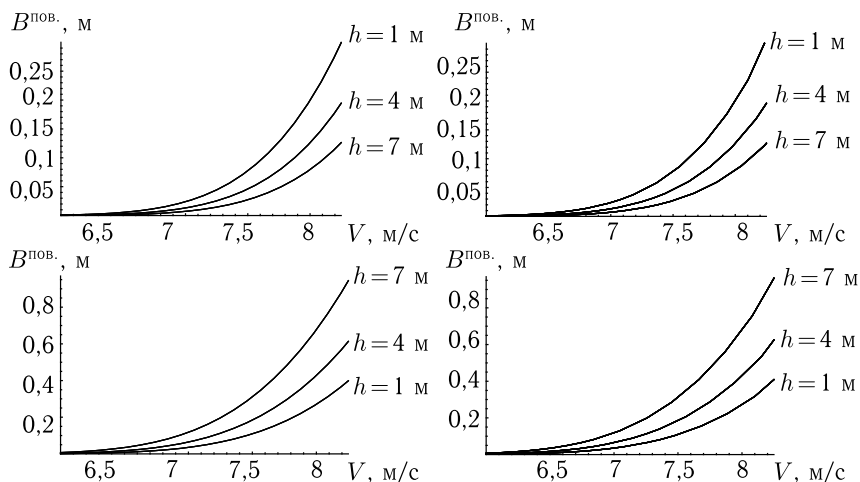


Рис. 1.14. Амплитуды поверхностной моды при обтекании препятствия под слоем скачка плотности (верхняя пара графиков) и над ним (нижняя пара)

По качественному характеру зависимости $B(V)$ и значениям самих амплитуд две моды — внутренняя $B^{\text{вн}}(V)$ и поверхностная $B^{\text{пов}}(V)$ — существенно отличаются друг от друга. Различия проявляются и «внутри» каждой из мод в зависимости от локализации препятствия относительно скачка плотности (сверху или снизу), глубины слоя скачка и глубины погружения препятствия. Так, для внутренней моды, как и ожидалось, наблюдается существенная зависимость ее амплитуды от мощности скачка плотности (рис. 1.12–1.13), и такая зависимость проявляется при условии как бесконечной, так и конечной глубины потока.

Внутренние моды отличаются еще одной характерной особенностью. Так, на рис. 1.12 в случае бесконечной глубины внутренняя мода представлена одной кривой $B^{\text{вн}}(V)$, а при конечной глубине — множеством кривых $B_j^{\text{вн}}(V) = B^{\text{вн}}(\beta_j, V)$, соответствующих разным значениям $H_1^{(j)}$ или $\beta_j = H_1^{(j)}/H$. Как видно, если $\beta \rightarrow +\infty$, то при любом значении скорости V , находящемся внутри диапазона существования внутренней моды в бесконечно глубоком потоке, амплитуда внутренней моды в потоке конечной глубины $B^{\text{вн}}(\beta, V)$ стремится к своему соответствующему

значению $B_{\infty}^{\text{BH}}(V)$ для случая бесконечной глубины. В то же время правые концы кривых $B_j^{\text{BH}}(V)$ из определенных точек вблизи кривой $B_{\infty}^{\text{BH}}(V)$ резко «срываются» вверх и уходят на бесконечность. В окрестностях таких точек линейная теория становится неприменимой для описания поверхностных волн. Кроме того, результаты расчетов свидетельствуют о том, что при фиксированном значении скорости течения V с ростом параметра β амплитуда внутренней моды монотонно убывает. При фиксированном значении β зависимость $B = B(V)$ может иметь как монотонный (возрастающий, если $\beta < 3$), так и немонотонный характер (если $\beta > 3$). Таким образом, сравнение результатов решения задач об обтекании диполя потоками бесконечной и конечной глубины показало, что в последнем случае как амплитуда внутренней моды, так и диапазон скоростей, внутри которого она возникает, существенным образом зависят от параметра $\beta_j = H_1^{(j)}/H$ (или толщины нижнего слоя $H_1^{(j)}$ при фиксированном значении толщины верхнего).

Аналогичный характер изменения кривых $B_j^{\text{BH}}(V)$ проявляется при сравнении их в условиях конечного и бесконечного по глубине потоков и в случае локализации препятствия над скачком плотности (рис. 1.13). Здесь, как и для первой задачи, внутренняя мода на правых графиках представлена множеством кривых $B_j^{\text{BH}}(V)$, соответствующих разным значениям β_j . На этих графиках видно, как и выше, что при $\beta \rightarrow \infty$ амплитуда внутренней моды $B^{\text{BH}}(\beta, V)$ стремится к соответствующему значению $B_{\infty}^{\text{BH}}(V)$ для случая бесконечно глубокого потока. Кроме того, очевидно, что при конечной глубине потока диапазон существования внутренней моды и ее амплитуда зависят от параметра $\beta_j = H_1^{(j)}/H$. Однако в данном случае зависимость амплитуды волны от скорости течения является монотонно возрастающей при любых значениях β .

Зависимость амплитуд внутренней моды проявляется и от горизонта залегания скачка плотности H . Так, расчеты $B_j^{\text{BH}}(V)$ для двух разных глубин его локализации ($H = 50$ м и $H = 70$ м) показали, что углубление скачка приводит к существенному уменьшению амплитуд поверхностных возмущений.

Анализируя поверхностную моду и поведение ее амплитуд $B_j^{\text{пов}}(V)$ — пары графиков на рис. 1.14 — отметим, что проявление такой моды обусловлено наличием в потоке свободной границы. Величина ее амплитуды практически не зависит от мощности слоя скачка плотности ε (в диапазоне значений ε , характерном для реальных морских условий), что было проверено расчетами $B_j^{\text{пов}}(V)$ при разных значениях ε . В этом случае глубинные возмущения при выходе на поверхность «не замечают» плотностную неоднородность. Аналогичные расчеты показывают, что амплитуда поверхностной моды также не зависит и от толщины нижнего слоя (при $\beta > 0,5$). Кривые $B_j^{\text{пов}}(V)$ на левом и правом графиках рис. 1.14 практически идентичны как по форме, так и по значениям их амплитуд, то есть наличие у потока нижней границы влияет на результаты расчетов весьма незначительно. В то же время сравнение значений амплитуд волн $B_j^{\text{пов}}(V)$, возникающих при обтекании препятствия, расположенного над и под скачком плотности соответственно, показывает существенное (в несколько раз) различие между ними. На первый взгляд представляется, что скачок плотности оказывает сильно экранирующий эффект на распространение вверх возмущений. Однако, как показали расчеты, ослабление поверхностных волн в основном связано с увеличением глубины обтекаемого препятствия и практически не зависит от ε , на что указывают представленные на графиках кривые $B_j^{\text{пов}}(V)$, полученные для расчетных горизонтов его локализации $h = 7$ м, 4 м и 1 м относительно слоя скачка плотности, то есть поверхностная мода возникает непосредственно за счет обтекания препятствия.

Заканчивая анализ поведения амплитуд поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводных препятствий, следует указать на особую роль в их формировании скорости потока. Как видно из графиков, представленных на рис. 1.12–1.14, волновые возмущения на свободной границе в относительно широком промежуточном интервале изменения скорости V визуально отсутствуют, то есть этот интервал является зоной, закрытой для выхода глубинных возмущений на поверхность воды. Она простирается от максимального значения скорости потока V ,

при котором в бесконечно глубоком потоке возникает внутренняя мода ($V_{\text{кр.}}$, определяемого формулой (1.10)) до тех значений V , при которых амплитуды уже поверхностных мод значимы. Следуя терминологии, принятой в морской гидроакустике, такой интервал можно определить как «зону тени» подобных гидродинамических возмущений.

Наряду с амплитудами поверхностных волн рассчитывались также их длины: $L^{\text{вн}} = 2\pi V^2/(g\xi_1)$ и $L^{\text{пов}} = 2\pi V^2/(g\xi_2)$, где ξ_1 и ξ_2 — соответственно меньший и больший корни уравнения (1.34). Из этого уравнения следует, что для обеих мод длина волны (в отличие от амплитуды) не зависит от локализации препятствия. Результаты расчетов при $H = 50$ м для внутренней и поверхностной моды представлены соответственно на рис. 1.15 и рис. 1.16. При этом на рис. 1.15 стрелками, как и выше, обозначены критические скорости. На каждом рисунке слева изображены графики зависимости длины волны от скорости потока V для случая бесконечной глубины, а справа — для случая конечной глубины. Расчеты длин волн проводились при тех же значениях параметров ε и β , что и расчеты их амплитуд (то есть $\beta \in \{0,5; 1; 3; 5; 10; 25\}$ для внутренней моды, $\beta \in \{0,5; 2; 10\}$ — для поверхностной, $\varepsilon \in \{0,001; 0,002; 0,004\}$ для обеих мод).

Что касается зависимости длины волны внутренней моды $L^{\text{вн}}$ от скорости потока V , то она в целом аналогична рассмотренной выше зависимости ее амплитуды от V в случае обтекания препятствия, локализованного над скачком плотности. Для каждого значения β длина волны монотонно возрастает, резко увеличиваясь при приближении V к своему критическому значению. В то же время при фиксированном значении V длина волны уменьшается с увеличением толщины нижнего слоя (то есть при возрастании β) и стремится к своему предельному значению для случая потока бесконечной глубины при $\beta \rightarrow \infty$.

Для поверхностной моды длина волны в случае потока бесконечной глубины $L^{\text{пов}} = 2\pi V^2/g$ не зависит от мощности скачка ε (левый график). А в случае потока конечной глубины кривые на правых графиках, соответствующие девяти парам значений ε и β , сливаются. Это указывает на то, что длина волны по-

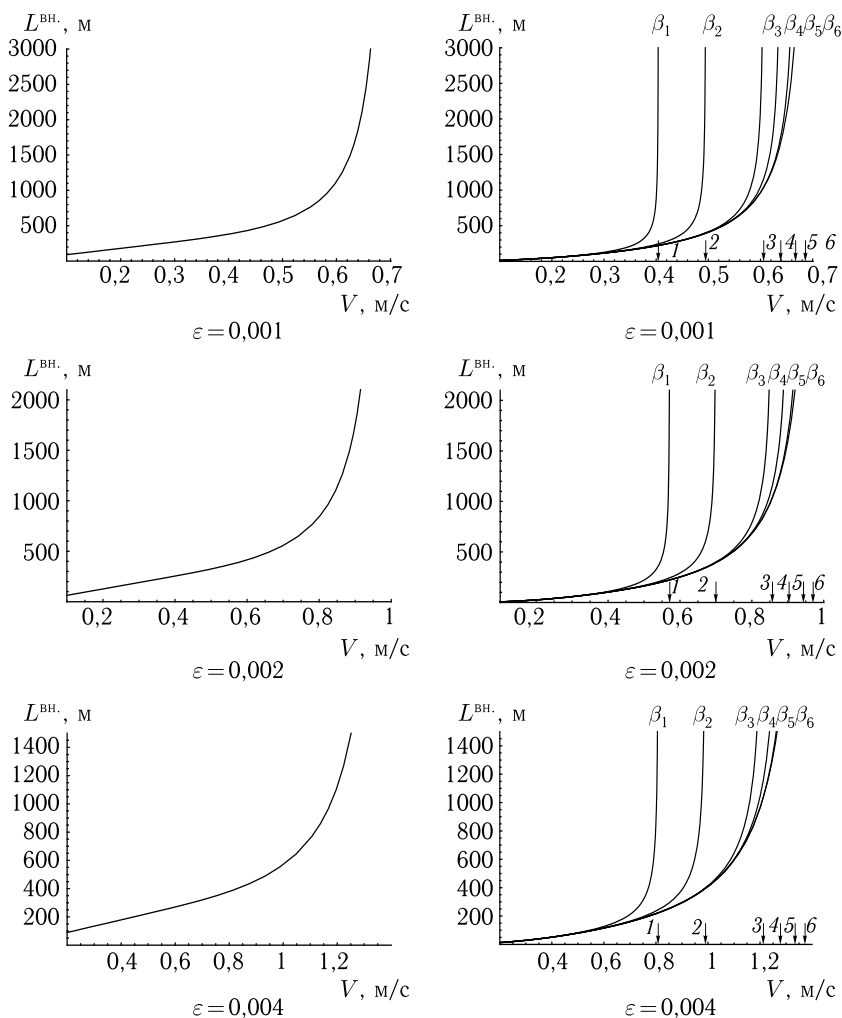


Рис. 1.15. Длины волн внутренней моды поверхностных возмущений, возникающих за обтекаемым двухслойной жидкостью препятствием, при бесконечной (левые графики) и конечной (правые) глубинах потока для шести значений параметра β (соотношения толщин нижнего и верхнего слоев): $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 10$, $\beta_6 = 25$

верхностной моды практически не зависят от мощности слоя скачка плотности ε (в диапазоне значений ε , характерном для реальных морских условий) и от соотношения толщин нижнего и верхнего слоев β при $\beta > 0,5$. Таким образом, в этом случае

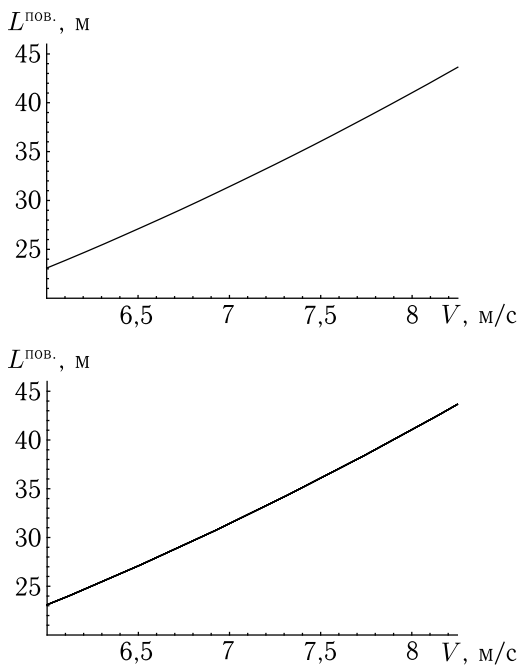


Рис. 1.16. Длины волн поверхностной моды поверхностных возмущений, возникающих за обтекаемым двухслойной жидкостью препятствием, при бесконечной (верхний график) и конечной (нижний) глубинах потока

неоднородность потока и наличие у него нижней границы практически не влияют на параметры поверхностных возмущений.

1.2.3. Заключение

Исследована волновая структура поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводных препятствий потоком двухслойной идеальной жидкости конечной глубины. Показано, что за обтекаемым препятствием возможно образование тех же типов поверхностных волн, что и в случае потока бесконечной глубины. Установлено, что возмущения на свободной границе проявляются на двух разнесенных между собой интервалах скорости потока, а в промежуточной зоне они отсутствуют.

1.3. Волновая реакция при циркуляционном обтекании подводного препятствия двухслойным потоком конечной глубины

1.3.1. Введение

При возведении в морской среде искусственных сооружений необходимо оценивать силовые нагрузки, возникающие при наличии подводных течений. Существующие методики расчетов позволяют найти силы вязкого сопротивления, действующие на различные элементы подводного сооружения.

В реальных условиях для структуры стратификации морской среды характерно присутствие относительно резких перепадов плотности воды, связанных с наличием сезонного термоклина или иных существующих в толще воды скачков плотности. Поэтому обтекаемые потоком элементы конструкции генерируют внутренние волны, вследствие чего возникает дополнительное действие на них волнового сопротивления. Кроме того, в придонных областях моря гидродинамические воздействия на эти конструкции могут усиливаться взвесенесущими (мутьевыми) потоками, возникающими при подъеме со дна твердых микро- и мелкозернистых частиц грунта. Скорости таких потоков могут превышать 1 м/с, а толщины составлять несколько десятков метров. По сравнению с окружающими водами избыток плотности воды в них составляет более $0,01 \text{ г/см}^3$ [183], что может приводить к формированию относительно резкого пикноклина

и возникновению внутренних волн. В этих случаях обтекаемые подводные препятствия могут дополнительно испытывать вполне значимые силовые воздействия. Поэтому представляет интерес исследование влияния стратифицированных течений на обтекаемые препятствия, локализованные вблизи скачка плотности как в нижнем, так и в верхнем слоях потока.

В общем случае обтекание препятствия может происходить с некоторой циркуляцией, которая вносит дополнительный вклад в гидродинамические реакции на подводные конструкции. В настоящем разделе в качестве препятствия в потоке рассматривается диполь, моделирующий поперечное обтекание цилиндра (например, как элемента транспортного трубопровода в морской среде). При этом циркуляция обеспечивается совмещенным с диполем точечным вихрем.

1.3.2. Препятствие в нижнем слое

Рассмотрим двухслойный поток идеальной жидкости, ограниченный горизонтальным дном, стационарно обтекающий цилиндр с круговым сечением радиусом R . Цилиндр моделируется точечным диполем с моментом

$$m = 2\pi V R^2, \quad (1.54)$$

где V — скорость набегающего потока [182], и точечным вихрем, имеющим циркуляцию Γ .

Обозначим толщину верхнего слоя через H , нижнего через H_1 , а их плотности — соответственно через ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Начало координат поместим на невозмущенной границе между слоями жидкости, ось x направим вдоль этой границы, а ось y — вертикально вверх.

Вначале рассмотрим случай, когда диполь и вихрь находятся в точке $(0, -h)$, то есть под границей раздела двух слоев (рис. 1.17). Решение задач осуществляем в рамках теории малых возмущений.

Предполагая течение потенциальным, представим комплексно-сопряженную скорость в каждом из двух слоев потока в виде $\mu_j = V + U_j$, $U_j = u_j - iv_j$ ($j = 1, 2$). Тогда задача об отыскании возмущений скорости U_j , вносимых в поток диполем и вихрем,

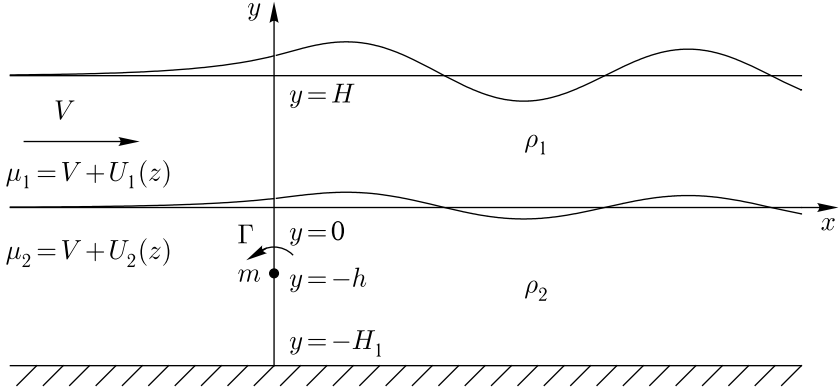


Рис. 1.17. Схема циркуляционного обтекания моделируемого диполем трубопровода, локализованного в нижнем слое двухслойного потока

формулируется следующим образом: найти аналитические функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\operatorname{Im} \left[i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = 0, \quad y = H, \quad (1.55)$$

$$\delta \operatorname{Im} \left[i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = \operatorname{Im} \left[i \frac{dU_2}{dz} - \nu U_2 \right], \quad y = 0, \quad (1.56)$$

$$\operatorname{Im} U_1 = \operatorname{Im} U_2, \quad y = 0, \quad (1.57)$$

$$\operatorname{Im} U_2 = 0, \quad y = -H_1, \quad (1.58)$$

где $\delta = \rho_1/\rho_2$, $z = x + iy$, $\nu = g/V^2$, g — ускорение свободного падения. Кроме того, $U_1(z)$ должна быть регулярна в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < H$, а $U_2(z)$ — в полосе $-\infty < x < +\infty$, $-H_1 < y < 0$ всюду (за исключением точки $z = -ih$), в которой $U_2(z)$ имеет полюс второго порядка и где расположены вихрь и диполь:

$$U_2(z) = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z + ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z + ih} + f(z),$$

здесь Γ — интенсивность вихря, $f(z)$ — регулярная функция.

Граничное условие (1.55) описывает постоянство давления на свободной поверхности, (1.56) — непрерывность давления

при переходе границы раздела слоев, (1.57) определяет отсутствие потока жидкости через эту границу, а (1.58) является условием непротекания через дно. (Вывод (1.55)–(1.58) приведен в разд. 1.2.)

В силу линейности задачи представим искомую комплексно-сопряженную скорость в виде суммы возмущений комплексно-сопряженной скорости, вносимых в поток точечным вихрем и диполем: $U_j(z) = U_j^\Gamma(z) + U_j^m(z)$ ($j = 1, 2$). Для функций $U_j^\Gamma(z)$ и $U_j^m(z)$ получаем граничные условия, аналогичные (1.55)–(1.58), причем

$$U_2^\Gamma(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z + ih} + f_\Gamma(z), \quad (1.59)$$

$$U_2^m(z) = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z + ih)^2} + f_m(z), \quad (1.60)$$

где $f_\Gamma(z)$ и $f_m(z)$ — функции, регулярные в полосе $-\infty < x < +\infty$, $-H_1 < y < 0$, и $f(z) = f_\Gamma(z) + f_m(z)$.

Ищем скорости $U_1^\Gamma(z)$ и $f_\Gamma(z)$, а также $U_1^m(z)$ и $f_m(z)$ в виде их разложения в интеграл Фурье по волновым числам:

$$U_1^\Gamma(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty [A_\Gamma(k)e^{ikz} + B_\Gamma(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.61)$$

$$f_\Gamma(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty [C_\Gamma(k)e^{ikz} + D_\Gamma(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.62)$$

$$U_1^m(z) = \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty k [A_m(k)e^{ikz} + B_m(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.63)$$

$$f_m(z) = \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty k [C_m(k)e^{ikz} + D_m(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.64)$$

где функции $A_\Gamma(k)$, $B_\Gamma(k)$, $C_\Gamma(k)$, $D_\Gamma(k)$ и $A_m(k)$, $B_m(k)$, $C_m(k)$, $D_m(k)$ подлежат определению.

Применив равенство

$$\frac{1}{z + ih} = \begin{cases} -i \int_0^{\infty} e^{-kh} e^{ikz} dk, & y > -h, \\ i \int_0^{\infty} e^{kh} e^{-ikz} dk, & y < -h, \end{cases}$$

получим из (1.59) и (1.62) выражения для функции $U_2^{\Gamma}(z)$ в областях нижнего слоя, находящихся выше и ниже горизонта локализации вихря и диполя:

$$U_2^{\Gamma}(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} [(-e^{-kh} + C_{\Gamma}(k))e^{ikz} + D_{\Gamma}(k)e^{-ikz}] dk, & y > -h, \\ \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} [C_{\Gamma}(k)e^{ikz} + (e^{kh} + D_{\Gamma}(k))e^{-ikz}] dk, & y < -h. \end{cases} \quad (1.65)$$

Аналогично, из (1.60) и (1.64) можно получить интегральное представление для $U_2^m(z)$:

$$U_2^m(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} k [(e^{-kh} + C_m(k))e^{ikz} + D_m(k)e^{-ikz}] dk, & y > -h, \\ \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} k [C_m(k)e^{ikz} + (e^{kh} + D_m(k))e^{-ikz}] dk, & y < -h. \end{cases} \quad (1.66)$$

Подстановка (1.61), (1.65) и (1.63), (1.66) в граничные условия (1.55)–(1.58) приводит к двум системам линейных уравнений относительно функций $A_{\Gamma}(k)$, $B_{\Gamma}(k)$, $C_{\Gamma}(k)$, $D_{\Gamma}(k)$ и $A_m(k)$, $B_m(k)$, $C_m(k)$, $D_m(k)$ соответственно. Решая эти системы,

получаем следующие выражения для $C_\Gamma(k)$, $D_\Gamma(k)$ и $C_m(k)$, $D_m(k)$:

$$\begin{aligned}
 C_m(k) &= \frac{e^{-kH_1}}{2 \operatorname{ch} kH \operatorname{ch} kH_1} \times \\
 &\times \left(\frac{-(1-\delta)(k^2 - \nu^2) \operatorname{sh} k(H-h)}{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)} + \right. \\
 &\left. + \frac{[(1+\delta)k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{sh} k(H+h) - 2k\nu \operatorname{ch} k(H+h)}{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)} \right), \\
 D_m(k) &= \frac{\operatorname{ch} k(H_1 - h)}{2 \operatorname{ch} kH \operatorname{ch} kH_1} \times \\
 &\times \frac{-[(1+\delta)k^2 + 2k\nu + (1-\delta)\nu^2]e^{-kH} - (1-\delta)(k^2 - \nu^2)e^{kH}}{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)}, \\
 C_\Gamma(k) &= \frac{e^{-kH_1}}{2 \operatorname{ch} kH \operatorname{ch} kH_1} \times \\
 &\times \left(\frac{(1-\delta)(k^2 - \nu^2) \operatorname{ch} k(H-h)}{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)} + \right. \\
 &\left. + \frac{[(1+\delta)k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{ch} k(H+h) - 2k\nu \operatorname{sh} k(H+h)}{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)} \right), \\
 D_\Gamma(k) &= \frac{\operatorname{sh} k(H_1 - h)}{2 \operatorname{ch} kH \operatorname{ch} kH_1} \times \\
 &\times \frac{[(1+\delta)k^2 + 2k\nu + (1-\delta)\nu^2]e^{-kH} + (1-\delta)(k^2 - \nu^2)e^{kH}}{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)}. \tag{1.67}
 \end{aligned}$$

Далее заметим, что для получения решения, которое удовлетворяет условию отсутствия возмущений далеко вверх по потоку, контур интегрирования в первых слагаемых выражений для $f_\Gamma(z)$ и $f_m(z)$ следует сместить в нижнюю полуплоскость, а во вторых — в верхнюю. Таким образом, всюду в дальнейшем под функцией $f(z) = f_\Gamma(z) + f_m(z)$ понимается предел

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + \infty} C_\Gamma(k) e^{ikz} dk + \int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1 + \infty} D_\Gamma(k) e^{-ikz} dk \right] + \right. \\
 &\left. + \frac{m}{2\pi} \left[\int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + \infty} k C_m(k) e^{ikz} dk + \int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1 + \infty} k D_m(k) e^{-ikz} dk \right] \right\}. \tag{1.68}
 \end{aligned}$$

Для вычисления равнодействующей F гидродинамических сил, приложенных к цилиндру, воспользуемся формулой С.А. Чаплыгина [182], согласно которой

$$F^* = X - iY = \frac{i\rho_2}{2} \oint_K \mu_2^2(z) dz.$$

Здесь X — волновое сопротивление, Y — подъемная сила, а интегрирование осуществляется по произвольному контуру K , расположенному в нижнем слое и охватывающему рассматриваемые вихрь и диполь. Поскольку

$$\mu_2(z) = V + U_2(z) = V - \frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z + ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z + ih} + f(z)$$

и функция $f(z)$ регулярна в области, занятой нижней жидкостью, то функция $\mu_2^2(z)$ имеет в этой области единственную особую точку: $z = -ih$. Применяя теорему о вычетах [181], находим $R^* = i\rho_2 V\Gamma + i\rho_2 \Gamma f(-ih) + \rho_2 m f'(-ih)$.

В дальнейшем исследуются добавочная сила ΔF к обобщенной силе Жуковского ($-i\rho_2 V\Gamma$), действующей на цилиндр [182], и ее составляющие X и ΔY . Очевидно, что

$$\Delta F^* = X - i\Delta Y = i\rho_2 \Gamma f(-ih) + \rho_2 m f'(-ih). \quad (1.69)$$

Из (1.68) с помощью интегральной теоремы Коши [181] находим

$$\begin{aligned} f(-ih) = & \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty [C_\Gamma(k)e^{kh} + D_\Gamma(k)e^{-kh}] dk + \\ & + \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty k [C_m(k)e^{kh} + D_m(k)e^{-kh}] dk + \\ & + \frac{i\Gamma}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{C_\Gamma(k)e^{kh} - D_\Gamma(k)e^{-kh}\} + \\ & + \frac{im}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{k [C_m(k)e^{kh} - D_m(k)e^{-kh}]\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
f'(-ih) = & \frac{i\Gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} k [C_{\Gamma}(k)e^{kh} - D_{\Gamma}(k)e^{-kh}] dk + \\
& + \frac{im}{2\pi} \int_0^{\infty} k^2 [C_m(k)e^{kh} - D_m(k)e^{-kh}] dk - \\
& - \frac{\Gamma}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{k [C_{\Gamma}(k)e^{kh} + D_{\Gamma}(k)e^{-kh}]\} - \\
& - \frac{m}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{k^2 [C_m(k)e^{kh} + D_m(k)e^{-kh}]\}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.69) имеем

$$\begin{aligned}
\Delta F^* = & \frac{i\rho_2 m^2}{2\pi} \int_0^{\infty} k^2 [C_m(k)e^{kh} - D_m(k)e^{-kh}] dk + \\
& + \frac{i\rho_2 \Gamma^2}{2\pi} \int_0^{\infty} [C_{\Gamma}(k)e^{kh} + D_{\Gamma}(k)e^{-kh}] dk + \\
& + \frac{i\rho_2 m \Gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} k [(C_m(k) + C_{\Gamma}(k)) e^{kh} + (D_m(k) - D_{\Gamma}(k)) e^{-kh}] dk - \\
& - \frac{\rho_2 m^2}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{k^2 [C_m(k)e^{kh} + D_m(k)e^{-kh}]\} + \\
& + \frac{\rho_2 \Gamma^2}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{-C_{\Gamma}(k)e^{kh} + D_{\Gamma}(k)e^{-kh}\} + \\
& + \frac{\rho_2 m \Gamma}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{k [-(C_m(k) + C_{\Gamma}(k)) e^{kh} + (D_m(k) - D_{\Gamma}(k)) e^{-kh}]\}.
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Здесь интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, а вычеты берутся по всем s полюсам k_j соответствующих функций, расположенным на положительной действительной оси. Из (1.67) видно, что указанные полюса — общие для данных функций; они являются положительными корнями уравнения

$$k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1) = 0. \quad (1.71)$$

Очевидно, что точки $k = k_j$ (и только они) являются особыми для подынтегральных функций в первых трех слагаемых формулы (1.70), то есть полюсами, расположенными на контуре интегрирования.

Проведенный в разд. 1.2 анализ показывает, что уравнение (1.71) имеет два положительных корня ($s = 2$) при выполнении условия

$$V < V_{cr}^{BH} = \sqrt{\frac{gH \left(\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta} \right)}{2}} \quad (1.72)$$

и один положительный корень ($s = 1$), если

$$V_{cr}^{BH} < V < V_{cr}^{пов} = \sqrt{\frac{gH \left(\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta} \right)}{2}}. \quad (1.73)$$

Здесь $\varepsilon = 1 - \delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ — относительный перепад плотности между слоями, $\beta = H_1/H$.

При $V > V_{cr}^{пов}$ положительных решений нет: $s = 0$. С физической точки зрения критические скорости V_{cr}^{BH} и $V_{cr}^{пов}$ означают максимальную скорость течения, при которой в потоке за обтекаемым цилиндром образуются волны, обусловленные соответственно наличием слоя скачка плотности и свободной поверхности, то есть внутренние и поверхностные волны.

Выделяя в формуле (1.70) вещественную и мнимую части, с учетом соотношения (1.54), связывающего момент диполя с радиусом моделируемого им трубопровода и скоростью набегающего потока, окончательно получаем следующие выражения

для волнового сопротивления и подъемной силы:

$$\begin{aligned}
 X = & -2\pi^2 \rho_2 V^2 R^4 \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{ k^2 [C_m(k) e^{kh} + D_m(k) e^{-kh}] \} + \\
 & + \frac{\rho_2 \Gamma^2}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{ -C_\Gamma(k) e^{kh} + D_\Gamma(k) e^{-kh} \} + \\
 & + \pi \rho_2 V R^2 \Gamma \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{ k [-(C_m(k) + C_\Gamma(k)) e^{kh} + \\
 & + (D_m(k) - D_\Gamma(k)) e^{-kh}] \}, \\
 \Delta Y = & -2\pi \rho_2 V^2 R^4 \int_0^\infty k^2 [C_m(k) e^{kh} - D_m(k) e^{-kh}] dk - \\
 & - \frac{\rho_2 \Gamma^2}{2\pi} \int_0^\infty [C_\Gamma(k) e^{kh} + D_\Gamma(k) e^{-kh}] dk - \\
 & - \rho_2 V R^2 \Gamma \int_0^\infty k [(C_m(k) + C_\Gamma(k)) e^{kh} + \\
 & + (D_m(k) - D_\Gamma(k)) e^{-kh}] dk.
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

Отметим, что в выражение для вычисления подъемной силы не включена действующая на цилиндр сила Архимеда.

1.3.3. Препятствие в верхнем слое

Далее в аналогичной постановке исследуем задачу об определении гидродинамической реакции при циркуляционном обтекании цилиндра, который моделируется точечным диполем, расположенным в верхнем слое двухслойного потока.

Диполь с моментом m и вихрь интенсивности Γ поместим в точку $z = ih$ ($0 < h < H$), а комплексно-сопряженную скорость в j -м слое μ_j ($j = 1, 2$), как и ранее, представим в виде $\mu_j = V + U_j$ (рис. 1.18). Тогда математическая формулировка исходной задачи выглядит следующим образом: найти аналитические функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющие граничным условиям (1.55)–(1.58). При этом $U_1(z)$ должна быть регулярна

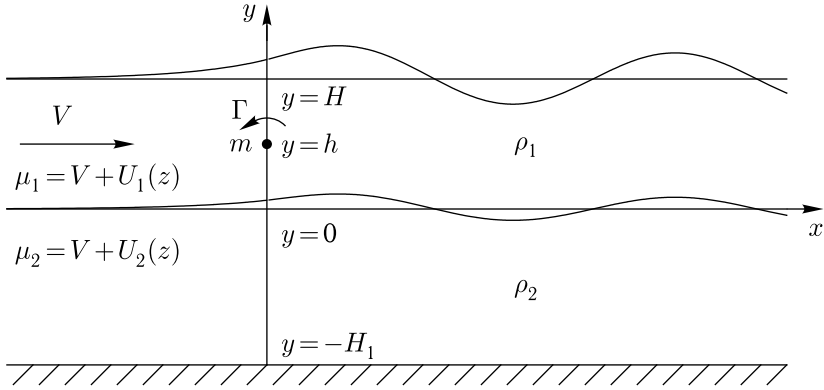


Рис. 1.18. Схема циркуляционного обтекания моделируемого диполем трубопровода, локализованного в верхнем слое двухслойного потока

в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < H$ всюду (за исключением полюса второго порядка в точке $z = ih$):

$$U_1(z) = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z - ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - ih} + \\ + \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty k [A_m(k)e^{ikz} + B_m(k)e^{-ikz}] dk + \\ + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty [A_\Gamma(k)e^{ikz} + B_\Gamma(k)e^{-ikz}] dk.$$

Аналогично, $U_2(z)$ регулярна в полосе $-\infty < x < +\infty$, $-H_1 < y < 0$:

$$U_2(z) = \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty k [C_m(k)e^{ikz} + D_m(k)e^{-ikz}] dk + \\ + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty [C_\Gamma(k)e^{ikz} + D_\Gamma(k)e^{-ikz}] dk.$$

Здесь функции $A_\Gamma(k)$, $B_\Gamma(k)$, $C_\Gamma(k)$, $D_\Gamma(k)$ и $A_m(k)$, $B_m(k)$, $C_m(k)$, $D_m(k)$ подлежат определению.

Решая данную задачу, получим следующие выражения для $A_m(k)$, $B_m(k)$, $A_\Gamma(k)$, $B_\Gamma(k)$:

$$A_m(k) = \frac{[(\delta k + (1 - \delta)\nu) \operatorname{th} kH_1 - k][\nu \operatorname{ch} k(H - h) - k \operatorname{sh} k(H - h)]}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}},$$

$$\begin{aligned}
B_m(k) &= \frac{(k+\nu)e^{-kH} \{[(1-\delta)\nu \operatorname{ch} kh - \delta k \operatorname{sh} kh] \operatorname{th} kH_1 - k \operatorname{ch} kh\}}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}}, \\
A_\Gamma(k) &= \frac{[(\delta k + (1-\delta)\nu) \operatorname{th} kH_1 - k][\nu \operatorname{sh} k(H-h) - k \operatorname{ch} k(H-h)]}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}}, \\
B_\Gamma(k) &= \frac{(k+\nu)e^{-kH} \{[-(1-\delta)\nu \operatorname{sh} kh + \delta k \operatorname{ch} kh] \operatorname{th} kH_1 + k \operatorname{sh} kh\}}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1-\delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}}.
\end{aligned}$$

Тогда выражение для комплексно-сопряженной добавочной реакции ΔF^* к обобщенной силе Жуковского $(-i\rho_1 V\Gamma)$, действующей на цилиндр, имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta F^* &= \frac{i\rho_1 m^2}{2\pi} \int_0^\infty k^2 [A_m(k)e^{-kh} - B_m(k)e^{kh}] dk + \\
&\quad + \frac{i\rho_1 \Gamma^2}{2\pi} \int_0^\infty [A_\Gamma(k)e^{-kh} + B_\Gamma(k)e^{kh}] dk + \\
&\quad + \frac{i\rho_1 m\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty k [(A_m(k) + A_\Gamma(k))e^{-kh} + (B_m(k) - B_\Gamma(k))e^{kh}] dk - \\
&\quad - \frac{\rho_1 m^2}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{k^2 [A_m(k)e^{-kh} + B_m(k)e^{kh}]\} + \\
&\quad + \frac{\rho_1 \Gamma^2}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{-A_\Gamma(k)e^{-kh} + B_\Gamma(k)e^{kh}\} + \\
&\quad + \frac{\rho_1 m\Gamma}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{k [-(A_m(k) + A_\Gamma(k))e^{-kh} + (B_m(k) - B_\Gamma(k))e^{kh}]\}.
\end{aligned} \tag{1.75}$$

Здесь, как и в (1.70), интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, а вычеты берутся по всем s полюсам k_j соответствующих функций, расположенным на положительной действительной оси. Очевидно, что эти полюса будут общими для всех трех функций; они являются положительными корнями уравнения (1.71), поэтому для данного случая критерии существования двух и одного полюса (см. (1.72)–(1.73)) останутся неизменными, равно как и значения критических скоростей $V_{cr}^{\text{вн}}$ и $V_{cr}^{\text{пов}}$.

Из (1.75) имеем выражения для волнового сопротивления и подъемной силы:

$$\begin{aligned}
 X = & -2\pi^2 \rho_1 V^2 R^4 \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{k^2 [A_m(k)e^{-kh} + B_m(k)e^{kh}]\} + \\
 & + \frac{\rho_1 \Gamma^2}{2} \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{-A_\Gamma(k)e^{-kh} + B_\Gamma(k)e^{kh}\} + \\
 & + \pi \rho_1 V R^2 \Gamma \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{k=k_j} \{k [-(A_m(k) + A_\Gamma(k))e^{-kh} + \\
 & + (B_m(k) - B_\Gamma(k))e^{kh}]\}, \\
 \Delta Y = & -2\pi \rho_1 V^2 R^4 \int_0^\infty k^2 [A_m(k)e^{-kh} - B_m(k)e^{kh}] dk - \\
 & - \frac{\rho_1 \Gamma^2}{2\pi} \int_0^\infty [A_\Gamma(k)e^{-kh} + B_\Gamma(k)e^{kh}] dk - \\
 & - \rho_1 V R^2 \Gamma \int_0^\infty k [(A_m(k) + A_\Gamma(k))e^{-kh} + \\
 & + (B_m(k) - B_\Gamma(k))e^{kh}] dk.
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

1.3.4. Численные расчеты

Расчеты силового воздействия на обтекаемый цилиндр проводились непосредственно по формулам (1.74) и (1.76) для реальных значений характеристик морской среды.

Плотность в верхнем слое воды $\rho_1 = 1024 \text{ кг/м}^3$, а отношение плотностей нижнего и верхнего слоев $\rho_2/\rho_1 \in [1,01; 1,02]$, что может соответствовать наличию мутьевого потока в нижнем слое. Общая глубина потока $H_0 = H + H_1 = 50 \text{ м}$, толщина верхнего слоя $H = 40 \text{ м}$, радиус цилиндра (или трубопровода) $R = 0,71 \text{ м}$. Диполь локализован в нижнем (или в верхнем) слое на расстоянии $h = 2 \text{ м}$ от границы раздела слоев воды. Безразмерная циркуляция определялась как $\gamma = \Gamma/(4\pi V R)$, где V — скорость потока, Γ — размерная циркуляция. Модельные расчеты велись

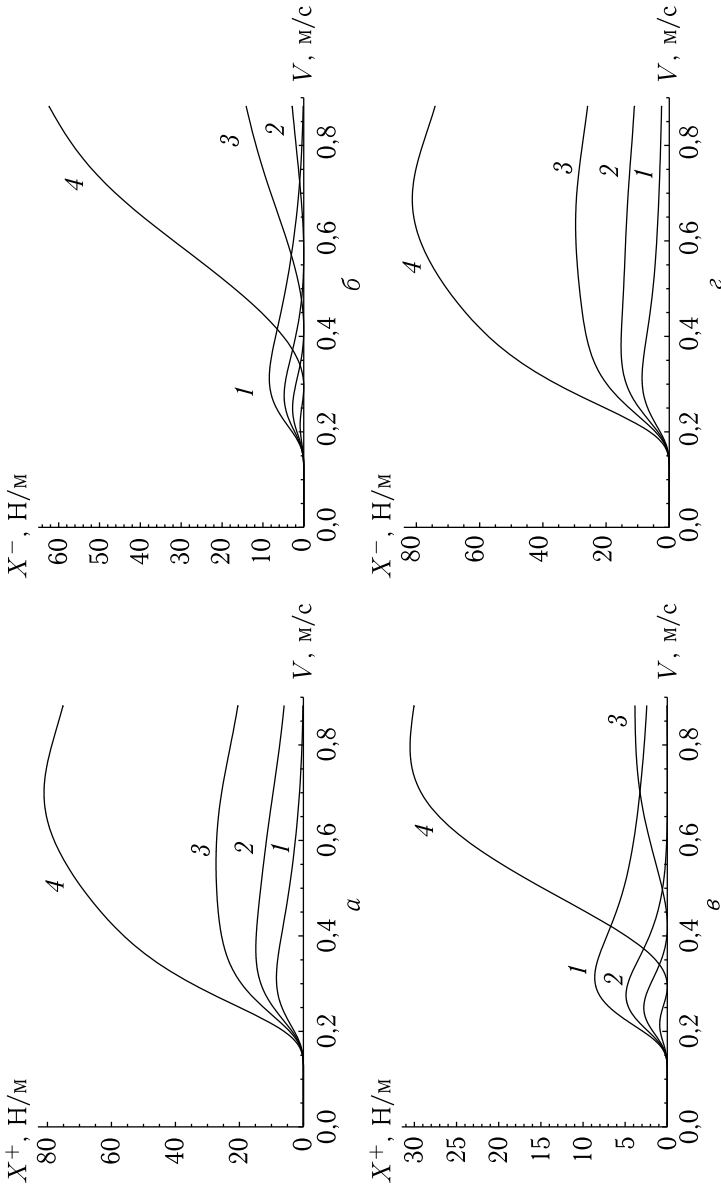


Рис. 1.19. Зависимости волнового сопротивления диполя от скорости потока. Диполь над скачком плотности (*a*, *б*) и под ним (*в*, *г*); $\gamma_i > 0$ (*a*, *в*), $\gamma_i < 0$ (*б*, *г*); $\rho_2/\rho_1 = 1,01$. На каждом графике представлены 4 кривые, соответствующие разным значениям абсолютной величины γ_i : $|\gamma_1| = 0$, $|\gamma_2| = 0,05$, $|\gamma_3| = 0,1$, $|\gamma_4| = 0,2$

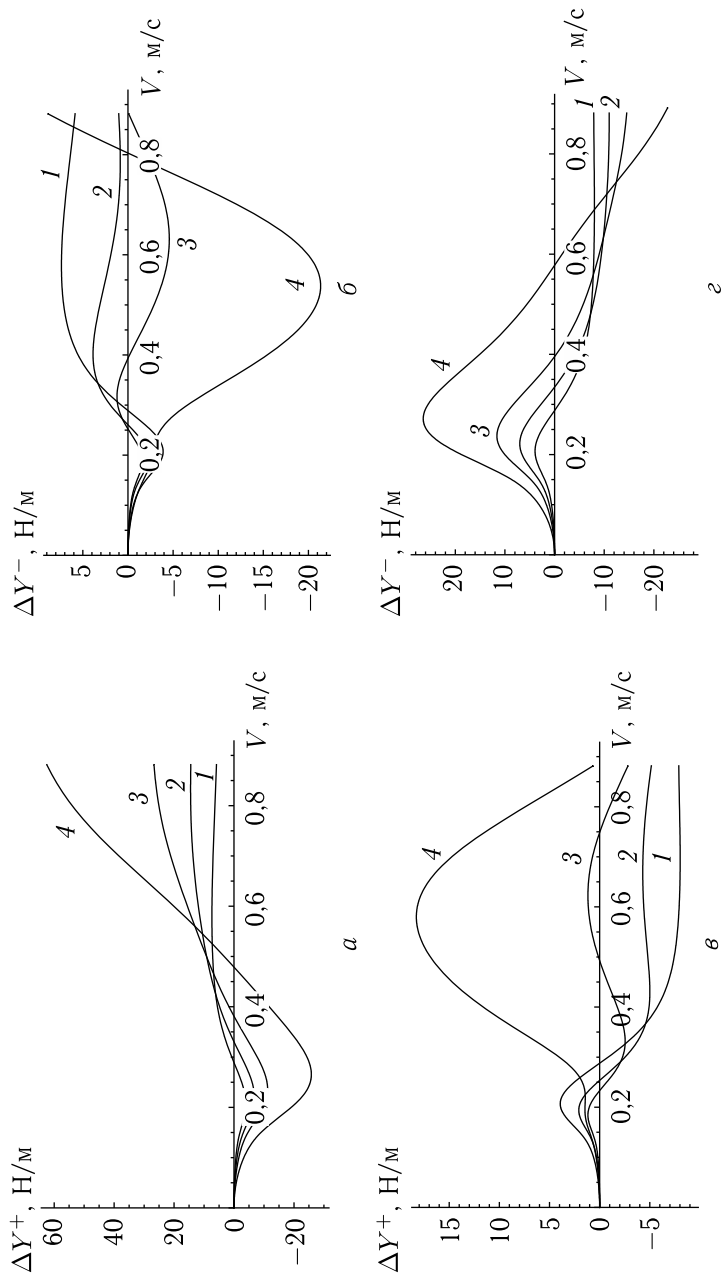


Рис. 1.20. Зависимости подъемной силы диполя от скорости потока. Диполь над скачком плотности (*а*, *б*) и под ним (*в*, *г*); $\gamma_i > 0$ (*а*, *в*), $\gamma_i < 0$ (*б*, *г*); $\rho_2/\rho_1 = 1,01$. На каждом графике представлены 4 кривые, соответствующие разным значениям абсолютной величины γ_i : $|\gamma_1| = 0$, $|\gamma_2| = 0,05$, $|\gamma_3| = 0,1$, $|\gamma_4| = 0,2$

отдельно с учетом положительной («+») и отрицательной («-») циркуляций (см. рис. 1.19–1.20).

Результаты вычислений волнового сопротивления X и подъемной силы ΔY (в расчете на погонный метр длины цилиндра) в зависимости от скорости набегающего потока V приведены на рис. 1.19–1.20. На каждом графике представлены кривые, соответствующие четырем значениям γ_i .

1.3.5. Обсуждение результатов модельных расчетов

Как видно на рис. 1.19 и 1.20, все зависимости $X(V)$ и $\Delta Y(V)$ отражают значительное усиление волнового воздействия на обтекаемое подводное препятствие при учете в модели завихренности потока. Увеличение интенсивности завихренности γ_i приводит к заметно более высокому (то есть непропорциональному) усилению волнового сопротивления.

Графики на рис. 1.19, *а* и 1.19, *в* представляют зависимость $X^+(V)$ в случае положительной циркуляции, то есть при движении жидкости вблизи вихря против часовой стрелки (*а* — локализация цилиндра над слоем скачка плотности, *в* — под ним). Как представлено на этих двух графиках, кривые волнового сопротивления по соответствующим (относительно циркуляции) значениям амплитуд существенно (почти в 3 раза) различаются между собой.

Аналогичное сравнение амплитуд силы волнового сопротивления при отрицательной циркуляции $X^-(V)$ (рис. 1.19, *б* и 1.19, *г*) приводит к противоположному эффекту: к ослаблению волнового воздействия над скачком плотности (на малых скоростях обтекания) и к его усилению под ним почти в такой же пропорции, как и для $X^+(V)$ (за исключением кривой 4). При заданных условиях и параметрах модели на графиках рис. 1.19 наблюдается практическое совпадение (как по значениям амплитуд, так и по форме изменчивости) между собой противоположно завихренных кривых $X^+(V)$ и $X^-(V)$, локализованных по разные стороны границы раздела слоев. В этом случае можно предположить, что скорости обтекания цилиндра для разнонаправленных

вихрей вблизи, но по разные стороны границы скачка плотности близки между собой.

Согласно (1.72)–(1.74) зависимость волнового воздействия на модельный цилиндр от скорости набегающего потока проявляется в ограниченном диапазоне от 0 до V_{cr}^{BH} . Причем такая зависимость испытывает разрыв первого рода: при переходе через V_{cr}^{BH} волновое сопротивление уменьшается практически до нуля, что и отражает влияние внутренней моды, генерируемой на скачке плотности. Затем $X(V)$ вновь достигает значимых величин лишь при существенно бóльших значениях скорости потока ($V > 6$ м/с), то есть в диапазоне проявления поверхностной моды, связанной с наличием свободной поверхности. В то же время функция $Y(V)$ имеет разрыв второго рода при $V = V_{cr}^{BH}$ (при подходе слева к V_{cr}^{BH} она имеет конечный предел, а при подходе справа — бесконечный).

Далее отметим, что (в отличие от $X(V)$) зависимость $\Delta Y(V)$ имеет важную и характерную особенность (рис. 1.20). Так, в относительно узком диапазоне изменения V подъемная сила резко меняет свое направление на противоположное. Возникает вопрос о возможных последствиях столь резкого и реверсивного изменения $\Delta Y(V)$. В ответе на него можно воспользоваться интегралом Бернулли, связывающим изменение давления с изменением квадрата скорости набегающего потока. Так, при положительной циркуляции суммарная скорость потока под модельным элементом цилиндра увеличивается, а над ним уменьшается. В этом случае давление внизу уменьшается, а сверху цилиндра увеличивается. Поэтому в таком же порядке изменяется и подъемная сила. А поскольку в реальных морских условиях скорость течения непостоянна по пространству (в том числе и вблизи дна) вдоль горизонтально проложенного транспортного трубопровода, то и поле давления в его окрестности также непостоянно, а последнее непосредственно влияет на изменение силового воздействия на обтекаемый трубопровод. В этом случае описанная динамика обтекания трубы может приводить к деформированию ее отдельных протяженных элементов, а силовые воздействия — к разрушению самого трубопровода.

1.3.6. Заключение

Получены выражения для гидродинамической нагрузки на диполь при его циркуляционном обтекании потоком двухслойной жидкости конечной глубины. Исследованы зависимости волнового сопротивления и подъемной силы от скорости потока и циркуляции. Показано, что учет циркуляции может значительно изменить величину гидродинамической реакции, действующей на диполь. Обнаружен эффект резкого (реверсивного) изменения направления действия подъемной силы в относительно узком диапазоне скорости обтекания моделируемого диполем трубопровода. Данный эффект необходимо учитывать при проектировании подводных инженерных конструкций в морской среде и на дне моря.

1.4. Силовое воздействие потока бесконечно глубокой жидкости на источник под ледяным покровом

1.4.1. Введение

Характерным природным фактором полярных районов Мирового океана и замерзающих морских акваторий является наличие ледяного покрова. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод при этом в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним [58, 79, 80, 112, 184, 185]. Причинами деформации ледяной поверхности в природных условиях могут быть, например, импульсные и периодические изменения давления, подводные источники различной физической природы (в том числе подводные взрывы), движущиеся по льду нагрузки постоянной и переменной интенсивности, локализованные возмущения морской поверхности [58, 156, 184, 186, 187]. Волновые процессы под ледяным покровом проявляются в его деформации, которая зависит от физико-механических свойств льда. Воздействием волн можно объяснить такие явления, как образование трещин в сплошных ледяных полях, разрушение льда в прикромочных зонах, взламывание припая [80, 112, 156, 185].

Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для исследования его реакции на различные

гидродинамические возмущения, движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия. Практический интерес к воздействию ледяного покрова на подводные препятствия обусловлен тем, что при наличии водной толщи обтекаемое потоком препятствие генерирует волны на поверхности раздела льда и морской среды и, следовательно, оно испытывает дополнительное волновое сопротивление, расчет которого необходим при проектировании различных сооружений [80, 156, 186]. С другой стороны, эти поверхностные волны несут информацию как о самих источниках возмущений, так и о характеристиках морской среды подо льдом, и они могут быть зарегистрированы с помощью специальных средств, прежде всего, радиолокационных и оптических систем [38, 55, 66, 80]. Для дальнейшего развития методов контролирующего мониторинга морских акваторий с ледяным покровом, основанных на данных, получаемых средствами дистанционного зондирования поверхности льда, важно знать, как, в частности, зависит характер силового воздействия морских течений на подводные источники различной физической природы от скорости потока, глубины погружения источника, иных существенных гидродинамических параметров [80, 156, 186].

Генерации волновых возмущений на границе льда и жидкости от обтекаемых подводных препятствий посвящены многочисленные исследования как в лабораторных опытах, так и в рамках теоретических работ. Современное состояние проблемы и подробный обзор работ содержатся в [80, 156–159]. Обычно предполагается, что ледяной покров является сплошным (то есть его горизонтальные масштабы значительно превышают длины возбуждаемых волн), и при достаточно естественных условиях моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы, а пластина является физически линейной [156, 158, 159, 188–190]. Целью настоящего раздела является расчет силового воздействия потока бесконечно глубокой однородной жидкости на источник под ледовым покровом.

1.4.2. Постановка задачи

Рассматривается поток идеальной несжимаемой бесконечно глубокой жидкости, который обтекает точечный источник массы мощности $q = q_0 e^{\varepsilon t}$ ($q_0, \varepsilon = \text{const}, \varepsilon > 0$); далее в полученном решении ищется предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сверху течение ограничено ледовым покровом толщиной l . Ось $O\xi$ совпадает с невозмущенной границей раздела жидкости плотности ρ_0 и льда с плотностью ρ_1 (рис. 1.21). Скорость потока направлена вдоль оси ξ и равна V , источник расположен в точке $(0, -h)$, задача плоская. Предполагая течение потенциальным, поле горизонтальных скоростей $U(\xi, y)$ можно представить в виде [95, 97, 182]

$$U(\xi, y, t) = V + q_0 e^{\varepsilon t} u_1(\xi, y) + q_0 e^{\varepsilon t} u(\xi, y),$$

$$u_1(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + (y+h)^2} + \frac{\xi}{\xi^2 + (y-h)^2} \right), \quad (1.77)$$

где $u_1(\xi, y)$ — горизонтальная скорость от системы двух источников единичной интенсивности, расположенных симметрично относительно оси $O\xi$. Тогда в линейном приближении математическая постановка задачи для функции $u(\xi, y)$ формулируется

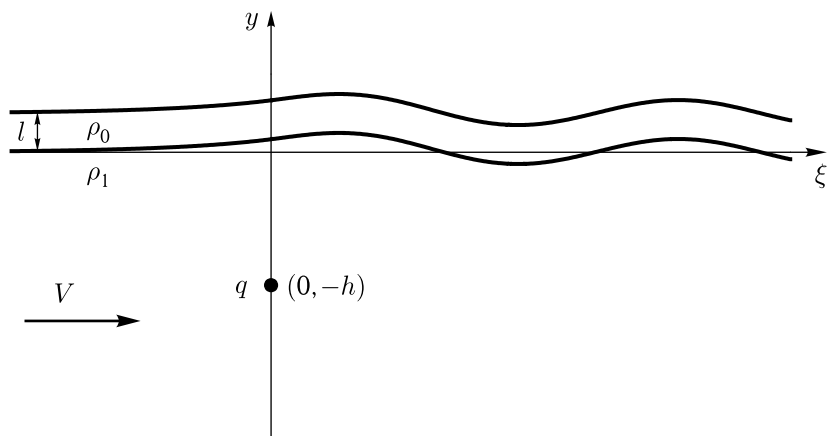


Рис. 1.21. Схема обтекания источника под ледовым покровом

следующим образом [156–159]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{D^2 u}{Dt^2} + g \frac{\partial u}{\partial y} - C \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial y} + B \frac{\partial^5 u}{\partial \xi^4 \partial y} + \\ + A \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{D^2 u_1}{Dt^2}, \quad y = 0, \\ u \rightarrow 0, \text{ при } y \rightarrow -\infty, \\ \frac{D}{Dt} = \varepsilon + V \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad A = \frac{l \rho_1}{\rho_0}, \quad B = \frac{E l^3}{12 \rho_0 (1 - \nu^2)}, \quad C = \frac{\sigma l}{\rho_0}, \end{array} \right. \quad (1.78)$$

где g — ускорение свободного падения, E — модуль Юнга льда, ν — коэффициент Пуассона, σ — начальное напряжение. Характерные значения этих величин в морских условиях [80, 112, 156]: $\rho_0 = 1025 \text{ кг/м}^3$, $\rho_1 = 0,9 \rho_0$, $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\nu = 0,3$, $\sigma = 10^5 \text{ Па}$. В терминах Фурье-образа возмущения горизонтальной скорости

$$\Phi(k, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, y) \exp(ik\xi) d\xi$$

исходная задача (1.78) формулируется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k^2 \Phi = 0, \\ (\varepsilon - ikV)^2 \Phi + (g + Ck^2 + Bk^4 + A(\varepsilon - ikV)^2) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \\ = -i(\varepsilon - ikV)^2 e^{-kh} \operatorname{sign} k, \quad y = 0, \\ \Phi \rightarrow 0, \text{ при } y \rightarrow -\infty. \end{array} \right. \quad (1.79)$$

Решение задачи (1.79) имеет вид

$$\Phi(k, y) = - \frac{i|k|(\varepsilon - ikV)^2 \exp(|k|(y - h))}{k(A|k| + 1)(T - (i\varepsilon + kV)^2)},$$

$$T = \frac{|k|(g + Ck^2 + Bk^4)}{A|k| + 1}.$$

Проведем обратное преобразование Фурье:

$$u(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(|k|) \exp(-ik\xi) dk}{k(\Omega^2(|k|) - (i\varepsilon + kV)^2)}, \quad (1.80)$$

$$F(k) = \frac{iV^2 k^3 \exp(k(y-h))}{2\pi(Ak+1)}, \quad \Omega^2(k) = \frac{k(g + Ck^2 + Bk^4)}{Ak+1}.$$

Здесь $\Omega = \Omega(k)$ — дисперсионное соотношение для волн в неподвижной жидкости под ледовым покровом [156, 157, 159]. Отметим, что в числителе подынтегрального выражения в (1.80) выполнен предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Малый параметр ε сохранен только в знаменателе для определения направления смещения полюсов подынтегральной функции с действительной оси.

1.4.3. Аналитические решения

Представим далее функцию $u(\xi, y)$ в виде разности

$$u(\xi, y) = \int_0^{\infty} \frac{F(k) \exp(-ik\xi) dk}{k(\Omega^2(k) - (i\varepsilon + kV)^2)} - \int_0^{\infty} \frac{F(k) \exp(ik\xi) dk}{k(\Omega^2(k) - (i\varepsilon - kV)^2)}.$$

Из формулы (1.77) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ комплексно-сопряженную скорость течения $W(\zeta) = W(\xi + iy)$ можно представить в виде [95, 97, 182]

$$W(\zeta) = V + \frac{q_0}{2\pi} \left(\frac{1}{\zeta + ih} + \frac{1}{\zeta - ih} \right) + q_0 w(\zeta), \quad (1.81)$$

где $w(\zeta) = u(\xi, y) - iv(\xi, y)$ — регулярная в нижней полуплоскости функция, $v(\xi, y)$ — вертикальная скорость, функция $u(\xi, y)$ определена в (1.80). Тогда из условий Коши–Римана [181] можно получить выражение для поля вертикальной скорости

$$v(\xi, y) = \int_0^{\infty} \frac{iF(k) \exp(-ik\xi) dk}{k(\Omega^2(k) - (i\varepsilon + kV)^2)} + \int_0^{\infty} \frac{iF(k) \exp(ik\xi) dk}{k(\Omega^2(k) - (i\varepsilon - kV)^2)}.$$

Следовательно,

$$w(\zeta) = u(\xi, y) - iv(\xi, y) = 2 \int_0^{\infty} \frac{F(k) \exp(-ik\xi) dk}{k(\Omega^2(k) - (i\varepsilon + kV)^2)}. \quad (1.82)$$

Для вычисления равнодействующей гидродинамических сил R , приложенных к источнику, воспользуемся формулой Чаплыгина [97, 182],

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho_0}{2} \oint_K W^2(\zeta) d\zeta.$$

где X — горизонтальная реакция, Y — подъемная сила, а интегрирование осуществляется по произвольному контуру K , расположенному в нижней полуплоскости и охватывающему источник. Поскольку функция $w(\zeta)$ регулярна в нижней полуплоскости, то из формулы (1.81) следует, что функция $W^2(\zeta)$ имеет в этой области единственную особую точку: $\zeta = -ih$ — полюс второго порядка. Применяя теорему о вычетах, находим [95]

$$\oint_K W^2(\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname{res}_{\zeta=-ih} W^2(\zeta),$$

$$\operatorname{res}_{\zeta=-ih} W^2(\zeta) = \frac{q_0}{\pi} \left(V + \frac{iq_0}{4\pi h} + q_0 w(-ih) \right).$$

Следовательно,

$$R^* = -\rho_0 q_0 \left(V + \frac{iq_0}{4\pi h} + q_0 w(-ih) \right).$$

Далее будем рассматривать величину дополнительной силы $\Delta R = \Delta X + iY$ (ΔX — волновое сопротивление, Y — подъемная сила) к действующей на источник обобщенной силе Жуковского (реактивной силе), равной $-\rho_0 q_0 V$. Используя (1.82), можно получить

$$\Delta R^* = -i \frac{\rho_0 q_0^2}{4\pi h} - \rho_0 q_0^2 w(-ih),$$

$$w(-ih) = \frac{iV^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(k) dk}{\Omega^2(k) - (i\varepsilon + kV)^2}, \quad G(k) = \frac{k^2 \exp(-2kh)}{Ak + 1}. \quad (1.83)$$

Дополнительная сила ΔR определяется полюсами подынтегрального выражения в (1.83), расположенными вблизи действительной оси, то есть корнями уравнения

$$C^2(k) = \left(V + \frac{i\varepsilon}{k} \right)^2, \quad (1.84)$$

где $C(k) = \Omega(k)/k$ — фазовая скорость волн подо льдом [156]. Уравнение (1.84) при $\varepsilon = 0$ имеет ровно два положительных корня при условии $V > V_* = C(k_*)$ и не имеет действительных корней при $V < V_*$, где k_* — единственный положительный корень уравнения $2ABk^5 + 3Bk^4 + Ck^2 - 2Agk - g = 0$ [157–159]. Кроме того, $C'(k) < 0$ при $0 < k < k_*$ и $C'(k) > 0$ при $k > k_*$. Далее, считая, что $V > V_*$, обозначим через k_1 и k_2 занумерованные в порядке возрастания действительных частей корни уравнения (1.84), соответствующие положительным корням невозмущенного уравнения $C(k) = V$. Представим какой-либо из корней k_j ($j = 1, 2$) уравнения (1.84) в виде $k_j = K_j + \delta_j$, где K_j — соответствующий положительный корень невозмущенного уравнения. Тогда можно показать, что $\delta_j \sim i\varepsilon/(K_j C'(K_j))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, следовательно, полюс k_1 подынтегрального выражения в (1.83) смещен в нижнюю полуплоскость, а полюс k_2 — в верхнюю. Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ полюс k_1 надо обходить по бесконечно малой полуокружности в верхней полуплоскости, а полюс k_2 — по бесконечно малой полуокружности в нижней полуплоскости (рис. 1.22).

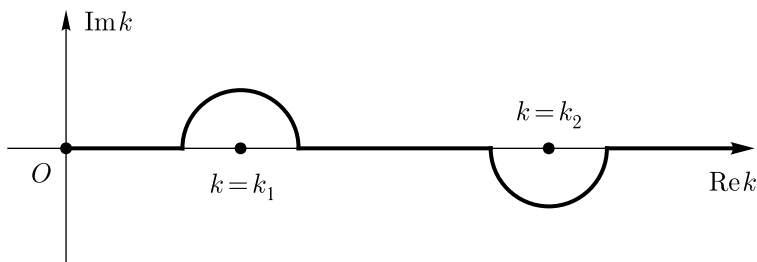


Рис. 1.22. Контур интегрирования в комплексной плоскости k

В результате можно получить

$$w(-ih) = \frac{iV^2}{\pi} \left(i\pi(T_1 + T_2) + \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{G(k) dk}{\Omega^2(k) - V^2 k^2} \right),$$

$$T_j = (-1)^j \operatorname{res}_{k=K_j} \frac{G(k)}{\Omega^2(k) - V^2 k^2} \quad (j = 1, 2),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Отсюда и из (1.83) имеем

$$\begin{aligned}\Delta R^* &= \Delta X - iY = \\ &= \rho_0 q_0^2 V^2 (T_1 + T_2) - i \left(\frac{\rho_0 q_0^2}{4\pi h} + \frac{\rho_0 q_0^2 V^2}{\pi} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{G(k) dk}{\Omega^2(k) - V^2 k^2} \right).\end{aligned}\quad (1.85)$$

Выделяя в (1.85) вещественную и мнимую части, получаем следующие выражения для волнового сопротивления ΔX и подъемной силы Y :

$$\begin{aligned}\Delta X &= \rho_0 q_0^2 V^2 (T_1 + T_2), \\ Y &= \frac{\rho_0 q_0^2}{4\pi h} + \frac{\rho_0 q_0^2 V^2}{\pi} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{G(k) dk}{\Omega^2(k) - V^2 k^2}.\end{aligned}\quad (1.86)$$

Источник мощности q_0 моделирует затупленное полубесконечное тело шириной d , где $q_0 = Vd$ [97, 182]. Подставив это выражение в (1.86), окончательно находим:

$$\begin{aligned}\Delta X &= \rho_0 d^2 V^4 (T_1 + T_2), \\ Y &= \frac{\rho_0 d^2 V^2}{4\pi h} + \frac{\rho_0 d^2 V^4}{\pi} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{G(k) dk}{\Omega^2(k) - V^2 k^2}.\end{aligned}$$

В аналогичной постановке можно рассмотреть задачу о диполе с моментом m , находящемся под ледовым покровом. Такой диполь, как известно, позволяет моделировать обтекание цилиндра радиуса $a = \sqrt{m/2\pi V}$ [97, 182]. В результате выражения для волнового сопротивления ΔX и подъемной силы Y можно получить в виде

$$\begin{aligned}\Delta X &= 4\pi^2 \rho_0 a^4 V^4 (D_1 + D_2), \\ D_j &= (-1)^j \operatorname{res}_{k=K_j} \frac{k^2 G(k)}{\Omega^2(k) - V^2 k^2} \quad (j = 1, 2), \\ Y &= 4\pi \rho_0 a^4 V^4 \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{k^2 G(k) dk}{\Omega^2(k) - V^2 k^2} + \frac{\rho_0 a^4 V^2}{2h^3}.\end{aligned}$$

1.4.4. Численные результаты и обсуждение

При больших значениях скорости потока V полюса K_j ($j = 1, 2$) имеют асимптотики: $K_1 \sim g/V^2$, $K_2 \sim V\sqrt{A/B}$. Тогда соответствующие асимптотики величин T_j , D_j имеют вид: для источника

$$T_1 \sim \frac{g}{V^4}, \quad T_2 \sim \frac{\exp(-2hV\sqrt{A/B})}{2AV^2}$$

и для диполя

$$D_1 \sim \frac{g^3}{V^8}, \quad D_2 \sim \frac{\exp(-2hV\sqrt{A/B})}{2B}.$$

Поэтому волновое сопротивление источника $\Delta X \rightarrow \rho_0 g d^2$ при $V \rightarrow \infty$, то есть имеет конечный предел, отличный от нуля. Волновое сопротивление диполя $\Delta X \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$.

В данной постановке подъемная сила Y как для источника, так и для диполя имеет конечный предел при $V \rightarrow V_*^+$ и стремится к бесконечности при $V \rightarrow V_*^-$, то есть функция $Y(V)$ претерпевает разрыв второго рода при $V = V_*$. В самом деле, при $V \rightarrow V_*$ происходит слияние полюсов K_1 и K_2 , причем если $V > V_*$, то эти полюса расположены на действительной оси, а если $V < V_*$, то — на комплексной плоскости. Вопрос о влиянии двух сливающихся полюсов на асимптотику $Y(V)$ при $V \rightarrow V_*$ можно исследовать, используя модельный интеграл

$$I(b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - b},$$

где полюса сливаются при $b = 0$, а модельная функция

$$I(b) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{-b}}, & b < 0 \\ 0, & b > 0 \end{cases}$$

имеет бесконечный предел при $b \rightarrow 0^-$ и конечный предел при $b \rightarrow 0^+$.

На рис. 1.23–1.26 представлены результаты расчетов волнового сопротивления ΔX , подъемной силы Y источника (рис. 1.23, 1.24) и диполя (рис. 1.25, 1.26) в зависимости от скорости

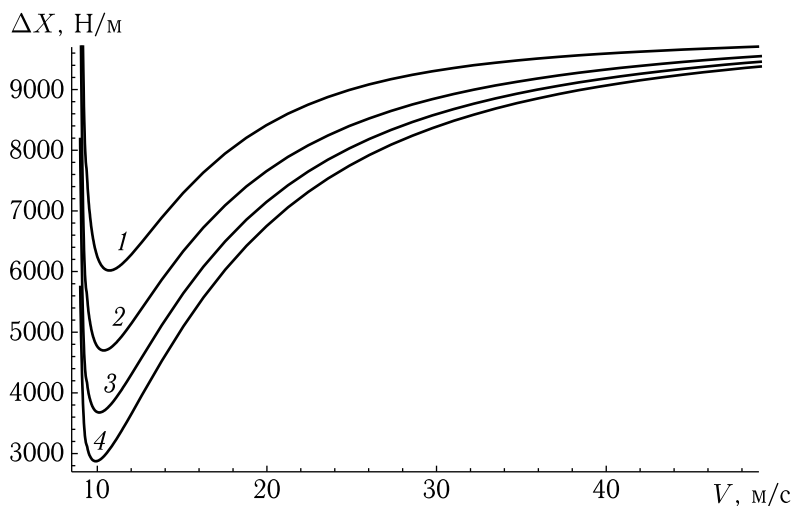


Рис. 1.23. Волновое сопротивление источника

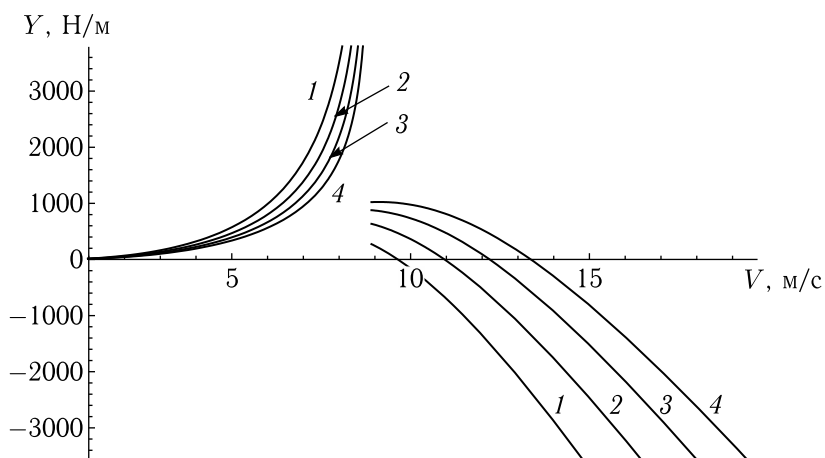


Рис. 1.24. Подъемная сила источника

набегающего потока V для различных значений глубины их погружения h . Для рис. 1.23–1.26 линия 1 — $h = 5$ м, линия 2 — $h = 6$ м, линия 3 — $h = 7$ м, линия 4 — $h = 8$ м. Остальные параметры расчетов, характерные для реальных морских условий, были следующие [80, 112, 186]: толщина льда $l = 0,25$ м, радиус цилиндра, моделируемого диполем $a = 0,5$ м, ширина затупленного полубесконечного тела, моделируемого источником $d = 1$ м.

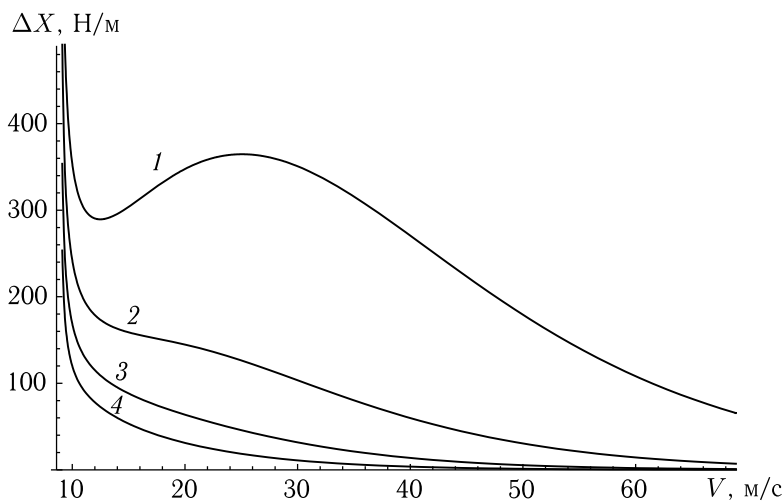


Рис. 1.25. Волновое сопротивление диполя

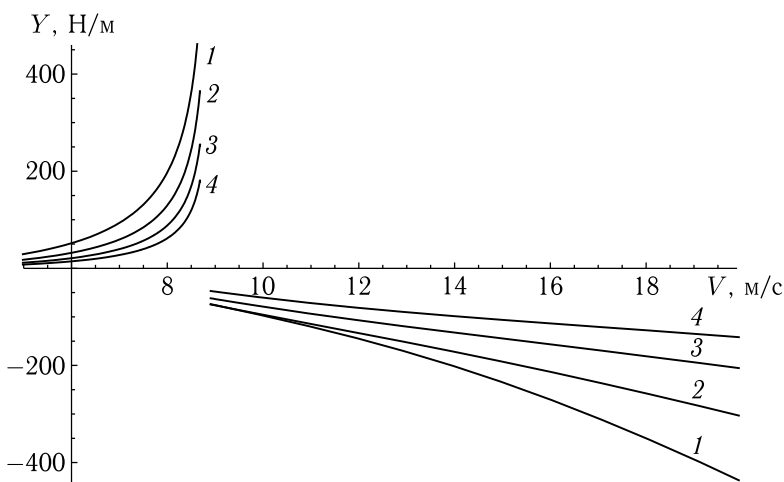


Рис. 1.26. Подъемная сила диполя

Для этих параметров значение V_* составляет 8,9 м/с. Численные расчеты показывают, что по мере увеличения глубины погружения источника силовое воздействие потока жидкости, возникающее из-за наличия ледяного покрова, уменьшается. Зависимости волнового сопротивления и подъемной силы от скорости набегающего потока жидкости демонстрируют качественно разный характер поведения.

Отметим, что результаты вычисления гидродинамической нагрузки, действующей на диполь, демонстрируют хорошее качественное согласие с аналогичными результатами, полученными иными методами [168, 170].

1.4.5. Заключение

В разделе построены аналитические решения, описывающие силовое воздействие потока бесконечно глубокой однородной жидкости на локализованный источник, находящийся под ледяным покровом. Задача решена в плоской постановке. Получены выражения для волнового сопротивления и подъемной силы точечного источника (моделирующего затупленное полубесконечное тело конечной ширины) и диполя (моделирующего цилиндр), которые возникают из-за наличия ледяного покрова. Проведены численные расчеты силового воздействия на локализованный источник и диполь в зависимости от скорости набегающего потока и глубины их погружения. Показано, что зависимости волнового сопротивления и подъемной силы от скорости потока демонстрируют качественно разный характер поведения. Волновое сопротивление источника при достаточно больших скоростях набегающего потока имеет конечный предел, отличный от нуля, при этом волновое сопротивление диполя стремится к нулю. Подъемная сила как для источника, так и для диполя претерпевает разрыв второго рода при определенном значении скорости потока жидкости.

Полученные результаты позволяют провести расчет силового воздействия ледяного покрова на различные источники возмущений природного и антропогенного характеров, наблюдаемые в реальных морских условиях.



2

ГЛАВА

ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТНЫХ
ВОЛН В ТРЁХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

На состояние свободной поверхности океана влияют как находящиеся в толще воды неоднородности (обтекаемые препятствия, изменения рельефа, полей плотности и течений и т. д.), так и различные источники возмущений [39, 58, 66, 69, 97, 110, 191]. Для правильной интерпретации данных, полученных при дистанционном зондировании морской поверхности, нужно знать причины, вызывающие те или иные поверхностные явления. Поэтому в настоящее время актуальной остается задача исследования процессов поверхностных колебаний в неоднородной по плотности и нестационарной морской среде и согласования результатов моделирования с видимыми поверхностными волнениями. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой поверхностных возмущений неоднородных и нестационарных природных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей. Эти модели, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы [80, 157, 192].

Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. Эти модели и методы в дальнейшем входят в тот набор «блоков», из которых складывается общая картина волновой динамики [191, 193, 194]. В этой связи необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованными источниками в тяжелой однородной жидкости [68, 69, 97, 110, 194–196]. В частности, в [68] для некоторых значений параметров генерации поверхностных волн гармоническим локальным источником возмущений были рассчитаны границы волновой зоны и поле возвышения методом стационарной фазы. Асимптотические решения, описывающие поверхностные волновые возмущения вдали от нелокализованных осциллирующих источников (колебания дна), исследованы в [197]. Найденные модельные решения

позволяют в дальнейшем, с использованием средств компьютерной математики, получить асимптотические представления волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред [66, 110, 191, 194–196]. Также ряд результатов асимптотического анализа линейных задач, описывающих различные режимы возбуждения и распространения поверхностных возмущений, лежит в основе активно развивающейся в настоящее время нелинейной теории генерации океанических волн экстремально большой амплитуды — волн-убийц [192, 198–202].

2.1. Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины

В настоящем разделе рассматривается задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованным источником в тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины.

2.1.1. Постановка задачи и интегральная форма решения для возвышения свободной поверхности

Рассматривается стационарная картина волновых возмущений на поверхности потока идеальной тяжелой жидкости бесконечной глубины, которая движется со скоростью V в положительном направлении оси x . Волны генерируются точечным источником, расположенным на глубине H (ось z направлена вверх от невозмущенной жидкости), мощность которого нарастает по закону $q = e^{\varepsilon t}$ ($-\infty < t < \infty$). Далее в полученном решении ищется предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом в силу линейности задачи для источника произвольной мощности Q ($Q = \text{const}$) достаточно результат, полученный для источника единичной мощности q (при $\varepsilon \rightarrow 0$), умножить на Q .

Для возмущения потенциала $\Phi(x, y, z, t)$ относительно однородного потока, движущегося со скоростью V ($\nabla\Phi = (u, v, w)$), где u, v, w — компоненты возмущения вектора скорости $(V, 0, 0)$,

имеем следующее уравнение и линеаризованное граничное условие на поверхности жидкости [69, 97, 110]:

$$\begin{cases} \Delta \Phi(x, y, z, t) = e^{\varepsilon t} \delta(x) \delta(y) \delta(z + H) & \text{при } z < 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь Δ — трехмерный оператор Лапласа, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, g — ускорение свободного падения. Возвышение свободной поверхности тяжелой жидкости $Z(x, y, t)$ связано с потенциалом $\Phi(x, y, z, t)$ условием [69, 97]

$$Z(x, y, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi(x, y, z, t) \Big|_{z=0}. \quad (2.2)$$

Будем искать решение задачи (2.1) в виде $\Phi(x, y, z, t) = e^{\varepsilon t} \varphi(x, y, z)$, тогда получим

$$\begin{cases} \Delta \varphi(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z + H) & \text{при } z < 0, \\ \left(\varepsilon + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

Для Фурье-образа потенциала $\varphi(x, y, z)$,

$$\tilde{\varphi}(\mu, \nu, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu y} \varphi(x, y, z) dy,$$

получим следующую краевую задачу ($k^2 = \mu^2 + \nu^2$):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\varphi} = \delta(z + H) & \text{при } z < 0, \\ (\varepsilon - i\mu V)^2 \tilde{\varphi} + g \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = 0 & \text{при } z = 0, \\ \tilde{\varphi} \rightarrow 0 & \text{при } z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

решение которой при $z = 0$ выглядит следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(\mu, \nu, 0) = -\frac{g \exp(-kH)}{(\varepsilon - i\mu V)^2 + gk}.$$

Отсюда и из (2.2) имеем следующее выражение для Фурье-образа $\tilde{\eta}(\mu, \nu)$ установившегося возвышения $\eta(x, y)$: $\tilde{\eta}(\mu, \nu) = \frac{i\mu V}{g} \tilde{\varphi}(\mu, \nu, 0)$; интегральное представление $\eta(x, y)$ имеет вид

$$\eta(x, y) = \frac{iV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu y} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu \exp(-kH - i\mu x) d\mu}{\mu^2 V^2 + 2i\varepsilon\mu V - gk}. \quad (2.3)$$

Отметим, что в выражении (2.3) параметр ε сохранен только в одном члене знаменателя; это нужно для определения смещения полюса подынтегрального выражения относительно действительной оси (в верхнюю или нижнюю полуплоскость).

2.1.2. Построение неравномерной асимптотики решения: интегрирование с помощью вычетов и метода стационарной фазы

В полярных координатах ($x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$; $\mu = k \cos \psi$, $\nu = k \sin \psi$) выражение (2.3) выглядит следующим образом:

$$\eta(r, \alpha) = \frac{iV}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^{\infty} \frac{k \exp(-kH - ikr \cos(\psi - \alpha))}{kV^2 \cos^2 \psi + 2i\varepsilon V \cos \psi - g} dk.$$

Будем исследовать выражение для возвышения $\eta(r, \alpha)$ при больших значениях r (точнее, при $gr/V^2 \gg 1$). Подынтегральное выражение по переменной интегрирования k имеет простой полюс, $k^* = \frac{g}{V^2 \cos^2 \psi} - \frac{2i\varepsilon}{V \cos \psi}$, который при значениях $\cos \psi < 0$ смещен в верхнюю полуплоскость, а при $\cos \psi > 0$ — в нижнюю. Разобьем $\eta(r, \alpha)$ на два слагаемых: $\eta(r, \alpha) = \eta_1(r, \alpha) + \eta_2(r, \alpha)$, при этом в слагаемом $\eta_1(r, \alpha)$ интегрирование по ψ производится в области, где $\cos \psi < 0$, а в слагаемом $\eta_2(r, \alpha)$ — в области, где $\cos \psi > 0$.

Рассмотрим сначала слагаемое $\eta_1(r, \alpha)$ (слагаемое $\eta_2(r, \alpha)$ рассматривается аналогично). При $\cos(\psi - \alpha) < 0$ контур интегрирования по k можно повернуть на $\pi/2$ и совместить с положительным направлением мнимой оси на комплексной плоскости k (вычет в полюсе k^* при этом учитывается), а при $\cos(\psi - \alpha) > 0$

контур можно повернуть на $-\pi/2$ и совместить с отрицательным направлением мнимой оси (вычет не учитывается) [181]. Можно показать, что и в том, и в другом случае интеграл вдоль мнимой оси имеет порядок $O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$. В результате получим

$$\eta_1(r, \alpha) = -\frac{g}{2\pi V^3} \times \\ \times \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} \cos^{-3} \psi \exp \left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi} - ir \frac{g \cos(\psi - \alpha)}{V^2 \cos^2 \psi} \right) d\psi + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Аналогичным образом можно найти слагаемое $\eta_2(r, \alpha)$, которое комплексно сопряжено с $\eta_1(r, \alpha)$. Окончательно для возвышения $\eta(r, \alpha)$ получим

$$\eta(r, \alpha) = -\frac{g}{\pi V^3} \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} \cos^{-3} \psi \exp \left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi} \right) \cos(rS(\psi, \alpha)) d\psi, \quad (2.4)$$

$$S(\psi, \alpha) = \frac{g \cos(\psi - \alpha)}{V^2 \cos^2 \psi}.$$

Отметим, что интеграл (2.4) — четная функция по α . Тогда асимптотику интеграла (2.4) при больших значениях r можно вычислить при помощи метода стационарной фазы, и для этого необходимо найти точки стационарности фазы, то есть корни уравнения $S'_\psi(\psi, \alpha) = 0$. На интервале интегрирования $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha; \frac{3\pi}{2}\right)$ лежат две стационарные точки: $\psi_1(\alpha) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \arcsin(3 \sin \alpha)$ и $\psi_2(\alpha) = \pi + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \arcsin(3 \sin \alpha)$ ($\psi_1(\alpha) < \psi_2(\alpha)$) при $\alpha > 0$, $\psi_1(\alpha) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \arcsin(3 \sin \alpha)$ и $\psi_2(\alpha) = \pi + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \arcsin(3 \sin \alpha)$ ($\psi_1(\alpha) > \psi_2(\alpha)$) при $\alpha < 0$. Стационарные точки существуют только при значениях α , лежащих в интервале $-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) < \alpha < \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$. Это условие определяет на по-

верхности тяжелой жидкости область, в которой присутствуют волновые движения — клин Кельвина [69, 97, 110].

Зная стационарные точки, можно легко получить хорошо известную картину гребней «корабельных волн» внутри клина Кельвина в полярных координатах: $r = -\frac{2\pi n}{S(\psi_1(\alpha), \alpha)}$

и $r = -\frac{2\pi n}{S(\psi_2(\alpha), \alpha)}$, $n = 1, 2, 3 \dots$; при этом первое равенство (стационарная точка $\psi_1(\alpha)$) отвечает за продольные гребни, а второе (стационарная точка $\psi_2(\alpha)$) — за поперечные. Знак «минус» берется потому, что фаза в стационарных точках отрицательна.

На рис. 2.1 изображена картина линий равной фазы (гребней), разность фаз между соседними гребнями равна 2π . Здесь и в дальнейшем параметры расчетов, характерные для реальных океанических условий [39, 58], были следующие: $V = 11$ м/с, $H = 6$ м.

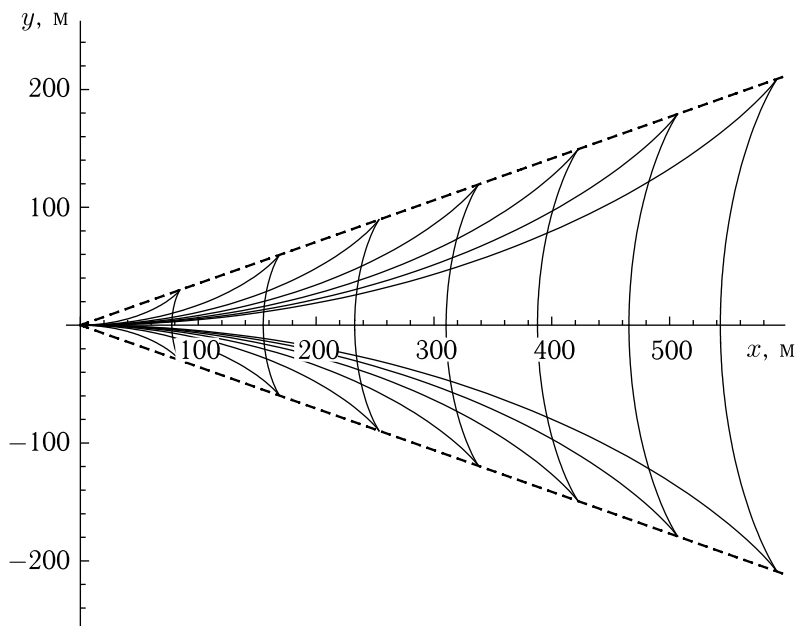


Рис. 2.1. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$, $n = -1, -2, \dots, -7$ (слева направо)

Асимптотика интеграла (2.4) при $r \rightarrow \infty$, вычисленная с помощью метода стационарной фазы, имеет следующий вид:

$$\eta(r, \alpha) = -\frac{g}{V^3} \sum_{j=1}^2 \sqrt{\frac{2}{\pi r |S''_{\psi\psi}(\psi_j, \alpha)|}} \cos^{-3} \psi_j \times \\ \times \exp\left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi_j}\right) \cos(\Omega_j), \quad (2.5)$$

где $\Omega_j = rS(\psi_j, \alpha) + \frac{\pi}{4} \text{sign } S''_{\psi\psi}(\psi_j, \alpha)$, $\text{sign } S''_{\psi\psi}(\psi_1, \alpha) = 1$, $\text{sign } S''_{\psi\psi}(\psi_2, \alpha) = -1$. Отметим, что неравномерная асимптотика (2.5) работает только внутри клина при $-\alpha^* < \alpha < \alpha^*$ (в этом интервале присутствуют стационарные точки) и перестает работать при приближении к границе клина, где стационарные точки сливаются, то есть при $\alpha = \alpha^* = \arcsin 1/3$: $\psi_1(\alpha^*) = \psi_2(\alpha^*) = \frac{\alpha^*}{2} + \frac{3\pi}{4}$ и $S''_{\psi\psi}(\psi_{1,2}(\alpha), \alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \alpha^*$.

2.1.3. Построение равномерной асимптотики решения

Построим теперь равномерную асимптотику интеграла (2.4), то есть возвышения $\eta(r, \alpha)$, которая работает не только внутри клина Кельвина, но и за его пределами, а также на самой границе клина. При этом равномерная асимптотика внутри клина должна совпадать с неравномерной асимптотикой (2.5), полученной с помощью метода стационарной фазы. Поскольку очевидно, что волновая картина для возвышения $\eta(r, \alpha)$ симметрична относительно оси x , то есть $\eta(r, \alpha)$ — четная функция переменной α , то далее будем рассматривать случай $\alpha > 0$.

Как было показано выше, фазовая функция $S(\psi, \alpha)$ имеет две точки поворота, $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\alpha)$, которые при $\alpha \rightarrow \alpha^* = \arcsin(1/3)$ сливаются друг с другом: $\psi_1(\alpha^*) = \psi_2(\alpha^*) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha^*}{2} = \psi^*$. Таким образом, имеем классическую задачу об асимптотике интегралов с двумя сливающимися точками поворота. Далее будем в основном следовать методике, изложенной в [120, 149, 180]. Введем обозначение $f(\psi) = -\frac{g}{\pi V^3 \cos^3 \psi} \exp\left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi}\right)$. Тогда

интеграл (2.4) перепишется в виде

$$\eta(r, \alpha) = \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} f(\psi) \cos(rS(\psi, \alpha)) d\psi. \quad (2.6)$$

Сделаем далее неявную замену переменной интегрирования ψ :

$$S(\psi, \alpha) = a_0 + \sigma s - \frac{s^3}{3}. \quad (2.7)$$

При этом стационарной точке $\psi_1(\alpha)$ будет соответствовать точка $s_1 = -\sqrt{\sigma}$, а точке $\psi_2(\alpha)$ — точка $s_2 = \sqrt{\sigma}$. Тогда из (2.7) получим, что

$$a_0(\alpha) = \frac{S(\psi_1) + S(\psi_2)}{2}, \quad \sigma(\alpha) = \left(\frac{3}{4} (S(\psi_2) - S(\psi_1)) \right)^{2/3}. \quad (2.8)$$

Интеграл (2.6) при замене (2.7) перейдет в

$$\eta(r, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \cos(r(a_0 + \sigma s - s^3/3)) ds, \quad (2.9)$$

$$G(s) = f(\psi) \frac{d\psi}{ds}.$$

Нижний предел в интеграле (2.9), на самом деле, находится из (2.7) при $\psi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ и является корнем уравнения $a_0(\alpha) + \sigma(\alpha)s - \frac{s^3}{3} = 0$. Данное уравнение имеет единственный действительный корень $s^*(\alpha)$, который, используя формулу Кардано, можно найти в явном виде:

$$s^*(\alpha) = \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} \left[\left(\sqrt{S(\psi_2)} + \sqrt{S(\psi_1)} \right)^{2/3} + \left(\sqrt{S(\psi_2)} - \sqrt{S(\psi_1)} \right)^{2/3} \right],$$

при этом $s^*(\alpha) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow 0$, $s^*(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \pi$. Возможность замены нижнего предела $s^*(\alpha)$ на $-\infty$ и оценка допускаемой при этом ошибки будут обсуждаться ниже.

Представим медленно меняющуюся функцию $G(s)$ в окрестности стационарных точек в виде (полное разложение приведено

в [120, 149, 180])

$$G(s) = b_0 + b_1 s, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} b_0(\alpha) &= \frac{G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma})}{2}, \\ b_1(\alpha) &= \frac{G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma})}{2\sqrt{\sigma}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Входящие в $G(\pm\sqrt{\sigma})$ значения $d\psi/ds$ находятся с помощью дифференцирования выражения (2.7) по s , в результате получим:

$$G(\sqrt{\sigma}) = f(\psi_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{S''_{\psi\psi}(\psi_2, \alpha)}}, \quad G(-\sqrt{\sigma}) = f(\psi_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{S''_{\psi\psi}(\psi_1, \alpha)}}.$$

Подставляя разложение (2.10) в выражение (2.9), представим последнее в виде суммы двух слагаемых,

$$\eta(r, \alpha) = J_1(r, \alpha) + J_2(r, \alpha), \quad (2.12)$$

первое из которых выражается через функцию Эйри $\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xt + t^3/3) dt$, а второе — через ее производную [149, 203, 204]:

$$\begin{aligned} J_1(r, \alpha) &= \frac{2\pi}{r^{1/3}} b_0(\alpha) \cos(ra_0(\alpha)) \text{Ai}(-\sigma(\alpha)r^{2/3}), \\ J_2(r, \alpha) &= -\frac{2\pi}{r^{2/3}} b_1(\alpha) \sin(ra_0(\alpha)) \text{Ai}'(-\sigma(\alpha)r^{2/3}), \end{aligned}$$

где $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$ определены в (2.11), а $\sigma(\alpha)$ и $a_0(\alpha)$ — в (2.8).

Равномерная асимптотика (2.12) является четной функцией относительно $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Волновая картина также симметрична относительно оси Oy , что физически невозможно, так как далеко вверх по потоку возмущения отсутствуют. Происходит это из-за замены нижнего предела интегрирования в (2.9) $s^*(\alpha)$ на $-\infty$ (что соответствует замене нижнего предела в (2.4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ на $\frac{\pi}{2}$). Тогда полученные интегралы выражаются через функцию Эйри и ее производную. При $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ эта замена дает лишь добавку порядка $O(1/r^2)$, так как стационарные точки лежат на интервале $(s^*(\alpha), \infty)$. При $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ такую замену производить нельзя, но можно показать, что исходный интеграл (2.4) имеет поря-

док $O(1/r^2)$ (в этом можно убедиться, дважды интегрируя (2.4) по частям).

В результате в первом случае основной вклад в асимптотику интеграла (2.4) дают стационарные точки (порядок интеграла $O(1/r^{1/2})$), а во втором случае вклад в интеграл дает лишь конечная точка интервала интегрирования $s^*(\alpha)$ (порядок интеграла $O(1/r^2)$). Таким образом, равномерная асимптотика (2.12) работает при больших r и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ волновое поле убывает как $1/r^2$. Эта асимптотика регулярна на границе клина при $\alpha = \alpha^*$, где $S'(\psi) = 0$ и $S''(\psi) = 0$, при этом $b_0(\alpha^*) = G(0)$, $b_1(\alpha^*) = G'(0)$.

Для нахождения $G(0)$ надо убедиться в регулярности $\frac{d\psi}{ds}$ при $s = 0$, а для нахождения $G'(0)$ — в регулярности $\frac{d^2\psi}{ds^2}$ в нуле. Трижды дифференцируя соотношение (2.7) по переменной s , найдем, что

$$\left. \frac{d\psi}{ds} \right|_{s=0} = \left(-\frac{2}{S'''(\psi^*)} \right)^{1/3}.$$

Четырежды дифференцируя (2.7) по s , получим, что

$$\left. \frac{d^2\psi}{ds^2} \right|_{s=0} = -\frac{S^{(4)}(\psi^*)}{6S'''(\psi^*)} \left(-\frac{2}{S'''(\psi^*)} \right)^{2/3}.$$

Равномерная асимптотика при больших значениях r и α , не очень близких к α^* , переходит в неравномерную асимптотику (2.5). В этом можно убедиться, взяв в (2.12) вместо функции Эйри и ее производной их асимптотики при больших отрицательных значениях аргумента [149, 203, 204]:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-x) &\approx \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right), \\ \text{Ai}'(-x) &\approx -\frac{x^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Оба слагаемых в (2.12) тогда будут иметь порядок $O(1/\sqrt{r})$. Непосредственно в окрестности границы клина в (2.12) можно оставить только первое слагаемое (порядка $O(1/r^{1/3})$), а вне клина оба слагаемых (как и их асимптотики) экспоненциально малы.

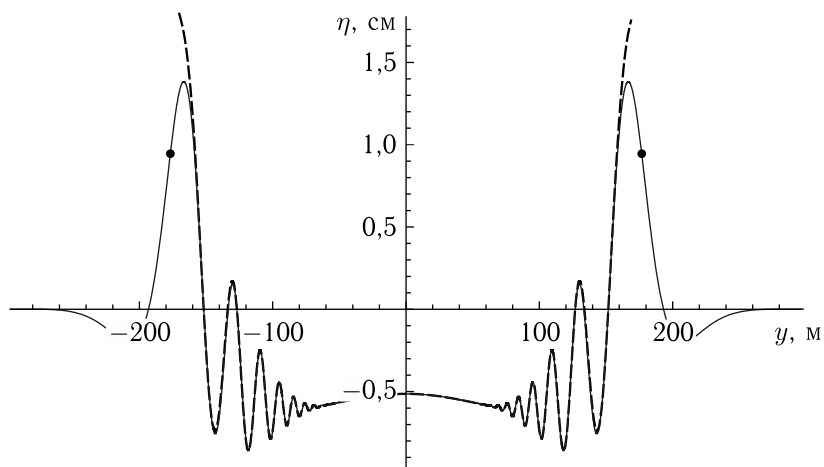


Рис. 2.2. Поперечный срез поля возвышения при $x = 500$ м (пунктир — асимптотика, вычисленная по методу стационарной фазы, сплошная линия — равномерная асимптотика)

На рис. 2.2 показан поперечный срез поля возвышения при $x = 500$ м ($Q = 10 \text{ м}^3/\text{с}$), рассчитанный по формуле (2.5) (неравномерная асимптотика — пунктир) и по формуле (2.12) (равномерная асимптотика — сплошная линия). Точками отмечено положение волновых фронтов. На рис. 2.3 изображена трехмер-

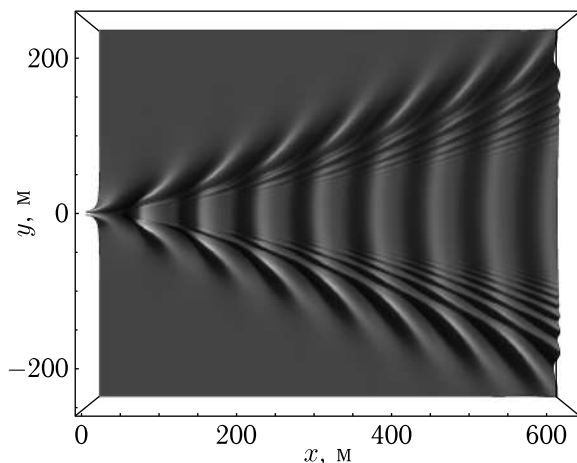


Рис. 2.3. Поле возвышения на поверхности тяжелой жидкости (равномерная асимптотика)

ная волновая картина поля возвышения на поверхности тяжелой жидкости, рассчитанная по формуле (2.12), то есть равномерная асимптотика решения.

2.1.4. Заключение

Рассмотрена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений от локализованного источника в тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Полученные решения описывают волновые возмущения как внутри, так и вне волнового клина Кельвина и выражаются через функцию Эйри и ее производные. Найденные асимптотики возмущений свободной поверхности дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей и (кроме того) качественно анализировать полученные решения. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики, в том числе для проведения экспресс-оценок при натурных измерениях волновых полей в морской среде.

2.2. Дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины

Поверхностные волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться искусственными источниками возмущений [68, 69, 205, 206]. Система уравнений гидродинамики, описывающая поверхностные возмущения, в общем виде представляет достаточно сложную математическую задачу как в плане доказательств теорем существования и единственности решений в соответствующих функциональных классах, так и с вычислительной точки зрения [157, 192, 207]. В рамках линейной теории для аналитического исследования поверхностных волновых возмущений используются методы интегрального представления Маслова, приближенные методы геометрической оптики, а в некоторых случаях также уравнения в конформных переменных [80, 146, 197, 208]. Основные результаты решений задач о генерации поверхностных волновых возмущений записываются в самой общей интегральной форме, и в этом случае найденные интегральные представления требуют разработки асимптотических методов их исследования, допускающих качественный анализ и проведение экспресс-оценок получаемых решений [66, 191]. Кроме того, для анализа данных дистанционного зондирования морской поверхности необходимы знания причин, вызывающие те или иные поверхностные явления [58, 80]. Современное состояние результатов исследований линейных и нелинейных поверхностных волновых возмущений содержится в [78, 80, 112, 192].

В разд. 2.1 настоящей работы, а также в [209] построены соответственно равномерные асимптотики дальних полей поверхностных и внутренних волновых возмущений от движущегося стационарного источника. Представляет интерес рассмотрение более сложных режимов генерации поверхностных волн, обусловленных нестационарностью источника возмущений. Целью настоящего, а также двух последующих разделов является построение равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых при обтекании локализованного гармонического источника потоком тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины.

2.2.1. Постановка задачи и интегральные формы решений

Рассматривается стационарная картина волновых возмущений на поверхности потока идеальной тяжелой жидкости бесконечной глубины, которая движется со скоростью V в положительном направлении оси x . Волны генерируются точечным пульсирующим источником массы, расположенным на глубине H (ось z направлена вверх от невозмущенной жидкости), мощность которого изменяется по закону $q = \exp(i\omega t) \exp(\varepsilon t)$ ($-\infty < t < \infty$); далее в полученном решении ищется предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу линейности задачи для расчета поля возмущений от пульсирующего источника произвольной мощности $Q = \text{const}$ достаточно результат, полученный для источника единичной мощности q , умножить на Q .

Возмущение потенциала $\Phi(x, y, z, t)$ относительно однородного потока, движущегося со скоростью V ($\nabla\Phi = (u, v, w)$, где u, v, w — компоненты возмущения вектора скорости $(V, 0, 0)$), описывается уравнением Пуассона с соответствующим линейризованным граничным условием на поверхности жидкости [69, 97]:

$$\begin{cases} \Delta\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t) \exp(\varepsilon t) \delta(x) \delta(y) \delta(z + H), & z < 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, & z = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Здесь Δ — трехмерный оператор Лапласа, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, g — ускорение свободного падения. Решение задачи (2.13)

ищется в виде $\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t) \exp(\varepsilon t) \varphi(x, y, z)$, где функция $\varphi(x, y, z)$ определяется из задачи

$$\begin{cases} \Delta \varphi(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z + H), & z < 0, \\ \left(i\omega + \varepsilon + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, & z = 0. \end{cases}$$

Фурье-образ потенциала $\varphi(x, y, z)$

$$\Omega(\mu, \nu, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mu x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu y) \varphi(x, y, z) dy$$

определяется из краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Omega(\mu, \nu, z)}{\partial z^2} - k^2 \Omega(\mu, \nu, z) = \delta(z + H), & z < 0, \\ (\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 \Omega(\mu, \nu, z) + g \frac{\partial \Omega(\mu, \nu, z)}{\partial z} = 0, & z = 0, \\ \Omega(\mu, \nu, z) \rightarrow 0, & z \rightarrow -\infty; \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2, \end{cases}$$

решение которой в области $-H < z < 0$ имеет вид

$$\Omega(\mu, \nu, z) = -\frac{(\omega - \mu V)^2 \operatorname{sh}(kz) + gk \operatorname{ch}(kz)}{k \exp(kH) ((\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk)}.$$

Возвышение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ связано с потенциалом $\Phi(x, y, z, t)$ условием [69, 97]

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi(x, y, z, t) = \\ &= -\frac{\exp(i\omega t + \varepsilon t)}{g} \left(i(\omega - i\varepsilon) \varphi(x, y, z) + V \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} \right), \quad z = 0. \end{aligned}$$

Тогда Фурье-образ $\Lambda(\mu, \nu, t)$ функции $\eta(x, y, t)$ имеет вид

$$\Lambda(\mu, \nu, t) = \frac{i(\omega - \mu V) \exp(i\omega t) \exp(-kH)}{(\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk}.$$

В данном выражении параметр ε сохранен только в знаменателе; это нужно для определения смещения полюса подынтегрального выражения относительно действительной оси в верхнюю или

нижнюю полуплоскость. Тогда, проводя обратное преобразование Фурье, можно получить, что

$$\eta(x, y, t) = \frac{i \exp(i\omega t)}{4\pi^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \mu V) \exp(-kH - i\mu x) d\mu}{(\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk}. \quad (2.14)$$

В полярных координатах ($x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$; $\mu = k \cos \psi$, $\nu = k \sin \psi$) выражение (2.14) принимает вид

$$\eta(r, \alpha, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{4\pi^2 i} \times \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\infty} \frac{(\omega - kV \cos \psi) k \exp(-kH - ikr \cos(\psi - \alpha))}{(\omega - i\varepsilon - kV \cos \psi)^2 - gk} dk. \quad (2.15)$$

Внутренний интеграл в (2.15) вычисляется с помощью теоремы о вычетах [181]. Для этого необходимо определить полюса подынтегрального выражения $k_{1,2}(\psi)$, которые являются корнями дисперсионного уравнения

$$(\omega - kV \cos \psi)^2 = gk. \quad (2.16)$$

Отсюда имеем

$$k_{1,2}(\psi) = \frac{g}{2V^2 \cos^2 \psi} \left(1 + 2m \cos \psi \mp \sqrt{1 + 4m \cos \psi} \right), \quad m = \frac{V\omega}{g};$$

знак « $-$ » соответствует корню k_1 , а знак « $+$ » — корню k_2 . Множество значений параметра $m = V\omega/g > 0$ разбивается двумя характерными значениями $m_1 = 1/4$ и $m_2 = \sqrt{6}/9$ на три интервала [69].

При $m < m_1$ дисперсионная кривая состоит из трех ветвей: одной замкнутой и двух незамкнутых. Далее будет показано, что в этом случае волновая картина представляет собой сумму двух систем корабельных волн с углом полураствора волнового клина, меньшим $\pi/2$, и одной системы кольцевых (поперечных) волн вокруг источника.

Если $m_1 < m < m_2$, то дисперсионная кривая состоит из двух разомкнутых ветвей, одна из которых имеет Ω -образную струк-

туру. Как будет показано в разд. 2.3, одна ветвь дисперсионной кривой отвечает обычным корабельным волнам с углом полураствора волнового клина, меньшим $\pi/2$, а вторая (Ω -образная) — корабельным волнам с углом полураствора волнового клина, большим $\pi/2$ (волновой фронт направлен от источника вверх по потоку). Эта система гибридных волн одновременно сочетает в себе черты как кольцевых (поперечных), так и клиновидных (продольных) волн.

При $m > m_2$ дисперсионная кривая состоит из двух разомкнутых ветвей. В разд. 2.4 будет показано, что в этом случае волновая картина есть сумма двух систем корабельных волн с углом полураствора волнового клина, меньшим $\pi/2$.

Далее будет рассматриваться случай $m < m_1$. Тогда дисперсионное уравнение (2.16) имеет два действительных положительных корня при любых значениях ψ . Методом возмущений можно показать, что при $\varepsilon > 0$ корень $k_1(\psi)$ смещен в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости k для любых значений ψ . Корень $k_2(\psi)$ смещен в нижнюю полуплоскость при $\cos \psi > 0$ и в верхнюю полуплоскость при $\cos \psi < 0$. На рис. 2.4 и 2.5 изображены соответственно дисперсионные кривые $k_1(\psi)$, $k_2(\psi)$ в плоскости (ν, μ) . Здесь и далее все численные расчеты

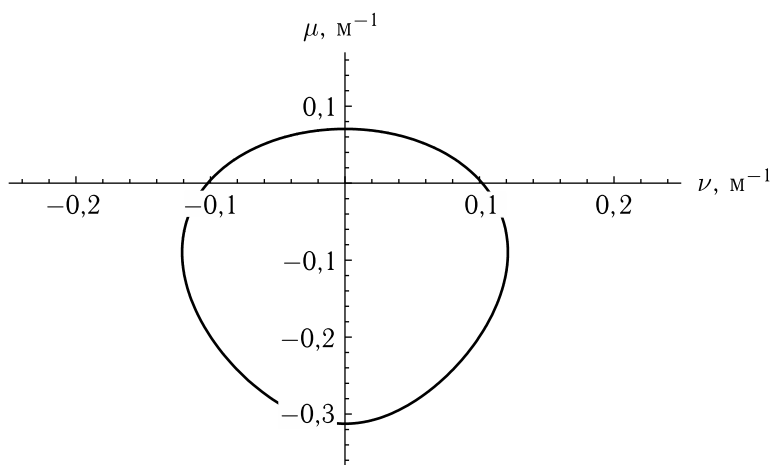
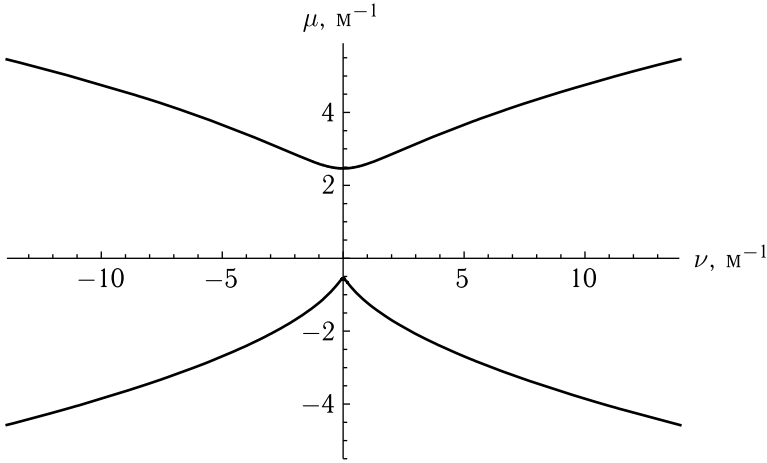


Рис. 2.4. Дисперсионная кривая $k = k_1(\psi)$

Рис. 2.5. Дисперсионная кривая $k = k_2(\psi)$

проводились для следующих значений параметров: $V = 2,4$ м/с, $\omega = 1$ с⁻¹, $g = 9,8$ м/с², $m = 0,245$.

Рассмотрим вначале вклад корня $k_1(\psi)$ в выражение (2.15) для $\eta(r, \alpha, t)$. Функция $\eta(r, \alpha, t)$ является четной по аргументу α , поэтому далее будем считать, что $0 < \alpha < \pi$. Повернем контур интегрирования по переменной интегрирования k на $\pi/2$ против часовой стрелки при условии, что $\cos(\psi - \alpha) < 0$; вычет в этом случае не учитывается, интеграл по мнимой оси имеет порядок $O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$. При $\cos(\psi - \alpha) > 0$ контур интегрирования поворачивается на $\pi/2$ по часовой стрелке, и, учитывая вычет, получаем

$$\eta_1(r, \alpha, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2+\alpha} B(k_1(\psi), \psi) \exp(-ik_1(\psi)r \cos(\psi - \alpha)) d\psi,$$

$$B(k, \psi) = \frac{(\omega - kV \cos \psi)k \exp(-kH)}{2V \cos \psi (\omega - kV \cos \psi) + g}.$$

Далее рассмотрим вклад корня $k_2(\psi)$ в выражение (2.15) для $\eta(r, \alpha, t)$. В случае $\cos(\psi - \alpha) < 0$ контур интегрирования поворачивается на $\pi/2$ против часовой стрелки. Интеграл по мнимой оси имеет порядок $O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$, вычет дает вклад

лишь при $\cos \psi < 0$, в результате получаем

$$\eta_2(r, \alpha, t) = -\frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} B(k_2(\psi), \psi) \exp(-ik_2(\psi)r \cos(\psi-\alpha)) d\psi.$$

В случае $\cos(\psi - \alpha) > 0$ контур интегрирования поворачивается на $\pi/2$ по часовой стрелке. Вычет дает вклад при $\cos \psi > 0$, интеграл по мнимой оси также имеет порядок $O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$, в результате имеем

$$\eta_3(r, \alpha, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} B(k_2(\psi), \psi) \exp(-ik_2(\psi)r \cos(\psi-\alpha)) d\psi.$$

Тогда возвышение свободной поверхности представимо в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned} \eta(r, \alpha, t) &= \eta_1(r, \alpha, t) + \eta_2(r, \alpha, t) + \eta_3(r, \alpha, t) = \\ &= \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} (J_1(r, \alpha) + J_2(r, \alpha) + J_3(r, \alpha)). \end{aligned}$$

2.2.2. Построение асимптотик решения

Рассмотрим поведение интегралов $J_1(r, \alpha)$, $J_2(r, \alpha)$, $J_3(r, \alpha)$, описывающих полное волновое поле поверхностных возмущений вдали от пульсирующего источника, то есть при больших значениях r . Оценим сначала интеграл $J_1(r, \alpha)$. Фазовая функция $q_1(\psi, \alpha) = -k_1(\psi)r \cos(\psi - \alpha)$ имеет на интервале интегрирования $(-\pi/2 + \alpha, \pi/2 + \alpha)$ единственную стационарную точку при любом $\alpha \in (-\pi, \pi)$, которая определяется из уравнения $\frac{\partial q_1(\psi, \alpha)}{\partial \psi} = 0$, или

$$\frac{k_1(\psi) \operatorname{tg} \psi - k'_1(\psi)}{k'_1(\psi) \operatorname{tg} \psi + k_1(\psi)} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Обозначим эту стационарную точку через $\psi_0(\alpha)$. Можно показать, что

$$\frac{\partial^2 q_1(\psi_0(\alpha), \alpha)}{\partial \psi^2} > 0$$

при всех значениях α . Тогда асимптотика интеграла $J_1(r, \alpha)$ вычисляется с помощью метода стационарной фазы [149] и имеет вид

$$J_1(r, \alpha) \sim \sqrt{2\pi} \left(r \frac{\partial^2 q_1(\psi, \alpha)}{\partial \psi^2} \right)^{-1/2} \times \\ \times B(k_1(\psi), \psi) \exp(i(rq_1(\psi, \alpha) + \pi/4)), \quad \psi = \psi_0(\alpha). \quad (2.17)$$

Интегралу $J_1(r, \alpha)$ соответствуют кольцевые волны на свободной поверхности жидкости, расходящиеся от пульсирующего источника. На рис. 2.6 представлена волновая картина поверхностных возмущений — рассчитанная по (2.17) функция $\text{Re } J_1(r, \alpha)$. Глубина залегания источника $H = 5$ м.

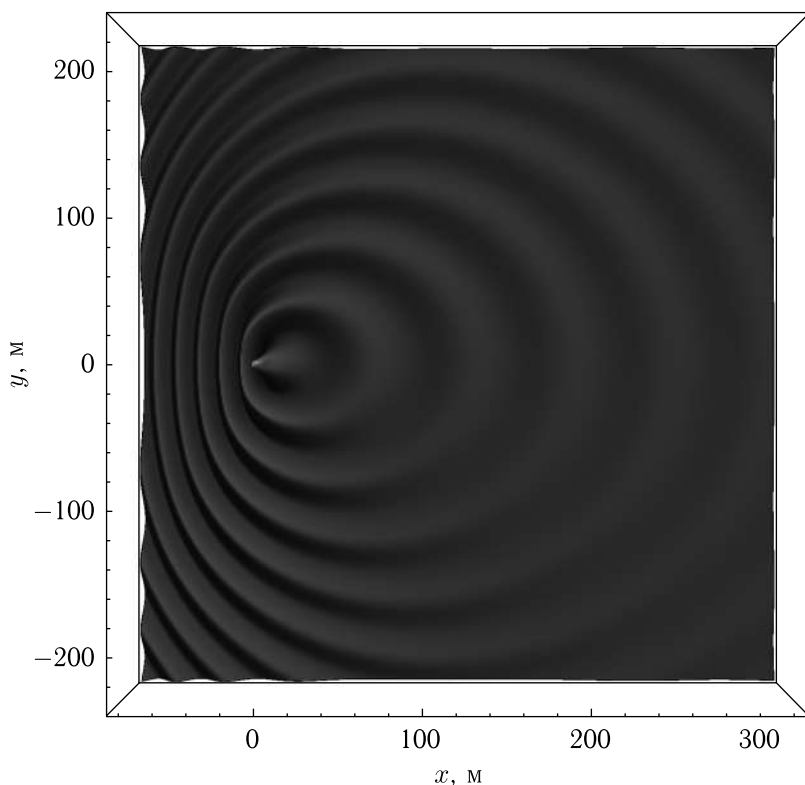


Рис. 2.6. Кольцевые волны, соответствующие $\text{Re } J_1(r, \alpha)$

Рассмотрим далее интеграл $J_3(r, \alpha)$. Обозначим $A = \arctg \Theta$, где Θ — максимальное значение по ψ на интервале $(-\pi/2, 0)$ выражения

$$\frac{k_2(\psi) \operatorname{tg} \psi - k_2'(\psi)}{k_2'(\psi) \operatorname{tg} \psi + k_2(\psi)}.$$

Значение A определяет границы волнового клина (клина Кельвина), которые описываются уравнением $y = \pm x \operatorname{tg} A$; в рассматриваемом случае $\operatorname{tg} A = 0,284$. Тогда фазовая функция $q_2(\psi, \alpha) = -k_2(\psi)r \cos(\psi - \alpha)$ на интервале интегрирования $(-\pi/2 + \alpha, \pi/2)$ при $\alpha < A$ имеет две стационарные точки $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\alpha)$ ($\psi_1(\alpha) < \psi_2(\alpha)$), при $\alpha > A$ не имеет ни одной, а при $\alpha = A$ стационарные точки сливаются ($\psi_1(A) = \psi_2(A)$). Внутри волнового клина поле может быть рассчитано методом стационарной фазы, при этом вклад дают обе стационарные точки $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\alpha)$; вне волнового клина поле экспоненциально мало. Однако, в отличие от интеграла $J_1(r, \alpha)$, асимптотика, рассчитанная по методу стационарной фазы, не является равномерной, так как $\frac{\partial^2 q_2(\psi_1(A), A)}{\partial \psi^2} = 0$. Поэтому в окрестности границы клина Кельвина асимптотика, найденная методом стационарной фазы, неприменима.

Равномерная асимптотика интеграла $J_3(r, \alpha)$ для больших значений r , пригодная для всех значений $0 \leq |\alpha| < \pi/2$, строится аналогично разд. 2.1 настоящей работы (см. также [149, 180]) и имеет вид

$$J_3(r, \alpha) \sim \frac{2\pi \exp(ir\lambda(\alpha))}{r^{1/3}} \left(\frac{F(\sqrt{\sigma(\alpha)}) + F(-\sqrt{\sigma(\alpha)})}{2} \operatorname{Ai}(-r^{2/3}\sigma(\alpha)) + i \frac{F(\sqrt{\sigma(\alpha)}) - F(-\sqrt{\sigma(\alpha)})}{2r^{1/3}\sqrt{\sigma(\alpha)}} \operatorname{Ai}'(-r^{2/3}\sigma(\alpha)) \right), \quad (2.18)$$

$$\lambda(\alpha) = \frac{q_2(\psi_1(\alpha), \alpha) + q_2(\psi_2(\alpha), \alpha)}{2},$$

$$\sigma(\alpha) = \left(\frac{3(q_2(\psi_2(\alpha), \alpha) - q_2(\psi_1(\alpha), \alpha))}{4} \right)^{2/3},$$

$$F(\sqrt{\sigma(\alpha)}) = f_2(\alpha) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{T_2(\alpha)}}, \quad F(-\sqrt{\sigma(\alpha)}) = f_1(\alpha) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{T_1(\alpha)}},$$

$$f_j(\alpha) = B(k_2(\psi_j(\alpha), \alpha), \psi_j(\alpha)),$$

$$T_j(\alpha) = \left. \frac{\partial^2 q_2(\psi, \alpha)}{\partial \psi^2} \right|_{\psi=\psi_j(\alpha)}, \quad j = 1, 2,$$

где $\text{Ai}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau t + t^3/3) dt$ — функция Эйри, $\text{Ai}'(\tau)$ — производная функции Эйри [149]. Неравномерная асимптотика получается из (2.18), если функцию Эйри и ее производную заменить на их разложения при больших значениях аргумента. На рис. 2.7 представлена волновая картина корабельных (клиновидных) волн, то есть рассчитанная по (2.18) действительная часть функции $\text{Re } J_3(r, \alpha)$; глубина залегания источника $H = 0,5 \text{ м}$. Волны внутри клина Кельвина распространяются вдоль положительного направления оси x (от источника). Интеграл $J_2(r, \alpha)$, которому на рис. 2.5 соответствует нижняя часть дисперсионной кривой $k_2(\psi)$, исследуется аналогично. На рис. 2.8 представлена волновая картина, описываемая функцией $\text{Re } J_2(r, \alpha)$, рассчитанной по формуле, аналогичной (2.18), с той же глубиной залегания источника. Волны бегут вдоль отрицательного направления оси x (к источнику). В данном случае тангенс угла полураствора волнового клина (клина

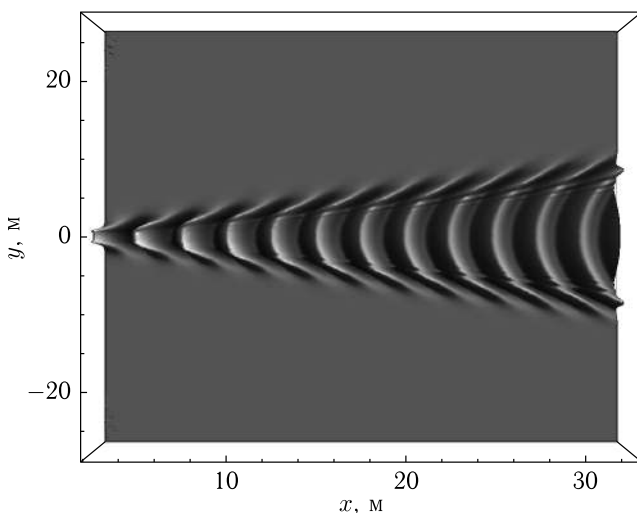


Рис. 2.7. Корабельные волны, соответствующие $\text{Re } J_3(r, \alpha)$

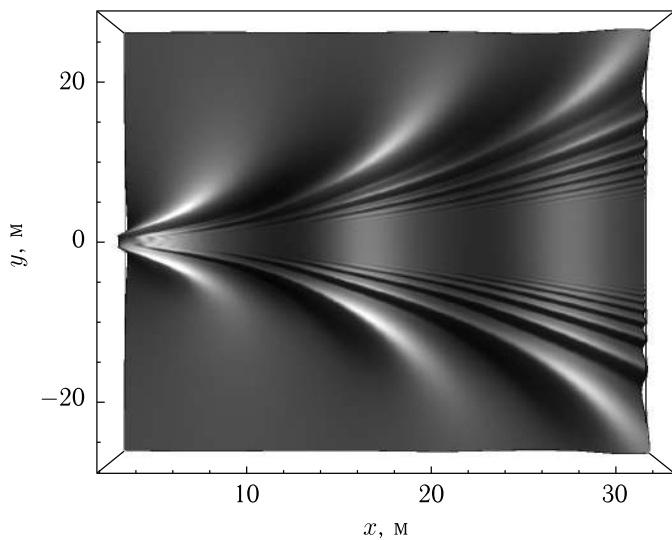


Рис. 2.8. Корабельные волны, соответствующие $\text{Re } J_2(r, \alpha)$

Кельвина) $\text{tg } A = 0,836$. На рис. 2.9 приведена волновая картина поверхностных возмущений, отвечающая сумме двух слагаемых $\text{Re}(J_2(r, \alpha) + J_3(r, \alpha))$.

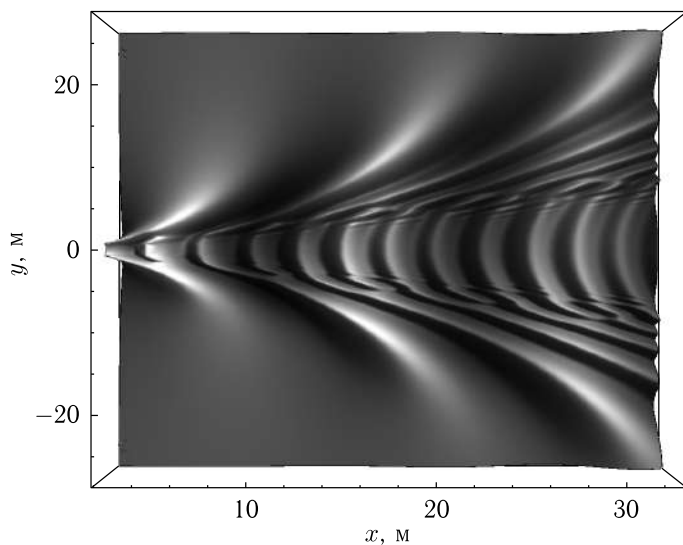


Рис. 2.9. Сумма двух корабельных волн $\text{Re}(J_2(r, \alpha) + J_3(r, \alpha))$

2.2.3. Заключение

Таким образом, показано, что дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего локализованного источника в потоке тяжелой жидкости бесконечной глубины представляют собой систему волн двух типов: кольцевых и клиновидных (корабельных). Нестационарность интенсивности (мощности) источника приводит к появлению кольцевых волн, расходящихся по поверхности жидкости непосредственно от источника. Кроме того, вклад в поле поверхностных возмущений вносят в данном случае две системы корабельных волн, каждая из которых заключена внутри соответствующего клина Кельвина. Построенные асимптотические решения позволяют описывать дальние поля поверхностных возмущений от локализованного нестационарного источника как вне, так и внутри соответствующих волновых клиньев. Полученные асимптотики дальних полей поверхностных волновых возмущений дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, и, помимо этого, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики поверхностных возмущений реальных природных сред.

2.3. Гибридные поверхностные волны от гармонического источника возмущений

2.3.1. Постановка задачи и интегральное представление решения

Как и в предыдущем разделе, рассматривается обтекание точечного гармонического источника массы с мощностью $q = Q \exp(i\omega t)$ однородным потоком бесконечно глубокой тяжелой жидкости, имеющим вдали от источника скорость V . Источник расположен на глубине h относительно невозмущенного положения свободной поверхности, то есть в точке $(0, 0, -h)$. Для того чтобы найти физически реализуемое решение задачи, необходимо заменить частоту ω на $\omega - i\varepsilon$ и далее устремить ε к нулю в найденном решении для возвышения свободной поверхности. Выполним переход к безразмерным переменным по формулам: $x_* = gxV^{-2}$, $y_* = gyV^{-2}$, $h_* = ghV^{-2}$, $\omega_* = V\omega/g$, $t_* = gt/V$, $\varepsilon_* = V\varepsilon/g$, $\eta_* = \eta(x, y)V^3H/Qg$, где g — ускорение свободного падения, $\eta(x, y)$ — величина стационарной части возвышения свободной поверхности (само возвышение ищется в виде $H(x, y, t) = \exp(i(\omega - i\varepsilon)t)\eta(x, y)$). В этих переменных аналогично разд. 2.2 (формула (2.14)) для $\eta_*(x_*, y_*)$ может быть получено следующее интегральное представление (нижний индекс «*» далее опускается):

$$\eta(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\mu x) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\omega - \mu) \exp(-kh - i\nu y)}{(\varepsilon + i(\omega - \mu))^2 + k} d\nu. \quad (2.19)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ нули знаменателя в (2.19) определяют дисперсионное соотношение $(\omega - \mu)^2 = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$, которое можно записать в явном виде

$$\nu(\mu) = \pm \sqrt{(\omega - \mu)^4 - \mu^2}. \quad (2.20)$$

Далее будем предполагать, что для безразмерной частоты пульсаций источника ω выполнено неравенство $1/4 < \omega < \sqrt{6}/9$. Тогда дисперсионная кривая (2.20) состоит из двух разомкнутых ветвей, одна из которых имеет два локальных экстремума. Одна ветвь дисперсионной кривой отвечает обычным корабельным волнам с углом полураствора волнового клина, меньшим $\pi/2$, а вторая ветвь — корабельным волнам с углом полураствора волнового клина, большим $\pi/2$ (волновой фронт направлен от источника вверх по потоку). Эта система гибридных волн одновременно сочетает в себе черты как кольцевых (поперечных), так и корабельных (продольных) волн.

На рис. 2.10 изображена ветвь дисперсионной кривой (2.20) (обозначаемая далее $\nu_1(\mu)$), описывающая гибридные волны. Здесь и далее расчеты проводились при $\omega = 0,255$. На рис. 2.11 изображена ветвь дисперсионной кривой (2.20) (обозначаемая

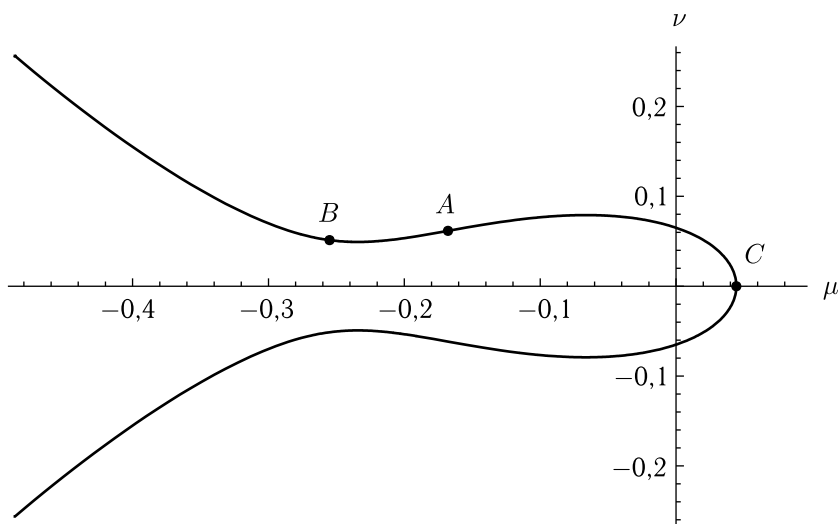
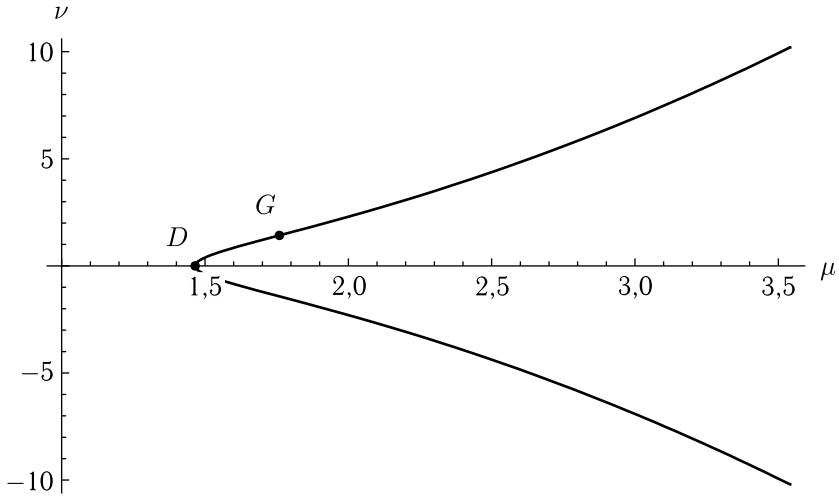


Рис. 2.10. Дисперсионная кривая $\nu = \nu_1(\mu)$


 Рис. 2.11. Дисперсионная кривая $\nu = \nu_2(\mu)$

далее $\nu_2(\mu)$), описывающая корабельные волны. При $\varepsilon > 0$ и $\mu < \omega$ имеем $\text{Im } \nu_1(\mu) < 0$, а для $\mu > \omega$ имеем $\text{Im } \nu_2(\mu) > 0$. Тогда, вычисляя внутренний интеграл в (2.19) путем замыкания контура интегрирования по переменной ν при $y > 0$ в нижнюю полуплоскость (полюса $\nu_1(\mu)$ и $-\nu_2(\mu)$), а при $y < 0$ — в верхнюю полуплоскость (полюса $-\nu_1(\mu)$ и $\nu_2(\mu)$) [181], можно получить:

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= I_1(x, y) + I_2(x, y), \\ I_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^C \frac{E}{\nu_1(\mu)} \exp(-i(\mu x + \nu_1(\mu) |y|)) d\mu, \\ I_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_D^{\infty} \frac{E}{\nu_2(\mu)} \exp(-i(\mu x - \nu_2(\mu) |y|)) d\mu, \\ E &= (\omega - \mu)^3 \exp(-(\omega - \mu)^2 h), \end{aligned}$$

где C и D — абсциссы крайней правой и крайней левой точки дисперсионных кривых $\nu_1(\mu)$ и $\nu_2(\mu)$ на рис. 2.10 и рис. 2.11 соответственно. Точки A и G — точки перегиба дисперсионных кривых $\nu_1(\mu)$ и $\nu_2(\mu)$ на рис. 2.10 и рис. 2.11 соответственно.

2.3.2. Фазовая структура гибридных волн

Интегралы $I_2(x, y)$ с соответствующей дисперсионной зависимостью $\nu_2(\mu)$, описывающие обычные корабельные волны, подробно рассмотрены в разд. 2.1 и 2.2. Более сложная и ранее не исследованная картина гибридных поверхностных волновых возмущений описывается интегралами $I_1(x, y)$. Введем обозначение для фазы: $\Phi = \nu_1(\mu) |y| + \mu x$. Тогда, используя условие стационарности фазы в виде

$$\frac{d\nu_1(\mu)}{d\mu} = -\frac{x}{|y|}, \quad (2.21)$$

получим семейство линий постоянной фазы с параметром μ (нижний индекс «1» опускается):

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\Phi \nu'(\mu)}{\nu(\mu) - \mu \nu'(\mu)}, \\ |y| &= \frac{\Phi}{\nu(\mu) - \mu \nu'(\mu)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

На рис. 2.12 изображены линии равной фазы для различных значений Φ с шагом 2π . Части дисперсионной кривой от точки C до точки перегиба A соответствуют кольцевые (попереч-

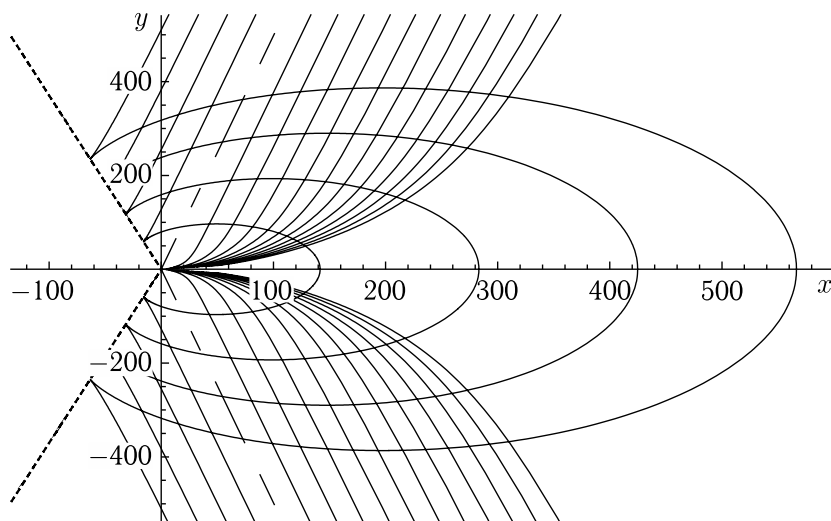


Рис. 2.12. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$, $n = -11, -10, \dots, 4$

ные) волны, и совокупность угловых точек возврата образует направленный вверх по потоку волновой фронт, изображенный на рис. 2.12 пунктирной линией. Для определения волнового фронта необходимо к уравнениям (2.22) добавить условие $\frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial |y|}{\partial \Phi} - \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial |y|}{\partial \mu} = 0$ или, что то же самое, $\frac{d^2 \nu(\mu)}{d\mu^2} = 0$, где абсцисса μ_A точки A является решением данного уравнения. Тогда уравнение для определения фронта будет иметь вид $x = -\nu'(\mu_A) |y|$, и соответствующий угол полураствора волнового клина равен $105^\circ 7'$. Части дисперсионной кривой от точки A до точки B соответствуют продольные гребни волн, идущие от фронта до бесконечности (изображены на рис. 2.12 левее штриховой линии). Штриховая линия на рис. 2.12 соответствует гребню волны с фазой $\Phi = 0$ и описывается уравнением $x = -\nu'(\mu_B) |y|$, или $x = \sqrt{16\omega^2 - 1} |y|$, где μ_B — корень уравнения $\nu(\mu) = \mu\nu'(\mu)$, решением которого является $\mu_B = -\omega$, $\nu'(\mu_B) = -\sqrt{16\omega^2 - 1}$. Части дисперсионной кривой левее точки B соответствуют продольные волновые гребни, распространяющиеся из бесконечности в начало координат (правее штриховой линии на рис. 2.12). На этом рисунке фазы Φ , соответствующие участку дисперсионной кривой правее точки B , имеют значения $2\pi n$, $n = 1, 2, 3, 4$, а левее точки B — значения $2\pi n$, $n = -11, -10, \dots, -1$. На бесконечности (при больших значениях x , $|y|$) уравнения гребней продольных волн имеют вид $x = \sqrt{16\omega^2 - 1} |y| - 2\pi l/\omega$, где l — целое число, то есть эти гребни являются гребнями плоской волны с длиной $\lambda = \pi\omega^{-2}/2 \approx 24$. Длина волны кольцевых (поперечных волн) в направлении оси x равна $\lambda = 2\pi/C \approx 142$, то есть примерно в 6 раз больше длины клиновидных (продольных) волн.

2.3.3. Равномерная асимптотика поля гибридных волн

Интеграл $I_1(x, y)$ принадлежит к классу интегралов, имеющих две стационарные точки. На фронте волны (пунктирная линия на рис. 2.12) стационарные точки, определяемые условием (2.21), сливаются. Равномерная асимптотика $I_1(x, y)$ при

больших значениях $|y|$ строится аналогично разд. 2.1 настоящей работы (см. также [149, 180, 209]) и имеет вид

$$I_1(x, y) = \frac{T^+(\rho)}{|y|^{1/3}} \text{Ai} \left(-|y|^{2/3} \sigma(\rho) \right) \exp(-i |y| a(\rho)) + \\ + i \frac{T^-(\rho)}{|y|^{2/3} \sqrt{\sigma(\rho)}} \text{Ai}' \left(-|y|^{2/3} \sigma(\rho) \right) \exp(-i |y| a(\rho)), \quad (2.23)$$

$$T^\pm(\rho) = \frac{1}{2} \left(F(\mu_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\rho)}}{\theta(\mu_2, \rho)}} \pm F(\mu_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\rho)}}{\theta(\mu_1, \rho)}} \right),$$

$$F(\mu) = \frac{(\omega - \mu)^3 \exp(-h(\omega - \mu)^2)}{\nu(\mu)},$$

$$\sigma(\rho) = \left(\frac{3(S(\mu_2, \rho) - S(\mu_1, \rho))}{4} \right)^{2/3}, \quad a(\rho) = \frac{S(\mu_2, \rho) + S(\mu_1, \rho)}{2},$$

$$S(\nu, \rho) = \nu(\mu) - \rho\mu, \quad \rho = -\frac{x}{|y|}, \quad \theta(\nu, \rho) = \frac{\partial^2 S(\mu, \rho)}{\partial \mu^2},$$

$$\text{Ai}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau u + u^3/3) du,$$

где $\mu_1 = \mu_1(\rho)$ и $\mu_2 = \mu_2(\rho)$ — корни уравнения $\partial S(\mu, \rho)/\partial \mu = 0$ (при этом $\mu_2 < \mu_A < \mu_1$, если $\rho < \nu'(\mu_A)$, μ_1 и μ_2 комплексно-сопряжены, если $\rho > \nu'(\mu_A)$), $\text{Ai}(\tau)$ — функция Эйри, $\text{Ai}'(\tau)$ — производная функции Эйри.

Для того чтобы получить выражение для возвышения свободной поверхности, необходимо выражение (2.23) умножить на $\exp(i\omega t)$ и от полученного результата взять действительную часть. На рис. 2.13 изображена волновая картина возвышения свободной поверхности при $t = 10$ и $h = 3$, рассчитанная по (2.23) в безразмерных координатах (в окрестности начала координат интеграл $I_1(x, y)$ рассчитывался численно). При характерных для океанических условий значениях параметров ($Q = 10 \text{ м}^3/\text{с}$, $V = 3 \text{ м/с}$) амплитуда возвышения составляет порядка $0,3 \text{ м}$. Воспользовавшись асимптотиками функции Эйри и ее производной вдали от фронта, можно получить неравномерную асимп-

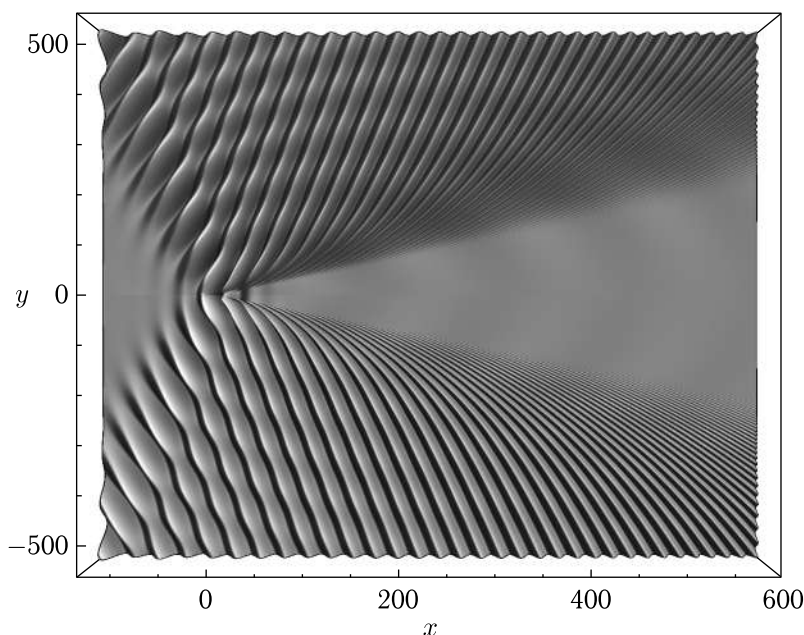


Рис. 2.13. Поле возвышения свободной поверхности

тотику для $I_1(x, y)$, состоящую из двух слагаемых. Первое из этих слагаемых, соответствующее корню μ_1 , описывает кольцевые (поперечные) волны, а второе, соответствующее корню μ_2 , описывает клиновидные (продольные) волны.

2.3.4. Заключение

Построены равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от локализованного гармонического источника в потоке тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Показано, что волновая картина возбуждаемых дальних полей при определенных параметрах генерации представляет собой систему гибридных волновых возмущений, одновременно обладающих свойствами волн двух типов: кольцевидных (поперечных) и клиновидных (продольных), причем волновые фронты такой системы направлены вверх по потоку. Изучены особенности фазовой структуры возбуждаемых полей.

2.4. Дальние поля поверхностных гравитационных волн от быстро движущегося осциллирующего источника возмущений

2.4.1. Постановка задачи и интегральные формы решений

В настоящем разделе, как и в двух предыдущих, рассматривается стационарная картина волновых возмущений на поверхности идеальной тяжелой жидкости бесконечной глубины, возникающих при обтекании точечного пульсирующего источника потоком со скоростью V , направленной вдоль оси x . Источник расположен на глубине H (ось z направлена вверх от невозмущенной жидкости), его мощность изменяется по закону $q = \exp(i\omega t) \exp(\varepsilon t)$ ($-\infty < t < \infty$). Далее в полученном решении ищется предел при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тогда по аналогии с разд. 2.2 (формула (2.14)) для величины возвышения свободной поверхности жидкости $\eta(x, y, t)$ можно получить следующее интегральное представление:

$$\eta(x, y, t) = \frac{i \exp(i\omega t)}{4\pi^2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \mu V) \exp(-kH - i\mu x) d\mu}{(\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk}, \quad (2.24)$$

где g — ускорение свободного падения. Нули знаменателя в подынтегральном выражении (2.24) определяют дисперсионное соотношение $B(\omega, \mu, \nu) \equiv (\omega - \mu V)^2 - g\sqrt{\mu^2 + \nu^2} = 0$. Далее до конца раздела предполагается, что для величины пара-

метра $m = V\omega/g > 0$ выполнено неравенство $m > \sqrt{6}/9$. Тогда дисперсионная кривая состоит из двух разомкнутых ветвей, и подынтегральное выражение внутреннего интеграла в (2.24) имеет два действительных полюса $\mu_{1,2}$ для любых вещественных значений ν . На рис. 2.14 приведены результаты расчетов соответ-

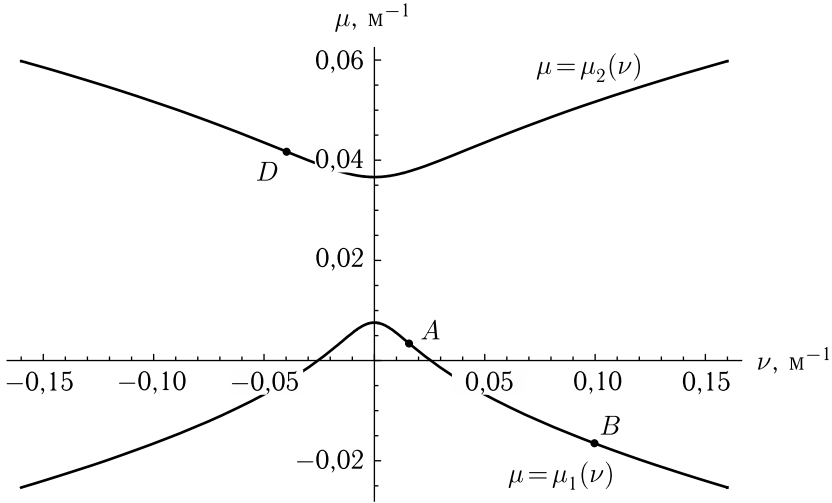


Рис. 2.14. Дисперсионные кривые $\mu = \mu_1(\nu)$ и $\mu = \mu_2(\nu)$, A и D — точки перегиба, B — корень уравнения $\mu'_1(\nu) = \mu/\nu$

ствующих дисперсионных кривых $\mu_{1,2}(\nu)$. Параметры расчетов здесь и далее были следующие: $H = 5$ м, $\omega = 0,5$ с $^{-1}$, $V = 30$ м/с, $m = 1,53$.

2.4.2. Построение асимптотик решений

Для вычисления внутреннего интеграла в (2.24) необходимо определить смещение полюсов $\Delta\mu$ при $\varepsilon > 0$. Для этого приравняем нулю знаменатель подынтегрального выражения внутреннего интеграла в (2.24): при $\varepsilon = 0$ $B(\omega, \mu, \nu) = 0$; при $\varepsilon > 0$ $B(\omega - i\varepsilon, \mu + \Delta\mu, \nu) = 0$. Тогда можно получить $\Delta\mu = i\varepsilon \frac{\partial B}{\partial \omega} / \frac{\partial B}{\partial \mu}$. Считая, что $\omega = \omega(\mu, \nu)$, имеем $\frac{\partial B}{\partial \omega} / \frac{\partial B}{\partial \mu} = -1 / \frac{\partial \omega}{\partial \mu}$ и $\Delta\mu = -i\varepsilon / \frac{\partial \omega}{\partial \mu}$. Учитывая, что $\frac{\partial \omega}{\partial \mu} > 0$, получаем, что оба полюса смещаются в нижнюю полуплоскость. Тогда при $x < 0$ контур интегрирования по переменной μ в (2.24)

замыкается в верхнюю полуплоскость и полюса $\mu_{1,2}(\nu)$ не дают вклад в волновое поле. При $x > 0$ контур интегрирования по μ в (2.24) замыкается в нижнюю полуплоскость; учитывая вклад полюсов [181], можно получить:

$$\eta(x, y, t) = I_1(x, y, t) + I_2(x, y, t), \quad (2.25)$$

$$I_n(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu_n(\nu), \nu) \exp(-ixS_n(\nu, \alpha)) d\nu,$$

$$F(\mu_n(\nu), \nu) = \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \frac{(\omega - \mu V) \exp(-kH)}{2V(\omega - \mu V) + \mu g/k},$$

$$S_n(\nu, \alpha) = \mu_n(\nu) + \nu \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = y/x, \quad n = 1, 2.$$

При больших значениях $x > 0$ асимптотическое поведение интегралов в сумме (2.25) полностью определяется стационарными точками фазовой функции $S_n(\nu, \alpha)$, которые находятся из уравнения: $\mu'_n(\nu) = -\operatorname{tg} \alpha$. Вначале рассмотрим первое слагаемое в (2.25). Функция $\mu'_1(\nu)$ имеет один максимум на интервале интегрирования по переменной ν , которому отвечает соответствующее значение аргумента α , обозначаемое далее через A_1 . Значение A_1 определяет границы волнового клина, которые описываются уравнением $y = \pm x \operatorname{tg} A_1$. При $0 < \alpha < A_1$ фазовая функция $S_1(\nu, \alpha)$ имеет две стационарные точки на действительной оси ν : $0 < \nu_2(\alpha) < \nu_1(\alpha)$. При $A_1 < \alpha < \pi/2$ существуют две комплексно-сопряженные стационарные точки $\nu_1(\alpha), \nu_2(\alpha)$, и для определенности можно считать, что $\operatorname{Im} \nu_1(\alpha) > 0$.

Введем обозначение $\Phi_1 = -\mu_1(\nu) - \nu y + \omega t$. Тогда из условия стационарности фазы $\mu'_1(\nu) = -\operatorname{tg} \alpha$ можно получить параметрические уравнения семейства линий постоянной фазы $\Phi_1 = C$ ($C = \text{const}$) при различных значениях C :

$$x(\nu) = \frac{\omega t - C}{\mu_1(\nu) - \nu \mu'_1(\nu)},$$

$$y(\nu) = \pm \frac{\mu'_1(\nu)(\omega t - C)}{\mu_1(\nu) - \nu \mu'_1(\nu)}.$$

На рис. 2.15 изображены линии равной фазы при $t = 0$, $C = 2\pi n$, $n = -5, -4, \dots, 5$. Правой ветви ($\nu > 0$) дисперсионной кривой $\mu_1(\nu)$ соответствует верхняя часть рисунка ($y > 0$). В силу

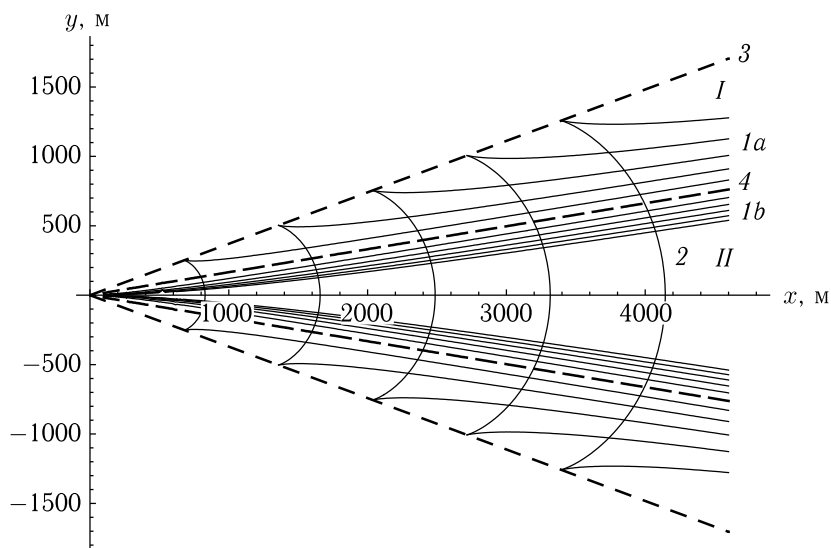


Рис. 2.15. Линии равной фазы для интеграла I_1 : линии $1a$ — продольные волны в области I , линии $1b$ — продольные волны в области II , линии 2 — поперечные волны, линия 3 — волновой фронт, линия 4 разделяет области I и II

симметрии фазовой картины волн относительно оси x в дальнейшем будем рассматривать только эту область. Точка A на рис. 2.14 — точка перегиба кривой $\mu_1(\nu)$, то есть корень уравнения $\mu_1''(\nu) = 0$. Поэтому точке A соответствует граница волнового клина (штриховая линия 3 на рис. 2.15), внутри которого распространяются бегущие волны, описываемые интегралом I_1 . Точка B на рис. 2.14 — корень уравнения $\mu_1'(\nu) = \mu/\nu$, и ей соответствует штриховая линия 4 на рис. 2.15. Части дисперсионной кривой от нуля до точки A (рис. 2.14) соответствуют поперечные гребни волн (сплошные линии 2 на рис. 2.15). Части дисперсионной кривой от точки A до точки B на рис. 2.14 соответствуют продольные гребни (сплошные линии $1a$ на рис. 2.15), находящиеся между штриховыми линиями 3 и 4 в области I . Части дисперсионной кривой правее точки B (рис. 2.14) соответствуют продольные гребни (сплошные линии $1b$ на рис. 2.15), находящиеся между штриховой линией 4 и осью x (область II на рис. 2.15). На гребнях продольных волн в области I , а также на гребнях по-

перечных волн фазы Φ_1 имеют значения $2\pi l$ ($l = -1, -2, \dots, -5$). Фазы гребней продольных волн в области II на рис. 2.15 имеют значения $2\pi n$ ($n = 1, 2, \dots, 5$). На штриховой линии 4 фаза волны Φ_1 равна нулю при $t = 0$. Продольные волны в области I и поперечные волны распространяются от начала координат до бесконечности. Продольные волны в области II распространяются в направлении штриховой линии 4. Приведем основные характеристики волнового поля для данных параметров расчетов: длина волны вдоль горизонтальной оси $\lambda_1 = 2\pi/\mu_1(0) = 828,8$ м, угол полураствора волнового клина $A_1 = 20,3^\circ$, волновой фронт задается уравнением $y = x \operatorname{tg} A_1$.

Внутри волнового клина поле может быть рассчитано методом стационарной фазы, при этом вклад дают обе стационарные точки, $\nu_1(\alpha)$, $\nu_2(\alpha)$, вне волнового клина поле экспоненциально мало. Асимптотика интеграла $I_1(x, y, t)$ при больших $x > 0$, вычисленная по методу стационарной фазы, имеет вид

$$I_1(x, y, t) \approx T_1 + T_2, \quad (2.26)$$

$$T_j = \left(\frac{2\pi}{x |\mu_1''(\nu_j(\alpha))|} \right)^{1/2} F(\mu_1(\nu_j(\alpha)), \nu_j(\alpha)) E_j, \\ E_j = \exp(-ix(\mu_1(\nu_j(\alpha)) + \nu_j(\alpha) \operatorname{tg} \alpha) - \\ - i\pi \operatorname{sign}(\mu_1''(\nu_j(\alpha)))/4), \quad j = 1, 2.$$

Асимптотика, рассчитанная по методу стационарной фазы, не является равномерной, так как на волновом фронте стационарные точки сливаются: $\nu_1(A_1) = \nu_2(A_1)$ и $\mu_1''(\nu_1(A_1)) = \mu_1''(\nu_2(A_1)) = 0$. Поэтому в окрестности границы волнового клина асимптотика, рассчитанная по методу стационарной фазы, неприменима. Равномерная асимптотика $I_1(x, y, t)$ при больших $x > 0$, пригодная как вдали, так и вблизи от волнового фронта, имеет вид [149, 180]

$$I_1(x, y, t) \approx \frac{2\pi \exp(ir\lambda(\alpha))}{x^{1/3}} \left(\frac{G(\sqrt{\sigma(\alpha)}) + G(-\sqrt{\sigma(\alpha)})}{2} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Ai}(-x^{2/3}\sigma(\alpha)) + i \frac{G(\sqrt{\sigma(\alpha)}) - G(-\sqrt{\sigma(\alpha)})}{2x^{1/3}\sqrt{\sigma(\alpha)}} \operatorname{Ai}'(-x^{2/3}\sigma(\alpha)) \right), \quad (2.27)$$

$$\lambda(\alpha) = \frac{S_1(\nu_1(\alpha), \alpha) + S_1(\nu_2(\alpha), \alpha)}{2},$$

$$\sigma(\alpha) = \left(\frac{3(S_1(\nu_2(\alpha), \alpha) - S_1(\nu_1(\alpha), \alpha))}{4} \right)^{2/3},$$

$$G(\sqrt{\sigma(\alpha)}) = F(\mu_1(\nu_1(\alpha)), \nu_1(\alpha)) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{\mu_1''(\nu_1(\alpha))}},$$

$$G(-\sqrt{\sigma(\alpha)}) = F(\mu_1(\nu_2(\alpha)), \nu_2(\alpha)) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{\mu_1''(\nu_2(\alpha))}},$$

где $\text{Ai}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau t + t^3/3) dt$ — функция Эйри, $\text{Ai}'(\tau)$ — производная функции Эйри. Неравномерная асимптотика (2.26) получается из (2.27), если функцию Эйри и ее производную заменить на соответствующие разложения при больших значениях аргумента [69, 149, 180].

Рассмотрим далее вклад дисперсионной кривой $\mu_2(\nu)$ в результирующее волновое поле. На рис. 2.16 представлена картина линий равной фазы интеграла $I_2(x, y, t)$ при $t = 0$, $C = 2\pi n$, $n = -1, -2, \dots, -5$. Верхняя половина рис. 2.16 ($y > 0$) соответствует левой ветви дисперсионной кривой $\mu_2(\nu)$ ($\nu < 0$). Части дисперсионной кривой от нуля до точки D на рис. 2.14 соответ-

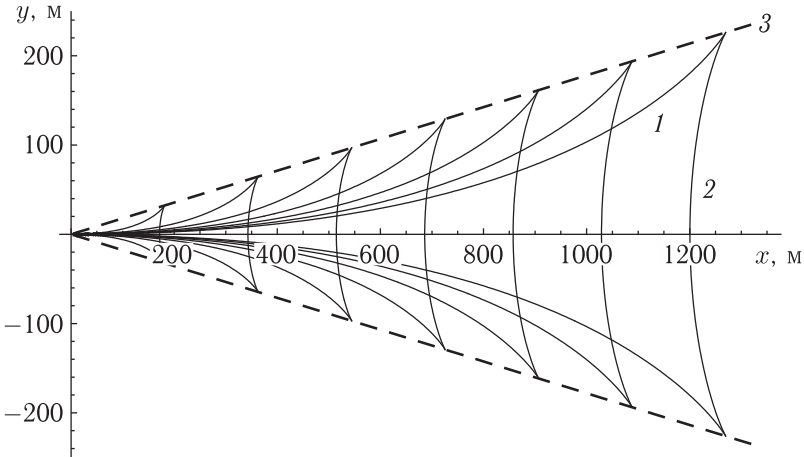


Рис. 2.16. Линии равной фазы для интеграла I_2 : линии 1 — продольные волны, линии 2 — поперечные волны, линия 3 — волновой фронт

ствуют поперечные волны (сплошные линии 2 на рис. 2.16). Части дисперсионной кривой от точки D до бесконечности соответствуют продольные волны (сплошные линии 1 на рис. 2.16). Точке перегиба соответствует фронт волны $y = x \operatorname{tg} A_2$ (штриховая линия 3 на рис. 2.16), где угол полураствора волнового клина $A_2 = 10,1^\circ$. Все линии равной фазы распространяются от начала координат до бесконечности. Длина поперечной волны вдоль горизонтальной оси x $\lambda_2 = 2\pi/\mu_2(0) = 171,5$ м. Равномерные асимптотики интеграла $I_2(x, y, t)$ при больших $x > 0$ оцениваются аналогично (2.27). Отметим, что волны, описываемые интегралом I_2 , существенно (примерно втрое) превосходят по амплитудам волны, определяемые интегралом I_1 .

Проведенные численные расчеты показывают, что увеличение скорости движения источника V (при фиксированной частоте осцилляций ω) приводит к уменьшению углов полураствора обоих волновых клиньев. При этом расстояние между соседними гребнями волн увеличивается, в частности, увеличиваются длины поперечных волн λ_1 и λ_2 вдоль оси x . В табл. 2.1 приведены результаты численных расчетов основных параметров возбуждаемых волн для различных значений V .

Т а б л и ц а 2.1. Зависимость параметров волновой генерации от скорости источника

V , м/с	5,334	6	10	20	30	50
m	$\sqrt{6}/9$	0,306	0,510	1,020	1,531	2,551
A_1 , °	90	75,7	45,8	26,9	20,3	14,6
$\lambda_1 = 2\pi/\mu_1(0)$, м	368,2	382,2	463,6	652,1	828,8	1163,7
A_2 , °	15,6	15,3	13,7	11,5	10,1	8,5
$\lambda_2 = 2\pi/\mu_2(0)$, м	12,2	14,9	34,1	96,9	171,5	339,3

На рис. 2.17 представлены результаты расчетов интеграла $I_2(x, y, t)$ для $t = 0$, $y = 100$ м и различных значений параметра $m = V\omega/g$. Расчеты показывают, что при увеличении параметра m увеличиваются длины волн и уменьшаются амплитуды возбуждаемых полей. Интеграл $I_1(x, y, t)$ при изменении параметра m ведет себя аналогично.

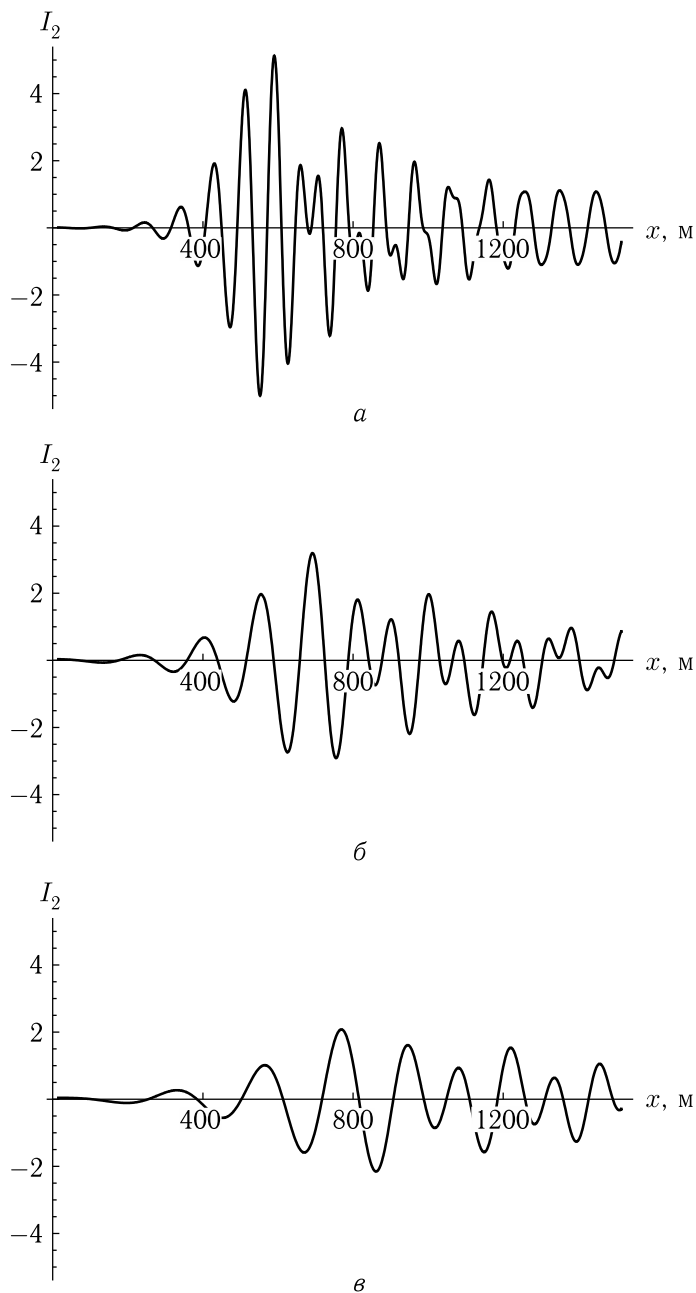


Рис. 2.17. Интеграл I_2 для различных значений параметра m : *a* — $m = 1$; *б* — $m = 1,5$; *в* — $m = 2$

На рис. 2.18, 2.19 приведены результаты расчетов равномерных асимптотик интегралов $I_1(x, y, t)$, $I_2(x, y, t)$ при $t = 0$. Сумма

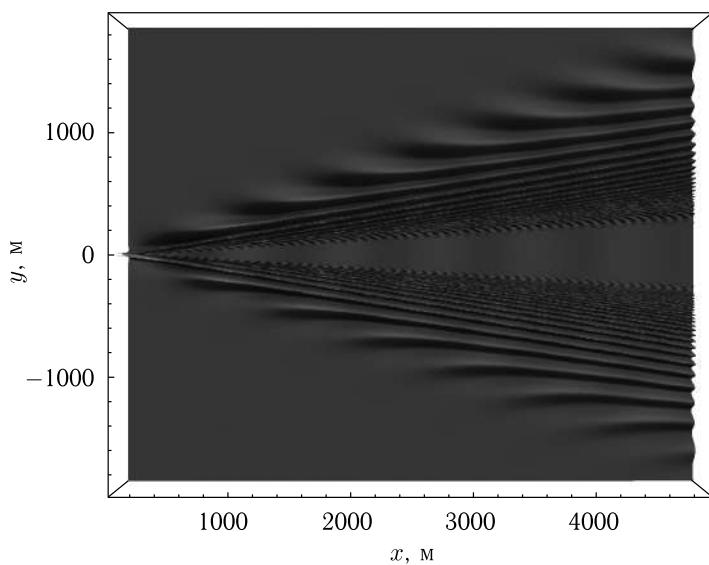


Рис. 2.18. Равномерная асимптотика интеграла I_1 вдали от движущегося источника

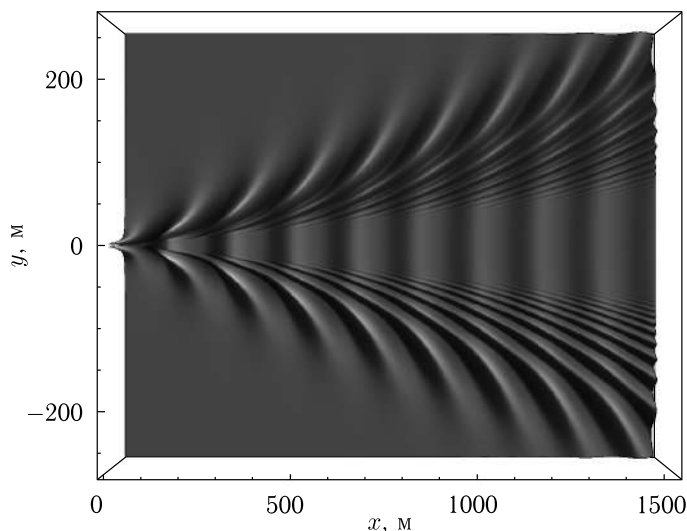


Рис. 2.19. Равномерная асимптотика интеграла I_2 вдали от движущегося источника

этих слагаемых описывает полное поле возвышения свободной поверхности вдали от движущегося осциллирующего источника возмущений.

2.4.3. Заключение

Изучены дальние поля поверхностных возмущений от быстро движущегося осциллирующего локализованного источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины, которые представляют собой сумму двух систем корабельных волн, каждая из которых заключена внутри соответствующего волнового клина. Построены равномерные асимптотические решения, выражающиеся через функцию Эйри и ее производную, позволяющие описывать дальние поля поверхностных возмущений как вне, так и внутри соответствующих волновых клиньев. Показано, что амплитуда одной волны в несколько раз превышает амплитуду другой. Каждая из возбуждаемых двух волн представляет собой сложную волновую систему поперечных и продольных волновых возмущений. Изучены характеристики возбуждаемых поверхностных возмущений в зависимости от основных параметров волновой генерации: скорости движения источника возмущений и частоты его осцилляций. Найденные асимптотические решения позволяют описывать дальние поля поверхностных возмущений от движущегося локализованного нестационарного источника как вне, так и внутри соответствующих волновых клиньев. Построенные асимптотики дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей и (кроме того) качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики поверхностных возмущений реальных природных сред.

2.5. Равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных волн от вспыхнувшего локализованного источника

2.5.1. Введение

Для мониторинга и предупреждения опасных природных волновых явлений в океане, в том числе для обнаружения волн большой амплитуды, необходимо проводить оперативный анализ волновых явлений с помощью различных математических моделей. Одной из основных используемых моделей можно считать предположение о генерации волновых пакетов импульсным воздействием. Для проведения прогнозных расчетов необходимо подбирать параметры использованной модели так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемому, в том числе по фотоснимкам из космоса, волновым картинам [80, 112, 210, 211]. Таким образом, математические модели волновой генерации могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

Целью настоящего раздела является построение равномерных и неравномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых вспыхнувшим источником возмущений в тяжелой однородной жидкости конечной глубины.

2.5.2. Постановка задачи и интегральные формы решений

Рассматриваются волновые возмущения на поверхности идеальной тяжелой жидкости конечной глубины H , распространяющиеся от точечного импульсного источника возмущений,

вспыхнувшего в момент времени $t = 0$. Источник находится на глубине z_0 (то есть в точке $(0, 0, -z_0)$; $0 < z_0 < H$) и мгновенно выбрасывает объем жидкости Q . Тогда потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ ($\nabla\Phi = (u, v, w)$, где u, v, w — компоненты вектора скорости произвольной частицы жидкости) в линейном приближении описывается уравнением Пуассона с соответствующим линеаризованным граничным условием на поверхности жидкости и условием непротекания на дне [68, 69, 80, 101, 112, 205, 206]:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x, y, z, t) &= Q\delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z + z_0), \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 0, \quad z = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 0, \quad z = -H; \quad \Phi \equiv 0, \quad t < 0,\end{aligned}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, g — ускорение свободного падения. Для Фурье-образа потенциала

$$\begin{aligned}\varphi(\mu, \nu, \omega, z, z_0) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mu x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \Phi(x, y, z, z_0, t) dt\end{aligned}$$

получается задача

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - k^2\varphi = Q\delta(z + z_0), \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\omega^2\varphi}{g}, \quad z = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H, \quad (2.30)$$

где $k^2 = \mu^2 + \nu^2$. Решение уравнения (2.28), удовлетворяющее условию (2.29), имеет вид $\varphi_1(z) = C_1 p_1(z) = C_1(gk \operatorname{ch} kz + \omega^2 \operatorname{sh} kz)$. Решение уравнения (2.28), удовлетворяющее условию (2.30), имеет вид $\varphi_2(z) = C_2 p_2(z) = C_2 \operatorname{ch} k(z + H)$. Таким образом,

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_1(z), & \text{если } -z_0 < z \leq 0, \\ \varphi_2(z), & \text{если } -H \leq z < -z_0. \end{cases}$$

Для определения констант $C_{1,2}$ получаются соответствующие условия сшивки:

$$\begin{cases} C_1 p_1(-z_0) - C_2 p_2(-z_0) = 0, \\ C_1 p_1'(-z_0) - C_2 p_2'(-z_0) = Q. \end{cases}$$

Отсюда можно получить:

$$C_1 = \frac{Q \operatorname{ch}(k(H - z_0))}{k \operatorname{ch}(kH)(\omega^2 - \Omega^2(k))},$$

$$C_2 = \frac{Q(gk \operatorname{ch} kz_0 + \omega^2 \operatorname{sh} kz_0)}{k \operatorname{ch}(kH)(\omega^2 - \Omega^2(k))},$$

где $\Omega^2(k) = gk \operatorname{th} kH$ — дисперсионное соотношение для поверхностных волн в слое конечной толщины [68, 69, 80, 101, 112, 205, 206]. Возвышение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ связано с потенциалом $\Phi(x, y, z, t)$ условием [68, 69]

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{z=0}.$$

Тогда, используя представление для Фурье-образа возвышения свободной поверхности $\xi(\mu, \nu, \omega)$, где

$$\xi(\mu, \nu, \omega) = \frac{iQ\omega \operatorname{ch}(k(H - z_0))}{\operatorname{ch}(kH)(\omega^2 - \Omega^2(k))},$$

можно получить:

$$\eta(x, y, t) = \frac{iQ}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu x) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \times$$

$$\times \frac{\omega \operatorname{ch}(k(H - z_0))}{\operatorname{ch}(kH)(\omega^2 - \Omega^2(k))} d\omega. \quad (2.31)$$

2.5.3. Неравномерные асимптотики решений

Далее будут исследоваться асимптотики интеграла (2.31), позволяющие эффективно рассчитывать амплитудно-фазовые характеристики волновых полей вдали от источника возмущений. Внутренний интеграл в (2.31) по переменной ω вычисляется с помощью теоремы о вычетах [181]. Контур интегрирования

необходимо сместить в область $\text{Im } \omega > 0$; тогда, замыкая его в нижнюю полуплоскость и учитывая полюса при $\omega = \pm \Omega(k)$, можно получить, что

$$\eta(x, y, t) = \frac{Q}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\mu x) \frac{\text{ch}(k(H - z_0))}{\text{ch}(kH)} \cos(\Omega(k)t) d\mu.$$

Перейдем далее к полярным координатам, $\mu = k \cos \psi$, $\nu = k \sin \psi$, $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, и проинтегрируем по переменной ψ , в результате чего получим

$$\eta(r, t) = \frac{Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{ch}(k(H - z_0))}{\text{ch}(kH)} k J_0(kr) \cos(\Omega(k)t) dk. \quad (2.32)$$

Заменим функцию Бесселя $J_0(kr)$ на ее асимптотику при $kr \gg 1$ [204]: $J_0(kr) \approx \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \pi/4)$. Получающийся в результате интеграл можно представить в виде

$$\eta(r, t) = I_+(r, t) + I_-(r, t), \\ I_{\pm}(r, t) = \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{k}} \exp(it(kV \pm \Omega(k)) - i\pi/4) dk, \\ F(k) = \frac{k \text{ch}(k(H - z_0))}{2\sqrt{2r} \pi^{3/2} \text{ch}(kH)},$$

где $V = r/t$, функция $\Omega(k)$ продолжается при $k < 0$ нечетным образом и $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$ при $k < 0$. Далее рассматривается асимптотика интегралов $I_{\pm}(r, t)$ при больших значениях r, t и фиксированных значениях V , то есть в точке, движущейся в радиальном направлении со скоростью V . Поскольку $\Omega(k)$ — монотонно возрастающая функция k , то фазовая функция интеграла $I_+(r, t)$ не имеет стационарных точек на действительной оси k , поэтому данный интеграл экспоненциально мал при $t \rightarrow \infty$ (точнее, при $Vt/H \gg 1$). Фазовая функция интеграла $I_-(r, t)$ имеет две

стационарных точки на действительной оси: $\pm k_0$, где k_0 — положительный корень уравнения $q'(k) = 0$, $q(k) = kV - \Omega(k)$. Тогда главный член асимптотики возвышения $\eta(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ может быть вычислен по методу стационарной фазы [149, 180]:

$$\eta(r, t) \approx Q \sqrt{\frac{2\pi}{tk_0 q''(k_0)}} F(k_0) \cos(tq(k_0)). \quad (2.33)$$

Асимптотика (2.33) становится непригодной при $V \rightarrow C$ ($C = \sqrt{gH}$ — максимальная групповая скорость поверхностных волн), то есть вблизи волнового фронта, где стационарные точки $\pm k_0$ сливаются друг с другом, а также с точкой ветвления $k = 0$. Для построения локальных асимптотик с помощью подходящей замены следует свести исходный интеграл к эталонному интегралу. Выбор эталонного интеграла определяется расположением стационарных точек фазовой функции и особых точек подынтегральной функции в зависимости от параметров задачи. Построение асимптотики сводится к выбору соответствующей специальной функции, ее нескольких первых производных и к определению зависимости аргументов этой специальной функции, а также амплитудных и фазовых множителей [149, 212–214]. Вычислим далее локальную асимптотику интеграла $I_-(r, t)$ вблизи волнового фронта, то есть при $V \rightarrow C$ и, соответственно, при $r \approx Ct$. Очевидно, что основной вклад в локальную асимптотику дает окрестность значения $k = 0$, которая отвечает распространению длинных волн с максимальной групповой скоростью [68, 69, 205, 206]. При малых значениях k функции $F(k)$, $q(k)$ допускают следующие разложения:

$$F(k) = F'(0)k + \dots, \quad q(k) = q'(0)k + q'''(0)k^3/6 + \dots,$$

где $F'(0) = (2\pi)^{-3/2}r^{-1/2}$, $q'(0) = V - C$, $q'''(0) = \sqrt{g}H^{5/2}$. Тогда, аппроксимируя фазовую функцию $q(k)$ кубичным полиномом, а $F(k)$ — линейной функцией, можно получить:

$$I_-(r, t) \approx \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F'(0)\sqrt{k} \exp(it(q'(0)k + q'''(0)k^3/6) - i\pi/4) dk.$$

Локальная асимптотика возвышения $\eta(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ в окрестности волнового фронта $r \approx Ct$ выражается через функцию Эйри и ее производную [149, 212–214]:

$$\eta(r, t) \approx -Q(2\pi)^{3/2} F'(0) (q'''(0)t)^{-1/2} \text{Ai}(\theta) \text{Ai}'(\theta),$$

$$\theta = q'(0)t^{2/3} (2q'''(0))^{-1/3}, \quad \text{Ai}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(\theta s + s^3/3)) ds. \quad (2.34)$$

На рис. 2.20 изображены результаты расчетов по точным формулам (2.32) (сплошная линия), в приближении стационарной

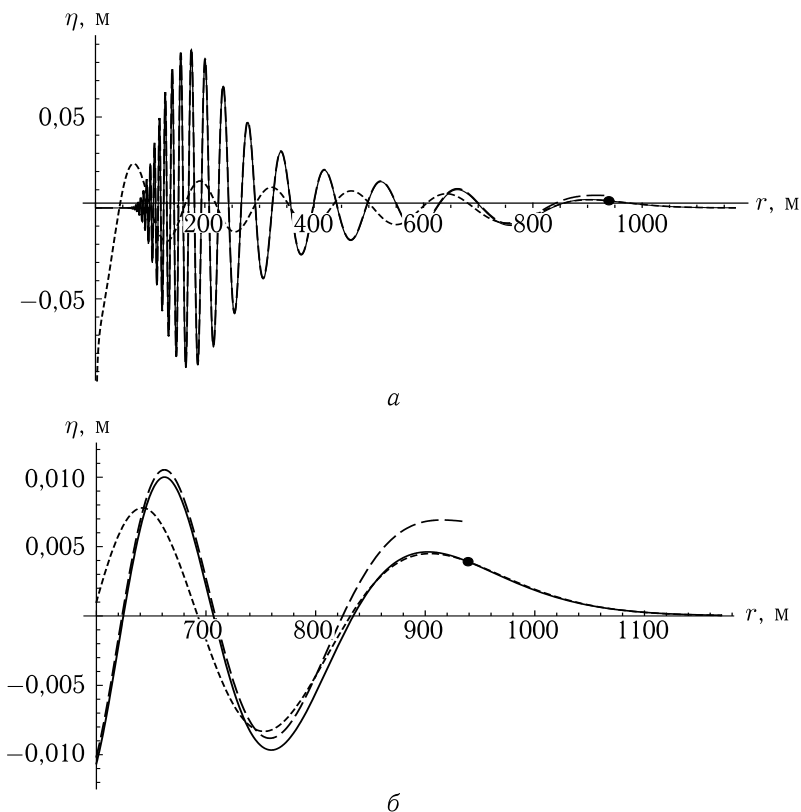


Рис. 2.20. Точное решение (сплошная линия), приближение стационарной фазы (штриховая линия) и локальная асимптотика (пунктирная линия) в момент времени $t = 60$ с: пространственный масштаб (а) больше аналогичного (б)

фазы (2.33) (штриховая линия) и по формуле (2.34) — локальная асимптотика (пунктирная линия), точкой отмечено положение волнового фронта. Для наглядности приведены результаты расчетов для двух пространственных масштабов. Полученные результаты показывают, что вне окрестности волнового фронта метод стационарной фазы позволяет точно описать поведение волнового поля. В окрестности волнового фронта локальная асимптотика практически совпадает с точным решением. Параметры расчетов были следующие: $Q = 10^3 \text{ м}^3$, $t = 60 \text{ с}$, $H = 25 \text{ м}$, $z_0 = 5 \text{ м}$. Используемые в расчетах пространственно-временные параметры соответствуют возможным масштабам нелокальных источников возбуждения поверхностных волн в океане [80, 101, 112, 210, 211].

2.5.4. Равномерные асимптотики решений

Для построения равномерной асимптотики интеграла (2.32) выполним регулярную замену переменных $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $q(k)$ интеграла $I_-(r, t)$ в новую функцию: $\tau(s) = q(k(s)) = -\sigma s + s^3/3$. При этом стационарные точки $\pm k_0$ будут отвечать точкам $s_{\pm} = \pm\sqrt{\sigma}$ соответственно. Из этого условия можно получить $\sigma = (-3q(k_0)/2)^{2/3}$, в результате интеграл $I_-(r, t)$ можно представить в виде

$$I_-(r, t) = \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(s)}{\sqrt{s}} \exp(it\tau(s) - i\pi/4) ds,$$

где $G(s) = F(k(s))\sqrt{\frac{s}{k(s)}} \frac{dk}{ds}$ — регулярная функция переменной s . Действительно, по построению функция $k = k(s)$ является нечетной регулярной функцией, принимающей положительные значения при $s > 0$. Поэтому $\frac{dk}{ds}$ — четная регулярная функция, $\frac{s}{k(s)}$ — четная регулярная функция, принимающая только положительные значения, $\sqrt{\frac{s}{k(s)}}$ — четная регулярная функция, следовательно, $G(s)$ — регулярная функция как произведение трех регулярных функций. Следуя общей схеме метода построения равномерных асимптотик (метода эталонных интегралов),

функцию $G(s)$ представим в виде [120, 149, 212, 213] $G(s) = P(s) + R(s)$, где $P(s) = as^2 + bs + c$ — интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $G(s)$, построенный по точкам $-\sqrt{\sigma}, 0, \sqrt{\sigma}$, $R(s) = s(s^2 - \sigma)R_1(s)$, $R_1(s)$ — регулярная функция. В результате можно получить:

$$I_-(r, t) = I_0(r, t) + I_1(r, t),$$

$$I_0(r, t) = \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{as^2 + bs + c}{\sqrt{s}} \exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4) ds,$$

$$I_1(r, t) = \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(s)}{\sqrt{s}} \exp(it\tau(s) - i\pi/4) ds.$$

Интеграл $I_0(r, t)$ вычисляется аналитически [213, 214]

$$I_0(r, t) = \frac{Q}{2} \pi^{3/2} \times$$

$$\times \left(-ic2^{5/3}t^{-1/6} \text{Ai}^2(\xi) - 2bt^{-1/2}(\text{Ai}^2(\xi))' + ia2^{1/3}t^{-5/6}(\text{Ai}^2(\xi))'' \right),$$

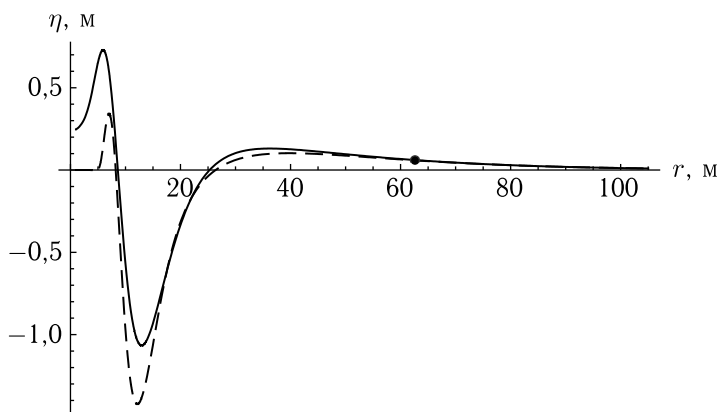
где $\xi = -\sigma(t/2)^{2/3}$. Для интеграла $I_1(r, t)$ справедлива оценка $I_1(r, t) = O(I_0(r, t)/t)$, так как этот интеграл интегрированием по частям можно привести к виду

$$I_1(r, t) = \frac{iQ}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sR_1'(s) + R_1(s)/2}{\sqrt{s}} \exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4) ds =$$

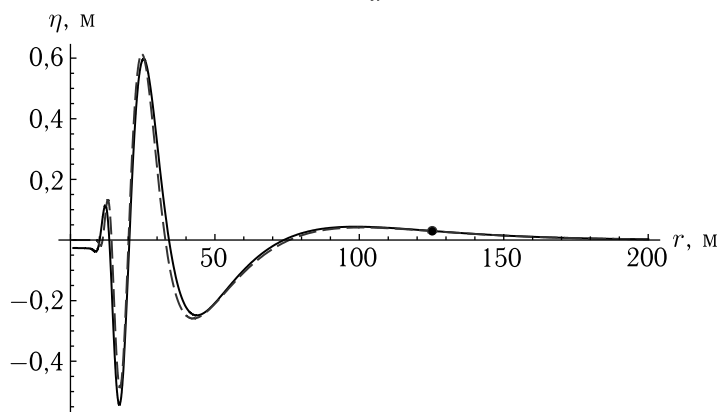
$$= \frac{iQ}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1(s)}{\sqrt{s}} \exp(it\tau(s) - i\pi/4) ds,$$

где $G_1(s)$ — регулярная функция. Таким образом, $I_1(r, t)$ с точностью до множителя t^{-1} есть интеграл того же вида, что интеграл $I_0(r, t)$. Далее, в силу нечетности функции $F(k)$ можно получить: $a = c = 0$, $b = G(\sqrt{\sigma})/\sqrt{\sigma} = F(k_0)(2/k_0q''(k_0))^{1/2}$. Тогда главный член равномерной (по параметру V) асимптотики $\eta(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет вид

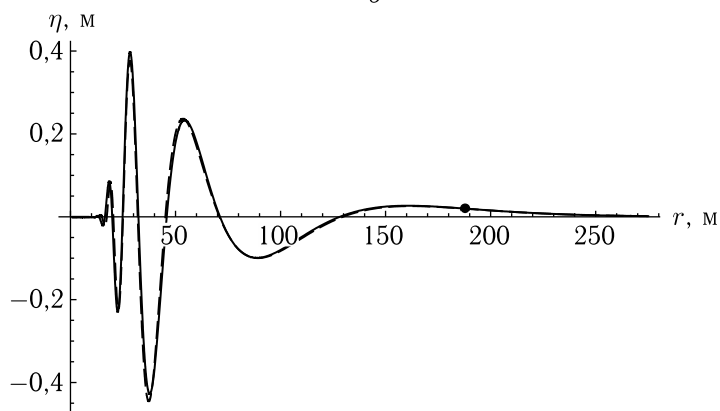
$$\eta(r, t) \approx -2Q\pi^{3/2} \sqrt{\frac{2}{tk_0q''(k_0)}} F(k_0) \text{Ai}(-\sigma(t/2)^{2/3}) \text{Ai}'(-\sigma(t/2)^{2/3}). \quad (2.35)$$



а



б



в

Рис. 2.21. Точное решение (сплошная линия) и равномерная асимптотика (штриховая линия): а) $t = 4$ с; б) $t = 8$ с; в) $t = 12$ с

На рис. 2.21 представлены результаты расчетов по точным формулам (2.32) (сплошная линия) и по формуле (2.35) — равномерная асимптотика (штриховая линия) для различных моментов времени, точкой отмечено положение волнового фронта.

2.5.5. Заключение

Изучены дальние поля поверхностных возмущений от импульсного источника в тяжелой жидкости конечной глубины. Построены равномерные и неравномерные асимптотические решения, выражающиеся через функцию Эйри и ее производную, позволяющие описывать дальние поля поверхностных возмущений как вблизи, так и вдали от волнового фронта. Изучены характеристики возбуждаемых поверхностных возмущений в зависимости от основных параметров волновой генерации. Используемое модельное представление вспыхнувшего источника возмущений может адекватно описать различные физически обоснованные механизмы генерации волновых пакетов, в том числе волн больших амплитуд [78, 80, 192, 210, 211]. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров дают возможность в дальнейшем провести оценку основных характеристик начального возмущения.

2.6. Дальние поля возмущений поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником

Целью настоящего раздела является построение асимптотик дальних полей волновых возмущений ледяного покрова, возбуждаемых локализованным источником в потоке однородной жидкости бесконечной глубины.

2.6.1. Постановка задачи, интегральные формы решений

Рассматривается поток идеальной бесконечно глубокой жидкости, который обтекает точечный источник массы интенсивности q ($q = \text{const}$). Сверху течение ограничено ледяным покровом толщины h . Горизонтальная плоскость (ξ, η) совпадает с невозмущенной границей раздела жидкости плотности ρ_0 и льда плотности ρ_1 (рис. 2.22). Скорость потока жидкости направлена вдоль оси ξ и равна V , источник расположен в точке $(0, 0, z_0)$, $z_0 < 0$. Обозначим через $\varphi(\xi, y, z)$ установившийся во времени потенциал возмущений скорости, $\nabla\varphi = (u, v, w)$, а через $\eta(\xi, y)$ — установившуюся величину возвышения поверхности раздела жидкости и ледового покрова. Тогда $(V + u, v, w)$ — вектор скорости произвольной частицы жидкости. В линейном приближении математическая постановка задачи формулируется следующим образом [156, 157, 159, 188]:

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0), \quad (2.36)$$

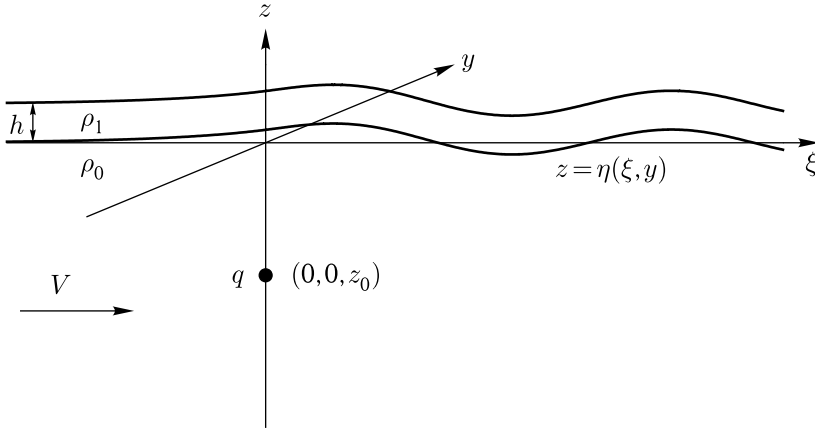


Рис. 2.22. Обтекание источника под ледяным покровом

$$\frac{D\varphi}{Dt} + g\eta - C\Delta\eta + B\Delta^2\eta + A\frac{D^2\eta}{Dt^2} = 0, \quad z = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad z = 0, \quad (2.38)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (2.39)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{D}{Dt} = V\frac{\partial}{\partial\xi},$$

$$A = \frac{h\rho_1}{\rho_0}, \quad B = \frac{Eh^3}{12\rho_0(1-\nu_0^2)}, \quad C = \frac{\sigma h}{\rho_0},$$

где g — ускорение свободного падения, E — модуль Юнга льда, ν_0 — коэффициент Пуассона, σ — начальное напряжение. Характерные значения этих величин в морских условиях равны [79, 112, 156, 215]: $\rho_0 = 1025 \text{ кг/м}^3$, $\rho_1 = 0,9\rho_0$, $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\nu_0 = 0,3$, $\sigma = 10^5 \text{ Па}$. Из двух граничных условий (2.37)–(2.38) можно получить одно условие для φ :

$$\frac{D^2\varphi}{Dt^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} - C\Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + B\Delta^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + A\frac{D^2}{Dt^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0, \quad z = 0. \quad (2.40)$$

В терминах Фурье-образа потенциала

$$\Phi(\mu, \nu, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, y, z) \exp(i\mu\xi) d\xi$$

задача (2.36), (2.40), (2.39) формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - k^2 \Phi &= q\delta(z - z_0), \\ -\mu^2 V^2 \Phi + (g + Ck^2 + Bk^4 - A\mu^2 V^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \quad z = 0, \\ \Phi &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty; \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2.\end{aligned}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{q(\mu^2 V^2 \operatorname{sh} kz + kP \operatorname{ch} kz) \exp(kz_0)}{kR}, & z_0 < z \leq 0, \\ -\frac{q(\mu^2 V^2 \operatorname{sh} kz_0 + kP \operatorname{ch} kz_0) \exp(kz)}{kR}, & z < z_0, \end{cases} \quad (2.41)$$

$$P = g + Ck^2 + Bk^4 - A\mu^2 V^2, \quad R = -\mu^2 V^2 + kP.$$

Тогда из (2.38), (2.41) Фурье-образ возвышения Ψ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Psi &= -\frac{iqV\mu \exp(kz_0)}{(Ak + 1)b(\mu, \nu)}, \quad b(\mu, \nu) = \Omega^2 - \mu^2 V^2, \\ \Omega^2(k) &= \frac{k(g + Ck^2 + Bk^4)}{Ak + 1}.\end{aligned}$$

Здесь $\Omega = \Omega(k)$ — дисперсионное соотношение для волн в неподвижной жидкости под ледовым покровом [157, 159, 188]. Тогда выражение для возвышения имеет вид

$$\begin{aligned}\eta(\xi, y) &= -\frac{iqV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu, \nu)}{b(\mu, \nu)} \exp(-i\mu \xi) d\mu, \\ f(\mu, \nu) &= \frac{\mu \exp(kz_0)}{Ak + 1}.\end{aligned} \quad (2.42)$$

2.6.2. Построение асимптотик решений

В [159] отмечено, что исследование решения в форме (2.42) представляет сложную в вычислительном плане задачу из-за возникающих в расчетных формулах сингулярностей. Рассмотрим поведение функции $\eta(\xi, y)$ вдоль некоторого направления S_α , составляющего угол α с положительным направлением оси ξ , то есть будем считать, что $\xi = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Чтобы найти асимптотику интеграла (2.42) при $r \rightarrow \infty$, необходимо

перевести контур интегрирования по переменной μ в нижнюю полуплоскость. Интеграл в нижней полуплоскости экспоненциально мал при $r \rightarrow \infty$. Основной вклад в (2.42) будет определяться полюсами подынтегральной функции, расположенными на действительной оси. Эти два полюса (дисперсионные кривые), $\mu = \pm\mu_1(\nu)$, находятся из решения уравнения $b(\mu, \nu) = 0$, то есть $\mu^2 V^2 = \Omega^2(\sqrt{\mu^2 + \nu^2})$. Данное уравнение имеет действительные корни лишь при выполнении условия $V > V_* = \Omega(k_*)/k_*$, где k_* — единственный положительный корень уравнения [158, 159]

$$2ABk^5 + 3Bk^4 + Ck^2 - 2Agk - g = 0.$$

Далее предполагается, что $V > V_*$, поскольку только в этом случае источник генерирует в набегающем потоке волновые возмущения [157, 159, 188, 190]. Тогда для суммарного вклада полюсов $\mu = \pm\mu_1(\nu)$ можно получить [181]

$$\begin{aligned} \eta(\xi, y) &= -\frac{qV}{\pi} \int_{L_+(\alpha)} \frac{f(\mu, \nu)}{G(\mu, \nu)} \cos(\mu\xi + \nu y) d\nu, \\ G(\mu, \nu) &= \frac{\partial b(\mu, \nu)}{\partial \mu}, \quad \mu = \mu_1(\nu), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где $L_+(\alpha)$ — та часть дисперсионной кривой $\mu = \mu_1(\nu)$, для которой проекция вектора групповой скорости на направление S_α положительна, то есть выполнено следующее неравенство:

$$\left(V - \Omega'(k) \frac{\mu}{k} \right) \cos \alpha - \Omega'(k) \frac{\nu}{k} \sin \alpha > 0.$$

Это условие (условие излучения) означает, что волновая энергия распространяется наружу от источника возмущений. Интеграл (2.43) можно рассматривать как криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой $L_+(\alpha)$, причем направление обхода этой кривой выбирается таким образом, чтобы проекция касательной к $L_+(\alpha)$ на направление $S_{\pi/2+\alpha}$ была положительной:

$$\cos(\pi/2 + \alpha) d\mu + \sin(\pi/2 + \alpha) d\nu > 0.$$

Асимптотика интеграла (2.43) при $r \rightarrow \infty$ вычисляется методом стационарной фазы [69, 149, 213]:

$$\eta(\xi, y) \approx - \sum_{j=1}^s \frac{qV}{\sqrt{2\pi r |D(k)|}} \frac{\mu_1(k) \exp(kz_0) \cos \Theta}{(Ak+1)T} \Big|_{k=k_j}, \quad (2.44)$$

$$T = \left(\Omega(k) \Omega'(k) \frac{\mu_1(k)}{k} - \mu_1(k) V^2 \right) \cos \alpha - \Omega(k) \Omega'(k) \frac{\nu_1(k)}{k} \sin \alpha,$$

$$D(k) = \frac{-\mu_1'(k) \nu_1''(k) + \nu_1'(k) \mu_1''(k)}{((\mu_1'(k))^2 + (\nu_1'(k))^2)^{3/2}},$$

$$\Theta = \mu_1(k) \xi - \nu_1(k) y + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign}(D(k)),$$

$$k_j = k_j(\alpha), \quad \mu_1(k) = \Omega(k)/V, \quad \nu_1(k) = \sqrt{k^2 - (\Omega(k)/V)^2},$$

где $k_j = k_j(\alpha)$ ($j = 1, 2, \dots, s$) — вещественные корни уравнения

$$\mu_1'(k) \cos \alpha - \nu_1'(k) \sin \alpha = 0; \quad (2.45)$$

функции $\mu_1(k)$, $\nu_1(k)$ определяют параметрическое (с параметром k) представление правой ($\nu \geq 0$) ветви дисперсионной кривой $\mu_1(\nu)$, $D(k)$ — ориентированная кривизна ветви $(\mu_1(k), -\nu_1(k))$, то есть левой ($\nu \leq 0$) половины дисперсионной кривой $\mu_1(\nu)$. Отметим, что $(\mu_1(k_j(\alpha)), -\nu_1(k_j(\alpha)))$ ($j = 1, 2, \dots, s$) — все стационарные точки фазовой функции интеграла (2.43), лежащие на кривой $L_+(\alpha)$. Так как эти точки расположены на левой ($\nu \leq 0$) ветви дисперсионной кривой, то в формулах (2.44) кривизна дисперсионной кривой вычисляется только для ее левой ветви.

На рис. 2.23 представлены результаты расчетов дисперсионных кривых $\mu = \mu_1(\nu)$ для толщины льда $h = 0,25$ м и четырех значений скорости потока (или, что равносильно, скорости источника относительно неподвижной жидкости) V . Как показывает численный анализ, в зависимости от этих параметров дисперсионная кривая может быть как всюду выпуклой (линии 1, 2 на рис. 2.23), так и иметь две пары точек перегиба $\pm \nu_{1,2}^*$, симметричных относительно оси μ , где $\mu_1''(\nu_{1,2}^*) = 0$ (линии 3, 4 на рис. 2.23).

На рис. 2.24–2.25 приведены результаты расчетов фазовых картин возвышения поверхности раздела жидкости и ледяного покрова для тех же значений толщины льда h и скорости потока

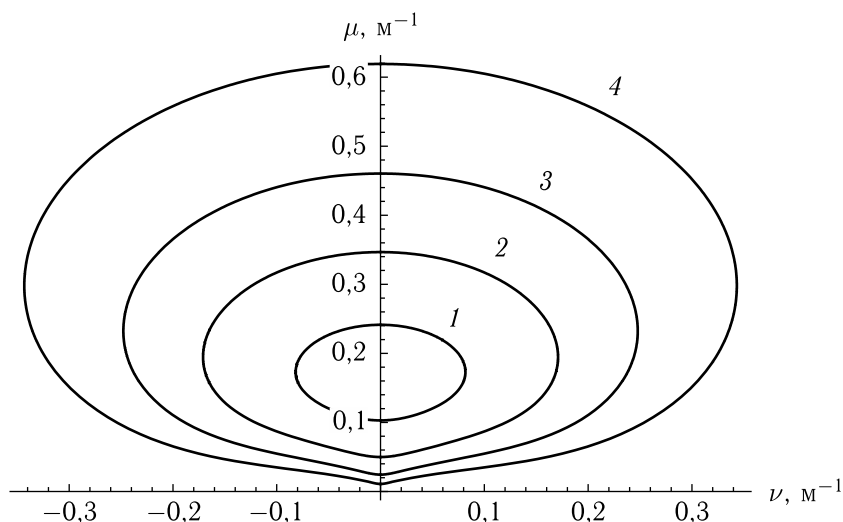


Рис. 2.23. Дисперсионные кривые $\mu = \mu_1(\nu)$ при $h = 0,25$ м: линия 1 — $V = 10$ м/с, линия 2 — $V = 14$ м/с, линия 3 — $V = 20$ м/с, линия 4 — $V = 30$ м/с

(или источника) V , что и для кривых 1, 4 на рис. 2.23. В первом случае возбуждаемая источником волновая картина представляет собой систему только продольных волн. Во втором случае наличие точек перегиба у дисперсионных кривых приводит к образованию двух пар волновых фронтов (штриховые линии на рис. 2.25), появлению точек самопересечения у линий постоянной фазы и образованию фазовой структуры типа «ласточкина хвоста» [216]. Уравнения волновых фронтов определяются как $y = \pm \mu'_1(\nu_{1,2}^*)\xi$. В обоих случаях волновые возмущения генерируются как за источником, так и перед ним, причем длины волн, возбуждаемых вниз по потоку, больше длин волн, образующихся вверх по потоку.

Усложнение наблюдаемых волновых картин возвышения поверхности раздела жидкости и ледяного покрова может являться одним из признаков заметного изменения параметров морской среды: скоростей течения (источника) и толщины льда. Увеличение скорости течения при неизменной толщине льда приводит к расширению (в пространстве волновых чисел) дисперсионных

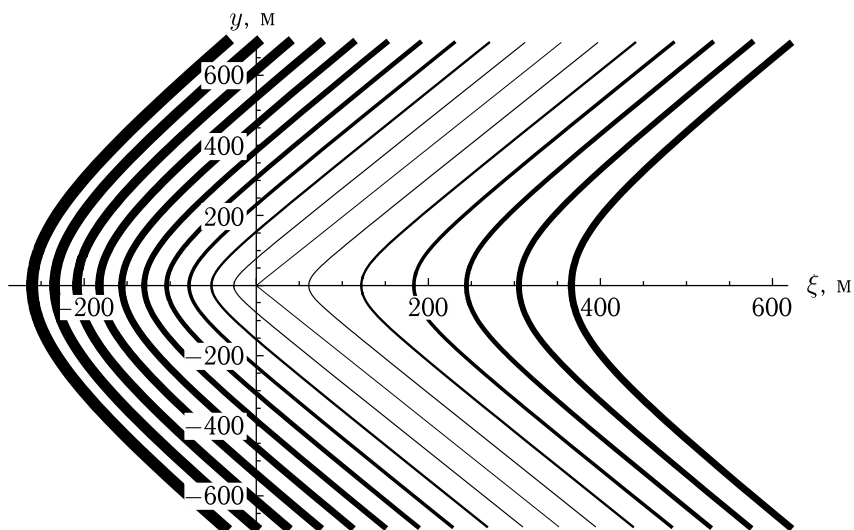


Рис. 2.24. Фазовая картина возвышения поверхности раздела жидкости и ледяного покрова при $h = 0,25$ м, $V = 10$ м/с. Фаза на гребнях волн $\Phi = 2\pi n$, $n = -6, -5, \dots, 10$ (справа налево)

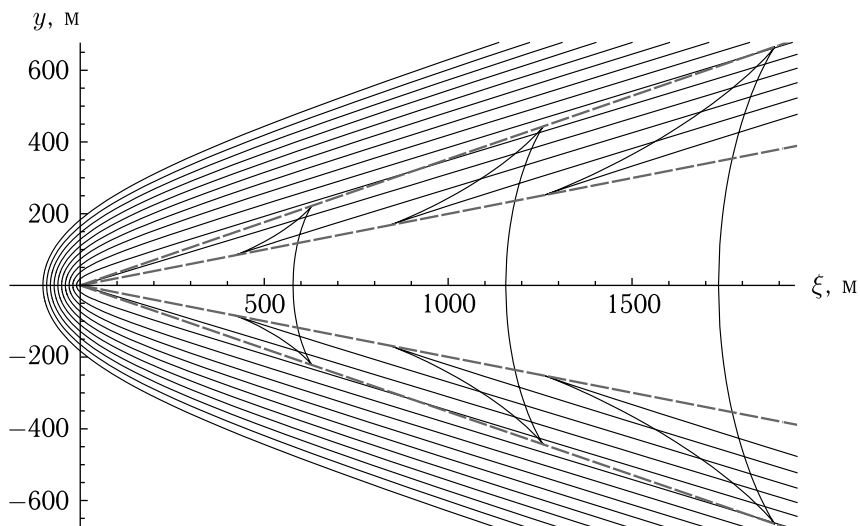


Рис. 2.25. Фазовая картина возвышения поверхности раздела жидкости и ледяного покрова при $h = 0,25$ м, $V = 30$ м/с. Фаза на гребнях волн $\Phi = 2\pi n$, $n = -3, -2, \dots, 10$ (справа налево)

кривых. Кривая, соответствующая меньшей скорости потока, целиком находится внутри кривой, отвечающей большей скорости потока. Поэтому при увеличении скорости V длина волны вдоль положительного направления оси $O\xi$ возрастает, а вдоль отрицательного убывает. Аналогичный эффект наблюдается при уменьшении толщины льда h , если скорость потока V неизменна. Причем в этом случае увеличение длины волны вдоль положительного направления оси $O\xi$ незначительно, и, например, при уменьшении толщины льда от $h = 0,25$ м до $h = 0,01$ м (если $V = 10$ м/с) длины волн изменяются с 0,64 м до 0,61 м.

Численный анализ решений показал, что основными параметрами, которые могут приводить к существенной изменчивости качественных характеристик дисперсионных соотношений, являются толщина льда h и скорость потока (источника) V . Остальные параметры (модуль Юнга, коэффициент Пуассона, напряжение, плотность сред), также определяющие постоянные A, B, C , в пределах естественных масштабов их природной изменчивости практически не влияют на поведение дисперсионных зависимостей. Поэтому усложнение наблюдаемых волновых картин может являться одним из признаков заметного изменения таких параметров морской среды, как скорость течения (источника) и толщина льда.

На рис. 2.26–2.28 представлены результаты расчетов возвышения поверхности раздела жидкости и ледяного покрова для следующих параметров, характерных для реальных гидрофизических условий Мирового океана [79, 112, 156, 215], $V = 10$ м/с, $h = 0,25$ м, $z_0 = -2$ м, $q = 5$ м³/с, что в данной постановке позволяет моделировать обтекание затупленного полубесконечного тела с диаметром 0,79 м. Очевидно, что в дальнейшем, используя операцию свертки, наибольший выигрыш при использовании данного подхода можно получить при исследовании волновых возмущений ледяного покрова, возбуждаемых распределенными в пространстве источниками различной физической природы как естественного, так и антропогенного характеров [55, 66]. На рис. 2.26 приведены результаты расчетов по формулам (2.43), а на рис. 2.27 — по асимптотическим формулам (2.44). Отметим,

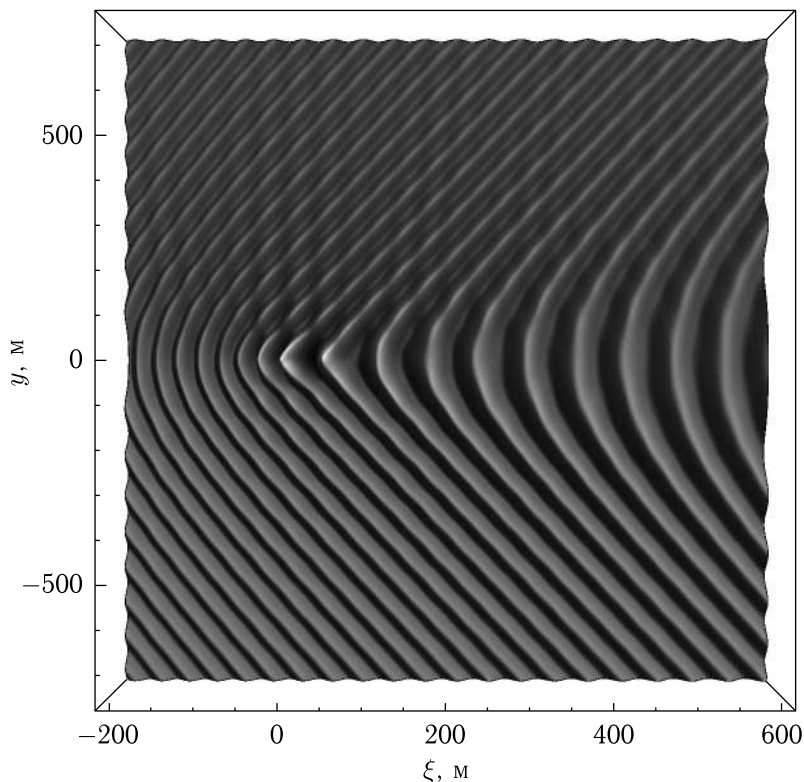


Рис. 2.26. Возвышение границы раздела жидкости и ледяного покрова при $h = 0,25$ м, $V = 10$ м/с, $z_0 = -2$ м, $q = 5$ м³/с: точное решение

что в данном случае дисперсионная кривая $\mu = \mu_1(\nu)$ является выпуклой (не имеет точек перегиба) и у уравнения (2.45) существует единственное вещественное решение при любом значении α . Как видно из представленных результатов, построенные асимптотики адекватно описывают амплитудно-фазовую структуру дальних волновых полей возвышения поверхности раздела жидкости и ледяного покрова. На рис. 2.28 изображена «срезка» поля возвышения $\eta(\xi, y)$ вдоль оси ξ при фиксированном значении $y = 200$ м, рассчитанная по формуле (2.44). Как показывают численные расчеты, для использованных параметров источника возбуждения характерные величины возвышения составляют около 5 мм, что по порядку величин соответствует наблюдаемым

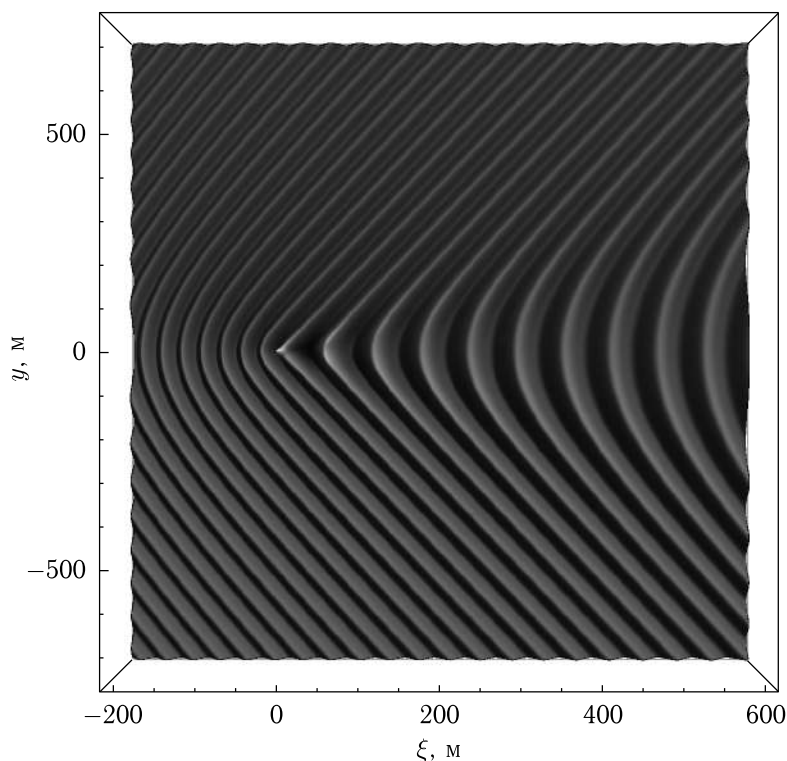


Рис. 2.27. Возвышение границы раздела жидкости и ледяного покрова при $h = 0,25$ м, $V = 10$ м/с, $z_0 = -2$ м, $q = 5$ м³/с: асимптотика по методу стационарной фазы

в природных условиях значениям возмущения ледяного покрова [79, 112, 156, 215].

Анализ асимптотик показал хорошее совпадение с точным решением уже на расстояниях, начинающихся с десяти и более метров от источника, поэтому на указанных расстояниях можно использовать понятие дальних волновых полей. Таким образом, исходя из результатов рассмотрения подобного класса задач и оценок пространственных масштабов возможного затухания волновых возмущений в природных условиях, представляется вполне обоснованным использование линейного приближения и метода стационарной фазы для расчета возмущений ле-

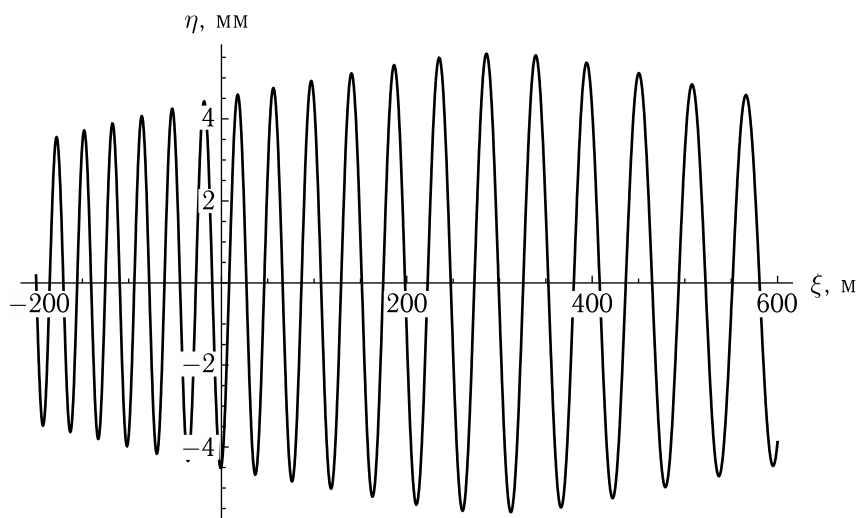


Рис. 2.28. Продольный срез возвышения границы раздела жидкости и ледяного покрова при $y = 200$ м ($h = 0,25$ м, $V = 10$ м/с, $z_0 = -2$ м, $q = 5$ м³/с)

дяного покрова и получения физически адекватных результатов [55, 66, 149, 217].

2.6.3. Заключение

С помощью метода стационарной фазы построены асимптотические решения, описывающие динамику волновых пакетов, возбуждаемых на поверхности раздела жидкости и ледяного покрова при обтекании локализованного источника потоком бесконечно глубокой жидкости. Построенные асимптотики дальних полей дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых возмущений и (кроме того) качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик возмущений ледяного покрова, наблюдаемых в реальных океанических условиях. Построенные асимптотики позволяют рассчитывать дальние волновые поля, в том числе и от нелокальных источников возмущений

различной физической природы. В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натурных условиях волновым картинам, что позволяет оценить физические параметры реальных источников возбуждения волн в морской среде с ледовым покрытием. Поэтому полученные асимптотические результаты дают возможность определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров. Таким образом, математические модели волновой генерации на поверхности раздела морской воды и льда могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

3

ГЛАВА

ДИНАМИКА ВНУТРЕННИХ
ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН
В ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ СРЕДАХ

3.1. Динамика дальних полей внутренних гравитационных волн в океане с произвольным распределением частоты плавучести

3.1.1. Введение

Распространение в стратифицированных природных средах (океан, атмосфера) диспергирующих внутренних гравитационных волн (ВГВ) имеет особенности, определяемые стратификацией и параметрами волновой генерации, в частности скоростью движения источника возмущений. Если в такой среде перемещается источник возмущений, то он создает вокруг себя волновую картину, которая может быть охарактеризована системой линий постоянной фазы. Структура волновых картин на больших расстояниях от движущегося источника (много больших его размеров) практически не зависит от его формы и определяется законом дисперсии и скоростью источника [79, 80, 112]. Современные подходы к математическому моделированию линейных ВГВ основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье, численном решении спектральных задач, анализе асимптотик интегральных представлений [66, 218]. Целью настоящего раздела является исследование динамики дальних полей ВГВ, возбуждаемых источником возмущений, движущимся в стратифицированной среде конечной толщины с произвольным распределением частоты плавучести.

3.1.2. Постановка задачи и аналитические представления решений

Рассматривается слой невязкой, несжимаемой, стратифицированной по вертикали среды глубины H с плотностью $\rho_0(z)$ (ось z направлена вертикально вверх). Стратификация предполагается устойчивой: $\frac{d\rho_0}{dz} < 0$. В качестве источника ВГВ берется движущийся равномерно и прямолинейно на горизонте $z = z_0$ точечный источник массы мощностью Q_0 ($Q_0 = \text{const}$), который перемещается вдоль отрицательного направления оси x со скоростью V . Предполагается, что источник включился и его движение началось в момент времени $t = 0$ из точки $x = y = 0$, $z = z_0$. Ось y направлена перпендикулярно траектории источника.

Уравнение ВГВ для поля возвышения изопикн (поверхностей равной плотности) $\eta(x, y, z, t)$ в линейной постановке с учетом приближения Буссинеска выглядит следующим образом [66, 218]:

$$L\eta = Q_0 V \Theta(t) \delta'(x + Vt) \delta(y) \delta'(z - z_0), \quad (3.1)$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + N^2(z) \Delta, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где $\Theta(t) = 0$, $t < 0$; $\Theta(t) = 1$, $t \geq 0$, $N^2(z) = -g \frac{d \ln \rho_0(z)}{dz}$ — квадрат частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести). В силу линейности рассматриваемой задачи, используя ее решения, в дальнейшем можно получить представления для полей ВГВ, генерируемых нелокальными источниками другой природы [61, 109, 219–221]. На больших расстояниях реальные источники возмущений ВГВ допускают физически обоснованную аппроксимацию некоторой системой точечных локализованных источников, взятых с определенными весами [55, 59].

Начальное условие имеет вид

$$\eta \equiv 0, \quad t < 0. \quad (3.2)$$

Граничные условия берутся в приближении «твердой крышки»:

$$\eta = 0, \quad z = 0, -H \quad (3.3)$$

Тогда решение задачи (3.1)–(3.3), описывающее установившейся волновой режим в движущейся вместе с источником возмущений системе координат, имеет вид суммы волновых мод: [66, 218]

$$\begin{aligned}\eta(\xi, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\xi, y, z), \quad \eta_n(\xi, y, z) = I_{1n} + I_{2n}, \quad \xi = x + Vt, \\ I_{1n} &= \frac{Q_0 V}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(z, z_0, \nu) \exp(i(\mu_n(\nu)\xi - \nu y)) d\nu, \\ I_{2n} &= \frac{Q_0 V}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(z, z_0, \nu) \exp(-i(\mu_n(\nu)\xi + \nu y)) d\nu, \\ D_n(z, z_0, \nu) &= \frac{\mu_n^2(\nu)}{\mu_n^2(\nu) + \nu^2} \left(\frac{\mu_n(\nu)\mu'_n(\nu)}{\nu} + 1 \right) f_n(z, \nu) \frac{\partial f_n(z_0, \nu)}{\partial z_0}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Здесь собственные функции $f_n(z, \nu)$ и собственные числа $\mu_n^2(\nu)$ определяются из вертикальной спектральной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_n(z, \nu)}{\partial z^2} + (\mu_n^2(\nu) + \nu^2) \left(\frac{N^2(z)}{\mu_n^2(\nu)V^2} - 1 \right) f_n(z, \nu) = 0, \\ f_n(0, \nu) = f_n(-H, \nu) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Доказано, что собственные функции образуют ортогональную систему с весом $N^2(z)$ [66, 218, 222]. В формулах (3.4) предполагается, что эта система ортонормирована, то есть

$$\int_{-H}^0 N^2(z) f_n(z, \nu) f_m(z, \nu) dz = \delta_{nm}, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Для произвольного распределения частоты плавучести спектральная задача (3.5) решается численно [103, 223]. Дисперсионная зависимость $\mu_n(\nu)$ является решением уравнения $\omega_n^2(k) = V^2 \mu_n^2(\nu)$, где $k^2 = \mu_n^2(\nu) + \nu^2$, $\omega_n(k)$ — собственное число основной вертикальной спектральной задачи ВГВ [79, 112]. Далее будет рассматриваться отдельная волновая мода, индекс n будет опущен. Асимптотику интегралов (3.4), описывающую поле отдельной моды ВГВ вдали от траектории движения источника возмущений при больших ξ и y , можно вычислить методом

стационарной фазы [120, 149]. Стационарные точки фазовых функций интегралов (3.4) определяются из решения следующей совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \mu'(\nu) = y/\xi, \\ \mu'(\nu) = -y/\xi. \end{cases} \quad (3.6)$$

Тогда при $\xi < y/q$ ($q = \max \mu'(\nu)$) фазовые функции интегралов (3.4) не имеют стационарных точек, и поле $\eta(\xi, y, z)$ экспоненциально мало. При $\xi > y/q$ совокупность (3.6) имеет несколько действительных решений (минимум два: $\nu_{1,2} = \pm \nu^*$), которые появляются парами: $\nu_{1,2k} = \pm \nu_k^*$ ($\nu_k^* > 0$, $k = 1, 2, \dots, K$) в силу того, что функция $\mu_n(\nu)$ является либо четной, либо нечетной. Тогда асимптотика отдельной волновой моды вдали от источника возмущений имеет вид [66, 218]

$$\eta \approx Q_0 V \sum_{k=1}^K \frac{D(z, z_0, \nu_k^*)}{\sqrt{2\pi\xi |\mu''(\nu_k^*)|}} \cos(\mu(\nu_k^*)\xi - \nu_k^* y + \sigma_k \pi/4), \quad (3.7)$$

где $\sigma_k = \text{sign}(\mu''(\nu_k^*))$, а суммирование идет по всем K стационарным точкам ν_k^* . Волновая зона сосредоточена внутри клина с углом полураствора $\varphi = \arctg q$. Решая уравнение $\mu(\nu)\xi \pm \nu y = \Phi$ совместно с (3.6) относительно ξ и y , получим линии равной фазы Φ , параметризованные параметром ν :

$$\begin{cases} x(\nu) = \frac{\Phi}{\mu(\nu) - \nu\mu'(\nu)}, \\ y(\nu) = \frac{\pm \mu'(\nu)\Phi}{\mu(\nu) - \nu\mu'(\nu)}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Асимптотики (3.7) перестают работать в окрестности волновых фронтов, то есть в случае когда стационарные точки стремятся друг к другу и $\mu''(\nu) \rightarrow 0$. Волновые фронты определяются такими значениями ν_i^0 ($\nu_i^0 > 0$), при которых $\mu''(\nu_i^0) = 0$. Тогда в окрестности точек $\nu = \nu_i^0$ функция $\mu(\nu)$ допускает разложение $\mu(\nu) = \mu(\nu_i^0) + q_i(\nu - \nu_i^0) + b_i(\nu - \nu_i^0)^3 + \dots$, и положение волновых фронтов определяется как $y = q_i \xi$. Асимптотики волнового

поля вблизи каждого из I волновых фронтов имеют вид [66, 218]

$$\eta_i \approx Q_0 V \beta_i \frac{D(z, z_0, \nu_i^0) \cos(\mu_n(\nu_i^0)\xi - \nu_i^0 y)}{\sqrt[3]{3|b_i|\xi}} \text{Ai}\left(\frac{q_i \xi - y}{\sqrt[3]{3b_i \xi}}\right), \quad i=1, 2, \dots, I. \quad (3.9)$$

Здесь

$$\beta_i = \frac{1 + \text{sign}|\nu_i^0|}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \nu_i^0 = 0, \\ 1, & \nu_i^0 \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{Ai}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau t + t^3/3) dt \text{ — функция Эйри.}$$

3.1.3. Результаты численного моделирования

Для численных расчетов волновых полей было использовано типичное распределение частоты Брента–Вяйсяля с одним максимумом в районе термоклина, изображенное на рис. 3.1 [79, 80, 112]. Особенности распределения частоты плавучести в различных акваториях Мирового океана приводят к тому, что фазовые функции в (3.4) могут иметь несколько стационарных точек, что является причиной усложнения волновых картин ВГВ вдали от источников возмущений. Введем обозначение: $M = V/C$, где $C = \omega'(0)$ — максимальное значение групповой скорости ВГВ соответствующей моды, значения C для первых трех мод равны $C = 1,476$ м/с, $0,836$ м/с, $0,59$ м/с.

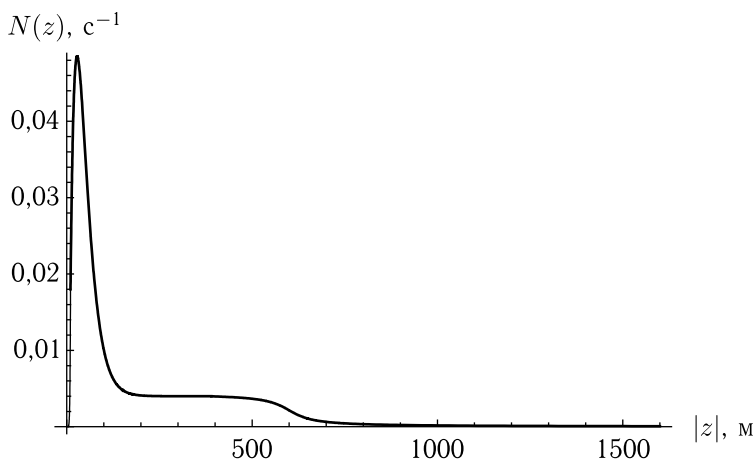


Рис. 3.1. Распределение частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести)

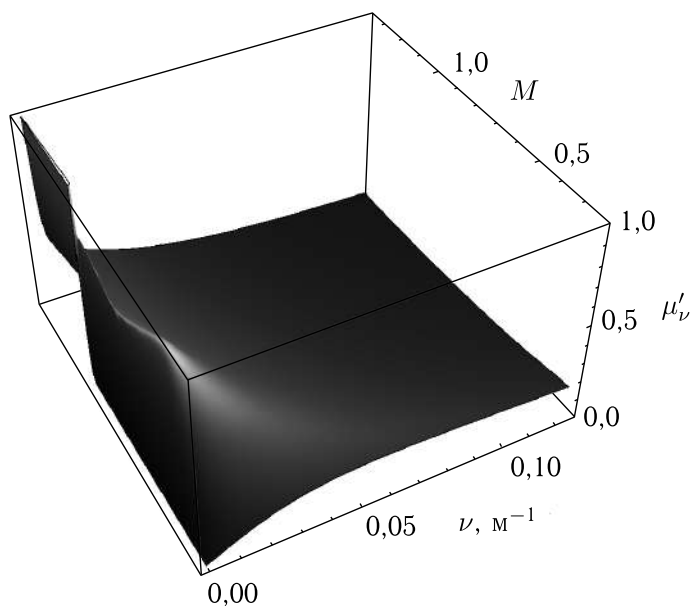


Рис. 3.2. Дисперсионная поверхность $\mu'_\nu(\nu, M)$ первой моды

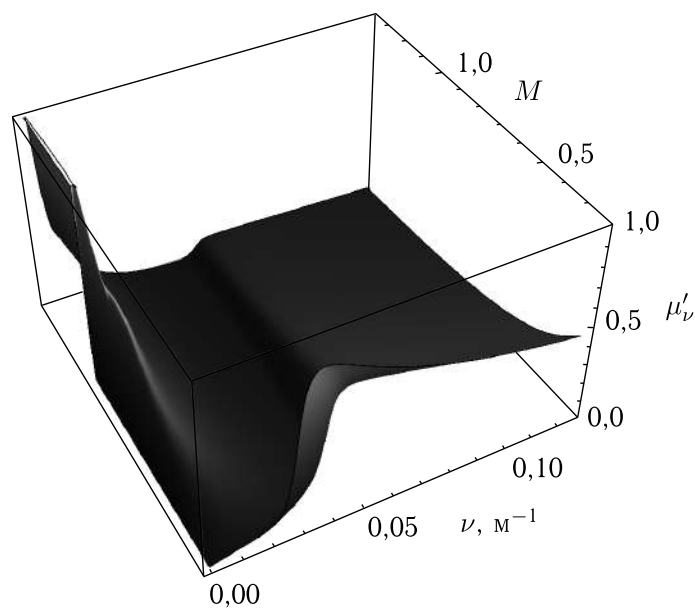


Рис. 3.3. Дисперсионная поверхность $\mu'_\nu(\nu, M)$ второй моды

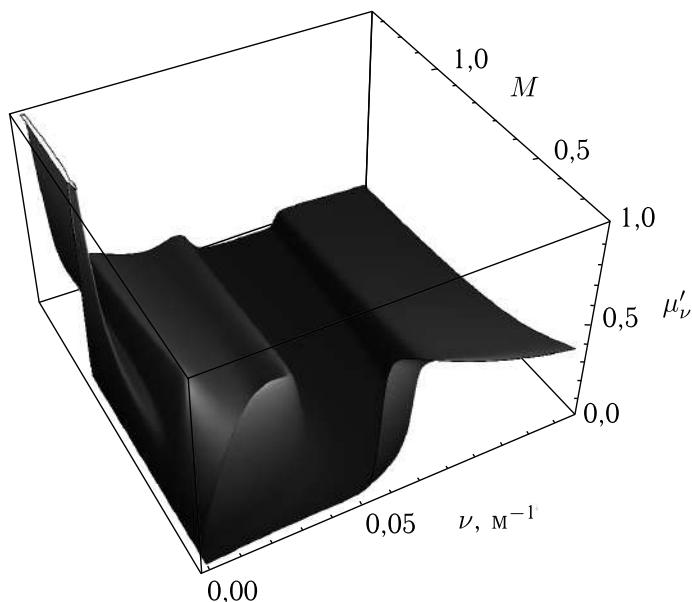


Рис. 3.4. Дисперсионная поверхность $\mu'_\nu(\nu, M)$ третьей моды

Вдали от источника возмущений качественное поведение волнового поля определяется наличием или отсутствием на интервалах интегрирования в (3.4) экстремумов функции $\mu'(\nu)$, отвечающих слиянию соответствующих стационарных точек фазовых функций подынтегральных выражений [212, 224, 225]. На рис. 3.2–3.4 представлены результаты расчетов дисперсионных поверхностей $\mu'_\nu(\nu, M)$ для первых трех волновых мод. Из представленных численных результатов видно, что для данного распределения частоты плавучести может наблюдаться (в зависимости от скорости движения источника возмущений) дисперсионная картина, при которой имеются от одного до нескольких экстремумов функции $\mu'(\nu)$: первая мода — один экстремум ($I = 1$), вторая мода — один или три экстремума ($I \in \{1, 3\}$), третья мода — один, три, пять или семь экстремумов ($I \in \{1, 3, 5, 7\}$). Далее все результаты будут приведены для второй волновой моды, в этом случае функция $\mu'(\nu)$ имеет либо один максимум q_1 , либо два максимума q_1, q_2 и минимум q_3 , причем всегда $q_3 < q_{1,2}$.

Численные расчеты спектральной задачи (3.5) показывают, что на качественную картину дисперсионных зависимостей $\mu'(\nu)$ существенно влияет скорость движения источника возмущений и, соответственно, величина параметра M . Действительно, при $M < 1$ значения двух максимумов $q_{1,2}$ имеют одинаковый порядок, при небольших значениях M выполняется соотношение $q_1 < q_2$; с увеличением M значения q_1 увеличиваются, и при $M_0 = 0,546 < 1$ значения двух максимумов совпадают: $q_1 = q_2$ (это означает, что в фиксированную точку наблюдения одновременно приходят два волновых фронта). Таким образом, при $M < M_0$ имеем $q_1 < q_2$, а при $M > M_0$ имеем $q_1 > q_2$. Далее при увеличении M значения максимума q_1 функции $\mu'(\nu)$ заметно растут, при $M > 1$ этот максимум всегда достигается при $\nu = 0$. На рис. 3.5–3.8 представлены результаты расчетов по формулам (3.8) линий равной фазы $\Phi = 2\pi m$, $m = 2, 4, 6$, для различных значений параметра M . Штриховые линии на рисунках — волновые фронты, линия 1 — волновой фронт, отвечающий q_1 , линия 2 — волновой фронт, соответствующий q_2 , линия 3 — волновой фронт, отвечающий q_3 . На рис. 3.9–3.12 приведены результаты расчетов возбуждаемых волновых полей по формулам (3.4) для значений $z = -40$ м, $z_0 = -60$ м.

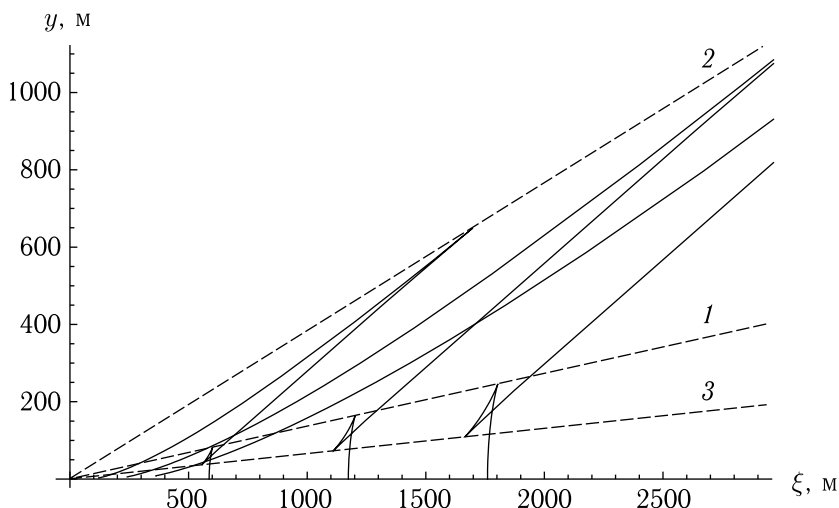
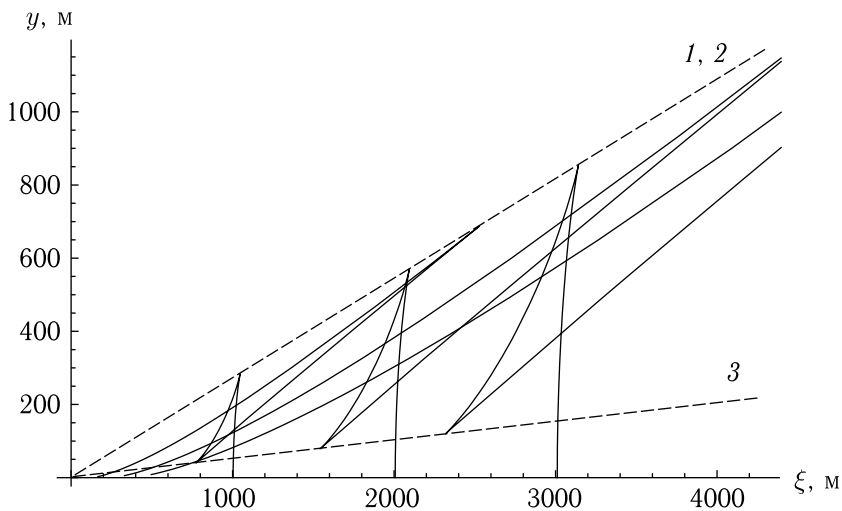
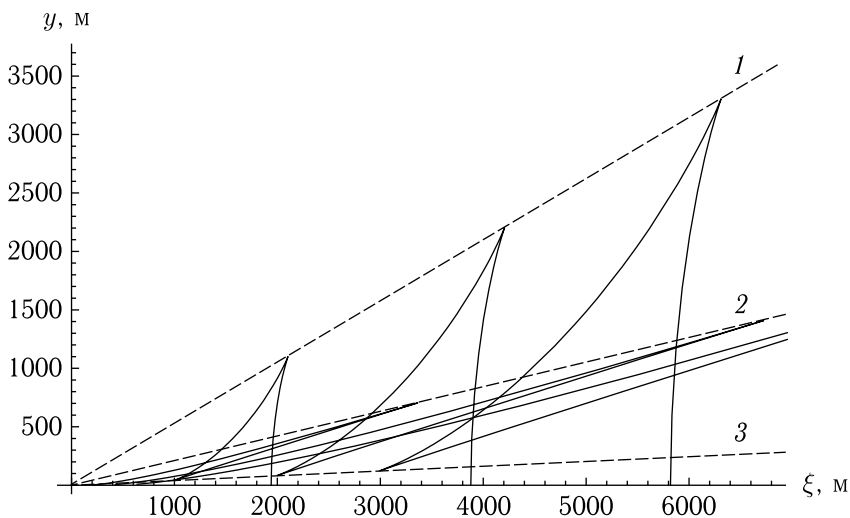
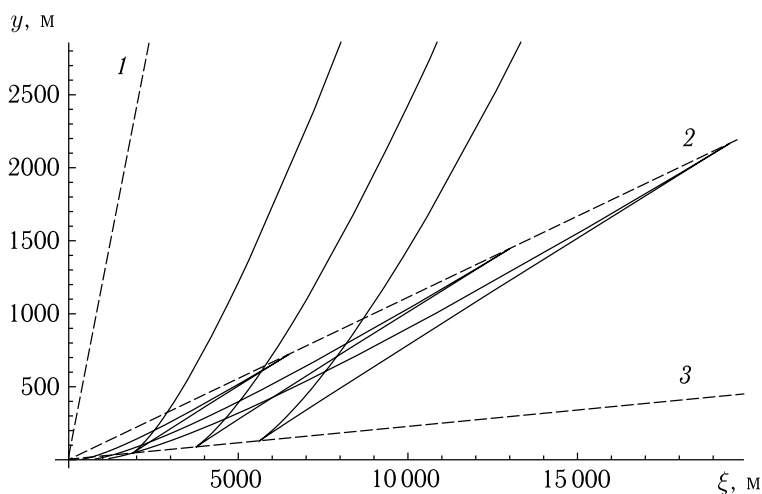


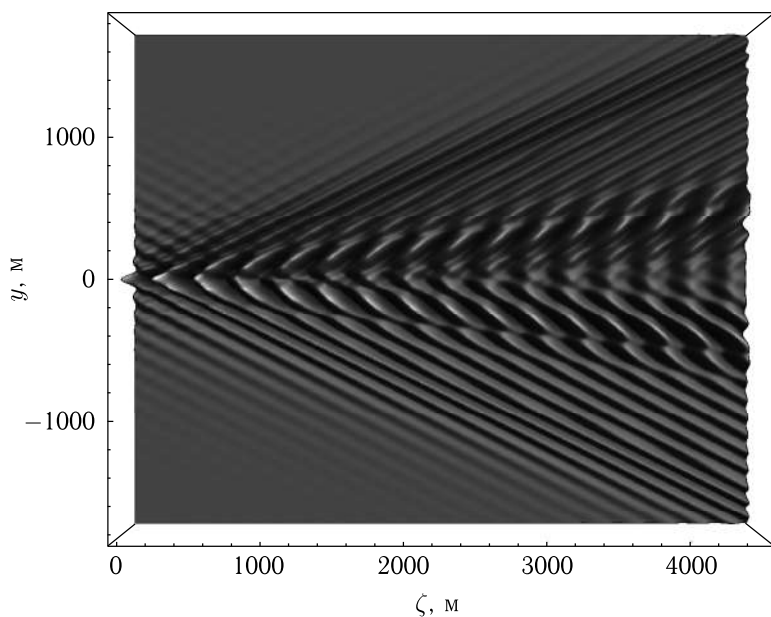
Рис. 3.5. Линии равной фазы при $M = 0,4 < M_0$

Рис. 3.6. Линии равной фазы при $M = M_0 = 0,546$ Рис. 3.7. Линии равной фазы при $M = 0,7 > M_0$

Представленные результаты численных расчетов показывают, что топология дисперсионных поверхностей $\mu'(\nu, M)$ имеет достаточно сложную структуру, зависящую как от стратификации среды, так и от параметров волновой генерации. Расчеты свидетельствуют, что при увеличении номера волновой моды

Рис. 3.8. Линии равной фазы при $M = 1,3 > M_0$

количество экстремумов функции $\mu'(\nu)$, как правило, возрастает. Это означает, что вклад в дальнее поле ВГВ вносят несколько волновых цугов. Кроме того, численные расчеты показывают,

Рис. 3.9. Вторая мода поля возвышения при $M = 0,4 < M_0$

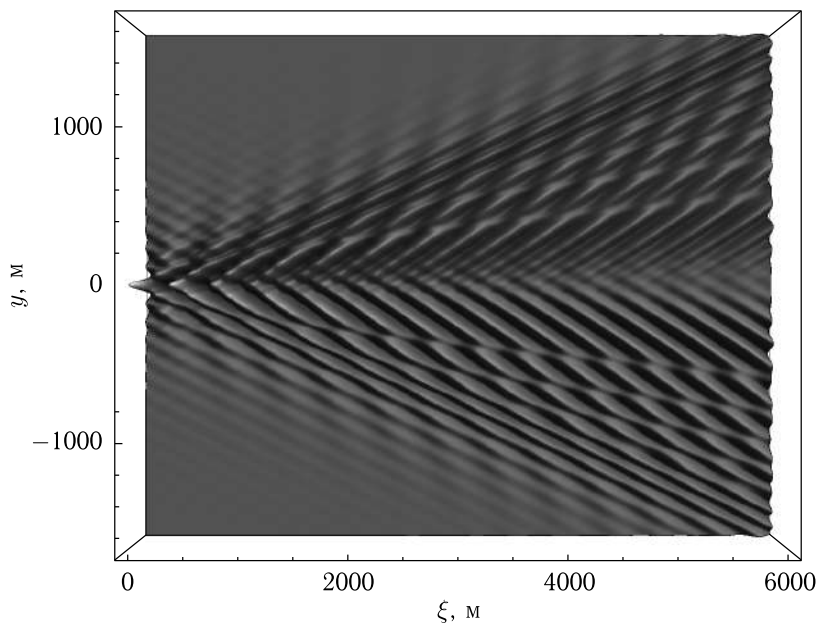


Рис. 3.10. Вторая мода поля возвышения при $M = M_0 = 0,546$

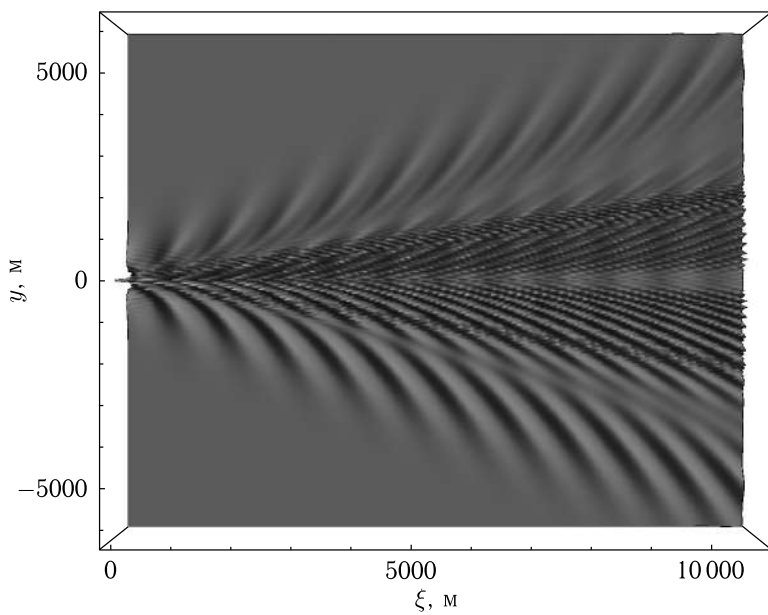


Рис. 3.11. Вторая мода поля возвышения при $M = 0,7 > M_0$

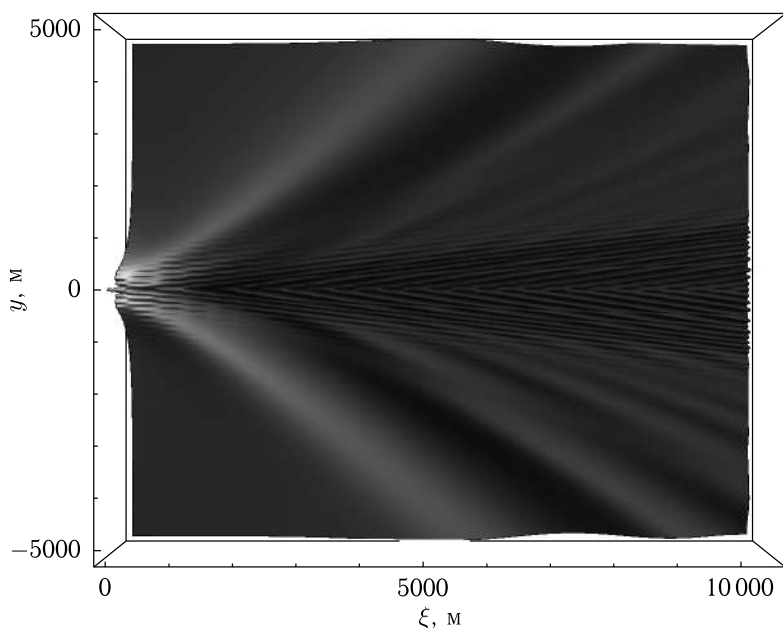


Рис. 3.12. Вторая мода поля возвышения при $M = 1,3 > M_0$

что при изменении скорости движения источника происходит заметная перестройка фазовых картин возбуждаемых волновых полей. В частности, может наблюдаться характерная фазовая картина типа «ласточкин хвост» (рис. 3.5–3.6) [224]. В фиксированной точке наблюдения также может происходить перестройка одновременно приходящих волновых фронтов (рис. 3.5–3.7).

В этом случае полное поле ВГВ представляет собой сложную картину волновых биений (рис. 3.9–3.11), когда в фиксированную точку пространства одновременно приходит несколько волновых цугов с разными амплитудами и фазами. Сложность топологии дисперсионных зависимостей требует для корректного асимптотического исследования дальних полей ВГВ применения специального математического аппарата. Особые точки фазовых функций в интегралах (3.4) могут сближаться с другими особыми точками или с какой-либо особенностью (полюсом, точкой ветвления) подынтегральной функции $D_n(z, z_0, \nu)$. В этом случае стандартный метод исследования асимптотик полей ВГВ

(метод стационарной фазы) становится неприменимым [212, 225]. Например, при слиянии двух стационарных точек асимптотика интегралов (3.4) выражается через функцию Эйри, при слиянии стационарной точки и полюса — через интеграл Френеля. Важно отметить, что наиболее интересными с практической точки зрения являются локальные максимумы дисперсионных поверхностей $\mu'(\nu, M)$, так как поле ВГВ в окрестности этих максимумов описывается эталонными интегралами. Случай слияния трех стационарных точек может описываться функцией Пирси, часто применяемой в теории особенностей и катастроф [212]. Если две из трех сливающихся стационарных точек находятся строго симметрично относительно третьей, то асимптотика соответствующего интеграла может выражаться через функцию Ханкеля [225]. Численные расчеты дисперсионных зависимостей показывают, что для различных реальных стратификаций природных сред (океан, атмосфера) могут возникать физически интересные случаи волновых структур, которые не описываются известными эталонными интегралами [59, 226, 227].

Далее опишем качественную картину дальних полей ВГВ для различных режимов волновой генерации, зависящих от скорости движения источника возмущений. Дальнее поле возбуждаемых ВГВ (при $y, \xi \geq H$) задается тремя волновыми цугами, моменты прихода которых в фиксированную точку по переменной наблюдения y определяются тремя волновыми фронтами. При $M < 1$ дальнее поле отдельной волновой моды в фиксированной по y точке наблюдения ведет себя следующим образом. При $\xi < y/Q_1$ ($Q_1 = q_2$ при $M < M_0$, $Q_1 = q_1$ при $M > M_0$) волновое поле пренебрежимо мало. При $\xi = \xi_1 = y/Q_1$ в фиксированную точку наблюдения приходит фронт первого волнового цуга, в окрестности фронта поле выражается через функцию Эйри ($\eta = \eta_1$ в формуле (3.9)). При $y/Q_1 < \xi < y/Q_2$ ($Q_2 = q_1$ при $M < M_0$, $Q_2 = q_2$ при $M > M_0$) поле состоит из одного волнового цуга и определяется суммой вкладов двух стационарных точек ($K = 2$ в формуле (3.7)). При $\xi = \xi_2 = y/Q_2$ в точку наблюдения приходит дополнительно второй волновой цуг, в окрестности которого поле также выражается через функцию Эйри ($\eta = \eta_2$

в формуле (3.9)). При $y/Q_2 < \xi < y/q_3$ (q_3 равно значению $\mu'(\nu)$ в точке локального минимума для данного M) волновое поле состоит из вклада четырех стационарных точек ($K = 4$ в формуле (3.7)). При $\xi = \xi_3 = y/q_3$ через точку наблюдения проходит третий волновой фронт. В его окрестности волновое поле выражается через функцию Эйри ($\eta = \eta_3$ в формуле (3.9)), а за ним (при $\xi > y/q_3$) оно определяется вкладом двух стационарных точек ($K = 2$ в формуле (3.7)). Как показывают результаты численного моделирования, при $M < 1$ волновая картина представляет собой сложную систему волновых биений. При $M = M_0$ имеем $q_1 = q_2$, и поэтому в фиксированную по переменной y точку наблюдения при $\xi = \xi_1 = \xi_2 = y/q_1 = y/q_2$ одновременно приходят два волновых цуга (рис. 3.6, 3.10). При $M > 1$ волновой цуг, отвечающий максимуму q_1 функции $\mu'(\nu)$, значительно больше по амплитуде и более длинноволновый (низкочастотный), чем второй цуг, отвечающий ее максимуму q_2 . Поэтому сложная картина волновых биений при $M > 1$ не наблюдается, волновые цуги значительно разнесены в пространстве и распространяются независимо друг от друга: к моменту прихода второго волнового цуга вклад в полное поле от первого становится исчезающе мал.

Проведенные оценки демонстрируют качественное совпадение с результатами натурных наблюдений пакетов внутренних волн, выполнявшихся в различных акваториях Мирового океана, а также модельных экспериментов и прямого численного моделирования [109, 220, 228–232]. Это позволяет использовать полученные асимптотические результаты для проведения экспресс-оценок и анализа натурных наблюдений. Таким образом, аналитические методы позволяют решать актуальные океанологические задачи.

Одним из источников генерации ВГВ в океане могут являться движущиеся атмосферные циклоны, которые оказывают существенное влияние на циркуляцию океана, локальную температуру морской поверхности и генерацию внутренних гравитационных волн. Возбуждаемые с помощью этого механизма волновые поля могут играть значительную роль в океанических процессах переноса энергии [59, 79, 80, 112]. Важной особенностью гене-

рации ВГВ движущимся возмущением атмосферного давления является то, что характерная скорость перемещения урагана составляет 3–5 м/с, что значительно превосходит типичную максимальную групповую скорость распространения ВГВ в океане. Поэтому при изучении волнового следа за движущимся ураганом наиболее физически реализуемым является случай движения источника возмущений со скоростью, большей максимальной групповой скорости ВГВ [55, 59, 112].

3.1.4. Заключение

Исследована генерация ВГВ в слое стратифицированной среды конечной глубины с произвольным распределением частоты плавучести возбуждаемых движущимся локальным источником возмущений. Численно изучены основные дисперсионные характеристики, определяющие свойства возбуждаемых дальних волновых полей. Приведены результаты численных расчетов фазовых картин и полей ВГВ для различных режимов генерации. Показано, что дальние волновые поля отдельной моды представляют собой сумму волновых цугов, изучены особенности генерации этих волновых цугов для различных режимов движения источника. Подобного рода волновые картины могут наблюдаться при дистанционном зондировании, наблюдении и измерениях ВГВ, возбуждаемых различными источниками возмущений в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах [59, 61, 79, 112, 220, 221, 233].

3.2. Равномерные асимптотики полей внутренних гравитационных волн от начального радиально-симметричного возмущения

3.2.1. Введение

В экспериментальных и натурных наблюдениях внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера), а также при рассмотрении большого числа конкретных задач накоплен значительный фактический материал, который нуждается в теоретическом осмыслении [39, 110, 111]. Волновые движения в этих средах могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться искусственными источниками возмущений [79, 112]. Как правило, основные результаты решений задач о генерации ВГВ записываются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные представления требуют разработки асимптотических методов их анализа, допускающих качественный анализ и проведение экспресс-оценок получаемых решений [66, 112, 120]. Решения, найденные в линейной постановке посредством преобразования Фурье, позволяют рассчитывать волновые поля численным интегрированием [59, 61, 110–114]. Однако по мере увеличения времени и расстояния от источников возмущений необходимо вычислять интегралы от все более и более осциллирующих функций, и численные расчеты делаются трудоемкими. Кроме того, получить из численных расчетов качественное описание уходящих от источника ВГВ, их эволюцию во времени

и пространстве, зависимость от характеристик источника либо практически невозможно, либо это требует громоздких расчетов. В то же время асимптотические выражения для волновых полей записываются через элементарные или известные специальные функции, и их качественный анализ, как правило, не вызывает затруднений [66, 120–122]. Кроме того, найденные асимптотики позволяют перейти к более реалистической ситуации сред, параметры которых медленно меняются по горизонтали и времени, так как наличие явных аналитических конструкций позволяет учесть изменение параметров среды вдоль трассы распространения ВГВ посредством соответствующего изменения аргументов, описывающих поле специальных функций, а также амплитудных и фазовых множителей [55, 60, 112, 128]. Одной из основных используемых моделей генерации можно считать предположение о возбуждении пакетов ВГВ импульсным воздействием различной физической природы [39, 79, 210, 234, 235]. Для проведения прогнозных расчетов ВГВ параметры моделей волновой генерации подбираются так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемым волновым картинам, что дает возможность верифицировать эти математические модели.

Целью настоящего раздела является построение равномерных асимптотик дальних полей ВГВ, возбуждаемых радиально-симметричным начальным возмущением поверхностей равной плотности в слое стратифицированной среды конечной толщины.

3.2.2. Постановка задачи, интегральные формы решений

Поле возвышения изопикн (поверхностей равной плотности) $\eta(r, z, t)$ в слое стратифицированной среды $-H < z < 0$ в цилиндрических координатах (r, z) (зависимости от угла нет, ось z направлена вверх) в приближении Буссинеска определяется из задачи [66, 236]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta(r, z, t) + N^2(z) \Delta \eta(r, z, t) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\eta(r, z, 0) = \Phi(r) \Pi(z), \quad \frac{\partial \eta(r, z, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

$$\eta(r, z, t) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -H,$$

где далее частота Брента–Вяйсяля (частота плавучести) считается постоянной: $N^2(z) = N^2 = \text{const}$. Предполагается, что начальное возмущение изопоки обладает радиальной симметрией и некоторым распределением по глубине с одним максимумом, что соответствует по качественному характеру наблюдаемым в реальных природных средах (океан, атмосфера) нелокальным источникам [39, 79, 210, 234, 235]. Решение поставленной начально-краевой задачи строится с помощью преобразования Фурье–Ханкеля в безразмерных переменных $r^* = r\pi/H$, $z^* = z\pi/H$, $\eta^* = \eta\pi/H$, $t^* = Nt$ (индекс «*» далее опускается) и имеет вид [66, 204, 236, 237]

$$\begin{aligned}\eta(r, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nz) g_n(r, t), \\ g_n(r, t) &= \int_0^{\infty} k A(k) J_0(kr) \cos(\omega_n(k)t) dk, \\ A(k) &= \int_0^{\infty} r J_0(kr) \Phi(r) dr, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \Pi(z) \sin(nz) dz, \\ \omega_n(k) &= \frac{k}{\sqrt{k^2 + n^2}},\end{aligned}\tag{3.10}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка [204]. Используя эти решения, можно получить выражения для вертикальной, $W(r, z, t) = \frac{\partial \eta(r, z, t)}{\partial t}$, и горизонтальной (радиальной), $U(r, z, t)$, компонент скорости частиц, которые имеют вид [236]

$$\begin{aligned}W(r, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nz) p_n(r, t), \\ U(r, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos(nz) q_n(r, t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_n(r, t) &= - \int_0^{\infty} k A(k) J_0(kr) \omega_n(k) \sin(\omega_n(k)t) dk, \\
 q_n(r, t) &= \int_0^{\infty} A(k) J_1(kr) \omega_n(k) \sin(\omega_n(k)t) dk,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка [204].

3.2.3. Равномерные асимптотики решений

Функции $g_n(r, t)$, $p_n(r, t)$, $q_n(r, t)$ определяют пространственно-временную структуру основных компонент полей ВГВ. В [236] построены неравномерные асимптотики этих выражений при $r, t \gg 1$ вблизи волновых фронтов отдельной моды. В настоящем разделе рассматривается более сложная задача построения равномерных асимптотик, которые позволяют описывать волновые поля при $r, t \gg 1$ как вблизи, так и вдали от волновых фронтов. С этой целью необходимо заменить в (3.10) функцию Бесселя на ее асимптотику: $J_0(kr) \approx \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \pi/4)$ [66, 204]. Получающийся в результате интеграл может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}
 g_n(r, t) &= I_n^+(r, t) + I_n^-(r, t), \\
 I_n^+(r, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{k}} \exp(it \beta_n(k) - i\pi/4) dk = I_n^+, \\
 I_n^-(r, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{k}} \exp(it \gamma_n(k) - i\pi/4) dk = I_n^-,
 \end{aligned}$$

$$F(k) = \frac{kA(k)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \beta_n(k) = kV + \omega_n(k), \quad \gamma_n(k) = kV - \omega_n(k),$$

где $V = r/t$ и $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$ при $k < 0$. Поскольку $\omega_n(k)$ — монотонно возрастающая функция переменной k , то фазовая функция $\beta_n(k)$ интеграла I_n^+ не имеет стационарных точек на действительной оси, поэтому при больших значениях r, t интеграл I_n^+ экспоненциально мал. Оценим далее интеграл I_n^- . Обо-

значим через $c_n = \omega'_n(0) = 1/n$ максимальную групповую скорость отдельной моды ВГВ (групповую скорость длинных волн) [39, 66]. Тогда при $0 < V < c_n$ фазовая функция $\gamma_n(k) = kV - \omega_n(k)$ имеет две стационарные точки на действительной оси: $k_n(V) = n\sqrt{(Vn)^{-2/3} - 1}$ и $-k_n(V)$. Вблизи волнового фронта каждой моды, то есть при $V \rightarrow c_n$, эти две стационарные точки сливаются друг с другом, а также с точкой ветвления $k = 0$. При $V > c_n$ две стационарные точки $\pm k_n(V)$ располагаются на мнимой оси. Для построения равномерной (по параметру $V = r/t$) асимптотики интеграла I_n^- , позволяющей описывать дальние волновые поля как вблизи, так и вдали от волновых фронтов, необходимо выполнить регулярную замену переменной $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $\gamma_n(k) = kV - \omega_n(k)$ в новую функцию $\tau(s) = -\sigma s + s^3/3$ [66, 120, 212, 213]. Таким образом,

$$\gamma_n(k(s)) = -\sigma s + s^3/3. \quad (3.12)$$

При этом стационарным точкам $\pm k_n(V)$ будут отвечать точки $\pm\sqrt{\sigma}$. Из этого условия можно получить выражение для σ : $\sigma = (-3\gamma_n(k_n(V))/2)^{2/3}$. В результате неявной замены переменных (3.12) интеграл I_n^- примет вид

$$I_n^- = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(s)}{\sqrt{s}} \exp(it\tau(s) - i\pi/4) ds, \quad G(s) = F(k(s)) \sqrt{\frac{s}{k(s)}} \frac{dk}{ds},$$

где $G(s)$ — регулярная функция переменной s . Действительно, по построению функция $k(s)$ является нечетной регулярной функцией, принимающей положительные значения при $s > 0$. Поэтому $\frac{dk}{ds}$ — четная регулярная функция, $\frac{s}{k(s)}$ — четная регулярная функция, принимающая только положительные значения, $\sqrt{\frac{s}{k(s)}}$ — четная регулярная функция, следовательно, $G(s)$ — регулярная функция как произведение трех регулярных функций. Тогда, в соответствии с общей схемой метода построения равномерных асимптотик (метода эталонных интегралов),

функцию $G(s)$ можно представить в виде [66, 120, 212, 213] $G(s) = P(s) + R(s)$, где $P(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0$ — интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $G(s)$, построенный по точкам $s = 0, \pm\sqrt{\sigma}$, а $R(s)$ — регулярная функция. В результате можно получить:

$$I_n^- = I_P + I_R,$$

$$I_P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{\sqrt{s}} \exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4) ds,$$

$$I_R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(s)}{\sqrt{s}} \exp(it(-\sigma s + s^3/3) - i\pi/4) ds.$$

Интеграл I_P вычисляется аналитически [120, 212, 213, 236]:

$$I_P = \frac{\pi^{3/2}}{2} \left(-\frac{2^{5/3} i b_0}{t^{1/6}} \text{Ai}^2(\theta) - \frac{2 b_1}{t^{1/2}} (\text{Ai}^2(\theta))' + \frac{2^{1/3} i b_2}{t^{5/6}} (\text{Ai}^2(\theta))'' \right), \quad (3.13)$$

$$\theta = -\sigma(t/2)^{2/3}, \quad \text{Ai}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(\theta s + s^3/3)) ds.$$

С помощью интегрирования по частям можно показать, что для I_R справедлива оценка $I_R = O(I_P/t)$. Следовательно, $I_n^- \sim I_P$. Но поскольку $I_n^+ = o(I_n^-)$ и $g_n(r, t) = I_n^+ + I_n^-$, то

$$g_n(r, t) \sim I_P. \quad (3.14)$$

Далее, в силу нечетности функции $F(k)$ имеем

$$b_0 = b_2 = 0, \quad b_1 = \frac{G(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}} = F(k_n(V)) \sqrt{\frac{2}{k_n(V) \gamma_n''(k_n(V))}}. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.13), с учетом (3.14) получаем следующее выражение для главного члена равномерной (по параметру $V = r/t$) асимптотики отдельной волновой моды возвышения

при $r, t \rightarrow \infty$:

$$g_n(r, t) \approx -2\pi^{3/2} \sqrt{\frac{2}{tk_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}} F(k_n(V)) \text{Ai}(\theta) \text{Ai}'(\theta). \quad (3.16)$$

Равномерные асимптотики для вертикальной $p_n(r, t)$ и горизонтальной (радиальной) $q_n(r, t)$ компонент скорости при $r, t \rightarrow \infty$ вычисляются аналогично и имеют вид

$$\begin{aligned} p_n(r, t) &\approx \frac{2^{1/3}\pi^{3/2}}{t^{5/6}} \sqrt{\frac{2}{\sigma k_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}} \times \\ &\times F(k_n(V)) \omega_n(k_n(V)) ((\text{Ai}'(\theta))^2 + \theta(\text{Ai}(\theta))^2), \\ q_n(r, t) &\approx -2\pi^{3/2} \sqrt{\frac{2}{tk_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}} \times \\ &\times F(k_n(V)) \frac{\omega_n(k_n(V))}{k_n(V)} \text{Ai}(\theta) \text{Ai}'(\theta). \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.2.4. Результаты численных расчетов

Для численных расчетов волновых полей был задан следующий вид функций $\Phi(r)$ и $\Pi(z)$, описывающих соответственно радиальную и вертикальную структуру начального смещения изопикн:

$$\Phi(r) = \exp(-r^2/4), \quad \Pi(z) = (-z/\pi)^\alpha (1 + z/\pi)^\beta \quad (\alpha = 3, \beta = 8).$$

Использованные пространственные масштабы и характер изменчивости начального возмущения изопикн соответствуют типичным горизонтальным и вертикальным масштабам нелокальных источников возбуждения ВГВ в океане [39, 79, 112, 236]. На рис. 3.13 показаны результаты расчетов функции $g_1(r, t)$ (первая мода возвышения изопикн) при значениях времени $t = 30$ (а) и $t = 70$ (б). Здесь и далее сплошная линия — результаты точных численных расчетов по формулам (3.10), (3.11), штриховая линия — расчеты по асимптотическим формулам (3.16), (3.17). Точкой отмечено положение волнового фронта. На рис. 3.14 представлены результаты расчетов функции $p_1(r, t)$ (первая мода вертикальной скорости) при значениях времени $t = 30$ (а)

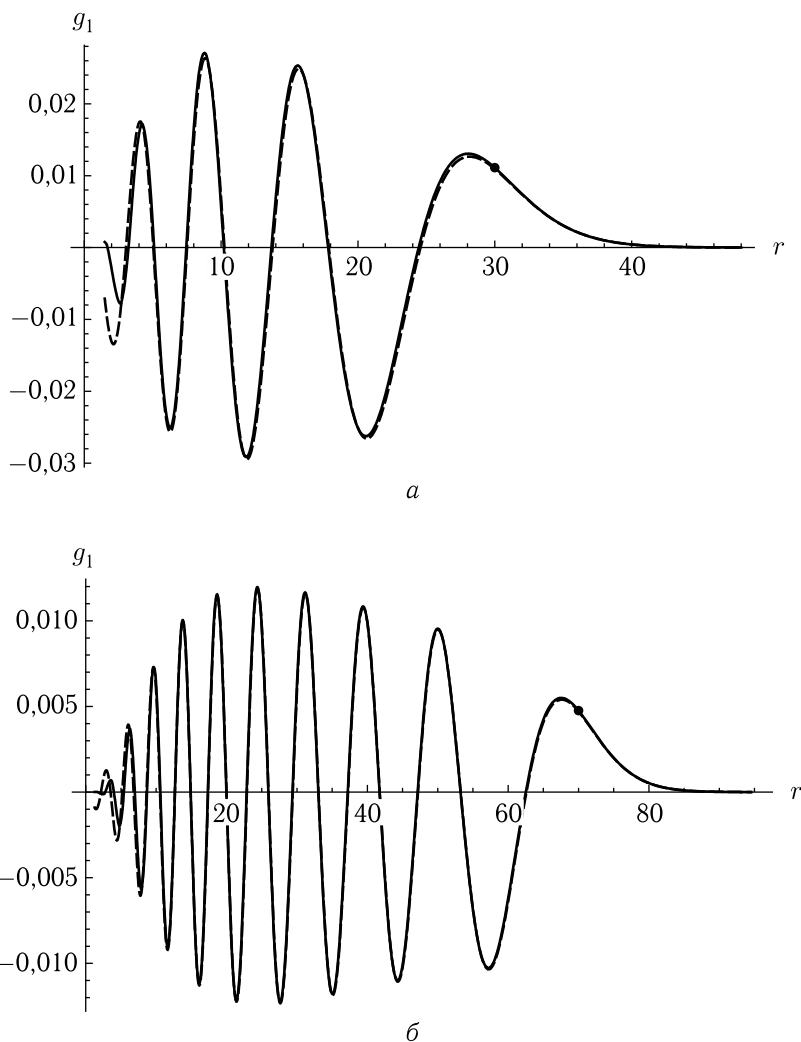


Рис. 3.13. Первая мода возвышения изопикн при $t = 30$ (а) и $t = 70$ (б). Сплошная линия — точное решение, штриховая — равномерная асимптотика

и $t = 70$ (б). Рис. 3.15 иллюстрирует результаты расчетов функции $q_1(r, t)$ (первая мода горизонтальной (радиальной) компоненты скорости) при значениях времени $t = 30$ (а) и $t = 70$ (б). Из приведенных результатов видно хорошее совпадение точных и асимптотических формул при больших значениях r, t .

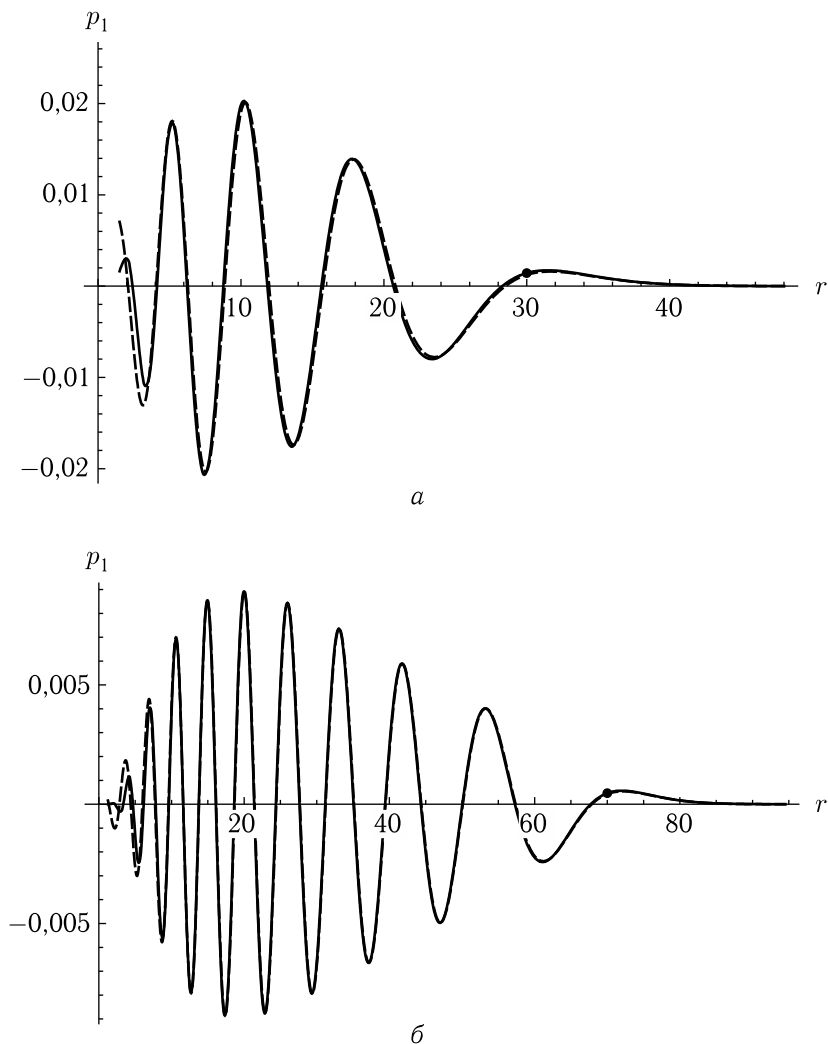


Рис. 3.14. Первая мода вертикальной скорости при $t = 30$ (а) и $t = 70$ (б). Сплошная линия — точное решение, штриховая — равномерная асимптотика

Как показывают численные расчеты, на временах порядка десяти и более периодов частоты плавучести построенные равномерные асимптотики волновых мод позволяют с хорошей степенью точности рассчитывать дальние поля ВГВ как вблизи, так и вдали от волновых фронтов.

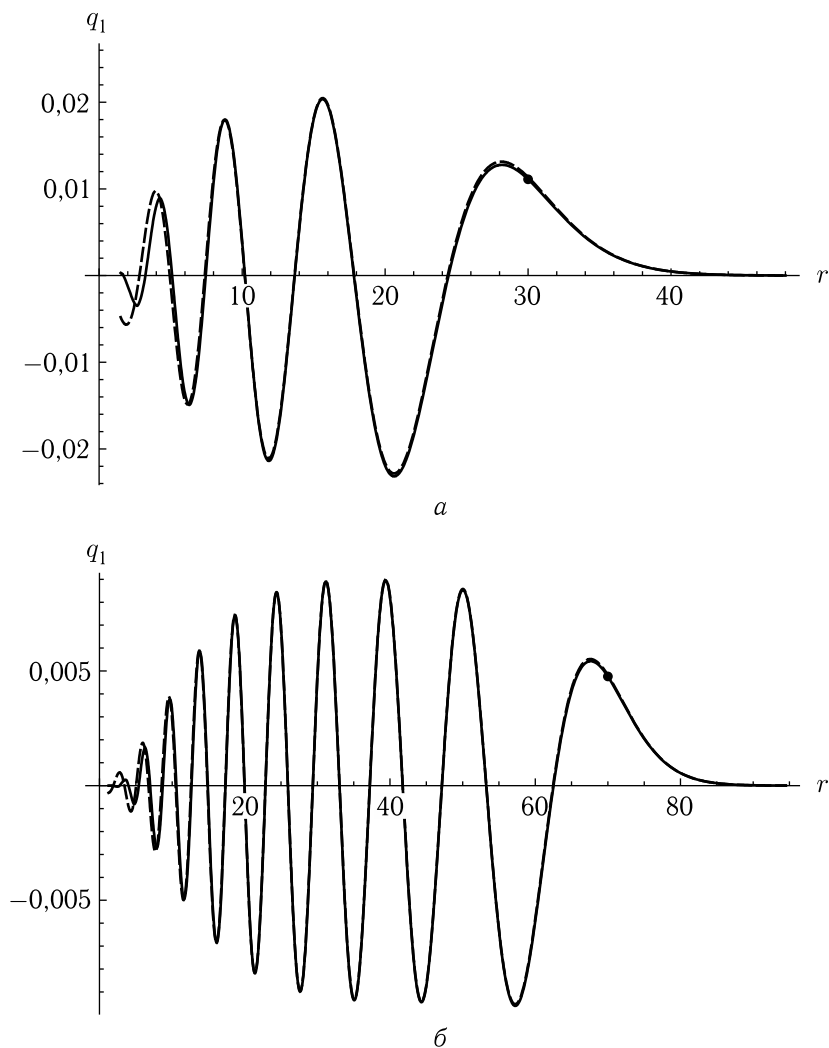


Рис. 3.15. Первая мода горизонтальной (радиальной) скорости при $t = 30$ (а) и $t = 70$ (б). Сплошная линия — точное решение, штриховая — равномерная асимптотика

3.2.5. Заключение

В настоящем разделе для заданного начального возмущения изопоикн (линий равной плотности), обладающего радиальной симметрией и вертикальным распределением с одним максимумом,

построены равномерные асимптотические решения, описывающие динамику пакетов ВГВ на больших временах и расстояниях. Равномерные асимптотики отдельной волновой моды компонент волнового поля выражаются через квадрат функции Эйри и ее производные и позволяют рассчитывать пространственно-временные характеристики возвышения изопикн, вертикальной и горизонтальной (радиальной) компонент скорости как вблизи, так и вдали от волновых фронтов. Используемое в качестве начального модельное распределение возвышения может адекватно описать различные физически обоснованные механизмы генерации пакетов ВГВ в природных стратифицированных средах. Полученные результаты позволяют аналитически представить как возвышение изопикн, так и компоненты скоростей возбуждаемых ВГВ. Построенные равномерные асимптотики дальних полей ВГВ дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей и (кроме того) качественно анализировать найденные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики природных стратифицированных сред. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик начальных возмущений, наблюдаемых в реальных условиях.

3.3. Асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн от импульсного локализованного источника во вращающейся стратифицированной среде

3.3.1. Введение

Геофизическая гидродинамика предлагает большой ряд задач распространения волн в среде, анизотропия которой связана с эффектами вращения и стратификации [110, 111, 222, 238]. В этих задачах корректное применение асимптотических методов дает возможность исследовать ряд физически интересных эффектов, определяемых свойствами гидрофизических сред. Импульсные источники возмущений являются одним из механизмов генерации достаточно интенсивных внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах [59, 79, 112, 187, 210]. Такие источники ВГВ могут иметь как природный (схлопывание области турбулентного перемешивания, быстрая подвижка океанического дна), так и антропогенный (подводные и надземные взрывы) характер [114, 239–241].

В природных стратифицированных средах вращение среды как целого влияет на основные характеристики полей ВГВ. В линейном приближении волновая картина может быть описана многомерными интегралами Фурье или с помощью геометрического подхода в рамках кинематической теории диспергирующих волн,

на основе которой возможно получить аналитическое представление только для фазовых поверхностей (линий), огибающих и волновых фронтов [55, 217, 238]. Более сложной в математическом плане является задача построения равномерных асимптотик интегральных представлений, позволяющих рассчитать амплитудно-фазовую структуру волновых полей. В общем случае интегральные представления аналитически не вычисляемы, и для их анализа могут быть эффективно использованы только различные асимптотические методы. В современной литературе математический аппарат асимптотических методов представлен достаточно полно: многомерный метод стационарной фазы, метод эталонных интегралов, метод канонического оператора Маслова [66, 120, 212, 213, 225]. Асимптотики интегральных представлений позволяют качественно анализировать волновые поля, в том числе и от нелокальных источников возмущений различной физической природы, что актуально, в частности, для решения задач оперативной океанологии.

В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натуральных условиях волновым картинам, что позволяет оценить физические параметры реальных импульсных источников возбуждения ВГВ в природных стратифицированных средах [79, 112, 187, 210]. Поэтому полученные асимптотические результаты дают возможность определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров. Таким образом, математические модели волновой генерации от импульсного источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде могут быть верифицированы, а также использованы для проведения прогнозных оценок.

В [242] была рассмотрена задача о дальних полях ВГВ при стационарном движении источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде. В [236] исследовались неравномерные асимптотики дальних полей ВГВ от начального радиально симметричного возмущения без учета вращения среды. Целью настоящего раздела является построение равномерных асимпто-

тик дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованным импульсным источником возмущений во вращающейся стратифицированной среде конечной глубины.

3.3.2. Постановка задачи, интегральные формы решений

Рассматривается слой $-H < z < 0$ вращающейся как целое с частотой Ω стратифицированной жидкости с постоянной частотой Брента–Вяйсяля $N(z) = N = \text{const}$. В момент времени $t = 0$ точечный источник, находящийся в точке $(0, 0, z_0)$ ($z_0 < 0$), мгновенно выбрасывает жидкость объема q . Тогда возвышение изопикн (поверхностей равной плотности) $\zeta = \zeta(x, y, z, z_0, t)$ в приближении Буссинеска определяется из уравнения [222, 238, 242]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \zeta + f^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + N^2 \Delta \zeta = q \delta'(t) \delta(x) \delta(y) \delta'(z - z_0),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad f = 2\Omega.$$

В качестве граничных условий используется приближение «твердой крышки»:

$$\zeta = 0, \quad z = 0, -H.$$

Начальное условие берется в виде

$$\zeta \equiv 0, \quad t < 0.$$

В безразмерных переменных

$$x^* = \frac{\pi x}{H}, \quad y^* = \frac{\pi y}{H}, \quad z^* = \frac{\pi z}{H}, \quad z_0^* = \frac{\pi z_0}{H},$$

$$\zeta^* = \frac{\pi \zeta}{H}, \quad f^* = \frac{f}{N}, \quad t^* = Nt, \quad q^* = \frac{\pi^3 q}{H^3}$$

поставленная задача формулируется следующим образом (индекс «*» далее опускается):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \zeta + f^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \Delta \zeta = q \delta'(t) \delta(x) \delta(y) \delta'(z - z_0),$$

$$\zeta = 0, \quad z = 0, -\pi; \quad \zeta \equiv 0, \quad t < 0.$$

Фурье-образ возвышения изопикн

$$\begin{aligned} \varphi(\mu, \nu, z, z_0, \omega) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mu x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y, z, z_0, t) \exp(i\omega t) dt \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \frac{1 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} \varphi = iq \frac{\omega}{\omega^2 - f^2} \delta'(z - z_0), \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2, \quad (3.18)$$

и граничному условию

$$\varphi = 0, \quad z = 0, -\pi. \quad (3.19)$$

Решение (3.18)–(3.19) ищется в виде ряда по собственным функциям $\varphi_n = \varphi_n(z, k)$ соответствующей однородной спектральной задачи:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + k^2 \frac{1 - \omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2} \varphi_n = 0, \quad (3.20)$$

$$\varphi_n = 0, \quad z = 0, -\pi. \quad (3.21)$$

Задача (3.20)–(3.21) имеет на отрезке $[-\pi, 0]$ полную ортонормированную (с весом $1 - f^2$) систему собственных функций

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin nz}{\sqrt{1 - f^2}} \text{ и соответствующий набор собственных}$$

значений (дисперсионных кривых) $\omega_n(k) = \sqrt{\frac{k^2 + f^2 n^2}{k^2 + n^2}}$ [39].

Тогда, используя соотношение [243]

$$\delta'(z - z_0) = -(1 - f^2) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \frac{\partial \varphi_n(z_0)}{\partial z_0},$$

можно получить выражение для возвышения изопикн в виде

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, z, z_0, t) = \frac{iq}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\mu x) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) S_n(k) D_n(z, z_0) d\omega, \\ S_n(k) = \frac{\omega(\omega_n^2(k) - f^2)}{k^2(\omega^2 - \omega_n^2(k))}, \quad D_n(z, z_0) = \varphi_n(z) \frac{\partial \varphi_n(z_0)}{\partial z_0}. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл по переменной ω вычисляется с помощью теоремы о вычетах [181], при этом контур интегрирования необходимо сместить в область $\text{Im } \omega > 0$. Тогда, замыкая его в нижнюю полуплоскость и учитывая полюса $\omega = \pm \omega_n(k)$, получаем при $t > 0$ следующее выражение для возвышения в виде суммы мод:

$$\begin{aligned} \zeta(x, y, z, z_0, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x, y, z, z_0, t), \\ \zeta_n(x, y, z, z_0, t) &= \frac{q}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_n^2(k) - f^2}{k^2} \times \\ &\quad \times \cos(\omega_n(k)t) D_n(z, z_0) \exp(-i\mu x) d\mu. \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.3.3. Асимптотики решений

Далее будет рассматриваться отдельная волновая мода, индекс n опускается. Перейдем к полярным координатам, $\mu = k \cos \psi$, $\nu = k \sin \psi$; $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, и проинтегрируем (3.22) по переменной ψ :

$$\zeta(r, z, z_0, t) = \frac{q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2(k) - f^2}{k} \cos(\omega(k)t) D(z, z_0) J_0(kr) dk. \quad (3.23)$$

Заменим в выражении (3.23) функцию Бесселя $J_0(kr)$ на ее асимптотику при $kr \gg 1$: $J_0(kr) \approx \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \pi/4)$ [66, 204]. В результате можно получить:

$$\begin{aligned} \zeta(r, z, z_0, t) &= I^+ + I^-, \\ I^{\pm} &= \int_0^{\infty} F(k) \cos(t(kV \pm \omega(k)) - \pi/4) dk, \quad V = r/t, \\ F(k) &= \frac{q(\omega^2(k) - f^2) D(z, z_0)}{(2\pi)^{3/2} k \sqrt{kr}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Далее будем рассматривать асимптотику слагаемых $I^{\pm}$ при больших значениях t и $V = \text{const}$, то есть в точке, движущейся в радиальном направлении со скоростью V . Поскольку $\omega(k)$ — монотонно возрастающая функция, то фазовая функция $kV + \omega(k)$ интеграла I^+ не имеет стационарных точек

на действительной оси; следовательно, этот интеграл экспоненциально мал при $t \rightarrow \infty$. Обозначим далее $\gamma(k) = kV - \omega(k)$, $K = f\sqrt{(-1 + \sqrt{1 + 3f^{-2}})}/3$ — значение волнового числа, при котором достигается максимум групповой скорости отдельной волновой моды, а через $V_* = \omega'(K)$ — величину этого максимума. Тогда фазовая функция $\gamma(k)$ интеграла I^- при $0 < V < V_*$ имеет две стационарные точки на действительной оси: $k_2 < K < k_1$. Главный член асимптотики I^- определяется вкладом этих точек и может быть вычислен с помощью метода стационарной фазы. В результате можно получить:

$$\begin{aligned} I^- &\approx J^{(1)} + J^{(2)}, \\ J^{(1)} &= \sqrt{\frac{2\pi}{t\gamma''(k_1)}} F(k_1) \cos(\gamma(k_1)t), \\ J^{(2)} &= \sqrt{\frac{-2\pi}{t\gamma''(k_2)}} F(k_2) \sin(\gamma(k_2)t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Асимптотики (3.25) становятся непригодными при $V \rightarrow V_*$, то есть вблизи фронта каждой волновой моды, где стационарные точки сливаются друг с другом, а также с точкой $k = K$, и где, соответственно, $\gamma''(k) \rightarrow 0$. Для нахождения асимптотики интеграла I^- в окрестности волнового фронта отдельной волновой моды (локальной асимптотики) необходимо разложить его амплитудную и фазовую функции в ряды вблизи точки $k = K$, ограничиваясь для амплитуды одним членом, а для фазы — тремя:

$$\begin{aligned} F(k) &= F(K) + \dots, \\ \gamma(k) &= \gamma(K) + \gamma'(K)(k - K) + \frac{\gamma'''(K)}{6}(k - K)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

В результате, заменяя в (3.24) нижний предел интегрирования на $-\infty$, можно получить:

$$I^- \approx \int_{-\infty}^{\infty} F(K) \cos\left(t(\gamma(K) + \gamma'(K)(k - K) + \frac{\gamma'''(K)}{6}(k - K)^3) - \frac{\pi}{4}\right) dk. \quad (3.27)$$

Интеграл (3.27) выражается через функцию Эйри [212, 213]:

$$\text{Ai}(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\Theta u + u^3/3) du.$$

В результате выражение для локальной асимптотики отдельной моды возвышения изопоикн имеет вид

$$I^- \approx 2\pi F(K) \sqrt[3]{\frac{2}{t\gamma'''(K)}} \times \\ \times \cos\left(t\gamma(K) - \frac{\pi}{4}\right) \text{Ai}\left(\gamma'(K) \sqrt[3]{\frac{2t^2}{\gamma'''(K)}}\right). \quad (3.28)$$

Таким образом, при больших временах поле отдельной моды вблизи волнового фронта (переходной зоны) имеет порядок малости $O(1/t^{1/3})$, то есть в $t^{1/6}$ раз больше, чем за фронтом. Ширина (временной интервал) волнового фронта (переходной зоны) каждой моды T определяется условием, чтобы аргумент функции Эйри в (3.28) имел порядок единицы: $T \approx \sqrt{\gamma'''(K)} |\gamma'(K)|^{-3/2}$. Асимптотика (3.28) непригодна вдали от волнового фронта отдельной моды.

Построим асимптотику, которая в окрестности фронта совпадает с (3.28), а вдали от волнового фронта — с выражением (3.25). Для этого необходимо выполнить регулярную замену переменных $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $\gamma(k) = kV - \omega(k)$ интеграла I^- в новую функцию $\tau(s) = C - \sigma s + s^3/3$, имеющую, как и $\gamma(k)$, две стационарные точки. Таким образом,

$$\gamma(k(s)) = C - \sigma s + \frac{s^3}{3}. \quad (3.29)$$

При этом стационарной точке k_1 будет отвечать точка $s_1 = \sqrt{\sigma}$, а стационарной точке k_2 — точка $s_2 = -\sqrt{\sigma}$. Тогда из (3.29) находим:

$$\sigma = \left(\frac{3}{4} (\gamma(k_2) - \gamma(k_1))\right)^{2/3}, \\ C = \frac{\gamma(k_2) + \gamma(k_1)}{2}. \quad (3.30)$$

В результате подстановки (3.29) интеграл I^- преобразуется к виду

$$I^- = \int_P^\infty G(s) \cos \left(t \left(C - \sigma s + \frac{s^3}{3} \right) - \frac{\pi}{4} \right) ds, \quad (3.31)$$

$$G(s) = F(k(s)) \frac{dk}{ds}, \quad \frac{dk}{ds} = \frac{s^2 - \sigma}{\gamma'(k)}, \quad k = k(s),$$

где P — образ точки $k = 0$ при отображении, обратном к $k = k(s)$. Далее, следуя общим принципам построения равномерных асимптотик, функцию $G(s)$ разложим в ряд по степеням $s^2 - \sigma$ [120, 149, 225]:

$$G(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m + B_m s) (s^2 - \sigma)^m. \quad (3.32)$$

Ограничиваясь главным членом разложения (3.32), можно получить:

$$A_0 = \frac{G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma})}{2}, \quad B_0 = \frac{G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma})}{2\sqrt{\sigma}}.$$

Тогда при $s = \pm\sqrt{\sigma}$ имеем

$$G(\sqrt{\sigma}) = F(k_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma}}{\gamma''(k_1)}}, \quad G(-\sqrt{\sigma}) = F(k_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma}}{\gamma''(k_2)}}. \quad (3.33)$$

Подставляя главный член разложения (3.32) в (3.31) и заменяя нижний предел интегрирования P на $-\infty$, можно получить, что

$$I^- = \int_{-\infty}^{\infty} (A_0 + B_0 s) \cos \left(t \left(C - \sigma s + \frac{s^3}{3} \right) - \frac{\pi}{4} \right) ds. \quad (3.34)$$

Интеграл (3.34) выражается через функцию Эйри и ее производную [212, 213]:

$$I^- \approx \frac{\pi(G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma}))}{t^{1/3}} \cos \left(tC - \frac{\pi}{4} \right) \text{Ai}(-\sigma t^{2/3}) + \frac{\pi(G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma}))}{\sqrt{\sigma} t^{2/3}} \sin \left(tC - \frac{\pi}{4} \right) \text{Ai}'(-\sigma t^{2/3}). \quad (3.35)$$

Здесь коэффициенты σ и C заданы формулами (3.30), а величины $G(\sqrt{\sigma})$ и $G(-\sqrt{\sigma})$ определены в (3.33). Асимптотика (3.35)

является равномерной по параметру V при $t \rightarrow \infty$ на любом луче вида $[V_0; +\infty)$, где $V_0 > 0$. Отметим, что поскольку $I^+ = o(I^-)$ при $t \rightarrow \infty$, то по формулам (3.25), (3.28), (3.35) могут быть вычислены асимптотики не только интеграла I^- , но и отдельной моды поля возвышения ζ .

Чтобы показать, что равномерная асимптотика (3.35) переходит в окрестности волнового фронта в локальную (3.28), необходимо решить уравнение $\gamma'(k) = 0$ в приближении (3.26). В результате можно получить

$$k_{1,2} - K = \pm \sqrt{\frac{-2\gamma'(K)}{\gamma'''(K)}}.$$

При малых значениях $k_{1,2} - K$ имеем

$$C = \gamma(K), \quad \sigma = -\gamma'(K) \left(\frac{2}{\gamma'''(K)} \right)^{1/3},$$

$$G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma}) = 2G(0) = F(K) \left(\frac{2}{\gamma'''(K)} \right)^{1/3}.$$

Подставляя эти выражения в (3.35) и пренебрегая слагаемым, содержащим производную функции Эйри (поскольку вблизи фронта это слагаемое имеет более высокий порядок малости), получим в итоге локальную асимптотику (3.28). Равномерная асимптотика (3.35) при больших значениях t и σ , то есть при $\sigma t^{2/3} \rightarrow \infty$, переходит в неравномерную асимптотику (3.25), полученную методом стационарной фазы. Действительно, воспользовавшись соответствующим асимптотическими разложениями функции Эйри и ее производной при больших отрицательных значениях аргумента в виде

$$\text{Ai}(-x) \approx \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\text{Ai}'(-x) \approx -\frac{x^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos \left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

можно показать, что оба слагаемых в (3.35) имеют один и тот же порядок малости $O(1/t^{1/2})$. Таким образом, локальная асимптотика (3.28) и неравномерная асимптотика (3.25) являются

частными случаями равномерной асимптотики (3.35), которая представляет собой основной результат настоящего раздела.

На рис. 3.16, 3.17 представлены результаты расчетов первой моды возвышения ζ для следующих значений безразмерных параметров: $q = 1$, $f = 0,2$, $z = -2$, $z_0 = -1$. Графики зависи-

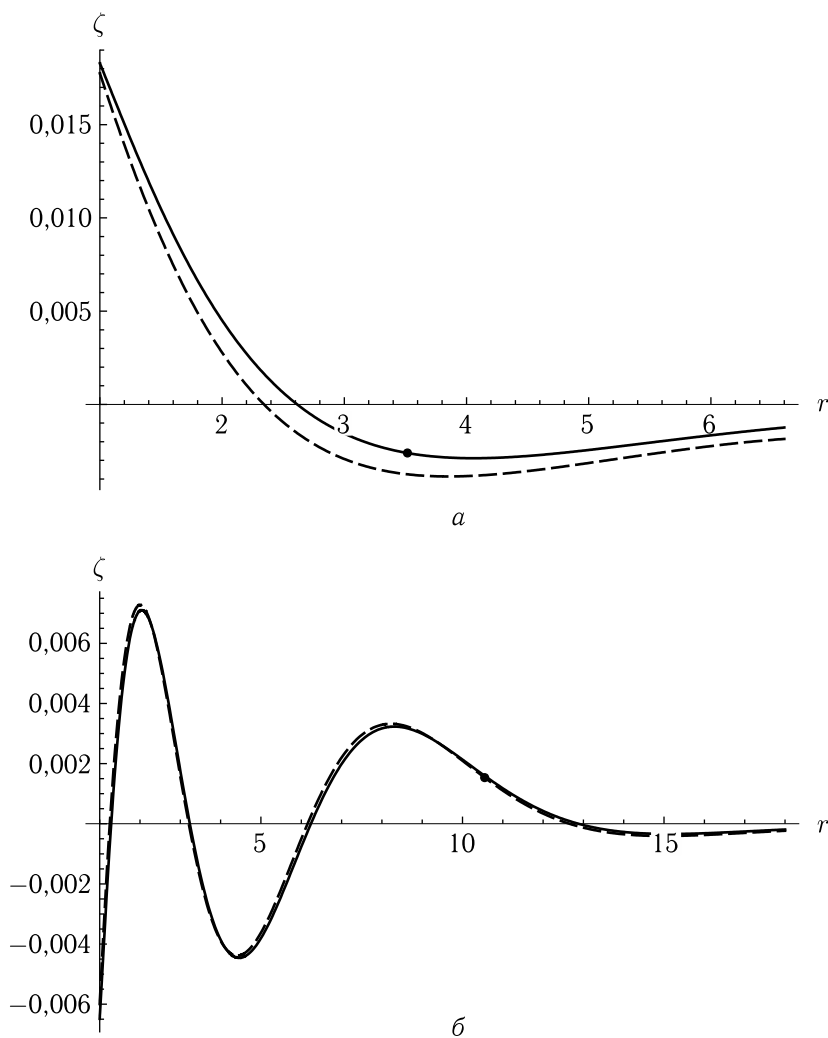


Рис. 3.16. Первая мода возвышения изопоки при $t = 5$ (а) и $t = 15$ (б). Сплошная линия — точное решение, штриховая — равномерная асимптотика

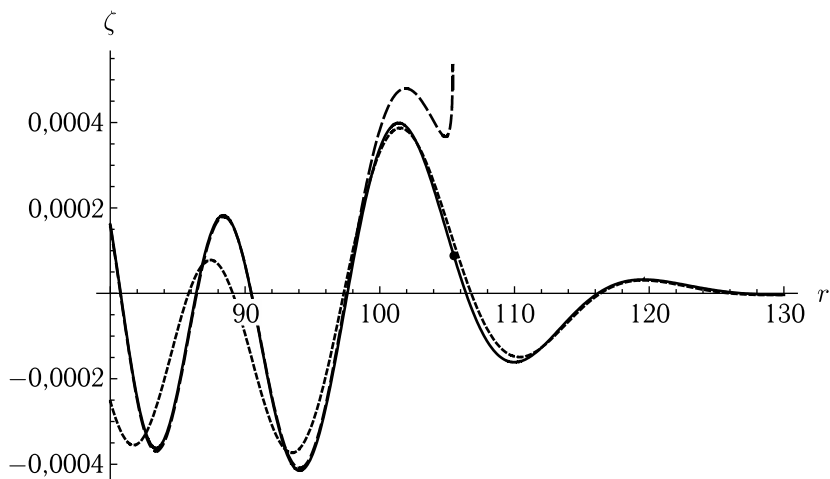


Рис. 3.17. Первая мода возвышения изоповерхности при $t = 150$. Сплошная линия — точное решение, штриховая — приближение стационарной фазы, пунктир — локальная асимптотика

мости $\zeta = \zeta(r)$ построены для следующих моментов безразмерного времени t : на рис. 3.16, *а* — для $t = 5$, на рис. 3.16, *б* — для $t = 15$, на рис. 3.17 — для $t = 150$. Сплошная линия на всех рисунках — точное решение (3.23), точка — положение волнового фронта. Штриховая линия на рис. 3.16 — равномерная асимптотика (3.35). На рис. 3.17 штриховая линия — приближение стационарной фазы (3.25), пунктирная линия — локальная асимптотика (3.28). Численные расчеты показывают, что на расстояниях порядка толщины слоя жидкости и на временах порядка нескольких периодов Брента–Вяйсяля равномерная асимптотика с достаточной степенью точности описывает точное решение. Локальная асимптотика совпадает с точным решением на масштабах не более первой полуволны Эйри. Вдали от волнового фронта приближение стационарной фазы хорошо описывает точное решение.

3.3.4. Заключение

Построенные в настоящем разделе равномерные асимптотические решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики дальних полей внутренних гравитационных волн

от импульсного локализованного источника возмущений во вращающейся как целое стратифицированной среде конечной толщины как вблизи, так и вдали от волновых фронтов отдельной волновой моды.

Полученные результаты описывают характер асимптотического поведения волновых пакетов при больших временах и на большом удалении от источника волн. В частности, асимптотический анализ показывает затухание амплитуды волны как величины, обратной корню квадратному, от времени, за исключением особых случаев вырождения дисперсионного соотношения — обращения в нуль второй производной дисперсионной зависимости. Естественное решение проблемы вырождения — включение в анализ высших дифференциалов дисперсионной зависимости — приводит к решению в терминах функции Эйри и ее производной, а также к более медленному затуханию амплитуды волны на фронте как величины, обратной корню третьей степени от времени.

Наибольший выигрыш при использовании данного подхода можно получить, исследуя эволюцию волновых пакетов, возбуждаемых распределенными в пространстве возмущениями, так как с использованием операции свертки построенные в разделе асимптотики позволяют аналитически рассчитывать дальние волновые поля от нелокальных источников возмущений различной физической природы в стратифицированных вращающихся средах. Найденные асимптотики дают возможность не только эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, но и проводить качественный анализ получаемых решений. Асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик пакетов внутренних гравитационных волн, наблюдаемых в реальных океанических условиях. Такие волновые картины полей могут наблюдаться при дистанционном зондировании, исследовании и измерении внутренних гравитационных волн, возбуждаемых различными источниками возмущений в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных вращающихся стратифицированных средах.



ГЛАВА

ДИНАМИКА ВНУТРЕННИХ
ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН
В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ
СРЕДАХ СО СРЕДНИМИ
СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

4.1. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в океане с произвольными распределениями скоростей сдвиговых течений и частоты плавучести

4.1.1. Введение

В реальном океане внутренние гравитационные волны (ВГВ) распространяются на фоне сдвиговых течений. Поэтому в связи с прогрессом в изучении крупномасштабных океанических волновых процессов изучение динамики и распространения ВГВ в океане с учетом наличия течений является актуальной задачей [65, 110, 111, 244, 245]. В общей постановке описание динамики ВГВ в океане с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной проблемой уже в линейном приближении. В этом случае задача сводится к анализу системы уравнений в частных производных [66, 79, 98, 112]. При одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных. Используя различные приближения, в том числе метод ВКБ, основанный на реалистичном предположении о плавности изменения параметров океанической среды по сравнению с длинами ВГВ, можно построить аналитические решения для модельных распределений частоты плавучести и сдвиговых течений [65, 69, 246]. Поэтому

представляет несомненный интерес изучение ВГВ в океане с произвольным распределением по вертикали как плотности, так и наблюдаемых в морских условиях скоростей фоновых сдвиговых течений [131, 133, 234, 235]. Тем самым появляется возможность изучения амплитудно-фазовых характеристик волновых полей для реальных океанологических параметров. Можно ожидать, что учет неаналитических зависимостей параметров морской среды от вертикальной координаты позволит исследовать новые качественные эффекты волновой генерации.

В настоящем разделе аналитически и численно исследуется генерация ВГВ в океане с произвольным распределением частоты плавучести и скорости сдвигового течения локализованным осциллирующим источником возмущений. В качестве такого механизма возбуждения ВГВ можно рассматривать, например, генерацию волн периодическим течением на склонах поперечных хребтов в морских проливах [79, 98].

4.1.2. Постановка задачи

Рассматривается вертикально стратифицированная среда конечной глубины H . Исходной является линеаризованная относительно невозмущенного состояния система уравнений гидродинамики, которая имеет вид [65, 69, 110]

$$\begin{aligned}\rho_0 \left(\frac{DU_1}{Dt} + \frac{dU}{dz} W \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \quad \rho_0 \left(\frac{DU_2}{Dt} + \frac{dV}{dz} W \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \rho_0 \frac{DW}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g &= 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= Q, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d\rho_0}{dz} W = 0; \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} + V(z) \frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

где $(U(z), V(z), 0)$ — вектор скорости фонового сдвигового течения на горизонте z (ось z направлена вертикально вверх), (U_1, U_2, W) — компоненты возмущений вектора скорости, $\rho_0(z)$ — невозмущенная плотность среды, (p, ρ) — возмущения давления и плотности, $Q(t, x, y, z)$ — плотность распределения

источников массы, g — ускорение свободного падения. Воспользовавшись приближением Буссинеска, можно получить одно уравнение для малых возмущений вертикальной компоненты скорости [65, 66]:

$$\begin{aligned} LW &= \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{DQ}{Dt} \right) \right], \\ L &\equiv \frac{D^2}{Dt^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{D}{Dt} \left(\frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d^2 V}{dz^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) + N^2(z) \Delta, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $N^2(z)$ — квадрат частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести). Граничные условия берутся в виде

$$W = 0, \quad z = 0, -H. \quad (4.2)$$

Решение задачи (4.1)–(4.2) ищется в виде $W(t, x, y, z) = \exp(i\Omega t)w(x, y, z)$, то есть рассматривается гармонический источник возмущений единичной интенсивности. Тогда функция $w(x, y, z)$ определяется из (4.1)–(4.2), где дифференциальный оператор $\frac{D}{Dt}$ имеет вид $\frac{D}{Dt} = i\Omega + U(z)\frac{\partial}{\partial x} + V(z)\frac{\partial}{\partial y}$. Далее ищется функция Грина уравнения (4.1), то есть решение задачи

$$\begin{cases} L\Gamma(x, y, z, z_0) = \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0), \\ \Gamma = 0, \quad z = 0, -H, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $z = z_0$ — горизонт локализации точечного источника возмущений. Волновые возмущения от произвольного нестационарного нелокального источника определяются соответствующей сверткой [65, 66, 69, 246].

Так как при наличии фоновых сдвиговых течений ВГВ могут взаимодействовать с этими течениями и обмениваться с ними энергией, то собственные волновые колебания могут быть экспоненциально нарастающими. Поэтому необходимо, чтобы вертикальный градиент фоновых сдвиговых течений был невелик по сравнению с частотой плавучести. Далее предполагается выполненным условие устойчивости Майлса–Ховарда для числа

Ричардсона [138, 141, 142, 147]:

$$\text{Ri}(z) = N^2(z) \left(\left(\frac{dU}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right)^{-1} > 1/4 \quad (-H < z < 0). \quad (4.4)$$

Если выполнено условие Майлса–Ховарда, то соответствующая спектральная задача не имеет комплексных собственных значений [69, 132, 148, 245]. Характерные значения чисел Ричардсона в акваториях Мирового океана в отсутствие динамической неустойчивости фоновых сдвиговых течений могут находиться в интервале от 2 до 20 [79, 133, 234].

4.1.3. Интегральные представления решения

Решение задачи (4.3) ищется в виде интеграла Фурье:

$$\Gamma(x, y, z, z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu, \nu, z, z_0) \exp(-i\mu x) d\mu. \quad (4.5)$$

Функция $G(\mu, \nu, z, z_0)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Pi G &= -\delta(z - z_0), \\ \Pi &\equiv (\Omega - f)^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(k^2 (N^2(z) - (\Omega - f)^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (\Omega - f) \right), \\ G &= 0, \quad z = 0, -H, \\ k^2 &= \mu^2 + \nu^2, \quad f = f(z) = \mu U(z) + \nu V(z). \end{aligned}$$

Пусть далее $\varphi_1(\mu, \nu, z)$, $\varphi_2(\mu, \nu, z)$ — функции, удовлетворяющие уравнению $\Pi \varphi_{1,2}(\mu, \nu, z) = 0$ и обращающиеся в ноль при $z = 0$ и $z = -H$ соответственно. Тогда можно получить:

$$G(\mu, \nu, z, z_0) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(\mu, \nu, z) \varphi_2(\mu, \nu, z_0)}{(\Omega - f(z_0))^2 B}, & z_0 \leq z < 0, \\ \frac{\varphi_1(\mu, \nu, z_0) \varphi_2(\mu, \nu, z)}{(\Omega - f(z_0))^2 B}, & -H < z \leq z_0, \end{cases}$$

где $B = B(\mu, \nu, \Omega) = \varphi_1(\mu, \nu, -H) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(\mu, \nu, -H)$ — определитель Вронского функций $\varphi_1(\mu, \nu, z)$, $\varphi_2(\mu, \nu, z)$. Функция $B = B(\mu, \nu, \Omega)$ такова, что уравнение $B(\mu, \nu, \omega) = 0$ является

одной из возможных форм записи дисперсионного соотношения для ВГВ в стратифицированном океане со средним сдвиговым течением [65, 69, 245, 246]. Разрешая это уравнение относительно переменной ω , можно получить дисперсионное соотношение в виде $\omega = \omega_n(\mu, \nu)$. Очевидно, что множество решений уравнения $\omega_n(\mu, \nu) = \Omega$ образует дисперсионную кривую L_n : $\mu = \mu_n(\nu, \Omega)$. Полюса функции $G(\mu, \nu, z, z_0)$ — это нули вронскиана $B = B(\mu, \nu, \Omega)$, то есть нули функции $\varphi_1(\mu, \nu, -H)$, которые в свою очередь совпадают с собственными числами $\mu_n = \mu_n(\nu, \Omega)$ вертикальной спектральной задачи

$$\begin{cases} \Pi\varphi = 0, \\ \varphi = 0, \quad z = 0, -H. \end{cases} \quad (4.6)$$

Ясно, что $\varphi_1(\mu_n(\nu), \nu, z) = \varphi_2(\mu_n(\nu), \nu, z) = \varphi_n(z, \nu)$, где $\varphi_n = \varphi_n(z, \nu)$ — собственная функция спектральной задачи (4.6). Для определения функции $\Gamma(x, y, z, z_0)$ необходимо выполнить обратное преобразование Фурье (4.5). Вычеты $\operatorname{res}_{\mu=\mu_n(\nu, \Omega)} G(\mu, \nu, z, z_0)$ функции $G(\mu, \nu, z, z_0)$ выражаются через $\frac{\partial B}{\partial \mu}$. Тогда интегрирование по переменной μ можно провести, используя теорему о вычетах [181]. Можно показать, что имеет место следующее интегральное представление для функции $\frac{\partial B}{\partial \mu}$ при $\mu = \mu_n(\nu)$:

$$\begin{aligned} d_n(\nu) &\equiv \frac{\partial B}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_n(\nu)} = \\ &= - \left(\int_{-H}^0 2(\Omega - f(z))U(z) \left(k^2 \psi_n^2 + \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial z} \right)^2 \right) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-H}^0 2\mu(N^2(z) - (\Omega - f(z))^2) \psi_n^2 dz \right) \Big|_{\mu=\mu_n(\nu)}, \quad \psi_n = \frac{\varphi_n(z)}{\Omega - f(z)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Следовательно,

$$\operatorname{res}_{\mu=\mu_n(\nu, \Omega)} G(\mu, \nu, z, z_0) = R_n, \quad R_n = \frac{\varphi_n(z)\varphi_n(z_0)}{d_n(\nu)(\Omega - f(z_0))^2 \Big|_{\mu=\mu_n(\nu)}}.$$

Тогда, замыкая контур интегрирования по переменной μ в нижней полуплоскости, можно получить:

$$\begin{aligned}\Gamma(x, y, z, z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(x, y, z, z_0), \\ \Gamma_n(x, y, z, z_0) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_n \exp(-i\Theta_n(\nu)) d\nu, \\ \Theta_n(\nu) &= \mu_n(\nu)x + \nu y.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Далее рассмотрим поведение отдельной моды Γ_n вдоль некоторого направления S_α , составляющего угол α с положительным направлением оси Ox , то есть будем считать, что $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$ ($r > 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$). Тогда для получения физически реализуемого поля возмущений, удовлетворяющего условию излучения на бесконечности, необходимо изменить пределы интегрирования в формуле (4.8). Как показано в [69], интегрирование в (4.8) следует выполнять не по всей длине дисперсионной кривой L_n , а лишь вдоль той ее части $l_n(\alpha)$, на которой выполнено условие $\frac{\partial \omega}{\partial S_\alpha} > 0$. Это условие означает, что проекция вектора групповой скорости ВГВ на направление S_α положительна, то есть волновая энергия распространяется наружу от источника. Таким образом, пределы интегрирования в (4.8) заменяются в соответствии с выбором соответствующей кривой $l_n(\alpha)$, и можно получить следующее выражение для вклада n -й моды функции Грина в суммарное поле возмущений:

$$\Gamma_n(x, y, z, z_0) = -\frac{i}{2\pi} \int_{l_n(\alpha)} R_n \exp(-i\Theta_n(\nu)) d\nu,$$

где правая часть представляет собой криволинейный интеграл второго рода по дисперсионной кривой $l_n(\alpha)$, причем из двух возможных направлений обхода этой кривой выбирается то, для которого проекция касательной к дисперсионной кривой на направление $S_{\pi/2+\alpha}$ положительна [65, 69, 246].

4.1.4. Алгоритм вычисления собственных функций и собственных значений основной вертикальной спектральной задачи

Для произвольных функций $N(z)$, $U(z)$, $V(z)$ спектральную задачу (4.6) можно решить только численно. Для ее решения будем использовать следующий алгоритм, позволяющий, в отличие от [66, 223, 247], более точно аппроксимировать коэффициенты, входящие в (4.6). Заменим в дифференциальном операторе Π фиксированное значение Ω на переменную ω и будем считать $\omega = \omega_n(\mu, \nu)$ спектральным параметром, требующим определения; соответственно μ, ν — свободными параметрами. Введем новую функцию $F = \varphi(z)/(\omega - f(z))$, для которой задача (4.6) переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left((\omega - f(z))^2 \frac{\partial F}{\partial z} \right) + k^2 (N^2(z) - (\omega - f(z))^2) F = 0, \\ F = 0, \quad z = 0, -H. \end{cases} \quad (4.9)$$

Для численного решения задачи (4.9) необходимо разбить интервал изменения z ($-H \leq z \leq 0$) на J отрезков (слоев): $I_j = [z_{j-1}, z_j]$ ($j = 1, 2, \dots, J$), где $z_0 = -H$, $z_J = 0$. Далее аппроксимируем выражение $\omega - f$, фигурирующее в коэффициенте перед функцией $\frac{\partial F}{\partial z}$, кусочно-линейной, а коэффициент перед функцией F — кусочно-постоянной функцией, то есть будем считать, что при $z \in I_j$

$$\omega - f = A_j + B_j(z - z_{j-1}) = D_j + B_j z, \quad N^2(z) - (\omega - f)^2 = C_j,$$

где

$$\begin{aligned} A_j &= \omega - f(z_{j-1}), \quad B_j = (f(z_{j-1}) - f(z_j)) / (z_j - z_{j-1}), \\ D_j &= A_j - B_j z_{j-1}, \quad C_j = N^2((z_j + z_{j-1})/2) - (\omega - f((z_j + z_{j-1})/2))^2. \end{aligned}$$

В результате для каждого отрезка (слоя) получается уравнение Эйлера [248],

$$\frac{d}{dz} \left((D_j + B_j z)^2 \frac{dF_j}{dz} \right) + k^2 C_j F_j = 0. \quad (4.10)$$

Общее решение $F_j(z)$ уравнения (4.10) в каждом j -м слое определяется соотношениями между коэффициентами D_j , C_j , B_j .

Укажем возможные случаи, для каждого из них выпишем соответствующее решение и приведем формулы для вычисления количества нулей m_j у полученного решения $F_j(z)$ на отрезке $I_j = [z_{j-1}; z_j]$.

1. Если $B_j \neq 0$ и $B_j^2 > 4k^2 C_j$, то

$$F_j(z) = S_{1j} |D_j + B_j z|^{\lambda_j - 1/2} + S_{2j} |D_j + B_j z|^{-\lambda_j - 1/2},$$

$$\text{где } \lambda_j = \sqrt{B_j^2 - 4k^2 C_j} / 2B_j,$$

$$m_j = \begin{cases} 0, & \text{sign } u_j = \text{sign } u_{j-1}, \\ 1, & \text{sign } u_j \neq \text{sign } u_{j-1}. \end{cases}$$

2. Если $B_j \neq 0$ и $B_j^2 < 4k^2 C_j$, то

$$F_j(z) = |D_j + B_j z|^{-1/2} (S_{1j} \cos(\Phi_j(z)) + S_{2j} \sin(\Phi_j(z))),$$

$$\text{где } \Phi_j(z) = \lambda_j \ln |D_j + B_j z|, \lambda_j = \sqrt{-B_j^2 + 4k^2 C_j} / 2B_j,$$

$$m_j = \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{|\lambda_j \ln |1 + B_j(z_j - z_{j-1})/A_j|| + \pi}{2\pi} \right\rfloor, & \text{sign } u_j = \text{sign } u_{j-1}, \\ 2 \left\lfloor \frac{|\lambda_j \ln |1 + B_j(z_j - z_{j-1})/A_j||}{2\pi} \right\rfloor + 1, & \text{sign } u_j \neq \text{sign } u_{j-1}. \end{cases}$$

Здесь и далее квадратные скобки обозначают целую часть числа.

3. Если $B_j = 0$, $C_j > 0$, то

$$F_j(z) = S_{1j} \cos((k\sqrt{C_j}/A_j)(z - z_{j-1})) + \\ + S_{2j} \sin((k\sqrt{C_j}/A_j)(z - z_{j-1})),$$

$$m_j = \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{|kC_j(z_j - z_{j-1})/A_j| + \pi}{2\pi} \right\rfloor, & \text{sign } u_j = \text{sign } u_{j-1}, \\ 2 \left\lfloor \frac{|kC_j(z_j - z_{j-1})/A_j|}{2\pi} \right\rfloor + 1, & \text{sign } u_j \neq \text{sign } u_{j-1}. \end{cases}$$

4. Если $B_j = 0$, $C_j < 0$, то

$$F_j(z) = S_{1j} \text{ch}((k\sqrt{-C_j}/A_j)(z - z_{j-1})) + \\ + S_{2j} \text{sh}((k\sqrt{-C_j}/A_j)(z - z_{j-1})),$$

$$m_j = \begin{cases} 0, & \text{sign } u_j = \text{sign } u_{j-1}, \\ 1, & \text{sign } u_j \neq \text{sign } u_{j-1}. \end{cases}$$

Постоянные S_{1j} , S_{2j} определяются из условия непрерывности функции $F(z)$ и ее производной на границах слоев:

$$F_{j+1}(z) = F_j(z), \quad \frac{\partial F_{j+1}(z)}{\partial z} = \frac{\partial F_j(z)}{\partial z}, \quad (4.11)$$

$$z = z_j \quad (j = 1, 2, \dots, J-1).$$

Начальные условия берутся в виде

$$F_1(z) = 0, \quad \frac{\partial F_1(z)}{\partial z} = 1, \quad z = -H. \quad (4.12)$$

Так как при решении данной задачи предполагается выполненным условие устойчивости Майлса–Ховарда (4.4), то все собственные числа $\omega_n = \omega_n(\mu, \nu)$ являются вещественными и находятся вне отрезка $[f_-; f_+]$, где f_- (f_+) — минимальное (максимальное) значение функции $f(z)$ на интервале $(-H; 0)$ [65, 66, 245]. На этом свойстве дисперсионных соотношений базируется следующий алгоритм определения собственного числа ω_n . Выберем какое-либо значение ω такое, что $\omega > f_+$ или $\omega < f_-$. Проинтегрируем (4.10)–(4.12), используя выбранное значение ω в качестве начального приближения. Если полученное в результате численного интегрирования решение $F(z)$ имеет на интервале $(-H, 0)$ $m = \sum_{j=1}^J m_j < n - 1$ нулей (n — номер волновой моды), то значение ω надо увеличить. Если функция $F(z)$ имеет на интервале $(-H, 0)$ $m > n - 1$ нулей, то значение ω надо уменьшить. Подбором значения ω можно добиться того, чтобы полученное решение $F(z)$ удовлетворяло условию $F(-H) = 0$, а также имело на интервале $(-H, 0)$ $n - 1$ перемену знака, или, соответственно, n экстремумов. Полученное таким образом значение ω является собственным числом $\omega_n(\mu, \nu)$ n -й волновой моды. Тогда дисперсионные зависимости $\mu = \mu_n(\nu)$ вертикальной спектральной задачи (4.6) могут быть найдены как решения уравнения $\omega_n(\mu_n, \nu) = \Omega$ (Ω — частота пульсаций источника возмущений). Собственные функции $\varphi_n = \varphi_n(z, \nu)$ вычисляются по формуле $\varphi_n = (\omega_n(\mu, \nu) - f(z))F(z)$, где $F(z)$ — полученное численно решение задачи (4.10)–(4.12).

4.1.5. Результаты численных расчетов

Для численных расчетов были использованы типичные распределения квадрата частоты плавучести $N^2(z)$ и скорости одномерного сдвигового течения $U(z)$, приведенные на рис. 4.1, 4.2, которые характерны для многих районов Мирового океана, в частности для акватории Северной Атлантики (проходы Восточно-Азорского хребта) [79,131,133,234,235]. Далее все иллюстрации

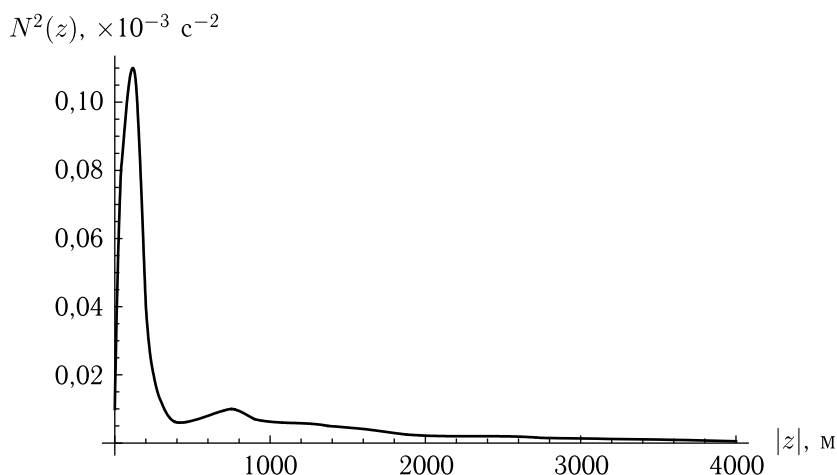


Рис. 4.1. Распределение квадрата частоты плавучести по глубине

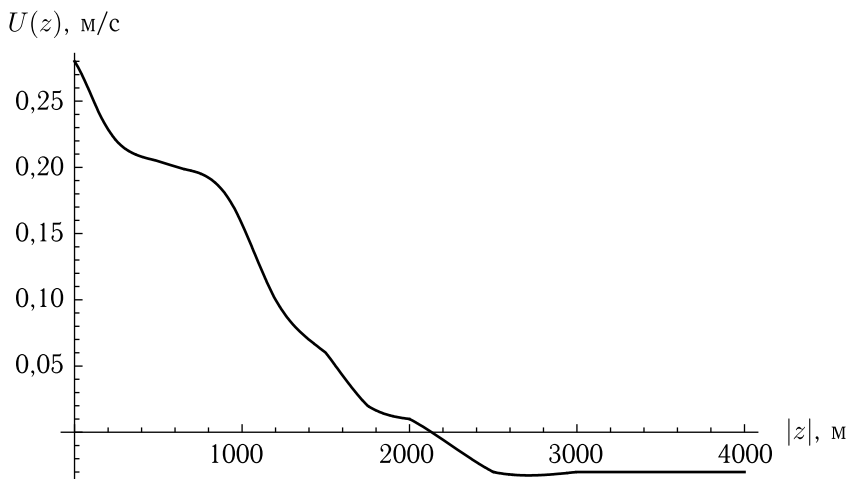


Рис. 4.2. Распределение скорости сдвигового течения $U(z)$ по глубине

приводятся для первых двух волновых мод. На рис. 4.3 представлены результаты расчетов дисперсионной поверхности $\omega_1(\mu, \nu)$. На рис. 4.4–4.9 показаны результаты расчетов дисперсионных зависимостей $\mu = \mu_1(\nu)$ для различных значений частоты пульсаций источника возмущений Ω : на рис. 4.4 значение $\Omega = 0,002 \text{ с}^{-1}$, на рис. 4.5 $\Omega = 0,00205 \text{ с}^{-1}$, на рис. 4.6 $\Omega = 0,0027 \text{ с}^{-1}$, на рис. 4.7 $\Omega = 0,0038 \text{ с}^{-1}$, на рис. 4.8 $\Omega = 0,007 \text{ с}^{-1}$, на рис. 4.9 $\Omega = 0,011 \text{ с}^{-1}$. В силу симметрии дисперсионных кривых (поверхностей) относительно оси μ (плоскости $\mu\omega$) здесь и далее изображены только те их половины, которым соответствуют неотрицательные значения ν . Результаты расчетов показывают сильную изменчивость качественного поведения дисперсионных кривых в зависимости от частоты Ω . При относительно небольших значениях Ω дисперсионная зависимость определяется только одной замкнутой ветвью (рис. 4.4). При увеличении Ω дисперсионные кривые имеют вид двух замкнутых ветвей (рис. 4.5). По мере дальнейшего увеличения Ω нижняя ветвь дисперсионных зависимостей распадается на две незамкнутые

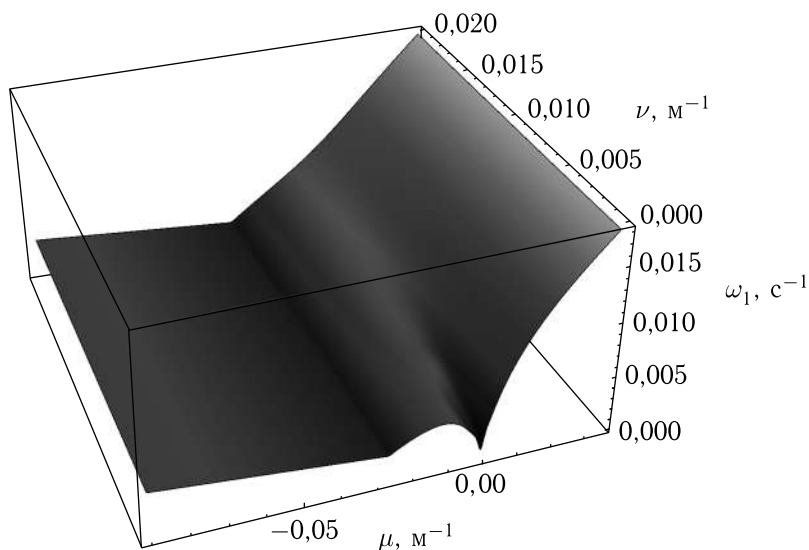


Рис. 4.3. Дисперсионная поверхность первой моды $\omega_1 = \omega_1(\mu, \nu)$

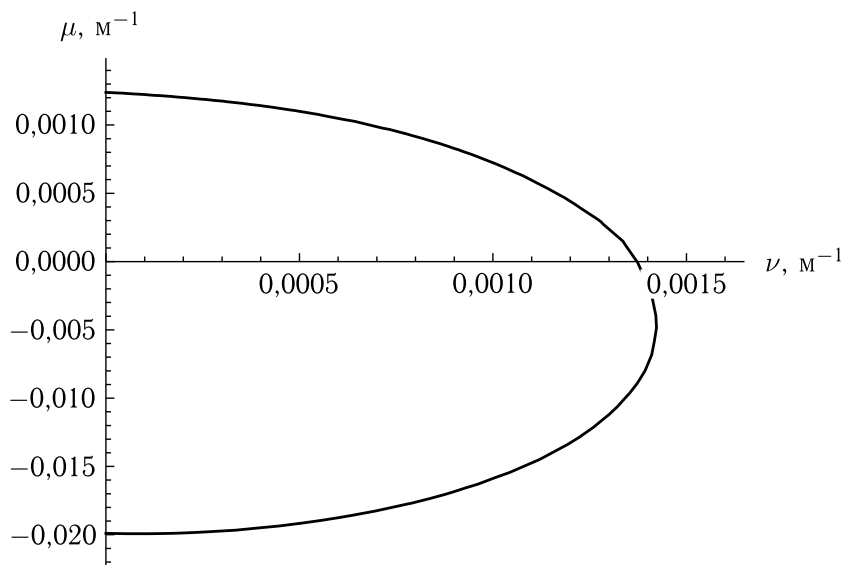


Рис. 4.4. Дисперсионная кривая первой моды при $\Omega = 0,002 \text{ с}^{-1}$ (одна замкнутая ветвь)

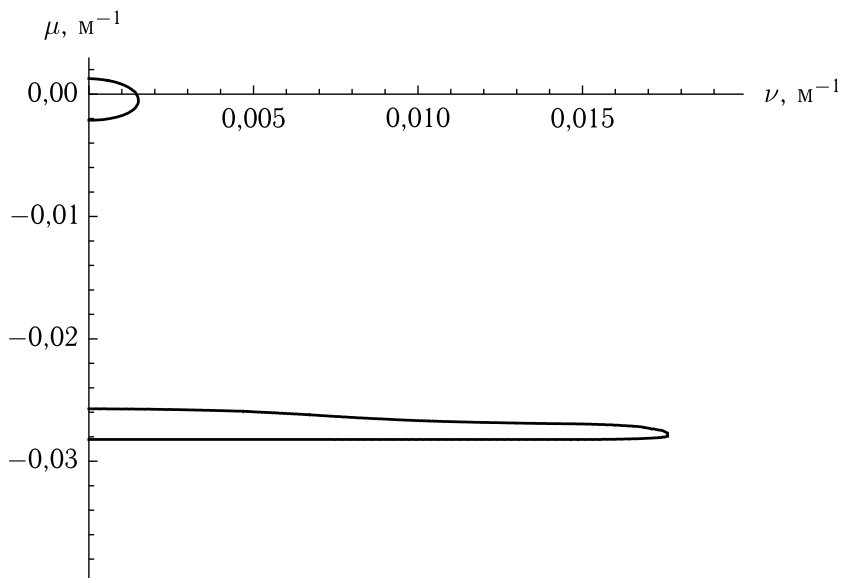


Рис. 4.5. Дисперсионная кривая первой моды при $\Omega = 0,00205 \text{ с}^{-1}$ (две замкнутые ветви)

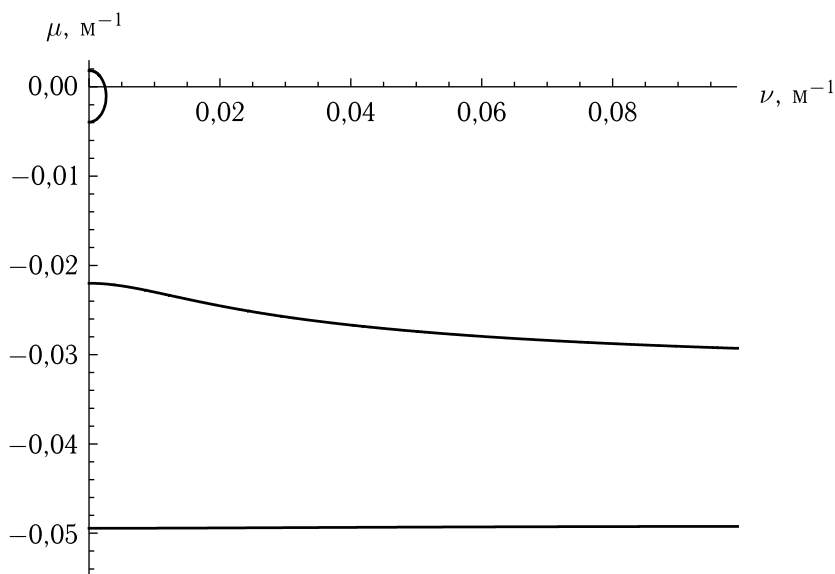


Рис. 4.6. Дисперсионная кривая первой моды при $\Omega = 0,0027 \text{ с}^{-1}$ (верхняя ветвь замкнутая, нижняя ветвь состоит из двух незамкнутых кривых)

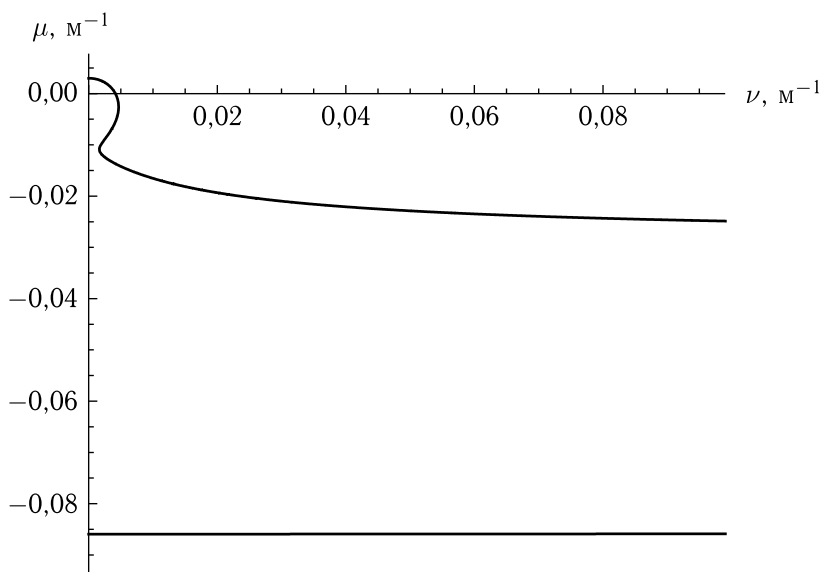


Рис. 4.7. Дисперсионная кривая первой моды при $\Omega = 0,0038 \text{ с}^{-1}$ (верхняя ветвь имеет Ω -образную структуру)

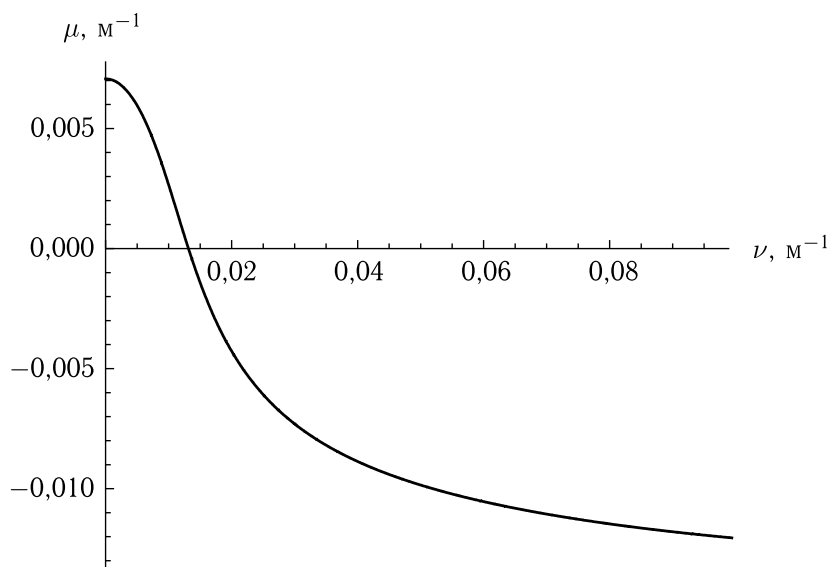


Рис. 4.8. Дисперсионная кривая первой моды при $\Omega = 0,007 \text{ с}^{-1}$ (верхняя ветвь однозначна и пересекает ось ν , нижняя ветвь не показана)

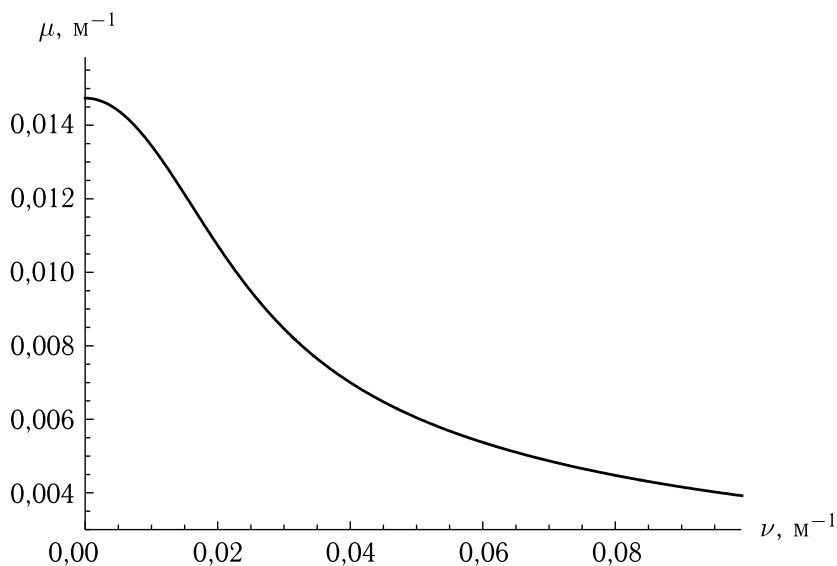


Рис. 4.9. Дисперсионная кривая первой моды при $\Omega = 0,011 \text{ с}^{-1}$ (верхняя ветвь однозначна и не пересекает ось ν , нижняя ветвь не показана)

кривые (рис. 4.6). Эти две кривые при увеличении Ω все более и более расходятся друг от друга. Далее по мере увеличения Ω происходит качественная перестройка дисперсионных кривых, и при некотором значении Ω верхняя ветвь сливается с верхней частью нижней ветви. На некотором интервале значений частоты пульсаций источника наблюдается отчетливая Ω -образная структура получившейся верхней ветви дисперсионной кривой (рис. 4.7), что означает многозначность функции $\mu_1(\nu)$ для некоторых интервалов значений ν . При дальнейшем увеличении Ω верхняя ветвь дисперсионной кривой становится однозначной функцией переменной ν . Причем эта ветвь может как пересекать ось ν и менять знак (рис. 4.8), так и целиком быть расположенной в верхней полуплоскости (рис. 4.9). Отметим, что на рис. 4.8, 4.9 не показана нижняя ветвь дисперсионной кривой $\mu_1(\nu)$.

На рис. 4.10 представлены результаты расчетов дисперсионной поверхности второй моды $\omega_2(\mu, \nu)$. Как видно из представленных численных результатов, дисперсионная поверхность имеет достаточно сложную пространственную структуру.

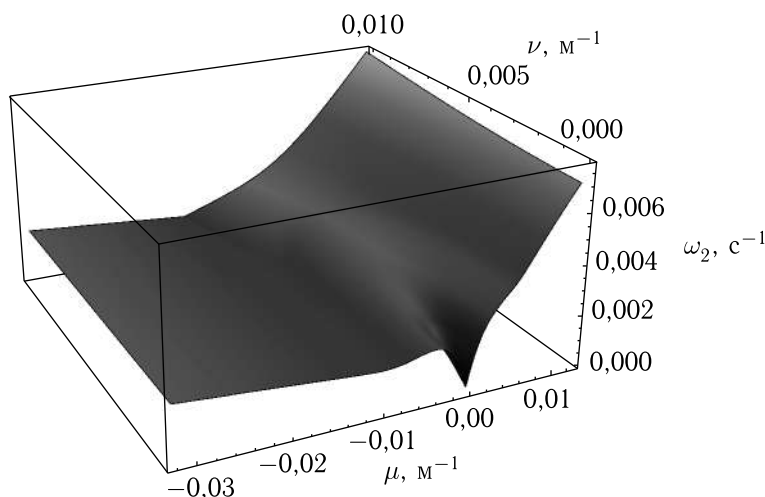


Рис. 4.10. Дисперсионная поверхность второй моды $\omega_2 = \omega_2(\mu, \nu)$

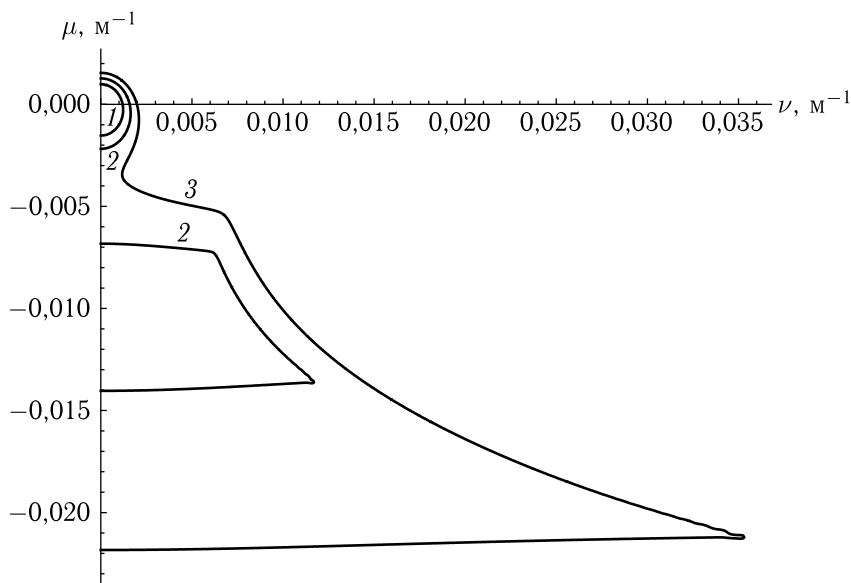


Рис. 4.11. Дисперсионные зависимости второй моды для различных значений Ω : линия 1 — $\Omega = 0,0013 \text{ с}^{-1}$ (одна замкнутая дуга); линии 2 — $\Omega = 0,0016 \text{ с}^{-1}$ (две замкнутые дуги); линия 3 — $\Omega = 0,00185 \text{ с}^{-1}$ (одна замкнутая кривая с тремя точками перегиба)

Численно рассчитанные дисперсионные поверхности могут иметь несколько локальных экстремумов, что соответствует генерации различных типов волновых структур [143, 213, 249, 250]. На рис. 4.11, 4.12 приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей $\mu_2(\nu)$ для различных значений частоты пульсаций источника Ω . Рис. 4.11: $\Omega = 0,0013 \text{ с}^{-1}$ (кривая 1), $\Omega = 0,0016 \text{ с}^{-1}$ (кривые 2), $\Omega = 0,00185 \text{ с}^{-1}$ (кривая 3); рис. 4.12: $\Omega = 0,00215 \text{ с}^{-1}$ (кривые 4), $\Omega = 0,007 \text{ с}^{-1}$ (кривая 5), $\Omega = 0,011 \text{ с}^{-1}$ (кривая 6).

Опишем далее качественную эволюцию дисперсионных соотношений второй моды в зависимости от изменения параметра Ω . При малых значениях Ω дисперсионная кривая, как и в случае первой моды, имеет вид одной замкнутой ветви (линия 1 на рис. 4.11). По мере увеличения Ω и в зависимости от параметров среды (частоты плавучести и профиля скорости сдвигового течения) дисперсионные кривые могут состоять из нескольких

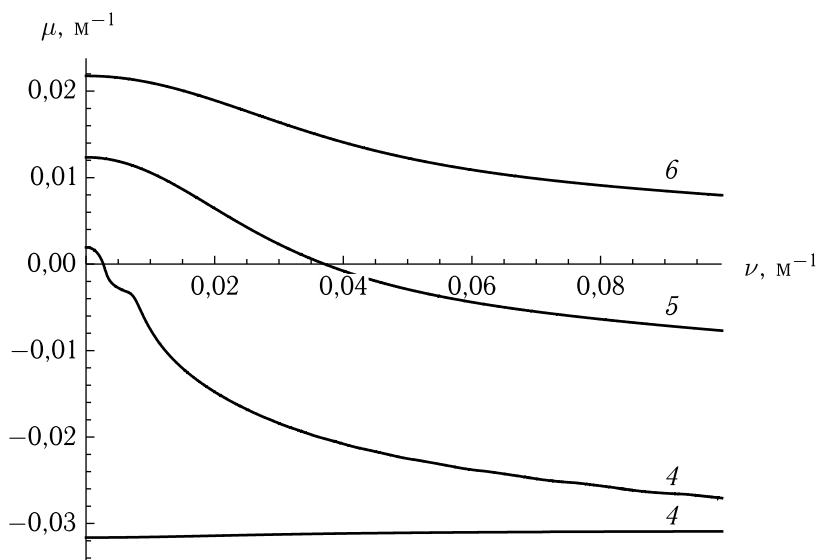


Рис. 4.12. Дисперсионные зависимости второй моды для различных значений Ω . Линия 4: $\Omega = 0,00215 \text{ с}^{-1}$ (две разомкнутые кривые, верхняя кривая имеет три точки перегиба); линии 5: $\Omega = 0,007 \text{ с}^{-1}$ (верхняя кривая имеет одну точку перегиба и пересекает ось ν , нижняя кривая не показана); линия 6: $\Omega = 0,011 \text{ с}^{-1}$ (верхняя кривая имеет одну точку перегиба и не пересекает ось ν , нижняя кривая не показана)

замкнутых ветвей (две линии 2 на рис. 4.11). Численные расчеты показывают, что при увеличении номера моды количество таких замкнутых кривых, как правило, возрастает. Замкнутые ветви могут объединяться и сливаться в одну кривую, имеющую неоднозначную Ω -образную структуру с несколькими точками перегиба (линия 3 на рис. 4.11). При достаточно больших значениях Ω все дисперсионные зависимости имеют вид нескольких разомкнутых однозначных ветвей (рис. 4.12). Отметим, что каждая точка перегиба дисперсионных кривых порождает каустику (волновой фронт), которая представляет собой границу между областью со сложной волновой картиной, являющейся результатом интерференции двух (нескольких) групп волн, и соседней областью, не содержащей никаких волн (либо содержащей на две группы волн меньше) [69, 212, 213, 224].

В общем случае дальние поля ВГВ в океане с фоновыми сдвиговыми течениями можно представить в виде суммы вертикальных волновых мод вида (4.8), где каждая мода является суперпозицией плоских волн [65, 66, 69, 245]. Интегралы такого типа на больших расстояниях от источника возмущений (при больших значениях x, y) можно вычислить методом стационарной фазы [65, 66, 69, 149, 246]. В соответствии с этим методом качественное поведение возбуждаемых полей ВГВ определяется наличием или отсутствием на интервале интегрирования по переменной ν стационарных точек фазовой функции $\Theta_n(\nu) = \mu_n(\nu)x + \nu y$, которые определяются из решения уравнения $\mu'_n(\nu) = -y/x$.

Численные расчеты показывают, что при изменении частоты Ω происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых волновых полей. Линии равной фазы Φ отдельной моды определяются из решения системы уравнений

$$\begin{cases} \mu_n(\nu)x + \nu y = \Omega t - \Phi, \\ \mu'_n(\nu) = -y/x. \end{cases}$$

Здесь первое уравнение означает условие постоянства фазы, а второе — условие ее стационарности. Решение этой системы для каждой волновой моды определяют линии равной фазы Φ , заданные параметрически (с параметром ν):

$$\begin{cases} x(\nu) = \frac{\Omega t - \Phi}{\mu_n(\nu) - \nu \mu'_n(\nu)}, \\ y(\nu) = -\frac{\mu'_n(\nu)(\Omega t - \Phi)}{\mu_n(\nu) - \nu \mu'_n(\nu)}. \end{cases}$$

На рис. 4.13, 4.14 представлены результаты расчетов линий равной фазы Φ (сплошные линии) первой моды возбуждаемых ВГВ для различных параметров волновой генерации. Штриховые линии на рисунках — соответствующие волновые фронты. На рис. 4.13 значения параметров: $\Omega = 0,012 \text{ с}^{-1}$, $t = 3600 \text{ с}$, угол полураствора волнового клина $\alpha_1 = 12,49^\circ$, где $\alpha_1 = -\arctg(\mu'_1(\nu^*))$, ν^* — корень уравнения $\mu''_1(\nu^*) = 0$. Волны внутри волнового клина распространяются вдоль положительного направления оси x от источника возмущений, значения фазы вдоль гребней волн (справа налево): $\Phi = 4\pi, 6\pi, \dots, 12\pi$.

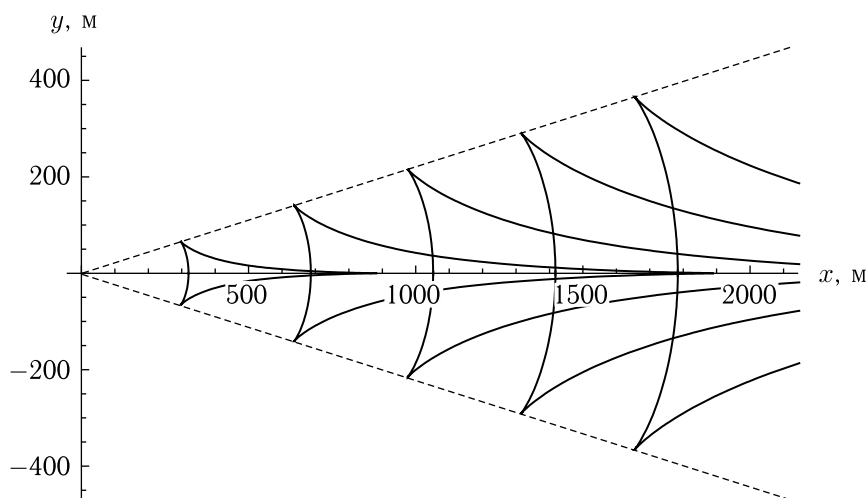


Рис. 4.13. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$, $n = 2, 3, \dots, 6$, в момент времени $t = 3600$ с (первая мода). Частота пульсаций источника $\Omega = 0,012 \text{ с}^{-1}$

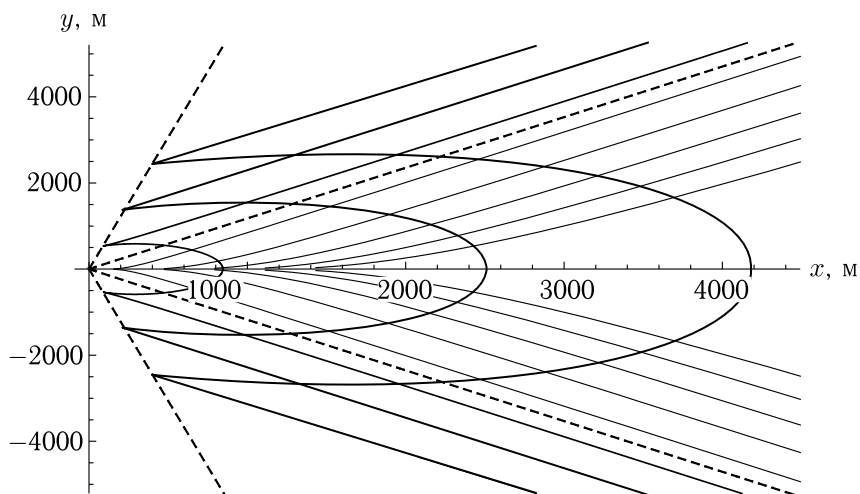


Рис. 4.14. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$, $n = 0, 1, \dots, 7$, в момент времени $t = 3500$ с (первая мода). Частота пульсаций источника $\Omega = 0,0045 \text{ с}^{-1}$

На рис. 4.14 значения параметров: $\Omega = 0,0045 \text{ с}^{-1}$, $t = 3500$ с, угол полураствора внешнего волнового клина $\alpha_1 = 80,72^\circ$, угол полураствора внутреннего волнового клина $\alpha_0 = 49,63^\circ$. Как и выше, $\alpha_1 = -\arctg(\mu'_1(\nu^*))$, где ν^* — корень уравнения $\mu''_1(\nu^*) = 0$.

Величина α_0 определяется равенством $\alpha_0 = -\arctg(\mu'_1(\nu_0))$, где ν_0 — положительный корень уравнения $\mu'_1(\nu) = \mu_1(\nu)/\nu$. Волны во внутреннем клине (волны первого типа) распространяются в направлении источника, расположенного в начале координат. Волны во внешнем клине (волны второго типа) распространяются в направлении от источника в начале координат. Фаза вдоль гребней волн первого типа (слева направо): $\Phi = 6\pi, 8\pi, \dots, 14\pi$. Фазы вдоль гребней волн второго типа (справа налево): $\Phi = 0, 2\pi, 4\pi$. В момент времени $t = \Phi/\Omega$ происходит превращение волны первого типа в волну второго типа. Для волн второго типа увеличение фазы ведет к приближению соответствующей линии равной фазы к началу координат (положению источника возмущений), а для волн первого типа — к удалению от него. Скорость распространения вершины гребня волны первого типа в направлении источника возмущений равна $\Omega/\mu_1(\infty) < 0$. Скорость распространения точки пересечения гребня волны второго типа с осью x в сторону от источника возмущений равна $\Omega/\mu_1(0) > 0$.

На рис. 4.15, 4.16 приведены результаты численных расчетов фазовой структуры второй моды ВГВ для различных значений частоты Ω . Сплошные кривые на рисунках — линии равной фазы Φ , штриховые линии — соответствующие волновые фронты (каустики). На рис. 4.15 значения параметров были следующие: $t = 3600$ с, $\Omega = 0,00265$ с⁻¹. Угол полураствора волнового клина (внешнего) $\alpha_1 = 52,44^\circ$, угол полураствора внутреннего клина $\alpha_0 = 31,46^\circ$ (направление α_0 задается третьим слева пунктирным лучом). Величина α_0 определяется равенством $\alpha_0 = -\arctg(\mu'_2(\nu_0))$, где ν_0 — положительный корень уравнения $\mu'_2(\nu) = \mu_2(\nu)/\nu$. Значения углов полураствора других трех волновых фронтов α_j ($j = 1, 2, 3$) определяются локальными экстремумами функции $\mu'_2(\nu)$: $\alpha_j = -\arctg(\mu'_2(\nu_j^*))$, где ν_j^* — корни уравнения $\mu''_2(\nu_j^*) = 0$. Волны во внутреннем клине (волны первого типа) бегут влево (к началу координат), волны во внешнем клине (волны второго типа) бегут вправо (от начала координат). Фаза вдоль гребней волн первого типа (слева направо):

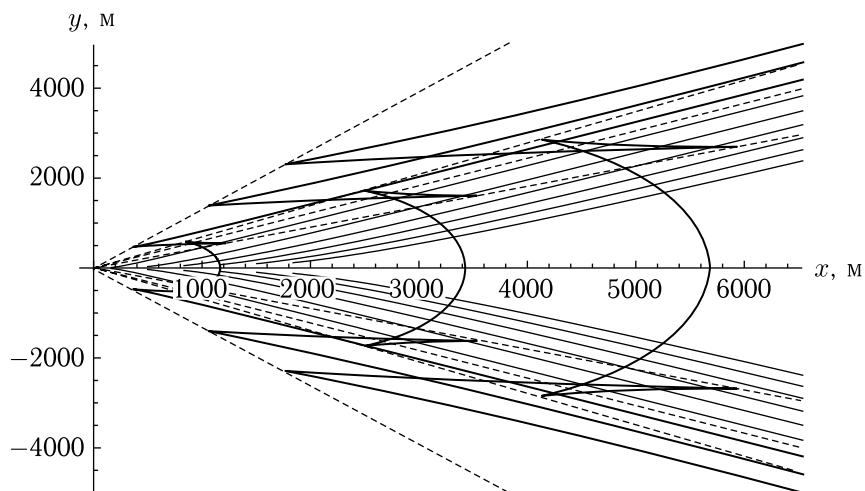


Рис. 4.15. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$, $n = -1, 0, \dots, 7$, в момент времени $t = 3600$ с (вторая мода). Частота пульсаций источника $\Omega = 0,00265$ с $^{-1}$.

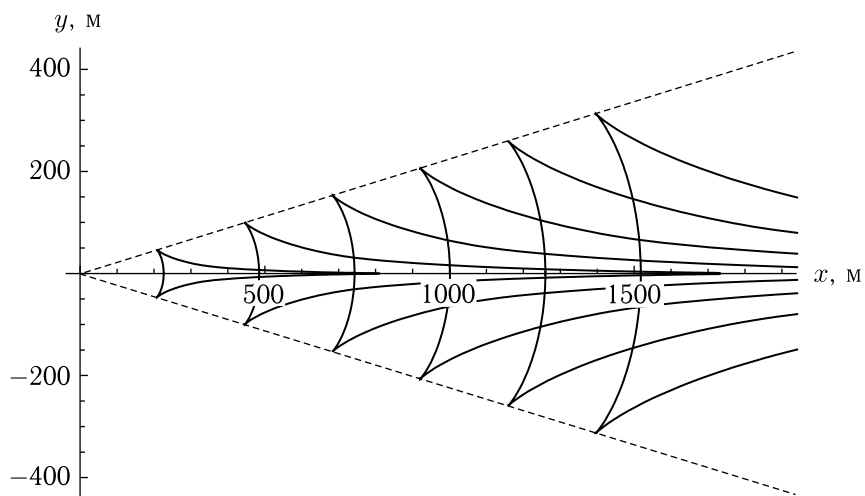


Рис. 4.16. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$, $n = 1, 2, \dots, 6$, в момент времени $t = 3600$ с (вторая мода). Частота пульсаций источника $\Omega = 0,012$ с $^{-1}$.

$\Phi = \{4\pi, 6\pi, \dots, 14\pi\}$, фаза вдоль гребней волн второго типа (справа налево): $\Phi = \{-2\pi, 0, 2\pi\}$.

В момент времени $t = \Phi/\Omega$ происходит превращение волны первого типа в волну второго типа. Две другие пары волновых

фронтов образуют с осью x углы $\alpha_2 = 34,79^\circ$ и $\alpha_3 = 24,46^\circ$ соответственно. На рис. 4.16 значения параметров следующие: $\Omega = 0,012 \text{ с}^{-1}$, $t = 3600 \text{ с}$. Волновая область ограничена клином с углом полураствора $\alpha_1 = -\arctg(\mu'_2(\nu^*)) = 12,63^\circ$, где ν^* — корень уравнения $\mu''_2(\nu^*) = 0$. Волны внутри клина бегут вправо (от начала координат), фаза вдоль гребней волн (справа налево): $\Phi = \{2\pi, 4\pi, \dots, 12\pi\}$.

Как показывают численные расчеты, учет вертикальной изменчивости частоты плавучести и фоновых сдвиговых океанических течений приводит к заметному усложнению структуры и качественному разнообразию дисперсионных зависимостей. Вариативность и неоднозначность дисперсионных соотношений являются причиной генерации различных типов волн. В частности, замкнутые ветви дисперсионных кривых могут при определенных волновых числах приводить к возбуждению кольцевых (поперечных) волн. Разомкнутые ветви дисперсионных зависимостей определяют систему корабельных волн. Как показывают численные расчеты, при малых частотах осцилляций источника Ω возбуждаются только кольцевые (поперечные) волны. Причем в некоторых случаях одновременно может возбуждаться более двух волновых пакетов таких волн. Число возбуждаемых пакетов определяется общим количеством отдельных ветвей дисперсионных кривых. При больших значениях Ω возбуждаются только корабельные волны двух типов, причем при увеличении значения частоты осцилляции угол полураствора волновых фронтов уменьшается. Можно также отметить, что существуют такие значения Ω , при которых угол полураствора волнового фронта близок к 90° . Это означает, что при определенных параметрах волновой генерации существуют такие значения ν , при которых $\mu'_n(\nu) \rightarrow \infty$ (рис. 4.4–4.7, 4.11). Поэтому при этих значениях частоты Ω в силу многозначности дисперсионных соотношений волновая картина возбуждаемых полей представляет собой сложную волновую систему, обладающую одновременно свойствами как продольных, так и поперечных волн.

Сравнение результатов настоящего раздела с натурными наблюдениями и численными расчетами внутренних волн показы-

вает, что найденные семейства линий равной фазы качественно верно описывают фазовую структуру возбуждаемых волновых полей [109, 220, 228–232].

4.1.6. Заключение

Исследована генерация внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованным гармоническим источником возмущений в океане с произвольными распределениями по глубине как частоты плавучести, так и компонент фоновых сдвиговых течений. При выполнении условия устойчивости Майлса–Ховарда получено интегральное представление вертикальной компоненты скорости. Для решения спектральной задачи предложен численный алгоритм расчетов дисперсионных зависимостей, определяющих фазовую структуру возбуждаемых полей. Приведены результаты численных расчетов дисперсионных кривых и фазовых картин волновых полей для реальных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений, наблюдаемых в океане. Показано, что при изменении параметров волновой генерации происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн.

4.2. Внутренние гравитационные волны в океане при обтекании подводного препятствия сдвиговым течением

4.2.1. Введение

В природных стратифицированных средах (океан, атмосфера) генерация и распространение внутренних гравитационных волн (ВГВ) в значительной степени связаны с вертикальной и горизонтальной динамиками фоновых сдвиговых течений [79, 112, 130, 222]. В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на эволюцию ВГВ [133, 234, 235, 251, 252]. В общей постановке описание динамики ВГВ в стратифицированной среде с фоновыми полями сдвиговых течений является весьма сложной задачей уже в линейном приближении [66, 67, 130, 222]. В этом случае задача сводится к анализу системы уравнений в частных производных, и при одновременном учете вертикальной и горизонтальной неоднородности эта система уравнений не допускает разделение переменных [64, 132, 222, 247, 253–255]. Для исследования механизма взаимовлияния течений и ВГВ можно задавать различные модельные представления частоты плавучести и скоростей сдвиговых течений [66, 67, 130, 143, 222]. В качестве одного из заметных механизмов возбуждения ВГВ в океане можно рассматривать, например, генерацию волн фоновым (или периодическим приливным) течением на склонах поперечных хребтов в проливах и в подводных каналах [79, 112, 133, 234, 235, 252]. Поэтому целью настоящего раздела является построение решений,

описывающих генерацию ВГВ стратифицированным сдвиговым потоком, набегающим на подводное препятствие.

4.2.2. Постановка задачи

Рассматривается вертикально стратифицированная среда конечной глубины H с фоновым сдвиговым течением, набегающим на одиночную подводную возвышенность (рис. 4.17). Профиль дна описывается функцией $z = -H + h(x, y)$, $h(x, y) \ll H$ (ось z направлена вверх). Сдвиговое течение, направленное вдоль оси x , имеет линейный профиль скорости:

$$U(z) = U_0 + \frac{U_0 - U_H}{H}z; \quad U_0 = U(0) > 0, \quad U_H = U(-H) > 0.$$

Тогда в линейном приближении и приближении Буссинеска вертикальная компонента скорости W удовлетворяет уравнению [67, 143]

$$U^2(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + N^2(z) \Delta W = 0, \quad (4.13)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz},$$

где $N^2(z)$ — квадрат частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести), которая далее предполагается постоянной, $N(z) = N = \text{const}$, g — ускорение свободного падения, $\rho_0(z)$ — невозму-

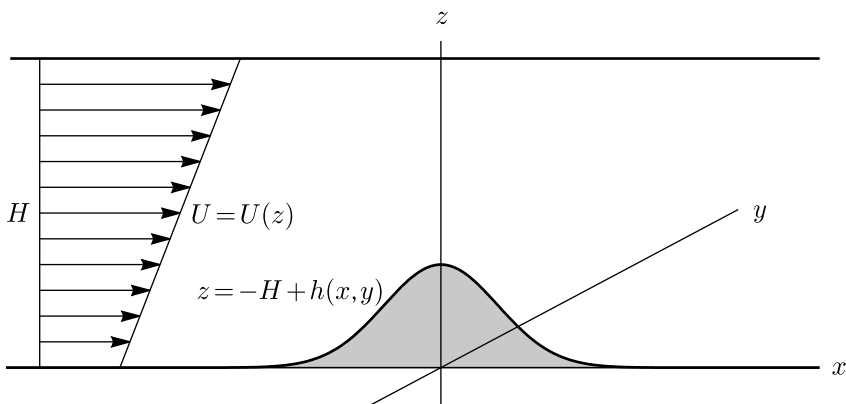


Рис. 4.17. Схема обтекания одиночной подводной возвышенности стратифицированным потоком со сдвигом скорости

щенная плотность среды. Также предполагается, что выполнено условие устойчивости Майлса–Ховарда для числа Ричардсона [138, 141, 142, 148]: $\text{Ri} = N^2 \left(\frac{dU}{dz} \right)^{-2} > 1/4$. Граничное условие на поверхности:

$$W = 0, \quad z = 0. \quad (4.14)$$

Линеаризованное граничное условие на дне [66, 67]:

$$W = U(-H) \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}, \quad z = -H. \quad (4.15)$$

В безразмерных переменных

$x^* = \pi x/H$, $y^* = \pi y/H$, $z^* = \pi z/H$, $W^* = \pi W/NH$,
 $M(z^*) = \pi U(z^*)/NH = a + bz^*$, $a = \pi U_0/NH$, $b = (U_0 - U_H)/NH$
 (индекс «*» далее опускается) задача (4.13)–(4.15) имеет вид

$$\begin{cases} M^2(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + \Delta W = 0, \\ W = 0, \quad z = 0, \\ W = M(-\pi) \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}, \quad z = -\pi. \end{cases} \quad (4.16)$$

4.2.3. Интегральные формы решения и численные результаты

Решение задачи (4.16) ищется в виде

$$W(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) \exp(-i\mu x) d\mu, \quad (4.17)$$

где функция $\varphi(\mu, \nu, z)$ определяется из решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \left(\frac{1}{\mu^2 M^2(z)} - 1 \right) \varphi = 0, \quad (4.18)$$

$$\varphi = 0, \quad z = 0; \quad \varphi = -iA(\mu, \nu), \quad z = -\pi, \quad (4.19)$$

$$A(\mu, \nu) = \mu M(-\pi) \tilde{h}(\mu, \nu), \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2,$$

$$\tilde{h}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu y) dy \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp(i\mu x) dx.$$

Построим решение краевой задачи (4.18)–(4.19). Два линейно независимых решения уравнения (4.18) выражаются через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса $I_{\pm i\lambda}$: $f_{\pm}(z, \mu, \nu) = \sqrt{\alpha\mu M(z)} I_{\pm i\lambda}(\alpha\mu M(z))$, $\lambda = \sqrt{\alpha^2 - 1/4}$, $\alpha = k/b\mu$, где функции $f_{\pm}(z, \mu, \nu)$ комплексно сопряжены [67, 143]. Действительное решение, удовлетворяющее граничному условию на поверхности $z = 0$, выглядит следующим образом: $\Phi(z, \mu, \nu) = i(f_+(z, \mu, \nu)f_-(0, \mu, \nu) - f_-(z, \mu, \nu)f_+(0, \mu, \nu))$, или $\Phi(z, \mu, \nu) = -\text{Im}(f_+(z, \mu, \nu)f_-(0, \mu, \nu))$.

Тогда решение краевой задачи (4.18)–(4.19) имеет вид

$$\varphi(z, \mu, \nu) = -iA(\mu, \nu) \frac{\Phi(z, \mu, \nu)}{\Phi(-\pi, \mu, \nu)}.$$

Проведем в (4.17) интегрирование по переменной μ . Для этого контур интегрирования по μ необходимо сместить на комплексной плоскости μ вверх на малое расстояние $\varepsilon > 0$. Это нужно для того, чтобы удовлетворить условию излучения, то есть отсутствию волн вверх по потоку. Тогда при $x \rightarrow -\infty$ интеграл по μ в (4.17) экспоненциально мал. При $x \rightarrow \infty$ контур интегрирования по переменной μ необходимо перевести в нижнюю полуплоскость. Интеграл в нижней полуплоскости экспоненциально мал, и основной вклад в интеграл (4.17) по μ будут давать полюса функции $\varphi(z, \mu, \nu)$, то есть нули функции $\Phi(-\pi, \mu, \nu)$. Эти нули — собственные числа задачи (4.18) с нулевыми граничными условиями, или дисперсионные кривые $\mu = \pm\mu_n(\nu)$. Тогда, учитывая вычеты в полюсах $\mu = \pm\mu_n(\nu)$, вертикальную скорость W из (4.17) можно представить в виде суммы мод W_n [181]:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n,$$

$$W_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(\mu_n(\nu), \nu) B_n \cos(\mu_n(\nu)x) \cos(\nu y) d\nu, \quad (4.20)$$

$$B_n = \Phi(z, \mu_n(\nu), \nu) \left/ \frac{\partial \Phi(-\pi, \mu_n(\nu), \nu)}{\partial \mu} \right|.$$

Отметим, что здесь $\Phi(z, \mu_n(\nu), \nu) = \Phi_n(z, \nu)$, где $\Phi_n(z, \nu)$ — собственные функции задачи (4.18) с нулевыми граничными условиями.

Дисперсионные кривые $\mu_n(\nu)$ рассчитываются либо численно с привлечением алгоритма, описанного в разд. 4.1.4, либо асимптотически с использованием дебаевских асимптотик или приближения Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна для модифицированной функции Бесселя $I_{\pm i\lambda}(\lambda)$ при больших значениях параметра λ [67, 143]. Асимптотический анализ интегралов (4.20) может быть проведен с помощью метода стационарной фазы (неравномерная асимптотика) или метода эталонных интегралов (равномерная асимптотика). Равномерная асимптотика интегралов (4.20) выражается через функцию Эйри и ее производную [66, 67].

Численные расчеты проводились с использованием вычислительной системы «Математика». Значения параметров, величины которых в размерных переменных характерны для условий реального океана, были следующие: $a = 1,35$, $b = 0,27$; тогда $Ri = 13,7$. Параметр b есть величина, обратная квадратному корню из числа Ричардсона: $b = 1/\sqrt{Ri}$. Параметр $a > 1$ определяет отношение скорости течения U_0 у поверхности к максимальной групповой скорости распространения ВГВ в океане, равной NH/π [79, 112]. На рис. 4.18 приведены результаты расчетов

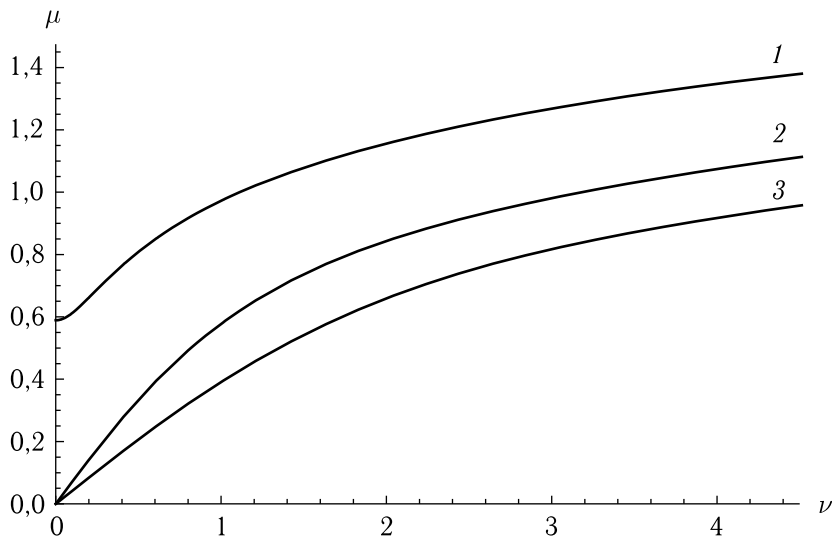


Рис. 4.18. Дисперсионные кривые $\mu = \mu_n(\nu)$, $n = 1, 2, 3$: линия 1 — первая мода, линия 2 — вторая мода, линия 3 — третья мода

дисперсионных кривых первых трех мод $\mu_n(\nu)$, $n = 1, 2, 3$. Отметим, что только у первой моды значение в нуле положительно ($\mu_1(0) > 0$), дисперсионные кривые остальных мод проходят через начало координат: $\mu_n(0) = 0$, $n > 1$. Профиль дна описывается гладкой функцией $h(x, y) = 0,05\pi \exp(-\beta x^2 - \gamma y^2)$, горизонт наблюдения $z = -1$. На рис. 4.19 приведены результаты расчетов функции W_1 при $\beta = 0,1$, $\gamma = 1,0$, обтекаемое препятствие имеет большую протяженность вдоль набегающего течения. На рис. 4.20 представлены результаты расчетов функции W_1 при $\beta = 1,0$, $\gamma = 0,1$, обтекаемое препятствие имеет большую протяженность поперек набегающего течения.

На рис. 4.21–4.24 проиллюстрированы результаты расчетов вертикальной скорости для случая, когда подводная возвышенность вытянута вдоль потока ($\beta = 0,1$, $\gamma = 1,0$). На рис. 4.21 изображен график функции W_2 , на рис. 4.22 — график функции W_3 , на рис. 4.23 — график функции $W_1 + W_2$, а на рис. 4.24 — график функции $W_1 + W_2 + W_3$. Проведенные

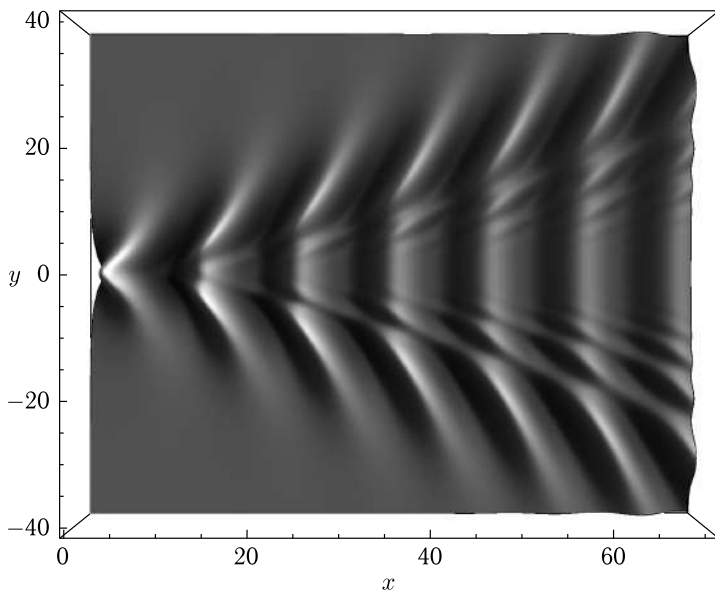


Рис. 4.19. Поле первой моды вертикальной скорости при $\beta = 0,1$, $\gamma = 1$ (препятствие вытянуто вдоль набегающего потока)

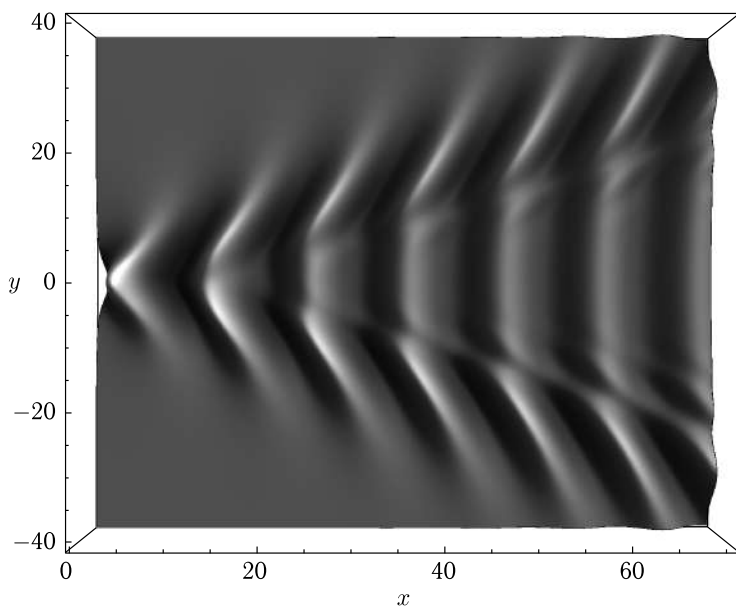


Рис. 4.20. Поле первой моды вертикальной скорости при $\beta = 1$, $\gamma = 0,1$
(препятствие вытянуто поперек набегающего потока)

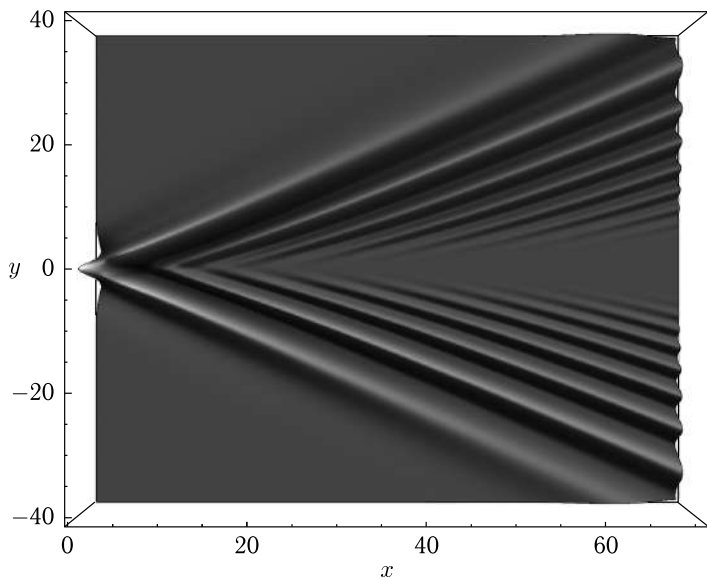


Рис. 4.21. Поле второй моды вертикальной скорости при $\beta = 0,1$, $\gamma = 1$
(препятствие вытянуто вдоль набегающего потока)

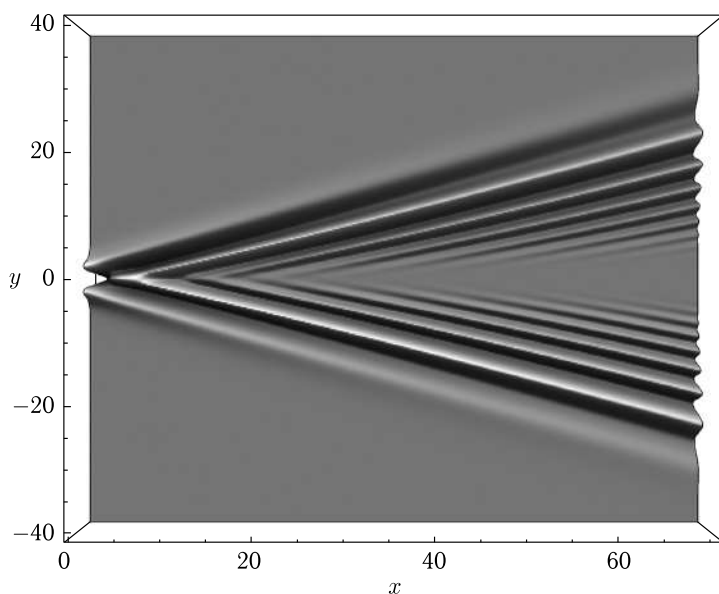


Рис. 4.22. Поле третьей моды вертикальной скорости при $\beta = 0,1$, $\gamma = 1$ (препятствие вытянуто вдоль набегающего потока)

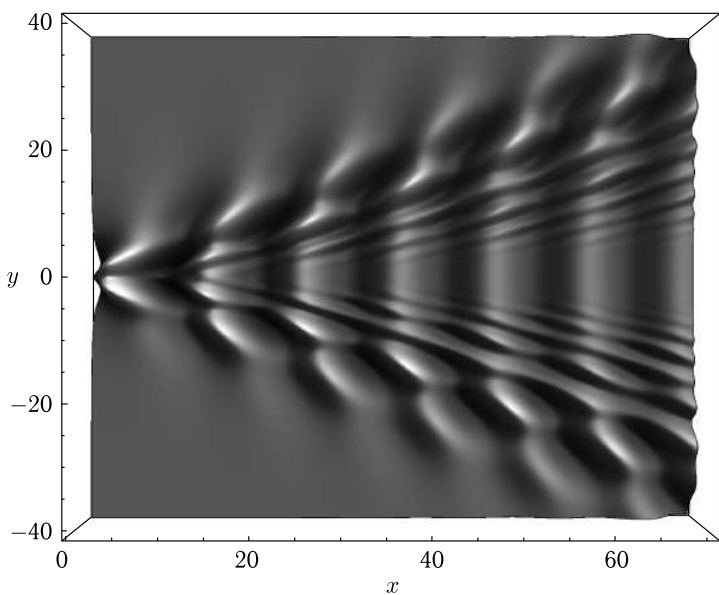


Рис. 4.23. Суммарное поле первых двух мод вертикальной скорости при $\beta = 0,1$, $\gamma = 1$ (препятствие вытянуто вдоль набегающего потока)

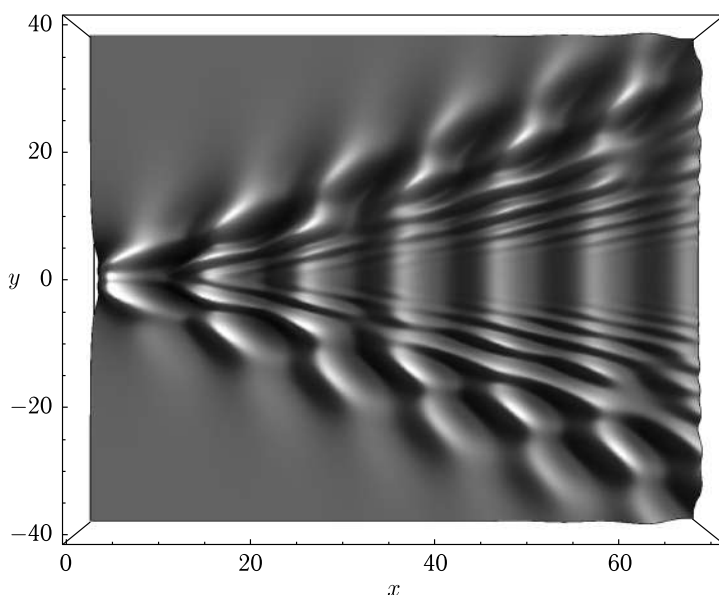


Рис. 4.24. Суммарное поле первых трех мод вертикальной скорости при $\beta = 0,1$, $\gamma = 1$ (препятствие вытянуто вдоль набегающего потока)

численные эксперименты показывают, что поле вертикальной скорости на рис. 4.24 весьма незначительно отличается от соответствующего поля на рис. 4.23. Поэтому при расчете полного поля вертикальной скорости, генерируемого при обтекании одиночной подводной возвышенности сдвиговым течением, можно ограничиться суммированием первых двух–трех мод.

Таким образом, полученные численные результаты свидетельствуют, что на амплитудно-фазовую структуру волнового поля влияют не только параметры течения, но также геометрия обтекаемого препятствия и его пространственная ориентация. Следует также отметить, что выполненные оценки показывают качественное совпадение с результатами натурных наблюдений внутренних волн, проводившихся в различных акваториях Мирового океана, а также модельных и численных экспериментов [109, 220, 228–232]. Это дает возможность использовать полученные асимптотические результаты для выполнения экспресс-оценок и анализа натурных наблюдений.

4.2.4. Заключение

Изучена генерация внутренних гравитационных волн, возбуждаемых при обтекании одиночного подводного препятствия стратифицированным сдвиговым течением. В предположении постоянства частоты плавучести и линейности профиля скорости течения построено аналитическое решение соответствующей спектральной задачи, которое выражается через функцию Бесселя мнимого индекса. Численно исследованы дисперсионные соотношения и фазовые картины возбуждаемых волновых полей для различных режимов волновой генерации, характерных для реальных условий океана. Показано, что учет формы обтекаемого препятствия, а также его ориентации (вдоль или поперек течения) может являться причиной заметной пространственной трансформации возбуждаемых вниз по потоку волновых полей. Полученные результаты дают возможность эффективно рассчитывать амплитудно-фазовую структуру волновых полей, а также исследовать различные режимы волновой генерации для модельных представлений частоты плавучести и сдвиговых течений, в том числе генерацию волновых полей возвышениями океанического дна сложной геометрии.

4.3. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в стратифицированной среде с двухмерными сдвиговыми течениями

4.3.1. Введение

В реальном океане почти всегда имеются горизонтальные течения с вертикальным сдвигом скорости. Поэтому представляет интерес исследование генерации и распространения внутренних гравитационных волн (ВГВ) на фоне сдвигового течения. Одним из основных методов решения задач волновой динамики стратифицированных сред со сдвиговыми течениями является метод Фурье. Полученные с помощью этого метода интегральные представления решений требуют численного и асимптотического анализа [132, 138–142]. Методы прямого численного моделирования не всегда эффективны для исследования генерации ВГВ, особенно с учетом изменчивости основных гидрологических параметров, и требуют верификации и сравнения с асимптотическими решениями модельных задач [98, 103, 112, 255]. Поэтому для исследования ВГВ в реальных природных средах необходимо сочетание как точных численных методов исследования волновых полей, так и различных асимптотических подходов, позволяющих изучать основные качественные особенности возбуждаемых волн.

В [67, 143, 144], а также в разд. 4.1 и 4.2 настоящей работы была исследована генерация полей ВГВ в стратифицированных средах с одномерными сдвиговыми течениями. Целью настоящего раздела является построение решений, описывающих фазовую структуру полей ВГВ, возбуждаемых осциллирующим источником возмущений в слое стратифицированной среды с двухмерными модельными сдвиговыми течениями.

4.3.2. Постановка задачи

Рассматривается вертикально стратифицированная среда конечной глубины H . Исходным является уравнение для вертикальной компоненты скорости $W(x, y, z, t)$, полученное из системы уравнений гидродинамики для невязкой несжимаемой жидкости, линеаризованной относительно фонового сдвигового течения с полем скорости $(U(z), V(z), 0)$. В приближении Буссинеска это уравнение можно представить в виде [66, 67, 256]

$$\frac{D^2}{Dt^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W - \frac{D}{Dt} \left(\frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d^2 V}{dz^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) W + \\ + N^2(z) \Delta W = \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{DQ}{Dt} \right) \right], \quad (4.21)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} + V(z) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz},$$

где $Q(x, y, z, t)$ — плотность распределения источников массы, $N(z)$ — частота Брента-Вяйсяля (частота плавучести), $\rho_0(z)$ — невозмущенная плотность среды, g — ускорение свободного падения. Граничные условия берутся в виде

$$W = 0 \text{ при } z = 0, -H. \quad (4.22)$$

Далее считаются выполненными следующие предположения.

1. В рассматриваемом слое жидкости на горизонте z_0 работает точечный пульсирующий источник массы $Q(x, y, z, t) = qe^{i\Omega t} \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0)$, где $q, \Omega = \text{const}$.
2. Частота плавучести постоянна: $N(z) = N = \text{const}$.

3. Число Ричардсона Ri удовлетворяет условию устойчивости Майлса–Ховарда [130, 138, 222]:

$$Ri = \frac{N^2}{(dU/dz)^2 + (dV/dz)^2} > \frac{1}{4}.$$

4. Компоненты вектора скорости фонового течения $U(z)$ и $V(z)$ — линейные функции вертикальной координаты:

$$U(z) = U_0 + \frac{U_0 - U_H}{H}z, \quad U_0 = U(0), \quad U_H = U(-H),$$

$$V(z) = V_0 + \frac{V_0 - V_H}{H}z, \quad V_0 = V(0), \quad V_H = V(-H).$$

В безразмерных переменных

$$x^* = \frac{\pi x}{H}, \quad y^* = \frac{\pi y}{H}, \quad z^* = \frac{\pi z}{H}, \quad W^* = \frac{WH^2}{\pi^2 q}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{N}, \quad t^* = tN,$$

$$M_x(z^*) = \frac{\pi U}{NH} = a_x + b_x z^*, \quad a_x = \frac{\pi U_0}{NH}, \quad b_x = \frac{U_0 - U_H}{NH},$$

$$M_y(z^*) = \frac{\pi V}{NH} = a_y + b_y z^*, \quad a_y = \frac{\pi V_0}{NH}, \quad b_y = \frac{V_0 - V_H}{NH}$$

(индекс «*» далее опускается) задача (4.21), (4.22) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{D^2}{Dt^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + \Delta W = \\ \quad = \frac{D}{Dt} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{D}{Dt} (e^{i\Omega t} \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0)) \right) \right], \\ \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + M_x(z) \frac{\partial}{\partial x} + M_y(z) \frac{\partial}{\partial y}, \\ W = 0 \text{ при } z = 0, -\pi. \end{cases} \quad (4.23)$$

Параметр $B = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$ есть величина, обратная квадратному корню из числа Ричардсона, $B = 1/\sqrt{Ri}$. Условие устойчивости Майлса–Ховарда означает, что $|B| < 2$. Параметр $A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ определяет отношение модуля скорости течения на поверхности $\sqrt{U_0^2 + V_0^2}$ к максимальной групповой скорости распространения ВГВ в экспоненциально стратифицированной среде конечной глубины, равной NH/π [66, 222].

4.3.3. Интегральное представление решения

Решение (4.23) ищется в виде [66, 67, 69]

$$W(x, y, z, z_0, t) = \frac{e^{i\Omega t}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu y} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z, z_0) e^{-i\mu x} d\mu,$$

где функция $\varphi(\mu, \nu, z, z_0)$ определяется из решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Pi\varphi \equiv (\Omega - f(z))^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 (1 - (\Omega - f(z))^2) \varphi = \\ \quad = (\Omega - f(z))^2 \delta'(z - z_0) - f'(z)(\Omega - f(z))\delta(z - z_0), \\ \varphi(\mu, \nu, -\pi, z_0) = \varphi(\mu, \nu, 0, z_0) = 0, \\ k^2 = \mu^2 + \nu^2, \quad f(z) = \mu M_x(z) + \nu M_y(z). \end{cases} \quad (4.24)$$

В результате (по аналогии с разд. 4.1) для $\varphi(\mu, \nu, z, z_0)$ может быть получена следующая формула:

$$\begin{aligned} \varphi(\mu, \nu, z, z_0) = \\ = \begin{cases} \frac{\varphi_0(\mu, \nu, z)}{B} \left(\frac{f'(z_0)\varphi_H(\mu, \nu, z_0)}{\Omega - f(z_0)} + \frac{\partial \varphi_H(\mu, \nu, z_0)}{\partial z_0} \right), & z_0 \leq z < 0, \\ \frac{\varphi_H(\mu, \nu, z)}{B} \left(\frac{f'(z_0)\varphi_0(\mu, \nu, z_0)}{\Omega - f(z_0)} + \frac{\partial \varphi_0(\mu, \nu, z_0)}{\partial z_0} \right), & -H < z \leq z_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_{0,H}(\mu, \nu, z)$ — функции, удовлетворяющие уравнению $\Pi\varphi_{0,H}(\mu, \nu, z) = 0$ и обращающиеся в ноль при $z = 0$ и $z = -H$ соответственно, $B = B(\mu, \nu, \Omega) = \varphi_0(\mu, \nu, -H) \frac{\partial \varphi_H}{\partial z}(\mu, \nu, -H) -$ вронскиан функций $\varphi_0(\mu, \nu, z)$, $\varphi_H(\mu, \nu, z)$. Функция $B = B(\mu, \nu, \Omega)$ такова, что уравнение $B(\mu, \nu, \Omega) = 0$ является одной из возможных форм записи дисперсионного соотношения для ВГВ в стратифицированном океане со средним сдвиговым течением [65, 69, 245, 246]. При фиксированном значении Ω множество решений этого уравнения образует семейство дисперсионных кривых $L_n: \mu = \mu_n(\nu, \Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$). Отметим, что функ-

ции $\mu = \mu_n(\nu, \Omega)$ являются собственными числами однородной вертикальной спектральной задачи, соответствующей (4.24):

$$\begin{cases} \Pi\varphi(\Omega, \mu, \nu, z) = 0, \\ \varphi(\Omega, \mu, \nu, -\pi) = \varphi(\Omega, \mu, \nu, 0) = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Далее выполняется обратное преобразование Фурье по μ . Интегрирование по переменной μ осуществляется с помощью теоремы о вычетах [181]. В результате вклад полюсов $\mu_n = \mu_n(\nu, \Omega)$ подынтегральной функции в поле вертикальной скорости $W(x, y, z, z_0, t)$ приобретает вид суммы волновых мод

$$\begin{aligned} W(x, y, z, z_0, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x, y, z, z_0, t), \\ W_n(x, y, z, z_0, t) &= -\frac{ie^{i\Omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_n \exp(-i\Theta_n(\nu)) d\nu, \\ \Theta_n(\nu) &= \mu_n(\nu)x + \nu y, \\ R_n &= \frac{\varphi_n(z, \nu)}{d_n(\nu)} \left(\frac{f'(z_0)\varphi_n(z_0, \nu)}{\Omega - f(z_0)} + \frac{\partial\varphi_n(z_0, \nu)}{\partial z_0} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $\varphi_n(z, \nu) = \varphi_0(\mu_n(\nu), \nu, z) = \varphi_H(\mu_n(\nu), \nu, z)$ — собственные функции спектральной задачи (4.25), а величины $d_n(\nu)$ определяются по формуле (4.7).

Пусть S_α — направление, составляющее угол α с положительным направлением оси Ox . Тогда (как и в разд. 4.1) для получения физически реализуемого поля возмущений вдоль S_α интегрирование в (4.26) следует выполнять вдоль той части $l_n(\alpha)$ дисперсионной кривой L_n , на которой выполнено условие $\frac{\partial\omega}{\partial S_\alpha} > 0$. В результате получается следующее выражение для вклада n -й моды в суммарное поле вертикальной скорости:

$$W_n(x, y, z, z_0, t) = -\frac{ie^{i\Omega t}}{2\pi} \int_{l_n(\alpha)} R_n \exp(-i\Theta_n(\nu)) d\nu.$$

Собственные функции $\varphi_n(z, \nu)$ и собственные числа $\mu_n = \mu_n(\nu, \Omega)$ задачи (4.25) определяются с помощью алгоритма, описанного в разд. 4.1.4.

Рассмотрим далее однородную спектральную задачу (4.25), в которой μ и ν считаются свободными параметрами, а $\Omega = \omega_n(\mu, \nu)$ — спектральным параметром. Для модельного линейного двумерного течения возможно построить асимптотики собственных функций $\varphi_n(z, \nu)$ и собственных значений $\omega_n(\mu, \nu)$ этой задачи при малых значениях модуля волнового вектора. Введем полярные координаты: $\mu = k \cos \psi$, $\nu = k \sin \psi$. В результате из (4.25) можно получить:

$$\begin{cases} (\xi_n - (a + bz))^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + (1 - k^2(\xi_n - (a + bz))^2) \varphi_n = 0, \\ \varphi_n = 0 \text{ при } z = 0, -\pi, \end{cases} \quad (4.27)$$

где $\xi_n = \omega_n(k, \psi)/k$, $a = a(\psi) = a_x \cos \psi + a_y \sin \psi$, $b = b(\psi) = b_x \cos \psi + b_y \sin \psi$. Решение задачи (4.27) при малых k ищется в виде [66, 257]

$$\begin{cases} \varphi_n(z, k, \psi) = \varphi_n^{(0)}(z, \psi) + k^2 \varphi_n^{(1)}(z, \psi) + O(k^4), \\ \xi_n(k, \psi) = \xi_n^{(0)}(\psi) + k^2 \xi_n^{(1)}(\psi) + O(k^4). \end{cases}$$

Тогда для определения функций $\varphi_n^{(0)}(z, \psi)$, $\xi_n^{(0)}(\psi)$ можно получить

$$\begin{cases} (\xi_n^{(0)} - (a + bz))^2 \frac{\partial^2 \varphi_n^{(0)}}{\partial z^2} + \varphi_n^{(0)} = 0, \\ \varphi_n^{(0)}(0, \psi) = \varphi_n^{(0)}(-\pi, \psi) = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Общее решение (4.28) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(0)}(z, \psi) = \\ = \sqrt{|\zeta(z, \psi)|} (C_1 \cos(\lambda(\psi) \ln |\zeta(z, \psi)|) + C_2 \sin(\lambda(\psi) \ln |\zeta(z, \psi)|)), \end{aligned}$$

где $\zeta(z, \psi) = \xi_n^{(0)}(\psi) - (a(\psi) + b(\psi)z)$, $\lambda(\psi) = \sqrt{1/b^2(\psi) - 1/4}$ (в силу условия Майлса–Ховарда $|b(\psi)| < 2$ и $\lambda(\psi)$ является вещественнозначной функцией). Значения $C_{1,2}$ определяются из граничных условий. В результате можно получить:

$$\xi_n^{(0)}(\psi) = a(\psi) + \frac{\pi b(\psi)}{e^{\text{sign}(b(\psi))\pi n/\lambda(\psi)} - 1}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, при малых волновых числах собственные значения спектральной задачи (4.25) в первом приближении имеют вид

$$\omega_n(k, \psi) = \left(a(\psi) + \frac{\pi b(\psi)}{e^{\text{sign}(b(\psi))\pi n/\lambda(\psi)} - 1} \right) k + O(k^3). \quad (4.29)$$

4.3.4. Результаты численных расчетов

Собственные значения краевой задачи (4.25) можно представить в виде $\Omega = \omega_n(\mu, \nu)$ или $\mu = \mu_n(\nu, \Omega)$. Далее рассматриваются дисперсионные зависимости $\mu_n(\nu)$ (Ω — фиксированный параметр). В использованных моделях сдвиговых течений параметр $A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ удовлетворяет неравенству $1/2 < A < 3/2$; это означает, что скорость сдвигового течения на поверхности по порядку величины сравнима с максимальной групповой скоростью распространения ВГВ, что наблюдается в условиях Мирового океана [79, 112, 133, 234, 235]. Параметр Ω определяет отношение частоты возбуждаемых волн к частоте плавучести, и в численных расчетах выбирались типичные значения этого параметра, наблюдаемые при измерении ВГВ в реальных океанических условиях [79, 112, 133, 234, 235].

В настоящем разделе используется гидрологическая модель двухмерного линейного сдвигового течения. Это означает, в частности, что выбирая соответствующим образом систему координат, можно (без ограничения общности) считать, что одна из компонент вектора скорости течения не зависит от глубины. Действительно, пусть $(U'(z), V'(z))$ — компоненты вектора скорости сдвигового течения в системе координат $Ox'y'$, которая получается из исходной системы координат Oxy поворотом на некоторый угол α относительно начала координат. Тогда в новой системе координат компоненты вектора скорости течения можно представить в виде

$$\begin{cases} U'(z) = (a_x \cos \alpha + a_y \sin \alpha) + (b_x \cos \alpha + b_y \sin \alpha)z = a_{x'} + b_{x'}z, \\ V'(z) = (-a_x \sin \alpha + a_y \cos \alpha) + (-b_x \sin \alpha + b_y \cos \alpha)z = a_{y'} + b_{y'}z. \end{cases}$$

Поэтому, выбирая угол поворота α таким образом, что $\operatorname{tg} \alpha = -b_x/b_y$, можно получить $b_{x'} = 0$; соответственно, если $\operatorname{tg} \alpha = b_y/b_x$, то $b_{y'} = 0$.

На рис. 4.25, 4.26 представлены результаты расчета дисперсионных кривых $\mu_1(\nu)$ для различных значений частоты Ω

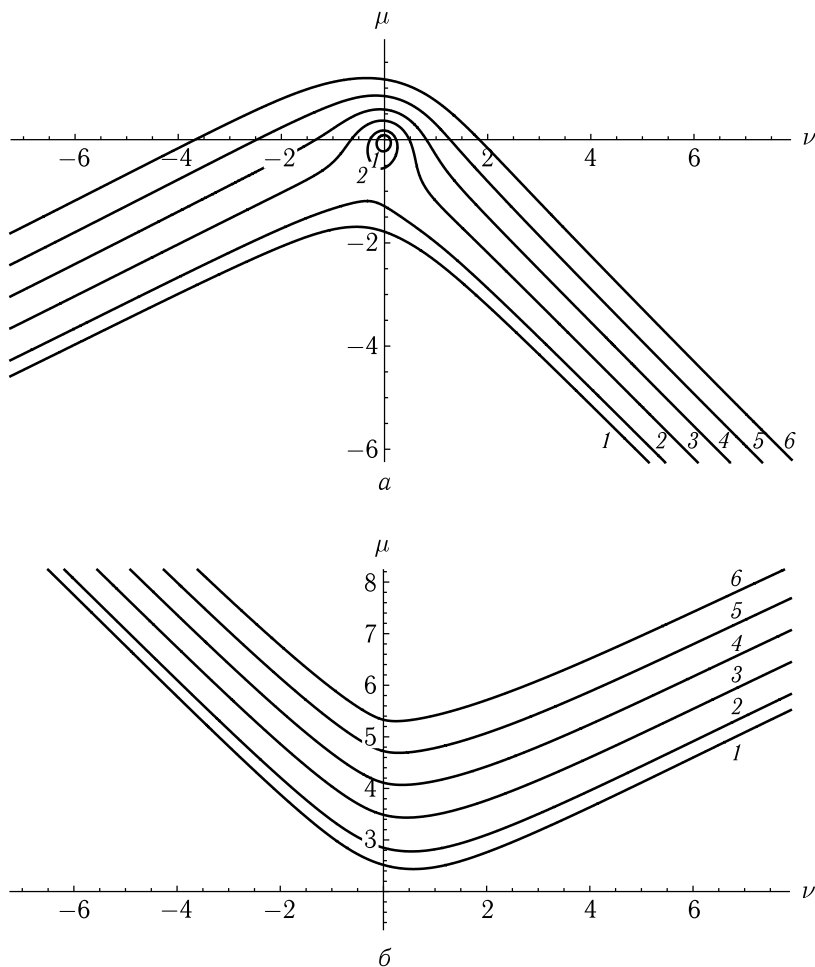


Рис. 4.25. Нижние (а) и верхние (б) ветви дисперсионных кривых для различных значений частоты пульсаций источника Ω : 1 — $\Omega = 0,125$, 2 — $\Omega = 0,25$, 3 — $\Omega = 0,5$, 4 — $\Omega = 0,75$, 5 — $\Omega = 1,0$, 6 — $\Omega = 1,25$; компоненты вектора скорости течения: $U(z) = 2\pi/15$, $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$

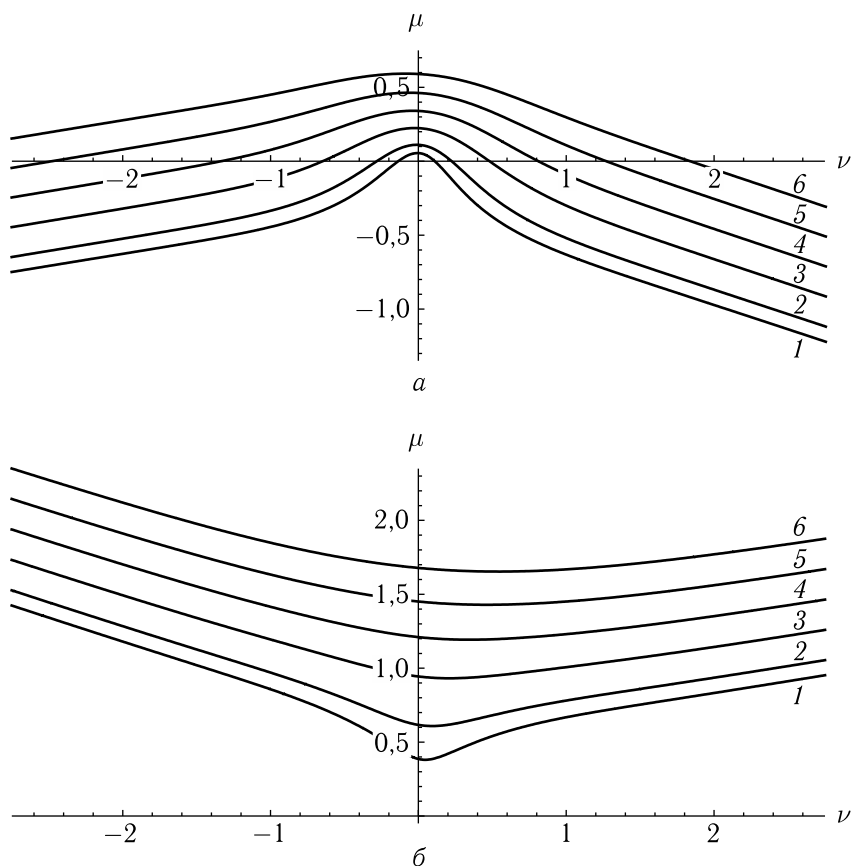


Рис. 4.26. Нижние (а) и верхние (б) ветви дисперсионных кривых для различных значений частоты пульсаций источника Ω : 1 — $\Omega = 0,125$, 2 — $\Omega = 0,25$, 3 — $\Omega = 0,5$, 4 — $\Omega = 0,75$, 5 — $\Omega = 1,0$, 6 — $\Omega = 1,25$; компоненты вектора скорости течения: $U(z) = 2\pi/5$, $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$

и параметров течения: линии 1 — $\Omega = 0,125$, линии 2 — $\Omega = 0,25$, линии 3 — $\Omega = 0,5$, линии 4 — $\Omega = 0,75$, линии 5 — $\Omega = 1,0$, линии 6 — $\Omega = 1,25$. Здесь и далее все расчеты приведены для первой волновой моды, индекс «1» опущен. Исходя из результатов многочисленных океанологических наблюдений фоновых сдвиговых течений в различных акваториях Мирового океана [79, 112, 133, 234, 235] для численных расчетов использовались следующие

модельные распределения компонент вектора скорости течения по глубине: $U(z) = 2\pi/15$ (рис. 4.25, 4.27–4.29), $U(z) = 2\pi/5$ (рис. 4.26, 4.30, 4.31), $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$ (рис. 4.25–4.31).

На рис. 4.27–4.31 изображены линии равной фазы Φ , которые имеют вид параметрического (с параметром ν) семейства кривых

$$\begin{cases} x(\nu) = \frac{\Omega t - \Phi}{\mu(\nu) - \nu\mu'(\nu)}, \\ y(\nu) = -\frac{\mu'(\nu)(\Omega t - \Phi)}{\mu(\nu) - \nu\mu'(\nu)}. \end{cases}$$

Значения параметров для численных расчетов были следующие: $\Omega = 0,45$, $t = 35$ (рис. 4.27), $\Omega = 0,75$, $t = 21$ (рис. 4.28, 4.31), $\Omega = 1,5$, $t = 11$ (рис. 4.29), $\Omega = 0,125$, $t = 125$ (рис. 4.30). Сплошные линии на рис. 4.27–4.31 — линии равной фазы, штриховые линии — волновые фронты.

Численные расчеты показывают, что двухмерность сдвиговых течений является причиной заметной асимметрии соответствующих дисперсионных зависимостей $\mu(\nu)$ относительно оси $O\mu$. Различный характер поведения функций $\mu(\nu)$ при $\nu \rightarrow \pm\infty$ может приводить к появлению дополнительных волновых фронтов. Каждая дисперсионная кривая при фиксированном значении параметра Ω состоит из двух ветвей — нижней и верхней. Значения $\mu(\nu)$ на верхней ветви всегда больше нуля, и эта ветвь представляет собой одну разомкнутую линию с одним минимумом, причем значение этого минимума увеличивается при увеличении параметра Ω . Значения $\mu(\nu)$ на нижней ветви могут быть как положительными, так и отрицательными, и эта ветвь может состоять как из одной, так и из двух линий. При относительно небольших значениях параметра Ω нижняя ветвь может состоять из одной замкнутой и одной разомкнутой кривой. Далее, по мере увеличения частоты Ω происходит качественная перестройка этих двух кривых, и при некотором значении Ω ветви могут сливаться, образуя одну Ω -образную линию, отвечающую многозначности функции $\mu(\nu)$ для определенных интервалов значений ν . По мере дальнейшего увеличения параметра Ω

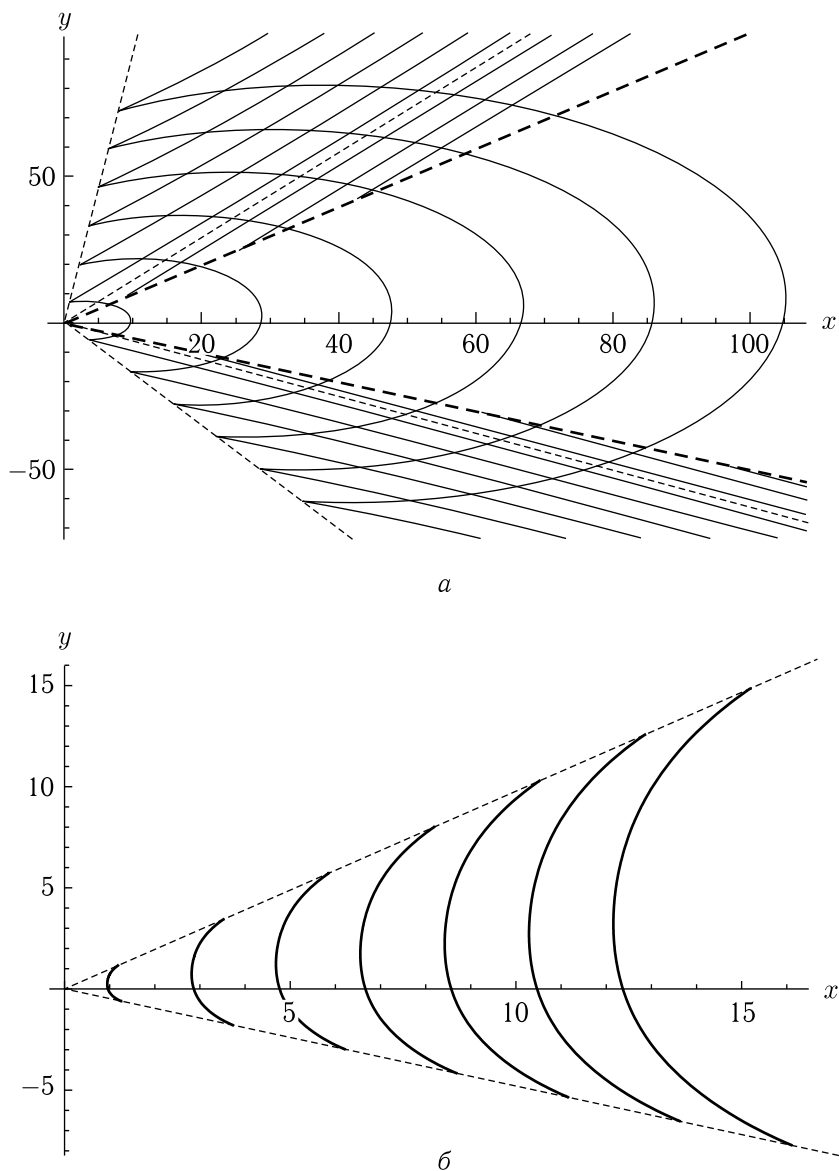


Рис. 4.27. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$ в момент времени $t = 35$ для нижней (а) и верхней (б) ветвей дисперсионной кривой: $n = -3, -2, \dots, 5$ (а), $n = -4, -3, \dots, 2$ (б). Частота пульсаций источника $\Omega = 0,45$, компоненты вектора скорости течения: $U(z) = 2\pi/15$, $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$

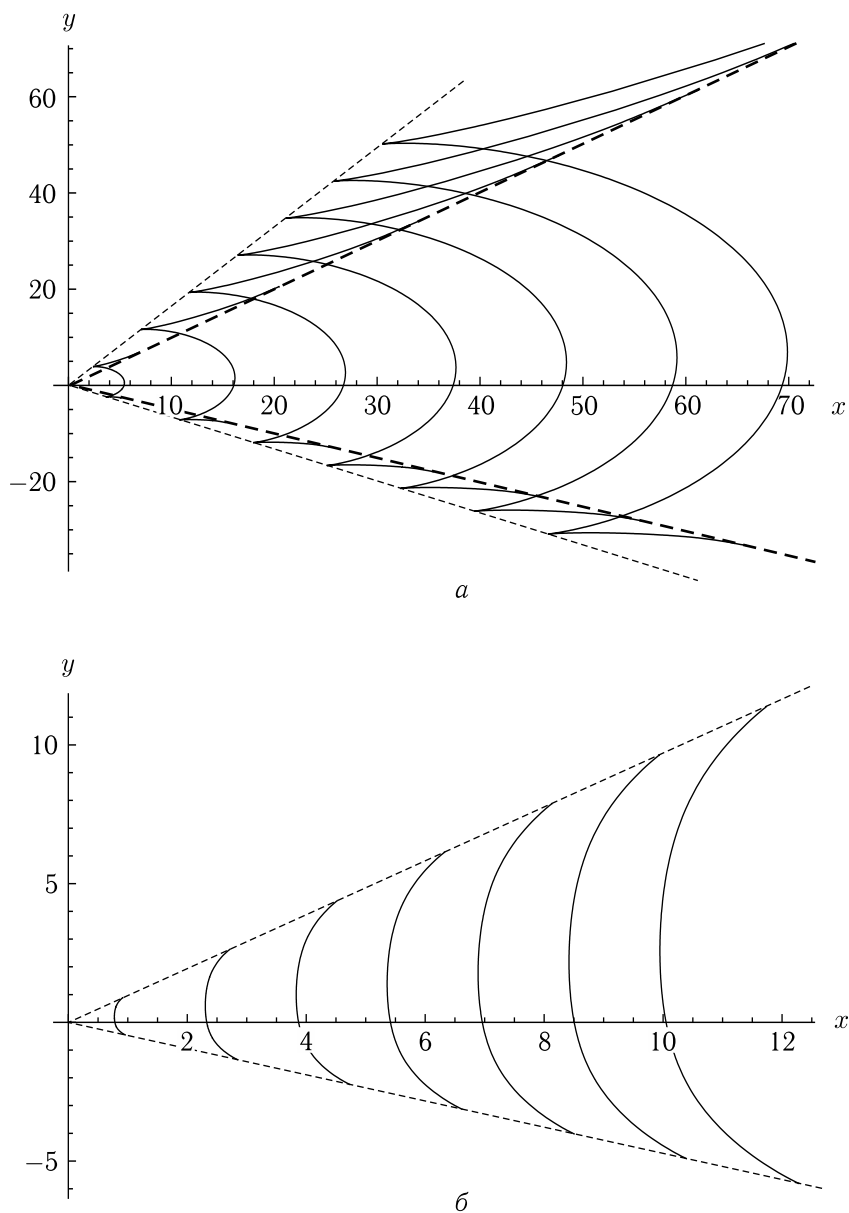


Рис. 4.28. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$, $n = -4, -3, \dots, 2$, в момент времени $t = 21$ для нижней (а) и верхней (б) ветвей дисперсионной кривой. Частота пульсаций источника $\Omega = 0,75$, компоненты вектора скорости течения: $U(z) = 2\pi/15$, $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$

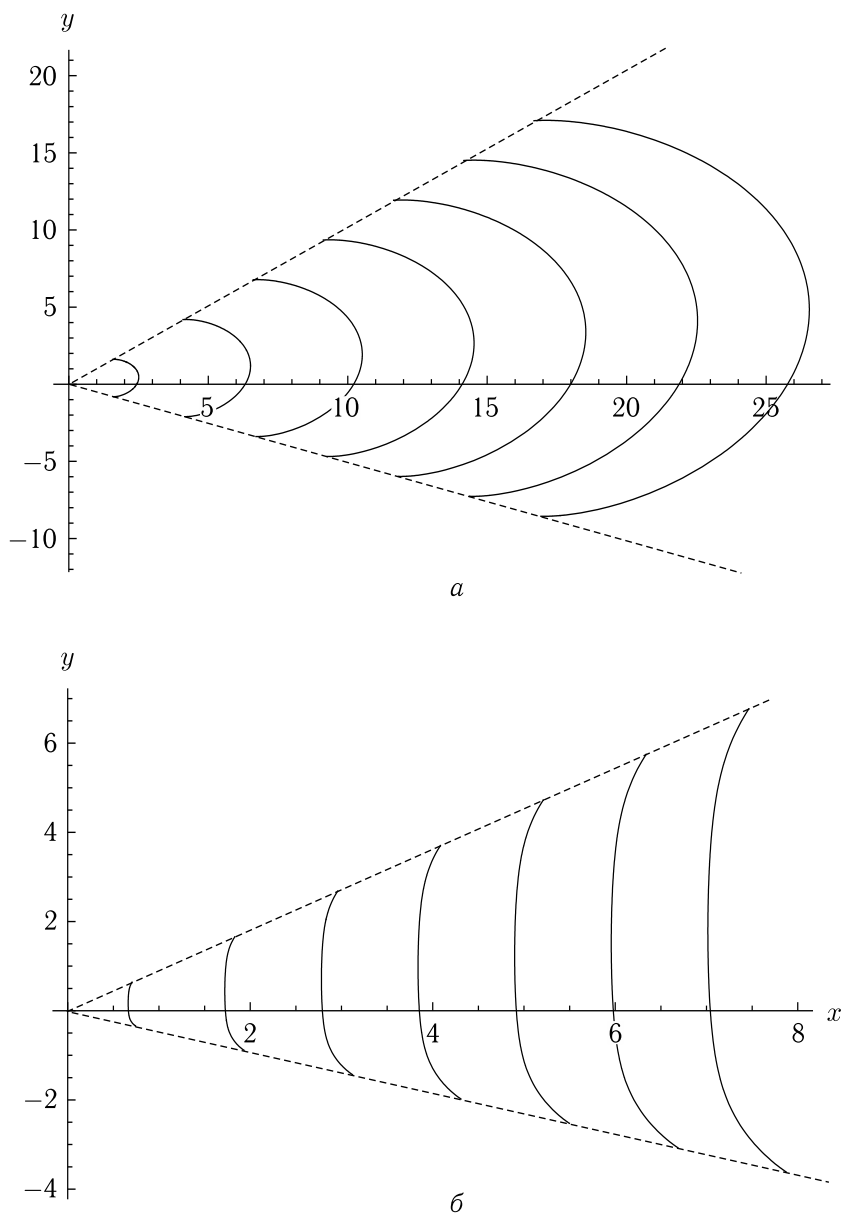


Рис. 4.29. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$, $n = -4, -3, \dots, 2$, в момент времени $t = 11$ для нижней (а) и верхней (б) ветвей дисперсионной кривой. Частота пульсаций источника $\Omega = 1,5$, компоненты вектора скорости течения: $U(z) = 2\pi/15$, $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$

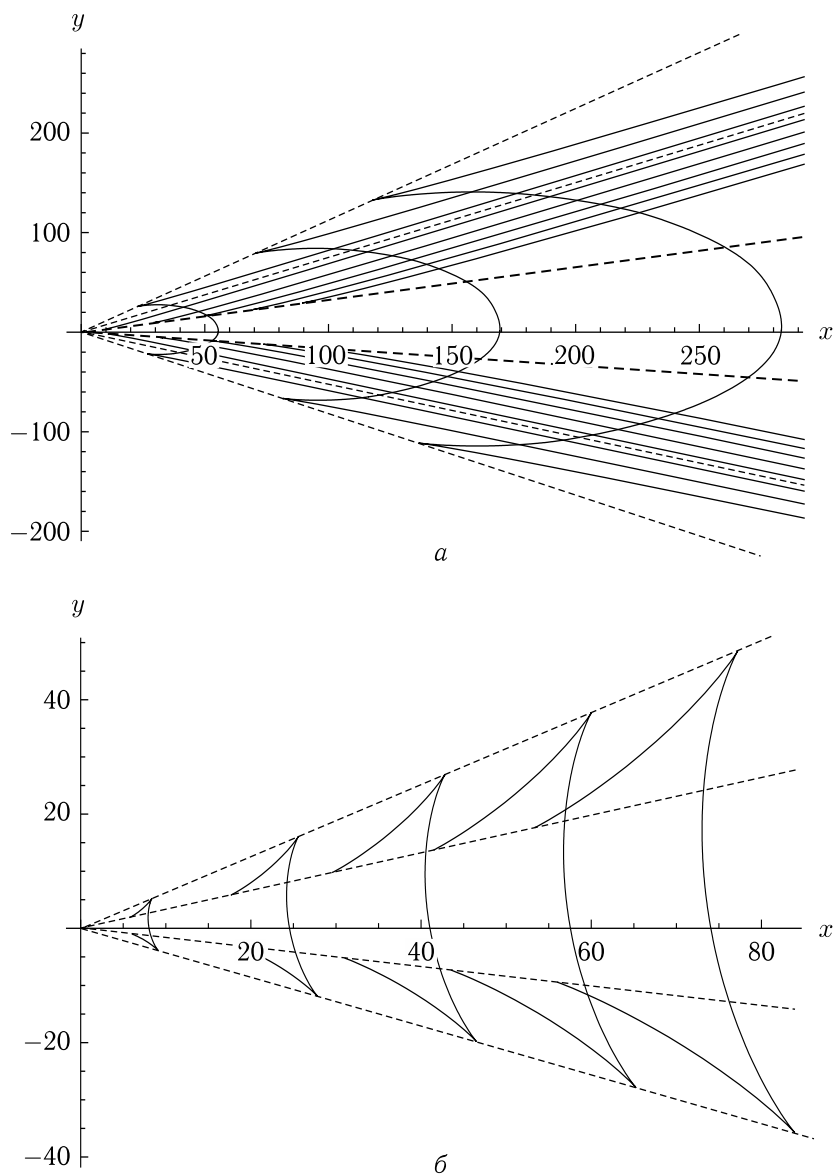


Рис. 4.30. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$ в момент времени $t = 125$ для нижней (а) и верхней (б) ветвей дисперсионной кривой: $n = 0, 1, \dots, 7$ (а), $n = -2, -1, \dots, 2$ (б). Частота пульсаций источника $\Omega = 0,125$, компоненты вектора скорости течения: $U(z) = 2\pi/5$, $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$

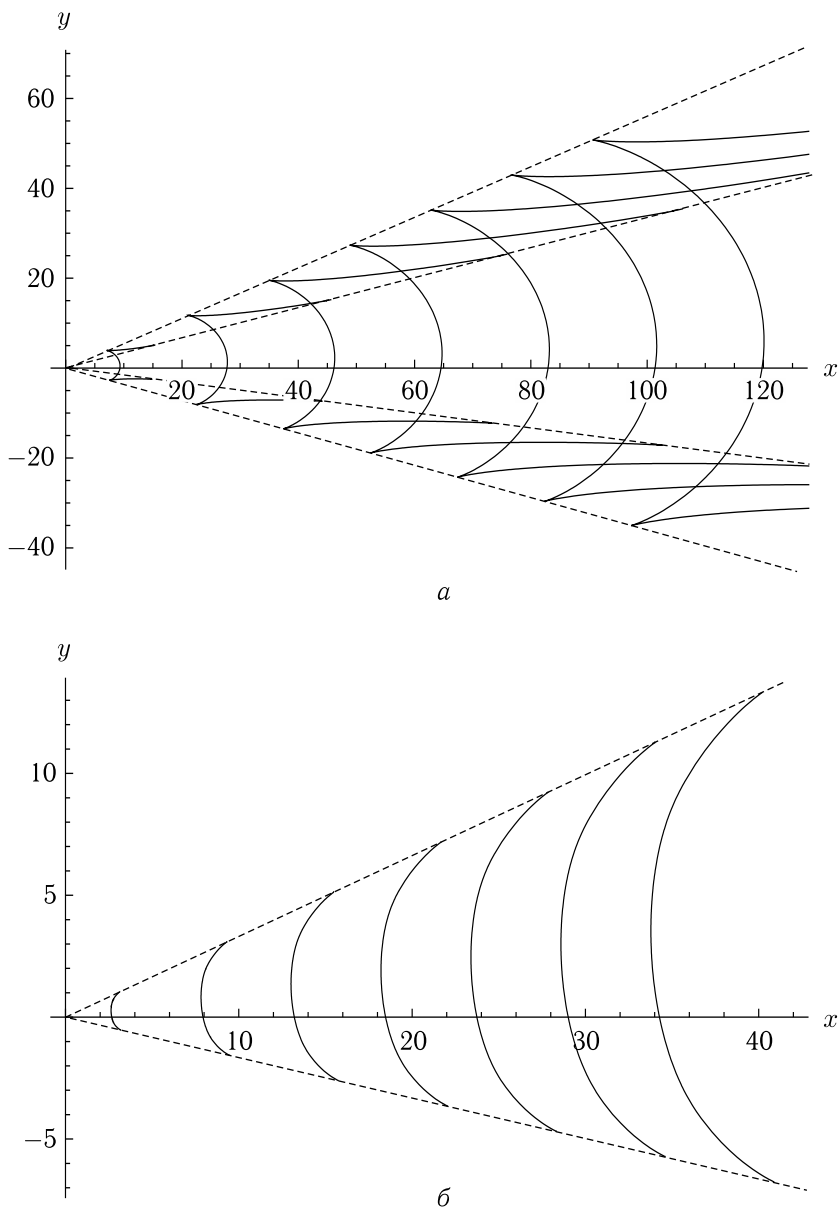


Рис. 4.31. Линии равной фазы $\Phi = 2\pi n$ ($n = -4, -3, \dots, 2$) в момент времени $t = 21$ для нижней (а) и верхней (б) ветвей дисперсионной кривой. Частота пульсаций источника $\Omega = 0,75$, компоненты вектора скорости течения: $U(z) = 2\pi/5$, $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$

нижние ветви дисперсионных кривых становятся однозначными функциями переменной ν .

Двухмерность сдвиговых течений также вызывает заметную пространственную асимметрию (относительно оси Ox) линий равной фазы. Генерируемая волновая система состоит из волн двух типов: кольцевых (поперечных) и клиновидных (продольных). Кольцевые (поперечные) волны занимают всю пространственную область внутри волнового клина с углом раствора $\gamma = |\arctg(\mu'(\nu_1^*)) - \arctg(\mu'(\nu_2^*))|$ (где $\nu_{1,2}^*$ — корни уравнения $\mu''(\nu) = 0$ для рис. 4.27, *а*, 4.28, *а*, 4.30, *а*, *б*, 4.31, *а* и $\nu_{1,2}^* = \pm\infty$ для рис. 4.27, *б*, 4.28, *б*, 4.29, *а*, *б*, 4.31, *б*) и могут иметь форму выпуклых вправо (рис. 4.27, *а*, 4.28, *а*, 4.29, *а*, 4.30, *а*, 4.31, *а*) или влево (рис. 4.27, *б*, 4.28, *б*, 4.29, *б*, 4.30, *б*, 4.31, *б*) дуг. Клиновидные (продольные) волны каждой моды ограничены как волновым фронтом с углом раствора γ , так и одной (рис. 4.28, *а*, 4.30, *б*, 4.31, *а*) или двумя (рис. 4.27, *а*, 4.30, *а*) парами внутренних волновых фронтов. Внутренние фронты на рис. 4.28, *а*, 4.30, *б*, 4.31, *а*, а также внутренняя пара из двух пар внутренних фронтов на рис. 4.27, *а*, 4.30, *а* задаются уравнениями $y = -\mu'(\pm\infty)x$. Внешняя пара из двух пар внутренних волновых фронтов на рис. 4.27, *а*, 4.30, *а* (то есть средняя пара из трех пар фронтов) определяется уравнениями $y = -\mu'(\nu_{1,2})x$, где $\nu_{1,2}$ — корни уравнения $\mu'(\nu) = \mu/\nu$.

Сравнение полученных в настоящем разделе результатов с натурными наблюдениями и численными расчетами внутренних волн показывает, что найденные семейства линий равной фазы качественно верно описывают возбуждаемые волновые структуры [109, 220, 228–232].

На рис. 4.32 (*а–в*) представлены результаты расчетов собственного числа $\omega_1(k, \psi)$ однородной спектральной задачи (4.25) для различных значений k (*а* — $k = 0,25$, *б* — $k = 0,35$, *в* — $k = 0,5$). Сплошной линией изображено численное решение, штриховой — асимптотика (4.29). Компоненты вектора скорости течения: $U(z) = 2\pi/5$, $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$. Проведенные численные эксперименты показывают, что асимптотика (4.29) позволяет

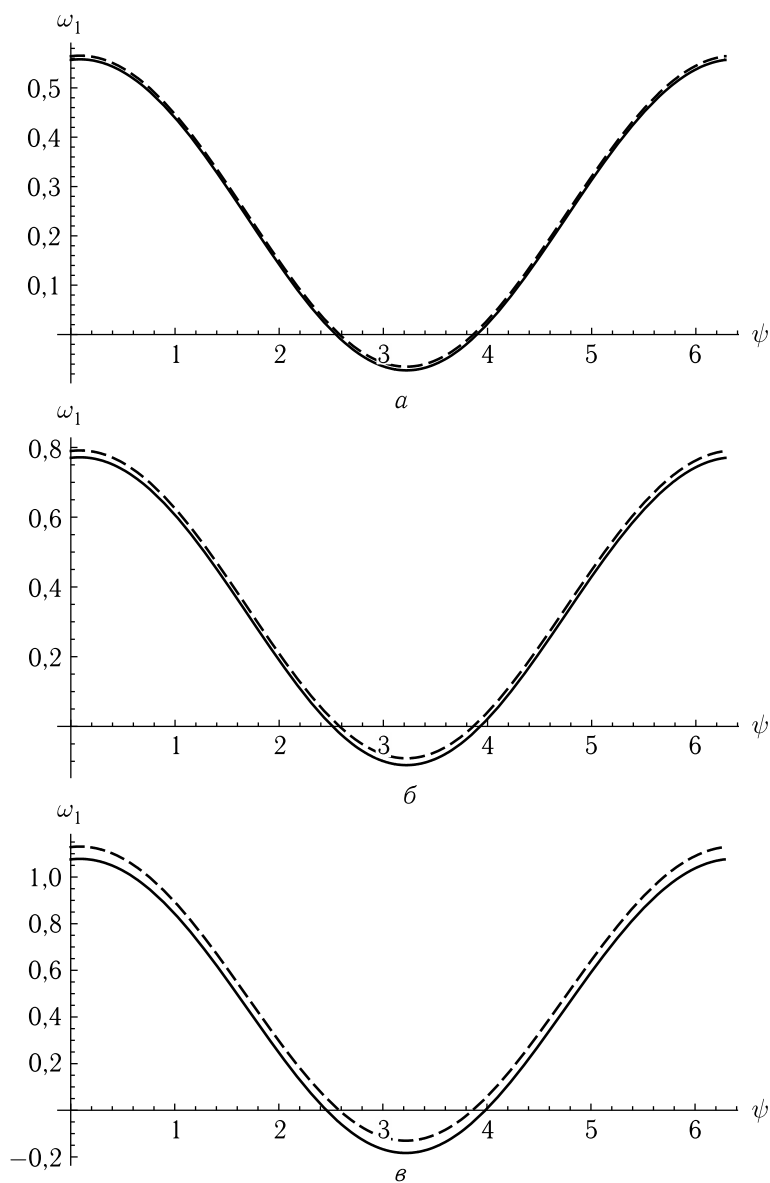


Рис. 4.32. Собственное число $\omega_1(k, \psi)$ однородной спектральной задачи (4.25) для различных значений k : *a*) $k = 0,25$; *б*) $k = 0,35$; *в*) $k = 0,5$. Сплошная линия — численное решение, штриховая — асимптотика (4.29). Компоненты вектора скорости течения: $U(z) = 2\pi/5$, $V(z) = 2\pi/15 + 0,2z$

вычислять собственные значения $\omega_n(k, \psi)$ с удовлетворительной точностью (то есть с относительной погрешностью не более 3%) при выполнении условия $k \leq 0,35$.

4.3.5. Заключение

Исследована генерация полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых осциллирующим источником возмущений в слое стратифицированной среды с двухмерными модельными линейными сдвиговыми течениями в предположении постоянства частоты плавучести. Построены асимптотики дисперсионных зависимостей при малых волновых числах. Численно исследованы дисперсионные соотношения и фазовые структуры возбуждаемых волновых полей для различных режимов волновой генерации, характерных для реальных условий Мирового океана. Показано, что учет двухмерности сдвиговых течений является причиной заметной асимметрии как дисперсионных кривых, так и линий равной фазы. Аналитические оценки и численные результаты показывают, что асимптотические конструкции, использующие модельные представления частоты плавучести и скорости сдвигового течения, качественно верно могут описывать фазовую структуру ВГВ.

Для исследования ВГВ в реальных природных средах необходимо сочетание как точных численных методов исследования волновых полей, так и различных асимптотических подходов, позволяющих исследовать основные качественные особенности возбуждаемых волн. Асимптотики дисперсионных соотношений позволяют в дальнейшем исследовать более реалистичную задачу изучения динамики ВГВ в океане с медленно меняющимися и нестационарными параметрами. В этом случае решение можно представить в виде суммы волновых пакетов, фазовая структура которых определяется аналитическими свойствами соответствующих дисперсионных зависимостей. Конкретный выбор фазовой функции (модельных интегралов) определяется аналитическими свойствами дисперсионных соотношений, зависящих от реальной гидрологии океана. Аналитические выражения дисперсионных

кривых также могут использоваться, в частности, для качественной интерпретации наблюдаемых волновых явлений в океане и для разработки дистанционных методов обнаружения ВГВ методами радиолокации. Полученные результаты дают возможность эффективно рассчитывать фазовую структуру полей ВГВ, а также исследовать различные режимы волновой генерации для модельных представлений частоты плавучести и скоростей сдвиговых течений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в монографии результаты по математическому моделированию волновых движений неоднородных гидрофизических сред обусловлены актуальными практическими проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, охраны и изучения окружающей среды, эксплуатации сложных гидротехнических сооружений, в том числе морских нефтедобывающих комплексов, и других актуальных задач науки и техники. Полученные результаты сочетают сравнительную простоту и вычислительную мощность аналитических результатов, а также возможность их качественного анализа. Разработанные методы математического моделирования могут быть использованы для исследования любых других волновых процессов (акустические и сейсмические волны, СВЧ-излучение, волны цунами и т. п.) в реальных средах со сложной структурой. Значение предложенных методов анализа волновых полей определяется не только их наглядностью, универсальностью и эффективностью при решении разнообразных задач, но и тем, что они могут явиться некоторой полуэмпирической основой других приближенных методов при математическом моделировании волновых пакетов иной физической природы.

Все фундаментальные результаты монографии получены для произвольных распределений плотности, солёности, температуры и других параметров неоднородных гидрофизических сред, и (кроме того) основные физические механизмы формирования изученных явлений волновой динамики рассматривались в контексте непротиворечивости имеющихся данных натурных измерений волн в реальных природных стратифицированных средах (Мировой океан, атмосфера Земли). Универсальный характер

предложенных асимптотических методов математического моделирования пакетов внутренних и поверхностных волн дополняется универсальными эвристическими условиями применимости этих методов. Эти критерии обеспечивают внутренний контроль применимости использованных асимптотических методов, и в ряде случаев на основе сформулированных критериев удастся оценивать волновые поля там, где другие методы неприменимы. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно как для правильной постановки теоретических исследований, так и для проведения оценочных и экспресс-расчетов при натурных измерениях пакетов внутренних и поверхностных волн, в том числе с помощью методов дистанционной спутниковой радиолокации. Особая роль данных методов обусловлена тем обстоятельством, что параметры природных стратифицированных сред, как правило, известны приближенно, и попытки точного численного решения исходных уравнений с использованием таких параметров могут привести к потере точности. Поэтому полученные фундаментальные научные результаты, а также разработанные методы и подходы могут быть использованы специалистами в области численного и математического моделирования сложных сред, геофизической гидродинамики, океанологии, морской гидротехнике, при строительстве сложных морских гидротехнических сооружений, а также при решении иных физических и прикладных задач, в том числе связанных с решением вопросов адаптации к изменениям климата, мониторинга и прогнозирования окружающей среды.

Для прикладных океанологических, гидрофизических исследований, связанных с изучением динамики внутренних и поверхностных волн, фундаментальной проблемой является моделирование волновой динамики с учетом реальной изменчивости параметров природных стратифицированных сред. Промышленная деятельность на континентальном шельфе (в том числе в зоне Арктического бассейна), связанная с добычей ископаемых, является важной причиной исследований внутренних и поверхностных волн в настоящее время, характеристики которых используются для оценки их воздействия на окружающую среду

и технологические морские конструкции. Знания о волновой динамике важны для обеспечения безопасности при строительстве и эксплуатации морских платформ на континентальном шельфе, и для этих целей необходимо контролировать воздействие волн. При строительстве нефтяных платформ проводится систематическое измерение волн и течений, поэтому решение фундаментальных проблем моделирования волновой динамики позволит избежать дорогостоящих натурных измерений. Решение проблемы интерпретации результатов мониторинга морской поверхности, осуществляемого с помощью дистанционных аэрокосмических средств, имеет своей целью: создание методов дистанционного аэрокосмического мониторинга поверхности, позволяющих прогнозировать возникновение катастрофических ситуаций, уточнять координаты скопления планктона и косяков рыб, отмечать различного рода экологические нарушения на участках протяженностью в сотни и тысячи километров; определять границы течений, исследовать топографию морского дна и фиксировать изменения подводного рельефа, дистанционно исследовать районы добычи полезных ископаемых.

Научное изучение Мирового океана, использование его ресурсного потенциала, развитие транспортных коммуникаций, присутствие на морских пространствах в целях сохранения позиций России как морской державы, охрана морских границ, контроль за экологической обстановкой, чрезвычайными ситуациями природного и техногенного характера, а также климатические наблюдения — все эти и другие конкретные проблемы, имеющие самостоятельное значение для обеспечения жизнедеятельности и безопасного проживания населения как в прибрежных регионах, так и в стране в целом, требуют комплексного анализа для поиска оптимальных путей их решения, в том числе с использованием результатов фундаментальных научных исследований, натурных наблюдений и разработок. Современная фундаментальная наука о Мировом океане, опыт многолетних исследований и практических наблюдений, оказывают значительное влияние на все сферы деятельности, связанные с освоением и использованием ресурсов и пространств открытого моря, прибрежной зоны,

шельфа, исключительной экономической зоны страны. Новые условия требуют развития эффективного сотрудничества в области освоения и научного изучения потенциала Арктического бассейна, ключевых районов Мирового океана, морей России, в том числе в целях более полной защиты российских военно-стратегических, экономических и научно-технических интересов, чему в значительной мере соответствуют изложенные в монографии научные результаты.

Характерным природным фактором полярных районов Мирового океана и замерзающих морских акваторий является наличие ледяного покрова. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод; при этом в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним. Волновые движения на границе раздела ледяного покрова в условиях морской среды могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться обтеканием искусственных препятствий, например погруженных частей платформ, с которых осуществляется добыча углеводородов, проложенных в море трубопроводов, иных сложных гидротехнических сооружений. В условиях реального океана причинами деформации ледяной поверхности могут быть, например, импульсные и периодические изменения давления, подводные источники различной физической природы (в том числе подводные взрывы), движущиеся по льду нагрузки постоянной и переменной интенсивности, локализованные вариации морской поверхности. Воздействием волн можно объяснить такие явления, как образование трещин в сплошных ледяных полях, разрушение льда в прикромочных зонах, взламывание припая.

Одним из заметных источников возбуждения ледяного покрова в океанических условиях могут быть интенсивные пакеты внутренних гравитационных волн: амплитуды возмущений ледяного покрова за счет таких волн могут находиться в диапазоне от сантиметров до нескольких метров. Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реакции на различные гидродинамические возмущения,

движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также для совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия. Также практический интерес к воздействию ледяного покрова на подводные препятствия обусловлен тем, что при наличии водной толщи обтекаемое потоком препятствие генерирует волны на поверхности раздела льда и морской среды и, следовательно, оно испытывает дополнительное волновое сопротивление, расчет которого необходим при проектировании различных сооружений.

С другой стороны, эти поверхностные возмущения несут информацию как о самих источниках возмущений, так и о характеристиках морской среды подо льдом, и они могут быть зарегистрированы с помощью специальных средств, прежде всего, радиолокационных и оптических систем. Разработка методов контролирующего мониторинга морских акваторий с ледяным покровом, основанных на данных, получаемых средствами дистанционного зондирования поверхности льда, предполагает, в частности, возможность эффективного расчета силового воздействия морских течений на подводные источники различной физической природы с учетом скорости потока, толщины льда, глубины погружения источника, параметров его изменчивости, иных существенных гидродинамических характеристик.

Многочисленные лабораторные эксперименты, а также натурные наблюдения в Мировом океане показывают, что ледяной покров в условиях морской среды ведет себя как тонкая упругая пластина, плавающая на поверхности потока жидкости. В монографии была использована модель упругой пластины, относительно которой (без ограничения какой-либо физической общности) можно сделать допущения, что ее малые деформации удовлетворяют закону Гука. Это означает, в частности, что каждый элементарный объем упругого слоя льда, который ортогонален нейтральной поверхности в недеформированном состоянии, остается прямым и ортогональным этой поверхности после деформации. Также предполагалось, что ледяной покров является сплошным, то есть его горизонтальные масштабы превышают

длины возбуждаемых волн и, при достаточно естественных условиях, моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы, а пластина является физически линейной. Для решения ряда важных практических задач и приложений, используя операцию свертки, можно в дальнейшем рассчитать волновые возмущения ледяного покрова, возбуждаемые распределенными в пространстве пульсирующими нелокальными источниками возмущений различной физической природы природного и антропогенного характеров.

Постановка задачи обтекания нелокального пульсирующего источника потоком однородной жидкости, ограниченной сверху ледяным покровом, включает в себя задание определенных граничных условий на его поверхности. Даже в предположении об идеальности жидкости и потенциальности обтекающего источник потока вычисление волновых полей представляет собой весьма сложную в математическом плане задачу. Очевидно, что существенно проще решается задача обтекания системы точечных гидродинамических особенностей, поскольку в этом случае нет необходимости удовлетворять наперед заданным граничным условиям. Это обстоятельство используется при решении задач обтекания тел или непроницаемых границ, моделируемых специально подобранными системами гидродинамических особенностей, которые часто используются при решении модельных задач, где точное воспроизведение формы находящегося подо льдом в потоке жидкости нелокального пульсирующего источника не имеет решающего значения. Подобный метод в значительной мере может относиться к задаче о генерации волновых возмущений на границе льда и жидкости, так как замена нелокального пульсирующего источника некоторым набором гидродинамических особенностей существенно упрощает решение. Дополнительного исследования требует вопрос о том, как влияет наличие границ раздела льда и жидкости на картину линий тока, возникающих при обтекании заданных гидродинамических особенностей. Поэтому, в частности, при рассмотрении потоков конечной толщины под ледяным покровом необходимо знать, какой именно нело-

кальный источник возмущений может моделировать выбранная система гидродинамических особенностей.

Важность проблемы использования минеральных ресурсов Арктического бассейна, ключевых районов Мирового океана, морей России определяется прежде всего их богатством и разнообразием, перспективностью вовлечения в народнохозяйственный оборот. Ресурсы недр океана (континентального шельфа и глубоководных районов морского дна) по своим объемам, свойствам и степени воспроизводства намного превосходят аналогичные ресурсы континентов и представляют собой масштабный потенциальный источник минеральных ресурсов. За счет минерального сырья Мирового океана, нефтегазового потенциала шельфовых зон, значительная часть которых находится в Арктике, может быть создана основа гарантированного обеспечения перспективных потребностей мировой экономики в стратегических видах полезных ископаемых.

Выполненные к настоящему времени работы по поиску и разведке месторождений полезных ископаемых в пределах континентального шельфа и в международном районе морского дна пока недостаточны даже для достоверной оценки их запасов. Создание технологий для освоения ресурсов и пространств Мирового океана является одной из центральных проблем, от решения которой зависит успех выполнения комплекса научных и технологических задач. Развитие технологий для освоения ресурсов и пространств Арктического бассейна, ключевых районов Мирового океана, морей России океана предполагающее использование накопленного научно-технического задела, а также продолжение фундаментальных исследований основных океанологических задач позволит начать реализацию инновационных и других мероприятий, необходимых для решения всего комплекса проблем, связанных с изучением Арктического бассейна, ключевых районов Мирового океана, морей России.

Изложенные в монографии фундаментальные научные результаты соответствуют приоритету Стратегии научно-технического развития России по повышению уровня связанности территории Российской Федерации путем создания интеллектуальных

транспортных, энергетических и телекоммуникационных систем, а также занятия и удержания лидерских позиций в создании международных транспортно-логистических систем, освоении и использовании космического и воздушного пространства, Мирового океана, Арктики и Антарктики, в том числе критической технологии мониторинга и прогнозирования состояния окружающей среды, предотвращения и ликвидации ее загрязнения. Проблемы комплексного научного изучения, освоения и использования Арктики особенно важны в связи с особыми национальными интересами (экономическими, оборонными, геополитическими, научными) Российской Федерации в этом регионе и его спецификой. Экономические интересы России в Арктике обусловлены тем, что здесь сосредоточены месторождения ряда важнейших полезных ископаемых, являющихся определяющими для развития экономики всей страны в настоящее время и в еще большей степени — в ближайшей перспективе. Оборонные интересы связаны с базированием в Арктике основных российских морских стратегических ядерных сил, а также с необходимостью защиты протяженной государственной границы в Северном Ледовитом океане. Очевидно, что геополитические интересы России в Арктике объясняются ее особым географическим положением и пересечением в этом регионе интересов многих стран.

Научные интересы России в Арктике обусловлены тем, что соответствующее научное обеспечение является необходимым условием для всех видов деятельности в этом регионе, а также важной ролью Арктики в глобальных процессах, происходящих на Земле. К основным проблемам российской Арктики относятся спад в экономике, свертывание градообразующих производств, упадок социальной инфраструктуры, резкое сокращение объема научных исследований, несвоевременное и недостаточное снабжение топливом и продовольствием. Особую опасность в экстремальных природно-климатических условиях этого региона представляет очаговое негативное воздействие на окружающую среду, что сказывается на росте заболеваемости и сокращении продолжительности жизни. Про-

блемы прибрежных арктических регионов являются составной частью проблемы освоения и использования Мирового океана. Проблема создания единой системы мониторинга Мирового океана обусловлена настоятельной необходимостью поднять на новый качественный уровень обеспечение всех видов морской деятельности (в том числе научно-исследовательской) актуальной и полной информацией, являющейся основой решения соответствующих научно-технических, экономических, политических, военно-стратегических, экологических и других задач, связанных с изучением, освоением и эффективным использованием ресурсов и пространств Мирового океана. Интеграция всех государственных информационных ресурсов по проблемам Мирового океана в должна происходить в рамках единой системы, создаваемой на базе существующих систем, научно-исследовательских и информационных центров, и требует государственной финансовой поддержки, межведомственной координации научно-технических работ, организационных решений и фундаментальных исследований.

Анализ современного состояния проблемы изучения, освоения и эффективного использования ресурсного потенциала и пространств Мирового океана в интересах экономического развития и обеспечения национальной безопасности России позволяет выделить следующие определяющие факторы: острота геополитических, международно-правовых, социально-экономических, научно-технических и экологических аспектов проблемы; многоаспектность и комплексность проблемы, требующая координации деятельности государственных органов федерального и регионального уровней, организаций различного профиля и организационно-правовых форм; невозможность ее решения в условиях существующих рыночных механизмов без государственного регулирования и государственной поддержки.

Геополитическое положение России, протяженность ее морских границ, сложившаяся и потенциальная зависимость от ресурсов Мирового океана, морских коммуникаций настоятельно требуют комплексного решения этой общегосударственной проблемы в рамках единой долгосрочной стратегии. Так как

эта проблема носит целевой характер, то ее решение призвано обеспечить научное изучение, освоение и рациональное использование всего ресурсного потенциала и пространств Мирового океана, Арктики и Антарктики. Отдельные виды ресурсов, регионы Мирового океана, входящие в зону национальных интересов России, различные научно-технические средства и технологии (в том числе цифровые), международное научное, правовое и информационное обеспечение представляют собой составные компоненты общей проблемы. Это обуславливает необходимость поиска оптимальных решений в каждом направлении с учетом всего комплекса национально-государственных целей, ограниченности имеющихся ресурсов и эффективности разрабатываемых мероприятий. Проведение широкого круга фундаментальных и прикладных океанологических исследований должно обеспечить (с помощью новых технологий и технических средств), включая информационные возможности искусственного интеллекта, реализацию основных направлений по освоению ресурсов Мирового океана.

Многоаспектность и комплексность данной проблемы определяется тем, что она включает совокупность взаимосвязанных единым физическим объектом, Мировым океаном, фундаментальных и прикладных задач по его изучению, освоению и рациональному использованию. Поэтому полученные в рамках работы по проекту фундаментальные научные результаты могут внести заметный вклад в решение этих стратегических задач. В частности, полученные результаты могут найти важное практическое применение в разработке новых методов контролирующего мониторинга морских акваторий с ледяным покровом, основанных на данных, получаемых средствами дистанционного зондирования поверхности льда, новых алгоритмов эффективного расчета силового воздействия морских течений на подводные источники различной физической природы с учетом скорости потока, толщины льда, глубины погружения источника, параметров его изменчивости, иных существенных гидродинамических характеристик. Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реак-

ции на различные гидродинамические возмущения, движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия. Также практический интерес к воздействию ледяного покрова на подводные препятствия обусловлен тем, что при наличии водной толщи обтекаемое потоком препятствие генерирует волны на поверхности раздела льда и морской среды, следовательно, оно испытывает дополнительное волновое сопротивление, расчет которого необходим при проектировании различных сооружений. С другой стороны, эти поверхностные возмущения несут информацию как о самих источниках возмущений, так и о характеристиках морской среды подо льдом, и они могут быть зарегистрированы с помощью специальных средств, прежде всего, радиолокационных и оптических систем.

В последней трети двадцатого века произошел прорыв в геофизической гидродинамике, описывающей глобальные физические процессы Мирового океана. Среди наиболее важных и фундаментальных научных открытий можно отметить следующие: была создана теория эволюции земной коры, в гидродинамике океана были сформулированы новые физические концепции теории и идеи, отражающие влияние океанических процессов на жизнь океанов и климат Земли, были открыты и объяснены подводные звуковые каналы, ринги Гольфстрима, свободные синоптические вихри открытого океана и многое другое. В связи с мощным прогрессом компьютерных технологий произошел переход от дискретных измерений температуры и солености на отдельно выбранных морских глубинах к практически непрерывному измерению профилей характеристик морской воды с помощью высокоразрешающих зондов, в том числе в 3D-формате. Это позволило, в частности, выявлять такие неожиданные эффекты, как тонкоструктурное расслоение океанических полей, линзы аномальных вод (например, линзы средиземноморских вод в Атлантике) и ряд других интересных эффектов, объясняющих физику Мирового океана как очень сложной динамической многопараметрической системы: все движения вод

Мирового океана представляют собой очень сложную нестационарную картину разномасштабных и разнонаправленных движений, причем диапазон пространственных масштабов распространяется от минимальных (миллиметры, мелкомасштабная турбулентность) до размеров самих океанов, а время жизни — соответственно от нескольких секунд до десятков и более лет. Поэтому актуальность и практическая значимость изложенных в монографии результатов обусловлена не только практическими потребностями, но и большим теоретическим содержанием возникающих здесь фундаментальных задач математического моделирования волновой динамики сложных гидрофизических сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С., Савина Е. О. Обтекание препятствий стратифицированным потоком со свободной границей // Океанология. 2011. Т. 51, № 6. С. 974–983.
2. Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С. Поверхностные эффекты при обтекании препятствий в неоднородно-стратифицированной среде // Докл. РАН. 2011. Т. 440, № 6. С. 826–829.
3. Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С. Поверхностные возмущения при обтекании препятствий стратифицированным потоком конечной глубины // Океанология. 2012. Т. 52, № 6. С. 825–835.
4. Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С. Волновое воздействие взвесенесущего потока на обтекаемое препятствие // Докл. РАН. 2015. Т. 461, № 2. С. 223–227.
5. Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С. Волновая реакция диполя при циркуляционном обтекании двухслойным потоком конечной глубины // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 90–99.
6. Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С. Эффект волнового воздействия двухслойного потока на подводные препятствия // Океанология. 2016. Т. 56, № 4. С. 547–555.
7. Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С. Эффекты волнового воздействия на подводное препятствие стратифицированным потоком конечной глубины // Докл. РАН. 2018. Т. 478, № 3. С. 356–361.
8. Корчагин Н. Н., Владимиров И. Ю. Об эффекте циркуляционного обтекания объектов в морской среде и атмосфере // Докл. РАН. 2019. Т. 488, № 2. С. 207–211.
9. Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н. Циркуляционные эффекты при движении объектов в морской среде и атмосфере // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 4. С. 42–48.

10. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Силовое воздействие потока бесконечно глубокой жидкости на источник под ледяным покровом // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2023. Т. 16, № 3. С. 120–128.
11. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Аналитические методы в теории волновой динамики неоднородных сред. М.: Издательство «ОнтоПринт», 2022. 500 с.
12. Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Владимиров И. Ю. Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2014. № 5. С. 104–111.
13. Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Владимиров И. Ю. Дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего источника в жидкости бесконечной глубины // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2017. № 5. С. 23–29.
14. Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V., Vladimirov I. Yu. Far fields of surface gravity waves generated by a rapidly moving oscillating perturbation source // *Fundamentalnaya i Prikladnaya Gidrofizika*. 2019. V. 12, № 1. P. 45–53.
15. Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Владимиров И. Ю. Равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных волн от вспыхнувшего локализованного источника // *Прикладная математика и механика*. 2021. Т. 85, № 5. С. 626–634.
16. Vladimirov I. Yu. Asymptotics of far fields of surface and internal gravitational waves from local and nonlocal perturbation sources // *Russian J. Earth Sciences*. 2023. V. 23, ES4005.
17. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Дальние поля на поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2023. Т. 59, № 3. С. 356–361.
18. Булатов В. В., Владимиров И. Ю., Морозов Е. Г. Дальние поля возмущений поверхности раздела глубокого океана и ледяного покрова от локализованных источников // *Доклады РАН, Науки о Земле*. 2023. Т. 512, № 2. С. 302–307.
19. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Амплитудно-фазовая структура волновых возмущений на границе ледяного покрова и глубокой жидкости от локализованных источников // *Вестник НИЯУ «МИФИ»*. 2023. Т. 12, № 3. С. 135–142.

20. Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V., Vladimirov I. Yu. Far fields of internal gravity waves from a source moving in the ocean with an arbitrary buoyancy frequency distribution // Russian J. Earth Sciences. 2019. V. 19, ES5003.
21. Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Владимиров И. Ю., Морозов Е. Г. Особенности фазовых структур внутренних гравитационных волн от движущихся источников возмущений // Доклады РАН. 2021. Т. 501, № 1. С. 73–77.
22. Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Владимиров И. Ю. Динамика дальних полей внутренних гравитационных волн в океане с произвольным распределением частоты плавучести // Процессы в геосредах. 2020. № 4 (26). С. 877–884.
23. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Равномерные асимптотики полей внутренних гравитационных волн от начального радиально симметричного возмущения // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86, № 2. С. 206–215.
24. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн от импульсного локализованного источника во вращающейся стратифицированной среде // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87, № 3. С. 432–441.
25. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Внутренние гравитационные волны от локализованного источника в потоке стратифицированной среды с модельным распределением частоты плавучести // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2023. Т. 63, № 8. С. 112–122.
26. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Аналитические свойства дисперсионных соотношений уравнения внутренних гравитационных волн с модельными и произвольными распределениями частоты плавучести // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2023. Т. 12, № 1. С. 3–8.
27. Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Владимиров И. Ю. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в океане // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2021. Т. 57, № 5. С. 362–371.
28. Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Владимиров И. Ю. Фазовые характеристики полей внутренних гравитационных волн в океане со сдвигом скорости течений // Морской гидрофизический журнал. 2021. Т. 37, № 4. С. 473–489.
29. Bulatov V. V., Vladimirov I. Yu. Internal gravity waves in ocean with model and arbitrary buoyancy frequency and shear flows

- vertical distributions // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2021. V. 57, № 6. P. 680–685.
30. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Внутренние гравитационные волны в океане при обтекании подводного препятствия сдвиговым течением // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2022. Т. 58, № 4. С. 467–471.
31. Булатов В. В., Владимиров И. Ю., Морозов Е. Г. Генерация внутренних гравитационных волн в океане при набегании фонового сдвигового течения на подводную возвышенность // *Доклады РАН, Науки о Земле*. 2022. Т. 505, № 2. С. 192–195.
32. Булатов В. В., Владимиров И. Ю. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в стратифицированной среде с двухмерными сдвиговыми течениями // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2022. № 4. С. 60–68.
33. Norwegian Energy Policy in Context of the Global Energy Situation // Ed. by R. H. Gabrielsen, J. Grue. Oslo: Novus Forlag, 2012. 129 p.
34. Chen Y.-Y., Chen G. Y., Lin C.-H., Chou C.-L. Progressive waves in real fluids over a rigid permeable bottom // *Coastal Engineering Journal*. 2010. V. 52 (1). P. 17–42.
35. Chen Y.-Y., Hsu H.-C., Chen G. Y. Lagrangian experiment and solution for irrotational finite amplitude progressive gravity waves at uniform depth // *Fluid Dynamics Research*. 2010. V. 42. P. 04511.
36. Liu P. C., Chen H. S., Doong D. J. et al. Freaque Waves during Typhoon Krosa // *Annales Geophysicae*. 2009. V. 27. P. 2633–2642.
37. Tsai J. C., Tsai C. H. Wave measurements by pressure transducers using artificial neural networks // *Ocean Engineering*. 2009. V. 35. P. 1149–1157.
38. Методы, процедуры и средства аэрокосмической радиотомографии приповерхностных областей Земли // Под ред. Нестеров С. В., Шамаев А. С., Шамаев С. И. М.: Научный мир, 1996. 272 с.
39. Коняев К. В., Сабинин К. Д. Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 272 с.
40. Grue J., Sveen J. K. A scaling law of internal run-up duration // *Ocean Dynamics*. 2010. V. 60. P. 993–1006.
41. Баханов В. В., Горячкин Ю. Н., Корчагин Н. Н., Репина И. А. Локальные проявления глубинных процессов на поверхности моря

- и в приводном слое атмосферы // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 1. С. 111–115.
42. Горелов А. М., Зевакин Е. А., Иванов С. Г. и др. О комплексном подходе к дистанционной регистрации гидродинамических возмущений морской среды оптическими методами // Физические основы приборостроения. 2012. Т. 1, № 4. С. 58–64.
43. Saeha P., Foelsche U., Pisoft P. Analysis of internal gravity waves with GPS RO density profiles // Atmos. Meas. Tech. 2014. V. 7. P. 4123–4132.
44. Onishchenko O., Pokhotelov O., Horton W. et al. Rolls of the internal gravity waves in the Earth's atmosphere // Ann. Geophys. 2014. V. 32. P. 181–186.
45. Martin P. A., Smith Stefan G. Llewellyn. Generation of internal gravity waves by an oscillating horizontal disc // Proc. R. Soc. A. 2011. V. 467. P. 3406–3423.
46. Marchenko A. V., Morozov E. G., Muzylev S. V., Shestov A. S. Short-period internal waves under an ice cover in Van Mijen Fjord, Svalbard // Advances in Meteorology. 2011. V. 2011. Article ID 573269.
47. Marchenko A. V., Morozov E. G. Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice // Russian J. Earth Sciences. 2016. V. 16 (1), ES1001.
48. Morozov E. G., Marchenko A. V., Filchuk K. V. et al. Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea // Appl. Ocean Research. 2019. V. 87. P. 179–191.
49. Morozov E. G., Zuev O. A., Zamshin V. V. et al. Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V “Akademik Mstislav Keldysh” // Russian J. Earth Sciences. 2022. V. 22, ES2001.
50. Alpers W. Theory of radar imaging of internal waves // Nature. 1985. V. 314. P. 245–247.
51. Hsu M.-K., Liu A. K., Liu C. A study of internal waves in the China Seas and Yellow Sea using SAR // Continental Shelf Research. 2000. V. 20. P. 389–410.
52. Klemas V. Remote sensing of ocean internal waves: An overview // J. Coast. Res. 2012. V. 28. P. 540–546.
53. Lavrova O., Mityagina M. Satellite survey of internal waves in the Black and Caspian Seas // Remote Sensing. 2017. V. 9, № 9. P. 892.

54. Свиркунов П. Н., Калашник М. В. Фазовые картины волн от локализованных источников, движущихся относительно стратифицированной вращающейся среды (перемещающийся ураган, орографическое препятствие) // Доклады РАН. Механика. 2012. Т. 447, № 4. С. 396–400.
55. Свиркунов П. Н., Калашник М. В. Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // Успехи физических наук. 2014. Т. 184, № 1. С. 89–100.
56. Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н. Трансформация внутренних волн над неровным дном: аналитические результаты // Океанология. 2011. Т. 51, № 4. С. 621–626.
57. Zang H. P., King B., Swinney H. L. Experimental study of internal gravity waves generated by supercritical topography // Phys. Fluids. 2007. V. 19. P. 960–966.
58. Поверхностные и внутренние волны в арктических морях // Под ред. И. В. Лавренов, Е. Г. Морозов. СПб.: Гидрометеиздат, 2002. 364 с.
59. Voelker G. S., Myers P. G., Walter M., Sutherland B. R. Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dynamics Atmosphere Oceans. 2019. V. 86. P. 116–133.
60. Haney S., Young W. R. Radiation of internal waves from groups of surface gravity waves // J. Fluid Mech. 2017. V. 829. P. 280–303.
61. Wang J., Wang S., Chen X. et al. Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount // Physics Fluids. 2017. V. 29. P. 106601.
62. Navrotsky V. V., Liapidevskii V. Yu., Pavlova E. P. Features of internal waves in a shoaling thermocline // Int. J. Geosciences. 2013. V. 4. P. 871–879.
63. Pannard A., Beisner B. E., Bird D. F. et al. Recurrent internal waves in a small lake: Potential ecological consequences for metalimnetic phytoplankton populations // Limnology and Oceanography. 2011. V. 1. P. 91–109.
64. Howland C. J., Taylor J. R., Caulfield C. P. Shear-induced breaking of internal gravity waves // J. Fluid Mech. 2021. V. 921. P. A24.
65. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
66. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.

67. Булатов В. В. Новые задачи математического моделирования волновой динамики стратифицированных сред. М.: Издательство «ОнтоПринт», 2021. 277 с.
68. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наукова думка, 1973. 247 с.
69. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
70. Краусс В. Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
71. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. В 2-х томах. М.: Мир, 1981, т. 1 — 480 с., т. 2 — 365 с.
72. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 424 с.
73. Монин А. С., Миropольский Ю. З. Внутренние волны // Физика океана. Том 2: Гидродинамика океана / Под ред. Каменкович В. М., Монин А. С. М.: Наука, 1978. С. 182–218.
74. Морозов Е. Г. Океанские внутренние волны. М.: Наука, 1985. 151 с.
75. Перегудин С. И., Холодова С. Е. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. С.-Петербург: Издательство С.-Петербургского государственного университета, 2009. 455 с.
76. Рындина В. В. Собственные частоты внутренних волн в жидкости и частота Брента–Вяйсяля. Ростов-на-Дону: ИздЦво ЦВВР, 2007. 128 с.
77. Massel S. R. Internal gravity waves in the shallow seas. Berlin: Springer, 2015. 163 p.
78. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue waves in the ocean. Berlin: Springer, 2009. 260 p.
79. Morozov E. G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
80. Mei C. C., Stiassnie M., Yue D. K.-P. Theory and applications of ocean surface waves. Advanced series of ocean engineering. V. 42. London: World Scientific Publishing, 2017. 1500 p.
81. Song Z. J., Teng B., Gou Y. et al. Comparisons of internal solitary wave and surface wave actions on marine structures and their responses // Applied Ocean Research. 2011. V. 33. P. 120–129.
82. Mauge R., Gerkema T. Generation of weakly nonlinear nonhydrostatic internal tides over large topography: a multi-modal approach // Nonlinear Processes Geophysics. 2008. V. 15. P. 233–244.

83. Morozov E. G. Internal tides. Global field of internal tides and mixing caused by internal tides // *Waves in geophysical fluids*, Ed. by J. Grue, K. Trulsen. Wein–New York: Springer, 2006. P. 271–332.
84. Morozov E. G., Paka V. T., Bakhanov V. V. Strong internal tides in the Kara Gates Strait // *Geoph. Res. Letters*. 2008. V. 35. P. L16603.
85. Echeverri P., Yokossi T., Balmforth N. J., Peacock T. Tidally generated internal wave attractors between double ridges // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 669. P. 354–374.
86. Сабинин К. Д., Серебряный А. Н. “Горячие” точки в поле внутренних волн в океане // *Акустический журнал*. 2007. Т. 53, № 3. С. 410–436.
87. Grue J., Jensen A. Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves // *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117. P. C07013.
88. Gitterman M. Hydrodynamics of compressible liquids: influence of the piston effect on convection and internal gravity waves // *Physica A*. 2007. V. 386. P. 1–11.
89. Монин А. С., Корчагин Н. Н. Десять открытий в физике океана. М.: Научный мир, 2008. 172 с.
90. Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н. Моделирование распространяющихся длинных внутренних волн в неоднородном океане // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2013. Т. 6, № 32. С. 46–54.
91. Voisin B. Limit states of internal wave beams // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 496. P. 243–293.
92. Dolina I. S., Troitskaya Yu. I. On a possible mechanism of bottom relief manifestation on the sea surface // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2002. V. 38, № 3. P. 344–353.
93. Miles J. W. Internal waves generated by a horizontally moving source // *Geophys. Fluid Dyn.* 1971. V. 2. P. 63–87.
94. Rees T., Lamb K. G., Poulin F. J. Asymptotic analysis of the forced internal gravity waves equation // *SIAM J. Appl. Math.* 2012. V. 72 (4). P. 1041–1060.
95. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1987. 688 с.
96. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.

97. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
98. Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K. Baroclinic tides: theoretical modeling and observational evidence. N.Y.: Cambridge University Press, 2005. 372 p.
99. Морозов Е. Г., Марченко А. В. Короткопериодные внутренние волны в Арктическом фиорде (Шпицберген) // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48, № 4. С. 453–460.
100. Plueddemann A. J. Internal wave observations from the Arctic Environmental Drifting Buoy // J. Geophys. Res. 1992. V. 97. P. 12619–12638.
101. Шамин Р. В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008. 133 с.
102. Adcroft A., Campin J.-M. MITgcm user manual. Cambridge: MIT, 2011. 455 p.
103. Тюгин Д. Ю., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н., Куркина О. Е. Повышение производительности программного комплекса для моделирования внутренних гравитационных волн IGW Research с помощью Intel® Parallel Studio XE 2013 // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 5, № 3. С. 89–95.
104. Toro Eleuterio F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Berlin–Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997. 593 p.
105. Mignone A., Bodo G. An HLLC Riemann Solver for Relativistic Flows: I. Hydrodynamics // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2005. V. 364. P. 126–136.
106. Dommermuth D., Yue D. K. P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. P. 267–288.
107. West B. J., Brueckner K. A., Janda R. S. et al. A new numerical method for surface hydrodynamics // J. Geophys. Res. 1987. V. 92. P. 11803–11824.
108. Ducrozet G., Bonnefoy F., Le Touzé D., Ferrant P. HOSocean: Open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on High-Order Spectral method // Computer Physics Communications. 2016. V. 203. P. 245–254.
109. Abdilghanie A. M., Diamessis P. J. The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mechanics. 2013. V. 720. P. 104–139.

110. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
111. Sutherland B. R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
112. The ocean in motion // Ed. by M. G. Velarde, R. Yu. Tarakanov, A. V. Marchenko. Springer Oceanography. Berlin: Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. 625 p.
113. Гущин В. А., Матюшин П. В. Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 6. С. 1049–1063.
114. Матюшин П. В. Процесс формирования внутренних волн, иницированных начальным движением тела в стратифицированной вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 83–97.
115. Докучаев В. П., Долина И. С. Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1977. Т. 13, № 6. С. 655–663.
116. Билюнас М. В., Доценко С. Ф. Волны на течении с переменной по глубине горизонтальной скоростью потока однородной жидкости // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. 2009. № 19. С. 340–346.
117. Билюнас М. В., Доценко С. Ф. Стационарные волны в потоке однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // Мор. гидрофиз. журн. 2010. № 4. С. 15–29.
118. Билюнас М. В., Доценко С. Ф. Свободные внутренние волны в неоднородном течении с вертикальным сдвигом скорости // Мор. гидрофиз. журн. 2012. № 1. С. 3–16.
119. Билюнас М. В., Доценко С. Ф. Стационарные волны в двухслойном течении с вертикальным сдвигом скорости // Мор. гидрофиз. журн. 2014. № 1. С. 3–12.
120. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика неоднородных сред (в 2 томах). Т. 1: Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007. 443 с. Т. 2: Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. М.: Наука, 2009. 426 с.
121. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Аналитические решения уравнения внутренних гравитационных волн, генерируемых движу-

- щимся нелокальным источником возмущений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2021. Т. 61, № 4. С. 572–579.
122. Bulatov V., Vladimirov Yu. Generation of internal gravity waves far from moving non-local source // *Symmetry*. 2020. V. 12 (11). P. 1899.
123. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 336 с.
124. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
125. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Аналитические решения уравнения внутренних гравитационных волн в полубесконечном слое стратифицированной среды переменной плавучести // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 5. С. 792–795.
126. Габов С. А. Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998. 448 с.
127. Borovikov V. A., Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V. Internal gravity waves excited by a body moving in a stratified fluid // *Fluid Dyn. Res.* 1995. V. 5. P. 325–336.
128. Broutman D., Brandt L., Rottman J., Taylor C. A WKB derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline // *Wave Motion*. 2021. V. 105. P. 102759.
129. Basovich A. Ya., Tsimring L. Sh. Internal waves in a horizontally inhomogeneous flow // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 142. P. 233–249.
130. Fabrikant A. L., Stepanyants Yu. A. Propagation of waves in shear flows. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 18. Singapore: World Scientific Publishing, 1998. 304 p.
131. Morozov E. G., Parrilla-Barrera G., Velarde M. G., Scherbinin A. D. The Straits of Gibraltar and Kara Gates: a comparison of internal tides // *Oceanologica Acta*. 2003. V. 26 (3). P. 231–241.
132. Fraternali F., Domenicale L., Staffilan G., Tordella D. Internal waves in sheared flows: lower bound of the vorticity growth and propagation discontinuities in the parameter space // *Phys. Rev. E*. 2018. V. 97, № 6. P. 063102.
133. Frey D. I., Novigatsky A. N., Kravchishina M. D., Morozov E. G. Water structure and currents in the Bear Island Trough in July–August 2017 // *Russian J. Earth Sciences*. 2017. V. 17, ES3003.

134. Bretherton F. P. The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow // *Quart. J. Royal. Metereol. Soc.* 1966. V. 92. P. 466–480.
135. Alias A., Grimshaw R. H. J., Khusnutdinova K. R. Coupled Ostrovsky equations for internal waves in a shear flow // *Physics Fluids*. 2014. V. 26. P. 126603.
136. Слепышев А. А., Лактионова Н. В. Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2019. Т. 55, № 6. С. 194–200.
137. Гаврильева А. А., Губарев Ю. Г., Лебедев М. П. Теорема Майлса и новые частные решения уравнения Тейлора–Гольдштейна // *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*. 2016. Т. 158 (2). С. 156–171.
138. Miles J. W. On the stability of heterogeneous shear flow // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10 (4). P. 496–508.
139. Гаврильева А. А., Губарев Ю. Г., Лебедев М. П. Теорема Майлса и первая краевая задача для уравнения Тейлора–Гольдштейна // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2019. Т. XXII, № 3. С. 24–38.
140. Khusnutdinova K. R., Zhang X. Long ring waves in a stratified fluid over a shear flow // *J. Fluid. Mech.* 2016. V. 794. P. 17–44.
141. Hirota M., Morrison P. J. Stability boundaries and sufficient stability conditions for stably stratified, monotonic shear flows // *Physics Letters A*. 2016. V. 380 (21). P. 1856–1860.
142. Churilov S. On the stability analysis of sharply stratified shear flows // *Ocean Dynamics*. 2018. V. 68. P. 867–884.
143. Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V. Dynamics of internal gravity waves in the ocean with shear flows // *Russian J. Earth Sciences*. 2020. V. 20, ES4004.
144. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Внутренние гравитационные волны в стратифицированной среде с модельными распределениями сдвиговых течений // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2020. № 5. С. 56–60.
145. Шургалина Е. Г., Пелиновский Е. Н. Динамика ансамбля нерегулярных волн в прибрежной зоне. Н. Новгород: Нижегородский гос. технический ун-т, 2015. 179 с.
146. Brown M. G. The Maslov integral representation of slowly varying dispersive wavetrains in inhomogeneous media // *Wave Motion*. 2000. V. 32. P. 247–266.

-
147. Carpenter J. R., Balmforth N. J., Lawrence G. A. Identifying unstable modes in stratified shear layers // *Phys. Fluids*. 2010. V. 22. P. 054104.
 148. Gavrileva A. A., Gubarev Yu. G., Lebedev M. P. The Miles theorem and the first boundary value problem for the Taylor-Goldstein equation // *J. Applied and Industrial Math.* 2019. V. 13, № 3. P. 460–471.
 149. Borovikov V. A. Uniform stationary phase method. IEE electromagnetic waves. Series 40. London: Institution of Electrical Engineers, 1994. 233 p.
 150. Козин В. М., Погорелова А. В., Земляк В. Л. и др. Экспериментально-теоретические исследования зависимости параметров распространяющихся в плавающей пластине изгибно-гравитационных волн от условий их возбуждения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 222 с.
 151. Das S., Sahoo T., Meylan M. H. Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // *Proc. R. Soc. A*. 2018. V. 474. P. 20170223.
 152. Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Appl. Ocean Research*. 2019. V. 86. P. 154–165.
 153. Marchenko A., Morozov E., Muzylev S. Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves // *Ann. Glaciology*. 2013. V. 54. P. 51–60.
 154. Pogorelova A. V., Zemlyak V. L., Kozin V. M. Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodynamics*. 2019. V. 31 (3). P. 562–569.
 155. Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D., Langhorne P. J. Moving loads on ice plates. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. 236 p.
 156. Букатов А. Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
 157. Ильичев А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 256 с.
 158. Ильичев А. Т. Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины // *Теоретическая и математическая физика*. 2021. Т. 208, № 3. С. 387–408.

159. Савин А. С., Савин А. А. Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 5. С. 16–23.
160. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. Л.-М.: Гостехиздат, 1948. 535 с.
161. Ламб Г. Гидродинамика. Л.-М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
162. Милн–Томпсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
163. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
164. Chowdhury R. G., Mandal B. N. Motion due to fundamental singularities in finite depth water with an elastic solid cover // Fluid Dynamics Research. 2006. V. 38, № 4. P. 224–240.
165. Lu D. Q., Dai S. Q. Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice cover // Arch. Appl. Mech. 2006. V. 76. P. 49–63.
166. Lu D. Q., Dai S. Q. Flexural and capillary-gravity waves due to fundamental singularities in an inviscid fluid of finite depth // Int. J. Eng. Sci. 2008. V. 46, № 11. P. 1183–1193.
167. Ткачева Л. А. Движение сферы в жидкости под ледяным покровом при неравномерном сжатии // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 2. С. 12–24.
168. Li Z. F., Wu G. X., Shi Y. Y. Interaction of uniform current with a circular cylinder submerged below an ice sheet // Applied Ocean Research. 2019. V. 86. P. 310–319.
169. Stepanyants Yu. A., Sturova I. V. Waves on a compressed floating ice plate caused by motion of a dipole in water // J. Fluid Mech. 2021. V. 907, A7.
170. Stepanyants Yu. A., Sturova I. V. Hydrodynamic forces exerting on an oscillating cylinder under translational motion in water covered by compressed ice // Water. 2021. V. 13, 822.
171. Ткачева Л. А. Начально-краевая задача о поведении ледяного покрова под действием нагрузки при наличии сдвигового потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 2. С. 66–76.
172. Ткачева Л. А. Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 2. С. 113–122.

-
173. Ткачева Л. А. Деформации и волновые силы при движении нагрузки по ледяному покрову и наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 6. С. 59–66.
174. Tkacheva L. A. Motion of a load on an ice cover in the presence of a liquid layer with shear current // Fluid Dynamics. 2024. V. 59, № 1. P. 98–110.
175. Савин А. С., Савин А. А. Возмущение ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 2. С. 3–10.
176. Ильичев А. Т., Савин А. С., Савин А. А. Установление волны на ледяном покрове над движущимся в жидкости диполем // Докл. РАН. 2012. Т. 444, № 2. С. 156–159.
177. Савин А. С., Савин А. А. Генерация волн на ледяном покрове пульсирующим в жидкости источником // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 3. С. 24–30.
178. Савин А. С. Установление поверхностных волн, вызываемых гидродинамическими особенностями в плоском потоке // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 3. С. 78–81.
179. Ильичев А. Т., Савин А. С. О характере процесса установления поверхностных волн в плоском потоке // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 4. С. 75–83.
180. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 552 с.
181. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989. 480 с.
182. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1987. 784 с.
183. Жмур В. В., Сапов Д. А. Катастрофические взвесенесущие гравитационные потоки в придонном слое океана // Мировой океан. Том 1: Геология и тектоника океана. Катастрофические явления в океане. М.: Научный мир, 2013. С. 499–524.
184. Марченко А. В., Морозов Е. Г., Музылев С. В., Шестов А. С. Взаимодействие коротких внутренних волн с ледяным покровом в арктическом фиорде // Океанология. 2010. Т. 50, № 1. С. 23–31.
185. Зырянов В. Н. Сейши подо льдом // Водные ресурсы. 2011. Т. 38, № 3. С. 259–271.

186. Золотухин А. Б., Гудмestad О. Т., Ермаков А. И. Основы разработки шельфовых месторождений и строительство морских сооружений в Арктике. М.: ГУП Издательство «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2000. 770 с.
187. Сидняев Н. И. Теоретические исследования гидродинамики при подводном взрыве точечного источника // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 2 (14). С. 50.
188. Стурова И. В. Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 4. С. 63–72.
189. Dinvay E., Kalisch H., Parau E. I. Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // J. Fluid Mech. 2019. V. 876. P. 122–149.
190. Sturova I. V. Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 373–395.
191. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
192. Шамин Р. В. Математические вопросы волн-убийц. Серия: Синергетика от прошлого к будущему. € 76. М.: URSS, 2016. 168 с.
193. Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V. Wave dynamics of stratified mediums. М.: Наука, 2019. 584 с.
194. Belov V. V., Dobrokhotov S. Yu., Tudorovskiy T. Ya. Operator separation for adiabatic problems in quantum and wave mechanics // J. Engineering Math. 2006. V. 55. P. 183–237.
195. Dobrokhotov S. Yu., Lozhnikov D. A., Vargas C. A. Asymptotics of waves on the shallow water generated by spatially- localized sources and trapped by underwater ridges // Russ. J. Math. Phys. 2013. V. 20, № 1. P. 11–24.
196. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6, № 2. С. 55–70.
197. Dobrokhotov S. Yu., Grushin V. V., Sergeev S. A., Tirozzi B. Asymptotic theory of linear water waves in a domain with non-uniform bottom with rapidly oscillating sections // Russ. J. Math. Phys. 2016. V. 23. P. 455–475.
198. Слюняев А. В., Кокорина А. В. Численное моделирование «волн-убийц» на морской поверхности в рамках потенциальных урав-

- нений Эйлера // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56, № 2. С. 210–223.
199. Kokorina A., Slunyaev A. Lifetimes of rogue wave events in direct numerical simulations of deep-water irregular sea waves // *Fluids*. 2019. V. 4, № 2. Paper 70.
200. Slunyaev A., Kokorina A. Account of occasional wave breaking in numerical simulations of irregular water waves in the focus of the rogue wave problem // *Water Waves*. 2020. V. 2. P. 243–262.
201. Диденкулова Е. Г., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы в 2011–2018 годах // Доклады РАН. Науки о Земле. 2020. Т. 491, № 1. С. 97–100.
202. Didenkulova E. Catalogue of rogue waves occurred in the World Ocean from 2011 to 2018 reported by mass media sources // *Ocean and Coastal Management*. 2020. V. 188. P. 105076.
203. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of mathematical functions (Reprint of the 1972 ed.). New York: Dover Publications Inc., 1992. 1046 p.
204. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 804 p.
205. Wehausen J. V., Laitone E. V. Surface waves // *Handbuch der Physik*. Berlin: Springer, 1960. P. 446–778.
206. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Издательство ЛГУ, 1981. 196 с.
207. Lannes D. Well-posedness of the water waves equations // *J. Americ. Math. Soc.* 2005. V. 18. P. 605–654.
208. Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A. New method for numerical simulations of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // *Eur. J. Mech. B. Fluids*. 2002. V. 21. P. 283–291.
209. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Дальние поля внутренних гравитационных волн при произвольных скоростях движения источника возмущений // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51, № 6. С. 684–689.
210. Беляев М. Ю., Десинов Л. В., Крикалев С. К. и др. Идентификация системы океанских волн по фотоснимкам из космоса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 1. С. 117–127.
211. Беляев М. Ю., Виноградов П. В., Десинов Л. В. и др. Идентификация по снимкам из космоса источника океанских кольцевых

- волн вблизи острова Дарвин // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1. С. 70–83.
212. Kravtsov Yu., Orlov Yu. *Caustics, catastrophes, and wave fields*. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
213. Fröman N., Fröman P. O. *Physical problems solved by the phase-integral method*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 214 p.
214. Грикуров В. Э. Явление перекрытия приакустических зон в приповерхностном волноводе и связанное с ним обобщение лучевого метода // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 9. С. 1038–1045.
215. Marchenko A. V., Morozov E. G., Muzylev S. V., Shestov A. S. Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord // *Oceanology*. 2010. V. 50 (1). P. 18–27.
216. Арнольд В. И. *Волновые фронты и топология кривых*. М.: Фазис, 2002. 120 с.
217. Gnevyshev V., Badulin S. Wave patterns of gravity-capillary waves from moving localized sources // *Fluids*. 2020. V. 5 (4). P. 219.
218. Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V. A general approach to ocean wave dynamics research: modelling, asymptotics, measurements. М.: Издательство «ОнтоПринт», 2019. 587 с.
219. Robey H. The generation of internal waves by a towed sphere and its wake in a thermocline // *Physics Fluids*. 1997. V. 9. P. 3353.
220. Wang H., Chen K., You Y. An investigation on internal waves generated by towed models under a strong halocline // *Physics Fluids*. 2017. V. 29. P. 065104.
221. Матюшин П. В. Классификация режимов течений стратифицированной вязкой жидкости около диска // *Процессы в геосредах*. 2017. Т. 13, № 4. С. 678.
222. Miropol'skii Yu. Z., Shishkina O. V. *Dynamics of internal gravity waves in the ocean*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.
223. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. О расчете собственных функций и дисперсионных кривых основной вертикальной спектральной задачи уравнения внутренних гравитационных волн // *Математическое моделирование*. 2007. Т. 19, № 2. С. 59–68.
224. Арнольд В. И. *Особенности каустик и волновых фронтов*. М.: Фазис, 1996.

-
225. Babich V. M., Buldyrev V. S. Asymptotic methods in short-wavelength diffraction theory. Oxford: Alpha Science, 2007. 480 p.
226. Broutman D., Rottman J. A simplified Fourier method for computing the internal wavefield generated by an oscillating source in a horizontally moving, depth-dependent background // *Physics Fluids*. 2004. V. 16. P. 3682.
227. Broutman D., Eckerman S. D., Rottman J. W. Practical application of two turning-point theory to mountain-wave transmission through a wind jet // *J. Atmos. Sci.* 2009. V. 66. P. 481.
228. Rottman J. W., Brucker K. A., Dommermuth D., Broutman D. Parameterization of the Near-Field Internal Wave Field Generated by a Submarine // *Proceedings of 28-th Symposium on Naval Hydrodynamics*, Pasadena, California, 12–17 September 2010.
229. Ko K.-O., Choi J.-W., Yoon S.-B., Park C.-B. Internal Wave Generation in Flow3D Model // *Proceedings of the Twenty-first (2011) International Offshore and Polar Engineering Conference*, Maui, Hawaii, USA, June 19–24, 2011. P. 422–427.
230. Tunaley J. K. E. The theory of internal wave wakes. Ottawa: Defence R&D Canada, 2012. 58 p.
231. Медведева А. В., Михайличенко Т. В., Станичный С. В., Булатов В. В. Особенности проявления внутренних волн в приустьевой зоне Дуная по спутниковым данным высокого разрешения // *Russian J. Earth Sciences*. 2023. Т. 23, ES6008.
232. Morozov E. G., Tarakanov R. Yu., Frey D. I. Bottom gravity currents and overflow in deep channels of the Atlantic ocean. Springer Nature Switzerland AG, 2021. 483 p.
233. Рувинская Е. А., Куркина О. Е., Куркин А. А., Зайцев А. И. Моделирование воздействия внутренних волн на морские платформы для гидрологических условий шельфовой зоны о. Сахалин // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2017. Т. 10, № 4. С. 61–70.
234. Morozov E. G., Tarakanov R. Yu., Frey D. I. et al. Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // *J. of Oceanography*. 2018. V. 74, № 2. P. 147–167.
235. Khimchenko E. E., Frey D. I., Morozov E. G. Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // *Russian J. Earth Sciences*. 2020. V. 20, ES2006.
236. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником ра-

- диальной симметрии // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 5. С. 76–81.
237. Воробьев Н. Н. Теория рядов. М.: Издательство Лань, 2002. 408 с.
238. Ozsoy E. Geophysical fluid dynamics II. Stratified rotating fluid dynamics of the atmosphere-ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. Switzerland AG Cham: Springer Nature, 2021. 323 p.
239. Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z. Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // Ocean Engineering. 2022. V. 266. P. 112840.
240. Ulloa H. N., Fuente A., Nino Y. An experimental study of the free evolution of rotating, nonlinear internal gravity waves in a two-layer stratified fluid // J. Fluid Mechanics. 2014. V. 742. P. 308–339.
241. Li T., Wan M., Wang J., Chen S. Flow structures and kinetic-potential exchange in forced rotating stratified turbulence // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. P. 014802.
242. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от источника возмущений в стратифицированной вращающейся среде // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 57–63.
243. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 352 с.
244. Филлипс О. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 320 с.
245. Фабрикант А. Л., Степанянц Ю. А. Распространение волн в сдвиговых потоках. М.: Наука–Физматлит, 1996. 240 с.
246. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
247. Bouruet-Aubertot P. I., Thorpe S. A. Numerical experiments of internal gravity waves in an accelerating shear flow // Dynamics Atmosphere Oceans. 1999. V. 29. P. 41–63.
248. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
249. Bulatov V., Vladimirov Yu. Analytical approximations of dispersion relations for internal gravity waves equation with shear flows // Symmetry. 2020. V. 12 (11). P. 1865.
250. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Внутренние гравитационные волны в океане с разнонаправленными сдвиговыми течениями //

- Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56, № 1. С. 104–111.
251. Морозов Е. Г., Спиридонов В. А., Молодцова Т. Н. и др. Исследования экосистемы атлантического сектора Антарктики (79-й рейс научно-исследовательского судна «Академик Мстислав Келдыш») // Океанология. 2020. Т. 60, № 5. С. 823–825.
252. Morozov E. G., Pisarev S. V. Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments) // Oceanology. 2002. V. 42, № 2. P. 153–161.
253. Young W. R., Phines P., Garret C. J. R. Shear-flow dispersion, internal waves and horizontal mixing // J. Phys. Oceanography. 1982. V. 12 (6). P. 515–527.
254. Meunier P., Dizus S., Redekopp L., Spedding G. Internal waves generated by a stratified wake: experiment and theory // J. Fluid Mech. 2018. V. 846. P. 752–788.
255. Slepyshev A. A., Vorotnikov D. I. Generation of vertical fine structure by internal waves in a shear flows // Open J. Fluid Mech. 2019. V. 9. P. 140–157.
256. Боровиков В. А., Левченко Е. С. Функция Грина уравнения внутренних волн в слое стратифицированной жидкости со средним сдвиговым течением // Морской гидрофизический журнал. 1987. № 1. С. 24–32.
257. Найфэ А.-Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.

Научное издание

БУЛАТОВ Виталий Васильевич
ВЛАДИМИРОВ Игорь Юрьевич

**ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТНЫХ И ВНУТРЕННИХ
ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ СРЕДАХ**

Редактор *Е.И. Ворошилова*
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 04.07.2025. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 22. Тираж 300 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17Б
E-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru
Сайт: <http://www.fml.ru>
Интернет-магазин: <http://www.fmlib.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства
в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru. E-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (499) 270-73-59

ISBN 978-5-9221-2011-1



9 785922 120111