

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО РАН**

А.А. Горбунов, В.И. Полежаев

**МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ И ЧИСЛЕННОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ
РЕЛЕЯ В ЖИДКОСТЯХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ**

Препринт № 897

Москва, 2008 г.

Введение

Развитие техники численного моделирования на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемых сред, позволившее преодолеть в последние годы трехмерный барьер в моделировании процессов конвективного теплообмена, наряду с широкими возможностями в получении конкретных результатов в практических задачах, которые реализованы и имеют массовое применение даже в коммерческих компьютерных программах, делает актуальным развитие аналитических методов для анализа и интерпретации результатов численного моделирования. Это важно для изучения тонкой структуры течений, процессов переноса, проверки достоверности их численной реализации и особенно актуально для задач конвекции при реальных уравнениях состояния вблизи критической термодинамической точки.

В механике вязких сред (см. например, [1]) для замыкания системы уравнений Навье-Стокса обычно применяется уравнение Клайперона, являющееся уравнением состояния идеального или совершенного газа. Некоторым обобщением этого широко распространенного уравнения состояния является уравнение состояния “нормального газа”, широко применяемого в газодинамике [2]. Однако, эти уравнения “не знают” о

таких реальных свойствах жидкости, как критическая (термодинамическая) точка. В то же время для реальных газов, особенно в околкритическом состоянии, уравнение Ван-дер-Ваальса, которое применяется в численных моделях конвекции, начиная с 90-х годов [3], недостаточно строго описывает связь между термодинамическими параметрами в непосредственной близости от критической точки (см., например [4]). Более точно такая связь определяется уравнениями состояния с вириальными коэффициентами [5], имеются и табличные данные, поэтому представляет интерес вопрос о влиянии уравнения состояния на околкритическую конвекцию, особенно при приближении к критической точке. Однако, такие результаты пока еще редки [6].

В тоже время, ввиду разнообразия веществ, применяемых в приложениях, для моделирования необходим более общий подход. В этой работе используется задание уравнения состояния в виде неявной функции (см., например, [2]), позволяет построить аналитические решения линеаризованных уравнений, описывающих малые возмущения механического равновесия, а также в достаточно общей форме изучать волновые и конвективные явления (скорость звука в газах, адиабатические градиенты термодинамических параметров, условия возникновения конвекции в сжимаемых, в том числе околкритических, средах). В этом смысле работа является продолжением [7] и развивает тот же общий

подход, основанный на сочетании метода малых возмущений и прямого численного моделирования. Ряд рассматриваемых вопросов в той или иной мере ставился в предшествующих работах, о чем говорится ниже, в каждом конкретном месте.

В первой части (п.п. 1-3) рассматривается метод малых возмущений для простейшей задачи о конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом снизу, при условиях скольжения. В отличие от модели конвекции в приближении Буссинеска, на основе которой эта задача была решена Релеем [8], используются уравнения Навье-Стокса для сжимаемых сред с произвольным уравнением состояния. Основным результатом здесь является формула для критического числа Шварцшильда, дающая необходимые условия отсутствия конвекции в сжимаемой вязкой среде с произвольным уравнением состояния. Анализируются предшествующие попытки авторов этой работы и других авторов получить условия этого типа.

Во второй части (п.п. 4-7) кратко рассмотрен метод численного решения для двух- и трехмерных уравнений и даны примеры расчета двух- и трехмерных конвективных структур за порогом устойчивости равновесия с некоторой интерпретацией, связанной с методом возмущений. В двумерном случае проводится сравнение условий возникновения конвекции, полученных по методу возмущений и путем

прямого численного моделирования. Кроме того, продолжая предшествующие исследования конвекции при параметрах реальных экспериментов с околоскритическим гелием ^3He , обсуждаются условия реализации одно-и двух валиковых структур за порогом возникновения конвекции при параметрах упомянутых экспериментов, что представляет значительные трудности. В связи с этим приводимые далее расчеты трехмерных структур выполнены при большом параметре гидростатической сжимаемости, существенно превышающем лабораторный и имели целью, хотя бы качественно, рассмотреть особенности формирования во времени, а также стационарных небуссиновских структур в задаче Релея при приближении к критической термодинамической точке в среде с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса. И, хотя, ввиду систематически используемого приближения граничных условий скольжения, многие выводы имеют качественный характер для большинства приложений в замкнутых объемах с условиями прилипания на твердыми границах, стремительное развитие нанотехнологий, повидимому, сделает технически реализуемым и практически важным и это приближение, открывающее большие возможности для аналитических методов.

В заключение отметим, что многие из рассматриваемых в этом препринте теоретических вопросов возникли в связи с задачами механики

невесомости и гравитационно-чувствительных систем, в частности с проектом КРИТ по исследованию околоскритических явлений на Международной космической станции.

Выпуск препринта поддержан грантами РФФИ № 06-01-00281 и № 07-08-00188, а также ведущей научной школой НШ 2496.2008.8. Авторы благодарят А.О. Руденко за помощь в оформлении препринта.

1. Общая формулировка задачи и определяющие критерии подобия

Будем исходить в дальнейшем из модели сжимаемой вязкой жидкости (газа) с постоянными физическими свойствами в постоянном гравитационном поле, но при произвольном уравнении состояния

$$f(p, \rho, T) = 0. \quad (1)$$

Запишем безразмерную систему уравнений динамики вязкой жидкости (газа) в следующем виде

$$\begin{aligned} & MPr_0 \left[\rho^2 f'_p \left(Sh \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) T \right) + \sigma_p (\gamma_0 - 1) T f'_T \left(Sh \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) p \right) \right] = \\ & = C_R \rho f'_p \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (2)$$

$$M^2 \rho \left(Sh \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} \right) + \frac{\sigma_p \sigma_V}{\gamma_0} \nabla p + C_F \rho e_z = MC_R \left(\nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla, \mathbf{V}) \right), \quad (3)$$

$$\text{Sh} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \rho \mathbf{V}) = 0. \quad (4)$$

Уравнение состояния (1) устанавливает зависимость между переменными давления p , плотности ρ и температуры T в каждый момент времени t в любой точке пространства с координатами x, y, z . Уравнение (2) представляет собой уравнение баланса энергии, где f'_p, f'_ρ, f'_T - частные производные функции f . Уравнения (3), (4) определяют уравнения движения Навье-Стокса и уравнение неразрывности. Вектор $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ - скорость. В операторе Гамильтона $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ - обозначают соответственные координатные орты.

$\text{Sh} = \frac{L}{\tilde{V} \tilde{t}}$ - число Струхала, где L, \tilde{V}, \tilde{t} - масштабы длины, скорости и времени.

$M = \frac{\tilde{V}}{v_\sim}$ - число Маха, где v_\sim - скорость звука при масштабных термодинамических параметрах $\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{T}$. Последняя, для заданного общего уравнения состояния (1) может быть найдена в виде

$$v_\sim = \sqrt{\frac{\tilde{T} (f'_T)^2 - \tilde{\rho}^2 c_v f'_p f'_\rho}{\tilde{\rho}^2 c_v (f'_p)^2}} \quad (\text{см. } \text{http://www.ipmnet.ru/~polezh/gorbunov}).$$

c_v - теплоемкость при постоянном объеме.

$\gamma_0 = \frac{R + c_v}{c_v}$ - показатель адиабаты, R - газовая постоянная. В частности,

адиабаты газа Ван-дер-Ваальса приведены в [7].

$C_R = \frac{M}{Re} = \frac{\mu}{\tilde{\rho} L v_{\sim}}$, $Re = \frac{\tilde{\rho} \tilde{V} L}{\mu}$ - число Рейнольдса, μ - динамический

коэффициент вязкости. Параметр C_R позволяет сопоставить влияние трения при скоростях диффузионных процессов с влиянием трения, возникающего при движении со звуковыми скоростями в среде с масштабной плотностью в масштабном объеме.

$C_F = \frac{M^2}{Fr} = \frac{gL}{v_{\sim}^2}$, $Fr = \frac{\tilde{V}^2}{gL}$ - число Фруда, g - ускорение силы тяжести.

Параметр C_F соотносит потенциальную энергию пробной массы при заданном тяготении на уровне масштабной высоты с кинетической энергией, которую приобретает эта масса, двигаясь со скоростью звука.

$\sigma_p = \frac{\tilde{p}}{R\tilde{\rho}\tilde{T}}$ - коэффициент, характеризующий уклонение выбранного

масштаба давления от давления совершенного газа при выбранных масштабах плотности и температуры.

$\sigma_v = \frac{\gamma_0 R\tilde{T}}{v_{\sim}^2}$ - коэффициент, характеризующий уклонение квадрата

скорости звука в совершенном газе при выбранном масштабе температуры

от квадрата скорости звука исследуемого газа при масштабных термодинамических параметрах.

$Pr = \gamma_0 Pr_0$ - число Прандтля, $Pr_0 = \frac{\mu c_v}{\lambda}$, λ - коэффициент

теплопроводности. Формально, $\frac{\mu c_v}{\lambda} = 1$ (см. например, [9]), однако на

практике параметр Pr_0 указывает отклонение этого отношения от единицы.

В дальнейшем будем предполагать, что газ заключен в прямоугольном параллелепипеде с твердыми непроницаемыми стенками, ускорение силы тяжести направлено противоположно оси z , выбранной, для определенности правой системы координат, причем одна из вершин параллелепипеда является началом координат, а сам параллелепипед расположен в положительном октанте этой системы координат (см., например, [10]), стороны параллелепипеда, лежащие на координатных осях, обозначим соответственно L_x, L_y, L_z , нижняя грань параллелепипеда имеет постоянную температуру T_1 , а верхняя грань – постоянную температуру T_2 .

Для определенности будем считать, что выполняются условия

$$f'_p > 0, f'_T < 0, f'_\rho < 0, \quad (5)$$

которые будем называть условиями надкритичности, а соответствующую область изменения термодинамических параметров – областью

надкритичности. Близость к критической точке характеризуется величиной $|f'_\rho|$, которая может быть весьма малой. Удаление от критической точки для газа Ван-дер-Ваальса определяется эквивалентным значением $\varepsilon = \frac{T_1 + T_2}{2} - 1$ (см. также [7]).

2. Метод возмущений для уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа с произвольным уравнением состояния

Общая идея метода применительно к задаче о потере устойчивости равновесия, состоит в линеаризации механического равновесия. В [7] это было выполнено для случаев совершенного газа и газа Ван-дер-Ваальса. В случае уравнения состояния в форме (1) определим линеаризованное равновесие как совокупность функций

$$V \equiv V_q = 0, T \equiv T_q = T_m + \Delta T \left(z - \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

$$p \equiv p_q = p_m + \frac{\Delta p}{L_z} \left(z - \frac{L_z}{2} \right), \rho \equiv \rho_q = \rho_m + \frac{\Delta \rho}{L_z} \left(z - \frac{L_z}{2} \right), \quad (7)$$

где

$$\Delta T = \frac{1}{f'_T} \left(f'_p \rho_m L_z \frac{\gamma_0}{\sigma_p \sigma_V} C_F - f'_\rho \Delta \rho \right), \quad \Delta p = -\rho_m L_z \frac{\gamma_0}{\sigma_p \sigma_V} C_F. \quad (8)$$

Здесь T_m, p_m, ρ_m - средние значения температуры, давления и плотности, а частные производные от функции f вычислены при указанных средних значениях термодинамических параметров. Видно, что для достаточно малых значений параметра C_F при $\Delta\rho = O(C_F)$, соотношения (6)-(8) удовлетворяют системе уравнений (1)-(4) с точностью до второго порядка, что позволяет существенно упростить линеаризацию этой системы. Подвергнув линеаризованное равновесие (6), (7) малым возмущениям $\delta V, \delta p, \delta \rho, \delta T$, где $\delta V = (\delta V_x, \delta V_y, \delta V_z)$ - вектор возмущений скорости, и подставив возмущенное линеаризованное равновесие $V_q + \delta V, p_q + \delta p, \rho_q + \delta \rho, T_q + \delta T$ в безразмерную систему уравнений динамики газа (1)-(4), удерживая члены одинакового порядка малости, получим возмущенную систему уравнений в виде

$$f'_p \delta p + f'_\rho \delta \rho + f'_T \delta T = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & MSh Pr_0 f'_T \left(\rho_m^2 f'_p \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \sigma_p (\gamma_0 - 1) T_m f'_T \frac{\partial \delta p}{\partial t} \right) + \\ & + MPr_0 \left[\rho_m^3 (f'_p)^2 \frac{\gamma_0}{\sigma_p \sigma_v} C_F + (\sigma_p (\gamma_0 - 1) T_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_\rho) \frac{\Delta \rho}{L_z} \right] \delta V_z = \\ & = C_R \rho_m f'_p f'_T \nabla^2 \delta T, \end{aligned} \quad (10)$$

$$M^2 Sh \rho_m \frac{\partial \delta V}{\partial t} + \frac{\sigma_p \sigma_v}{\gamma_0} \nabla \delta p + C_F \delta p e_z = MC_R \left(\nabla^2 \delta V + \frac{1}{3} \nabla (\nabla, \delta V) \right), \quad (11)$$

$$\text{Sh} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \frac{\Delta \rho}{L_z} \delta V_z + \rho_m (\nabla, \delta V) = 0. \quad (12)$$

Заметим, что обычно при анализе систем уравнений подобных системе (9)-(12) используется концепция «нормальных возмущений» (см., например, [11, 12]), которая априори предписывает поведение решений, как во времени, так и в продольном и поперечном направлениях. В результате решается то или иное дисперсионное уравнение, являющееся обыкновенным дифференциальным уравнением по вертикальному направлению. Мы, однако, будем придерживаться концепции разделения переменных [13], что важно, например, в случае сопоставления с результатами прямого численного решения (см., например, www.ipmnet.ru/~polezh/gorbunov).

Из возмущенных уравнений баланса энергии (10) и движения (11) видно, что в зависимости от соотношения порядков величин C_R и C_F , $\Delta \rho$ различаются следующие случаи:

1. $C_F \ll C_R$, $\Delta \rho \ll C_R$, однородная среда в невесомости;
2. $C_F \ll C_R$, $\Delta \rho \sim C_R$, стратифицированная среда в невесомости;
3. $C_F \sim C_R$, $\Delta \rho \ll C_R$, среда однородной плотности в гравитационном поле;
4. $C_F \sim C_R$, $\Delta \rho \sim C_R$, стратифицированная среда в гравитационном поле.

Заметим, что всего этого набора режимов в приближении Буссинеска нет.

Для рассматриваемого ниже случая стратифицированной среды в гравитационном поле, то есть когда параметры C_F , $\Delta\rho$ и C_R сравнимы друг с другом, из возмущенной системы уравнений динамики газа (9)-(12) следует дисперсионное дифференциальное уравнение в частных производных относительно возмущения вертикальной компоненты скорости δV_z в виде

$$\left(A \frac{\partial^4}{\partial t^4} + B \frac{\partial^3}{\partial t^3} \nabla^2 + C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + D \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \nabla^2 + E \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + F \nabla_{xy}^2 \right) \Psi = 0, \quad (13)$$

где

$$\Psi = \frac{\partial \delta V_z}{\partial z},$$

$$A = \gamma_0 \text{Pr}_0 (f'_p)^2 \rho_m^3 M^4 \text{Sh}^4,$$

$$B = -\gamma_0 \left(1 + \frac{7}{3} \text{Pr}_0 \right) C_R \rho_m^2 (f'_p)^2 M^3 \text{Sh}^3,$$

$$C = -\sigma_p \sigma_v \text{Pr}_0 \left(\sigma_p (\gamma_0 - 1) T_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_\rho \right) M^2 \text{Sh}^2,$$

$$D = (\gamma_0 - 1) \sigma_v \text{Pr}_0 C_R T_m M \text{Sh} \sigma_p^2 (f'_T)^2,$$

$$E = \sigma_p \sigma_v \rho_m f'_p f'_\rho C_R^2,$$

$$F = \text{Pr}_0 C_F \left[\gamma_0 C_F (f'_p)^2 \rho_m^3 + \sigma_p \sigma_v \left(\sigma_p (\gamma_0 - 1) T_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_\rho \right) \frac{\Delta\rho}{L_z} \right].$$

Заметим, что здесь для производной вертикальной составляющей скорости получаются уравнения четвертого порядка по времени, тогда как для

вертикальной составляющей скорости (в предположении нормальных возмущений, что обычно применяется в задачах конвективной устойчивости в случае приближения Буссинеска (см., например, [11])), получаются уравнения второго порядка по времени.

Видно, что в области надкритичности (5) имеют место неравенства

$$A > 0, B < 0, C < 0, D > 0, E < 0. \quad (14)$$

Следует отметить, что нетривиальные стационарные решения дисперсионного уравнения (13), определяются уравнением $(E\nabla^2\nabla^2\nabla^2 + F\nabla_{xy}^2)\Psi = 0$, которое при соотношении $|f'_\rho| \sim C_R$, переходит в уравнение $\nabla_{xy}^2\Psi = 0$. В дальнейшем будем считать, что $|f'_\rho| \gg C_R$.

Применив к уравнению (13) метод разделения переменных (см., например, [13]), то есть, разыскивая его решение в виде $\Psi = \psi_t \psi_x \psi_y \psi_z$, $\psi_\xi = \psi_\xi(\xi)$, где символу ξ предписываются значения t, x, y, z и, считая заданными волновые свойства $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ по соответственным координатным направлениям, для определения функции ψ_t получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$A\lambda_t^4 + B\lambda_t^3 + C\lambda_t^2 + D\lambda_t + (E\Lambda^3 + F\Lambda_{xy}) = 0, \quad (15)$$

где $\Lambda = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$, $\Lambda_{xy} = \lambda_x + \lambda_y$.

Для граничных условий скольжения в пренебрежении трением вдоль границ волновые числа выражаются в виде (см., например, [7])

$$\lambda_{\xi} = -\left(\frac{\pi n_{\xi}}{L_{\xi}}\right)^2; n_{\xi} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \xi: x, y, z; n_x^2 + n_y^2 \neq 0,$$

и, следовательно,

$$\Lambda < 0, \Lambda_{xy} < 0. \quad (16)$$

Как видно, с учетом неравенств (14), (16) первые четыре коэффициента характеристического уравнения (15) строго положительны. Если выполняется условие

$$E\Lambda^3 + F\Lambda_{xy} \geq 0, \quad (17)$$

то, при $\lambda_t > 0$, число перемен знака в ряду коэффициентов характеристического уравнения (15) равно нулю, то есть все действительные корни этого уравнения согласно правилу Декарта (см., например, [14]), отрицательны. Из условия (17) вытекает оценка

$$F \leq |E| \frac{|\Lambda|^3}{|\Lambda_{xy}|}. \quad (18)$$

Условия (17) или (18) являются в данном случае условиями конвективной устойчивости, ибо при их выполнении, по крайней мере, монотонные решения соответствующего дифференциального уравнения ограничены.

3. Условия отсутствия конвекции в сжимаемой среде с произвольным уравнением состояния.

Для иллюстрации применения данного подхода и его возможностей рассмотрим задачу о возникновении тепловой гравитационной конвекции в слое между двумя свободными изотермическими границами, подогреваемом снизу, в сжимаемой среде. В приближении Буссинеска условие устойчивости получено Релеем [8] на основе решения дисперсионных уравнений для нормальных мод, что дало значения для критического числа Релея Ra^* . Для сжимаемого свершенного газа Джеффри [15], используя линеаризацию уравнений Навье-Стокса для вихревого течения, получил модификацию условия устойчивости Релея, в котором разность температур между слоями заменена разностью между заданным и адиабатическим градиентами температуры $Ra^s = (1 - K)Ra$ (см. подробнее [7]). Это дало возможность получить общепринятое значение критического числа конвективной устойчивости для свершенного газа в виде $Ra_c^s = Ra^*$.

Следуя изложенному подходу, условие конвективной устойчивости для данной задачи в среде с произвольным уравнением состояния можно получить, подставляя в (18) значения коэффициентов из формулы (13).

В результате будем иметь неравенство

$$\begin{aligned} & \text{Pr}_0 C_F \left[\gamma_0 C_F (f'_p)^2 \rho_m^3 + \sigma_p \sigma_V (\sigma_p (\gamma_0 - 1) T_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_\rho) \frac{\Delta \rho}{L_z} \right] \leq \\ & \leq \sigma_p \sigma_V \rho_m f'_p |f'_\rho| C_R^2 \frac{|\Lambda|^3}{|\Lambda_{xy}|} \end{aligned} \quad (19)$$

Преобразование неравенства (19) с использованием формул (8) из определения линеаризованного равновесия приводит к условию конвективной устойчивости (или отсутствия конвекции) в виде

$$\frac{\Delta T}{L_z} \geq \nabla_z T_a^{(m)} + \rho_m \frac{f'_p}{f'_T} \frac{(f'_\rho)^2 C_R^2 \frac{|\Lambda|^3}{|\Lambda_{xy}|}}{\text{Pr}_0 C_F (\sigma_p (\gamma_0 - 1) T_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_\rho)}, \quad (20)$$

где

$$\nabla_z T_a^{(m)} = \frac{\gamma_0 (\gamma_0 - 1)}{\sigma_V} C_F \frac{\rho_m T_m f'_T f'_p}{\sigma_p (\gamma_0 - 1) T_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_\rho}, \quad (21)$$

является проекцией адиабатического градиента температуры на ось z в центре области, заполненной газом. Адиабатический градиент температур для среды с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса получен в [7], а для среды с произвольным уравнением состояния выведен и приведен на упоминавшемся сайте www.ipmnet.ru/~polezh/gorbunov.

Из (20) с учетом приведенных выше условий надкритичности $f'_p > 0, f'_T < 0, f'_\rho < 0$ следует, что возмущения устойчивы при

неотрицательном перепаде температуры между верхней и нижней стенками слоя.

Это условие сопоставлялось с соотношением, полученным с помощью прямого численного решения уравнений Навье – Стокса (см. п. 5)

При $T_2 - T_1 = \Delta T < 0$, условие отсутствия конвекции (20) можно преобразовать к виду

$$-(1 - K) \frac{C_F Pr_0}{C_R^2} \frac{f'_T}{\rho_m f'_p} \frac{|\Delta T| \sigma_p (\gamma_0 - 1) \Gamma_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_p}{L_z f'_p f'_p} \leq \frac{|\Lambda|^3}{|\Delta_{xy}|}, \quad (22)$$

где $K = \frac{\nabla_z T_a^{(m)}}{\frac{\Delta T}{L_z}}$ - число Шварцшильда, представляющее отношение между

адиабатическим и заданным градиентами температуры (см., например, [7]).

В определениях и терминологии работы [7], условие отсутствия конвекции для среды с произвольным уравнением состояния на основании формулы (22) будет выглядеть следующим образом

$$Ra^s = -Ra(1 - K) \frac{\sigma_p (\gamma_0 - 1) \Gamma_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_p}{\gamma_0 f'_p f'_p} \leq Ra^* . \quad (23)$$

Здесь $Ra = \frac{C_F \gamma_0 Pr_0}{C_R^2} \beta \frac{|\Delta T|}{L_z}$ - число Рэлея, $\beta = \frac{f'_T}{\rho_m f'_p}$ - коэффициент

температурного расширения в центре области,

$$Ra^* = \frac{|\Lambda|^3}{|\Lambda_{xy}|} = \pi^4 \frac{\left(\left(\frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z} \right)^2 \right)^3}{\left(\frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2}. \quad (24)$$

Таким образом, в развитие [7], где поправка к соотношению Джеффри была получена для среды с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса, в

формуле (23) поправка $\frac{\sigma_p (\gamma_0 - 1) \Gamma_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_p^*}{\gamma_0 f'_p f'_p}$ справедлива для

произвольного уравнения состояния.

Условие (20) при отрицательном перепаде температур между верхней и нижней стенками параллелепипеда может быть преобразовано к другому виду

$$K \geq \frac{1}{1 + \frac{\sigma_V}{\gamma_0 (\gamma_0 - 1) \Gamma_m Pr_0} \left(\frac{f'_p}{f'_T} \right)^2 \left(\frac{C_R}{C_F} \right)^2 \frac{|\Lambda|^3}{|\Lambda_{xy}|}}. \quad (25)$$

Таким образом, правая часть неравенства (25) дает критическое число

Шварцшильда, превышение которого приводит к отсутствию конвекции.

Так как величина $\frac{|\Lambda|^3}{|\Lambda_{xy}|}$ имеет известный минимум, равный (см. [7, 8]),

$\frac{27}{4} \left(\frac{\pi}{L_z} \right)^4$, то число

$$K_c^{\max} = \frac{1}{1 + \frac{27}{4} \frac{\sigma_V}{\gamma_0(\gamma_0 - 1) \Gamma_m \text{Pr}_0} \left(\frac{f'_p}{f'_T} \right)^2 \left(\frac{C_R}{C_F} \right)^2 \left(\frac{\pi}{L_z} \right)^4}, \quad (26)$$

является наибольшим (или необходимым) критическим числом Шварцшильда, определяющим область устойчивости возмущений в зависимости от априорных характеристик. При этом условие отсутствия конвекции в форме Шварцшильда $K_c > 1$, к которому приводят эвристические соображения (подробнее см. [7]), является достаточным и (как видно из (26)) завышенным условием. Физическая причина такого завышения, найденная аналитически для произвольного уравнения состояния в форме (26), по-видимому, впервые, связана с влиянием вязкости. Отсюда следует, что конвекции может не быть при сверхadiaбатических (по Шварцшильду) градиентах температур. На это обстоятельство, казавшееся парадоксальным, было обращено внимание еще при численных расчетах для совершенного газа при моделировании конвекции при больших параметрах гидростатической сжимаемости в

“глубокой” атмосфере, каковой является атмосфера Венеры (подробнее см. [16 - 18]).

Заметим также, что критическое число Ra^* (24), определяемое лишь геометрией области и волновыми характеристиками малых возмущений, не зависит от физических свойств среды и служит «мерой» структуры возникающих течений за порогом устойчивости, которые обусловлены решениями (собственными функциями) соответствующих дисперсионных уравнений в частных производных. Эти собственные функции представляются в рассматриваемом случае произведениями тригонометрических функций (см. решения задач о колебаниях ограниченных объемов в [13]).

Условие отсутствия конвекции (22) можно преобразовать к виду

$$Re_0 \leq \sqrt{\frac{|\Lambda|^3}{|\Delta_{xy}|} \cdot \frac{1}{(1-K)C_F Pr_0 |f'_T| \frac{|\Delta T|}{L_z}} \cdot \frac{\rho_m (f'_p)^2}{\sigma_p (\gamma_0 - 1) T_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_p}} \quad (26)$$

Здесь введено обозначение $Re_0 = \frac{1}{C_R}$. Можно сказать, что число Re_0

задает число Рейнольдса, а правая часть неравенства (26) определяет критическое число Рейнольдса. При этом величина

$$Re_0^{\min} = \sqrt{\frac{27 \pi^4}{4 L_z^3} \cdot \frac{1}{|f'_T| (1-K) C_F Pr_0 |\Delta T|} \cdot \frac{\rho_m (f'_p)^2}{\sigma_p (\gamma_0 - 1) T_m (f'_T)^2 - \rho_m^2 f'_p f'_p}}, \quad (27)$$

является минимальным критическим числом Рейнольдса.

4. Численное решение двумерных и трехмерных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа

Применяемый здесь численный метод решения системы уравнений (1)-(4) основан на разрешении уравнения состояния (1) относительно температуры и соответственной замены в уравнении баланса энергии (2) полной производной по времени от температуры на полную производную по времени от давления. Для совершенного газа указанные преобразования приводят к уравнениям

$$T = \frac{p}{\rho}, \quad (28)$$

$$MPr_0 \left[Sh \frac{\partial p}{\partial t} + (\nabla, pV) + (\gamma_0 - 1)p(\nabla, V) \right] = C_R \nabla^2 T. \quad (29)$$

В случае газа Ван-дер-Ваальса имеем

$$T = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{3} \right) \left(p + \frac{9}{8} \rho^2 \right), \quad (30)$$

$$MPr_0 \left[Sh \frac{\partial p}{\partial t} + (\nabla, pV) + \left(\frac{9\rho}{4(3-\rho)^2} (4\gamma_0 T - \rho(3-\rho)^2) - p \right) (\nabla, V) \right] = \frac{3C_R}{3-\rho} \nabla^2 T. \quad (31)$$

Дискретизация преобразованной системы уравнений динамики газа на равномерных смещенных сетках [24, 25] позволяет построить явную

двухслойную разностную схему расщепления. При этом на первом этапе из уравнения неразрывности (4) и преобразованного уравнения баланса энергии производятся вычисления сеточных функций плотности и давления, что дает функцию температуры. На втором этапе из уравнений движения (3) находятся сеточные функции компонент скорости, причем градиент давления аппроксимируется на верхнем слое. Указанное выше преобразование уравнения баланса энергии обеспечивает шаг интегрирования по времени по порядку равный минимальному пространственному шагу дискретизации в степени три вторых. Это обстоятельство способствует экономии реального машинного времени, что оказывается весьма существенным при расчетах задач с реальными физическими параметрами (см., например, [26, 27]).

5. Численное моделирование условий возникновения конвекции, найденных по методу возмущений

Для сопоставления оценки (27) с результатами численного моделирования системы уравнений (1)-(4) с использованием методики, изложенной в п. 4, проведена серия вычислительных экспериментов для совершенного газа ($f = p - \rho T$) и газа Ван-дер-Ваальса ($f = p - \frac{3\rho T}{3 - \rho} + \frac{9}{8}\rho^2$). Рассматривалась

одноваликовая конвекция в единичном квадрате ($L_x = L_z = 1$) при следующих значениях безразмерных комплексов:

$$\gamma_0 = 1.33, Pr = 0.71, C_F = 0.1,$$

$$\sigma_p = 1, \sigma_v = 1, \text{ для совершенного газа,}$$

$$\sigma_p = 1, \sigma_v = 1.105, \text{ для газа Ван-дер-Ваальса.}$$

Использовались значения параметров:

$$\rho_m = 1, T_m = 1 + \varepsilon, \varepsilon = 0.1.$$

Предполагалось, что в начальный момент времени ($t = 0$) газ неподвижен, однороден по температуре ($T = T_2$), плотности и давлению. При $t > 0$, мгновенно начинает действовать массовая сила, температура нижней стенки мгновенно устанавливается равной T_1 . Изучалась зависимость критического числа Рейнольдса от перепада температуры $\Delta T = T_2 - T_1$, который варьировался от 0.05 до 0.8 для совершенного газа, и от 0.05 до 0.2 для газа Ван-дер-Ваальса. Для серии чисел Рейнольдса Re_0 по заданному ΔT вычисления проводились до времени $t \approx 100 Re_0$. Для каждого расчета строился график зависимости производной по времени нормы возмущений температуры $\frac{d\|\delta T\|}{dt}$ от времени t . Установлено, что при стационарных конвективных течениях $\frac{d\|\delta T\|}{dt} \rightarrow 0+$, при $t \rightarrow 0$. Здесь

символы $0+$ означают, что при стремлении к пределу $\frac{d\|\delta T\|}{dt} > 0$. При тривиальных стационарных течениях имеет место $\frac{d\|\delta T\|}{dt} \rightarrow 0-$, при $t \rightarrow 0$, где символы $0-$ означают, что при стремлении к пределу $\frac{d\|\delta T\|}{dt} < 0$. В качестве критического числа Рейнольдса Re_* выбиралось такое число Re_0 , для которого реализовывалось стационарное конвективное течение ($\frac{d\|\delta T\|}{dt} \rightarrow 0+$), тогда как для числа $Re_0 - \delta$ имело место $\frac{\partial\|\delta T\|}{\partial t} \rightarrow 0-$. При расчетах полагалось $\delta = 10^{-4}$.

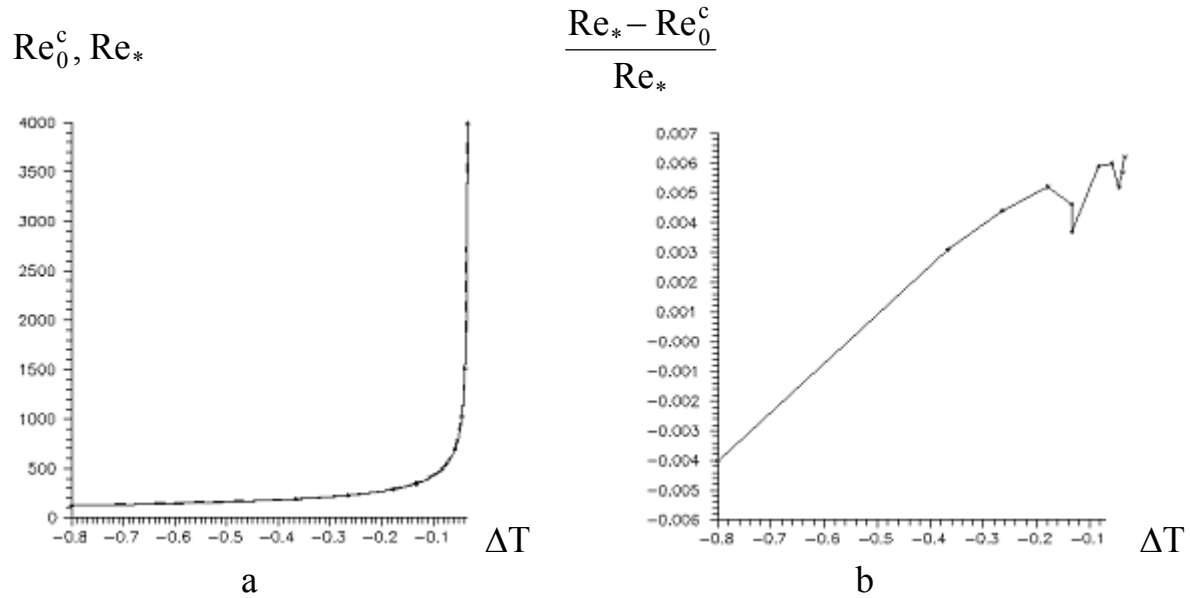
Заметим, что такой способ нахождения критического числа отличается от традиционно используемого (см., например, [28, 29] для конвекции в приближении Буссинеска и [17] в сжимаемом совершенном газе) способа на основе экстраполяции зависимости числа Нуссельта от числа Релея Nu (Ra) (или максимальной функции тока Ψ_m (Ra) в случае приближения Буссинеска), найденных численно за порогом устойчивости равновесия, к значению критического числа Ra_c , определяемого по пересечению этой зависимости $Nu=1$ (или с линией $\Psi_m=0$), соответствующим отсутствию конвекции.

На Фиг. 1,2 приведено сопоставление оценки (27) с результатами численного моделирования соответственно для совершенного газа и газа

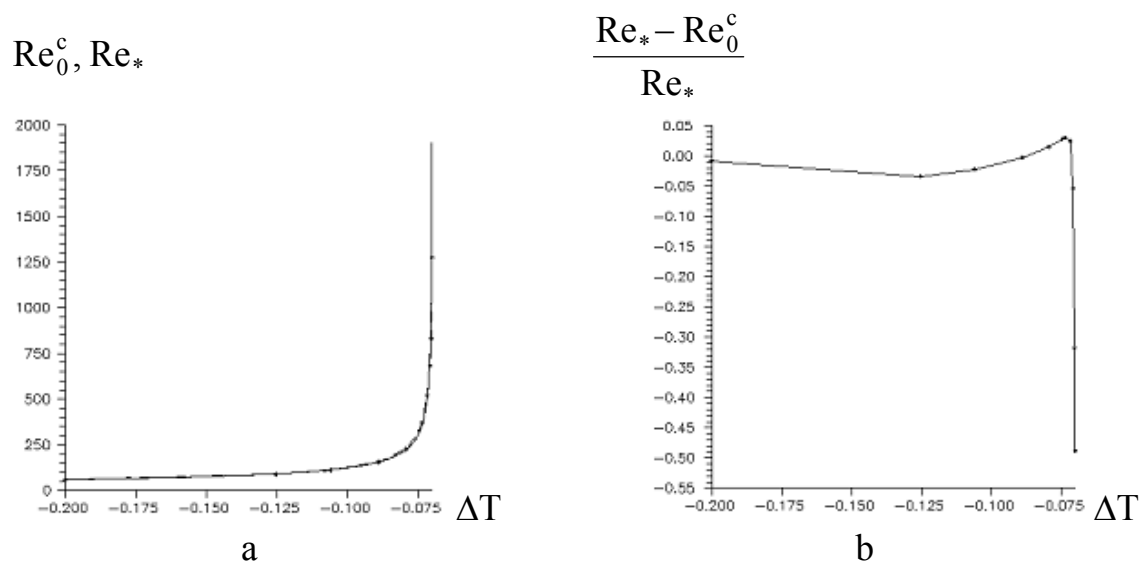
Ван-дер-Ваальса. На Фиг. 1а, 2а сплошные линии на графиках изображают значения критического числа Рейнольдса, определяемые из формулы (27), а прерывистые линии относятся к значениям критического числа Рейнольдса, полученным в результате численного моделирования. Фиг. 1б, 2б представляют графики относительной ошибки результатов расчетов. Видно, что для совершенного газа относительная ошибка результатов расчетов не превышает 1% по всему диапазону изменения градиентов температуры. В случае газа Ван-дер-Ваальса относительная ошибка результатов расчетов находится в зоне 5% при умеренных градиентах температуры. При градиентах температуры больших -0.075 расхождение между оценкой (27) и результатами расчетов становится значительным.

Таким образом, приведенные выше формулы дают основанный на решениях дисперсионных уравнений количественный ответ на вопрос об условиях отсутствия конвекции, в то время как в наиболее цитируемой в зарубежной литературе работе [19], относящейся к условиям возникновения околокритической конвекции, условия конвективной устойчивости получены в форме Джеффри (который, как упоминалось выше, по существу “угадал” их, причем только для совершенного газа). При этом, как и в работе Джеффри, они также лишь “угаданы” из вида соответствующих дисперсионных уравнений для околокритической

конвекции, но не являются их решениями. Поэтому поправки, к условию Джеффри, которые должны были бы следовать из такого решения, в [19]



Фиг. 1. Зависимость критического числа Рейнольдса от градиента температуры (а) и относительная ошибка результатов расчетов (b) в случае совершенного газа.



Фиг. 2. Зависимость критического числа Рейнольдса от градиента температуры (а) и относительная ошибка результатов расчетов (b) в случае газа Ван-дер-Ваальса.

отсутствуют. Расчеты [19] сравниваются с численными результатами [20], получаемыми по довольно сложному условию, имеющему характер критической длины и отличающемуся от условия Джеффри. Однако, в отличие от [16], в [17] это условие получено путем решения дисперсионных уравнений вариационным методом. В [19] получено хорошее согласование и с [20] и с экспериментальными данными Yves Garrabos'a (о последних, однако, имеется лишь ссылка на частное сообщение). Это не удивительно, так как в [7] показано, что поправки на отклонение от возникновения конвекции в совершенном газе Джеффри от аналогичных им в газе Ван-дер-Ваальса для масштабов лабораторных экспериментов весьма малы. Наконец, заметим, что численная проверка условий Джеффри в совершенном газе дано в [18]. Для околокритической среды с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса в [21, 22] дана более полная проверка характеристик теплообмена и условий возникновения конвекции по экспериментальным данным в околокритическом гелии (^3He) [23].

В заключение этого раздела, отдавая дань первопроходцам в довольно трудной области исследования критериев возникновения

конвекции в околоскритической среде [20], следует признать, что более удачными являются критерии, имеющие ясный физический смысл, проверенные прямым численным решением уравнений Навье-Стокса и опирающиеся на введение адиабатических температурных градиентов, входящих в модифицированное число Релея и затем введение поправок к ним на основе решения уравнений по методу возмущений. Именно этот вид критериев дает возможность универсального представления модифицированного числа Нуссельта от модифицированного числа Релея, построенного по реальным данным вблизи критической точки [21, 22]. Заметим, что этот вид критериев был проверен численно на основе решения уравнений Навье-Стокса впервые в [16], о которой было сообщено одному из авторов работы [19]. Но, несмотря на достигнутое количественное согласование в определении условия возникновения конвекции вблизи критической точки в наземном лабораторном эксперименте, выводы в [18] не являются общими и пригодны лишь для лабораторных масштабов.

6. Численное моделирование двумерных структур в околоскритическом гелии ^3He

Для анализа и интерпретации экспериментальных данных по конвекции в нормальном изотопе гелия ^3He вблизи критической точки [21, 22] на разных этапах применялись одно- и многоячейковые модели с твердыми границами. Модель со свободными границами дает здесь лишь качественные результаты, но приведенные выше условия (25) важны для понимания реализации надкритических конвективных структур при разных числах Шварцшильда. Для совершенного газа первые численные реализации конвективных структур были предприняты (в задаче с твердыми границами) довольно давно [17] и имели целью установить особенности теплообмена при “малых” ($C_F = 0.05$, но в сравнении с $C_F \sim 10^{-7}$ в лабораторных экспериментах [22, 23] очень больших) значениях параметра гидростатической сжимаемости при различных (одно- и двухваликовых) конвективных структурах.

Численное моделирование конвективных структур выполнено для единичного квадрата ($L_x = L_z = 1$), заполненного газом Ван-дер-Ваальса

$$(f = p - \frac{3\rho T}{3-\rho} + \frac{9}{8}\rho^2).$$

Рассматривались одноваликовая и двухваликовая структуры при граничных условиях скольжения при следующих значениях безразмерных комплексов:

$$\sigma_p = 1, \sigma_v = 1.105,$$

$$\gamma_0 = 1.67, \text{Pr} = 0.398,$$

$$C_R = 3.227 \cdot 10^{-7}, C_F = 7.477 \cdot 10^{-7}.$$

Предполагается, что масштабы температуры и плотности определены соответствующими значениями температуры и плотности в термодинамической критической точке. При этом приняты следующие значения параметров:

$$\rho_m = 1, T_1 = 1 + \varepsilon, \varepsilon = 0.01.$$

Из формул (21), (25) вытекает оценка проекции адиабатического градиента

$$\nabla_z T_a^{(m)} = 7.431 \cdot 10^{-7},$$

и оценки критических чисел Шварцшильда:

$$\text{для одноваликовой структуры } K_c^{(1)} = 0.93,$$

$$\text{для двухваликовой структуры } K_c^{(2)} = 0.76,$$

$$\text{для трехваликовой структуры } K_c^{(3)} = 0.47.$$

В расчетах одноваликовой структуры принято число Шварцшильда

$$K = 0.84, (Ra^s = 1907), \text{ которому соответствуют значения}$$

$$T_m = 1.0100004445, T_2 = 1.010000889, \Delta T = T_2 - T_1 = -8.89 \cdot 10^{-7}.$$

В расчетах двухваликовой структуры принято число Шварцшильда

$$K = 0.59, (Ra^s = 6919), \text{ которому соответствуют значения}$$

$$T_m = 1.010000635, T_2 = 1.01000127, \Delta T = T_2 - T_1 = -1.27 \cdot 10^{-6}$$

Выбранные безразмерные комплексы и параметры отвечают экспериментальным данным работы [23].

Начальные условия заданы следующим образом:

$$T|_{t=0} = T_2 + dT, \rho|_{t=0} = 1, V|_{t=0} = 0,$$

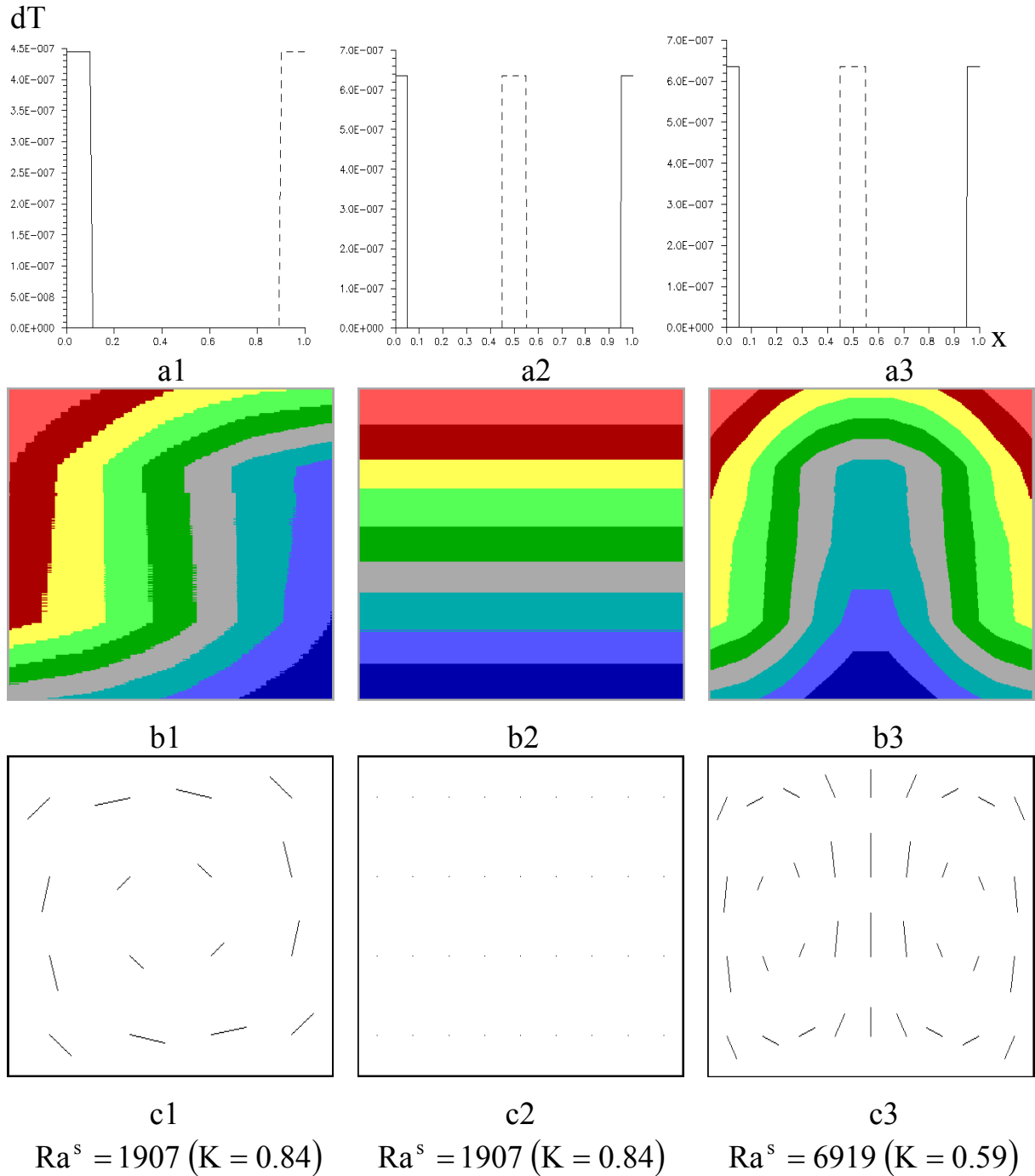
где функция $dT, \int_0^1 \int_0^1 dT dx dz = 0$, представляет собой совокупность

прямоугольных импульсов соответственно на верхней и нижней стенках области и определяет волновые свойства возмущений. Для одноваликовой структуры $\max(dT) = 4.445 \cdot 10^{-7}$, для двухваликовой структуры $\max(dT) = 6.345 \cdot 10^{-7}$. При $t > 0$ на нижней стенке поддерживается температура T_1 , на верхней стенке – температура T_2 .

На Фиг. 3 приведены: а - графики начальных возмущений температуры, b - стационарные изолинии плотности и с - стационарные картины течений. На графиках возмущений сплошные линии – возмущение температуры на нижней границе, прерывистые линии – возмущение температуры на верхней границе.

Фиг. 3, a1, b1, c1 показывают реализацию одноваликовой структуры при соответствии заданного числа Шварцшильда волновым свойствам начальных возмущений температуры. Фиг. 3, a2, b2, c2 иллюстрирует реализацию механического равновесия в случае, если заданное число

Шварцшильда не соответствует волновым свойствам начальных возмущений. Здесь волновые свойства начальных возмущений



Фиг. 3. Графики начальных возмущений (а), стационарные изолинии

плотности (b), стационарные структуры течений (c).

соответствуют реализации двухваликовой структуры, а заданное число Шварцшильда определяет одноваликовую структуру. Фиг. 3, a3, b3, c3 представляет реализацию двухваликовой структуры, где волновые свойства начальных возмущений соответствуют заданному числу Шварцшильда. Приведенные численные эксперименты показывают возможность управления конвективными структурами вплоть до их подавления, путем задания начальных режимов работы нагревателя.

7. Некоторые особенности трехмерных структур за порогом устойчивости равновесия

В заключение приведем примеры, демонстрирующие возможности метода решения трехмерных уравнений (см. п. 4) для конвекции Рэлея в жидкости с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса.

Трехмерные конвективные структуры рассматривались для случая среды с однородной плотностью в гравитационном поле; выбран прямоугольный параллелепипед со сторонами $L_x = 16, L_y = 10, L_z = 1$ и установлены безразмерные комплексы:

$$\gamma_0 = 1.4, Pr = 0.71, C_R = 0.004, C_F = 0.1.$$

Линеаризованное равновесие в рассматриваемом случае согласно (8)

определяется параметрами:

$$\Delta\rho = 0, \Delta T = -\frac{2}{3}\gamma_0 C_F = -0.093.$$

Проведены расчеты для следующих значений параметров:

$$\rho_m = 1, T_m = 1 + \varepsilon, \varepsilon = 0.1 T_1 = 1.147, T_2 = 1.053,$$

которым соответствует проекция адиабатического градиента температуры

$$\text{в центре области } \nabla_z T_a^{(m)} = -0.076$$

$$\text{и } \rho_m = 1, T_m = 1 + \varepsilon, \varepsilon = 0.01 T_1 = 1.056, T_2 = 0.963,$$

которым соответствует проекция адиабатического градиента температуры

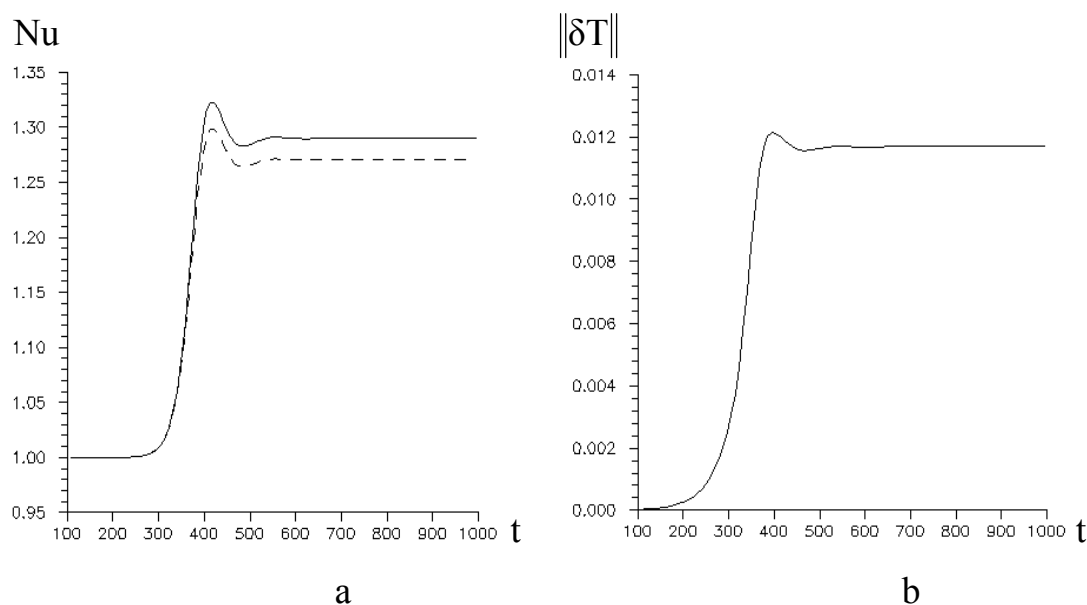
$$\text{в центре области } \nabla_z T_a^{(m)} = -0.091.$$

В качестве начальных условий использовалось линеаризованное равновесие (6)-(8), возмущенное импульсной функцией

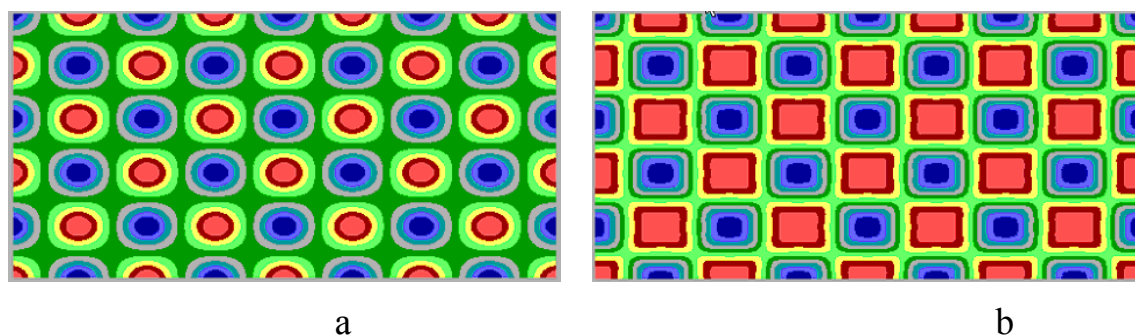
$$dT, \max|dT| = \frac{|\Delta T|}{2}, \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} dT dx dy = 0. \text{ Возмущение } dT \text{ определено на нижней}$$

стенке области и представляет собой совокупность локальных параллелепипедов, отвечающую волновым свойствам минимальной стабильной ячейковой структуры 8:5 (8 ячеек по длине, 5 ячеек по ширине). При $t > 0$ на нижней стенке поддерживается температура T_1 , на верхней стенке – температура T_2 .

На Фиг. 4, 6 представлены графики эволюции во времени числа Нуссельта и нормы возмущения температуры соответственно для $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$. На Фиг. 4а, 6а сплошные линии – изменение числа Nu на нижней грани, прерывистые линии – изменение числа Nu на верхней грани. Динамика развития возмущений вертикальной компоненты скорости во времени от импульсов, заданных в начальный момент времени на



Фиг. 4. Эволюция во времени интегральных чисел Нуссельта (а) и норма возмущений температуры (b) для $\varepsilon = 0.1$.



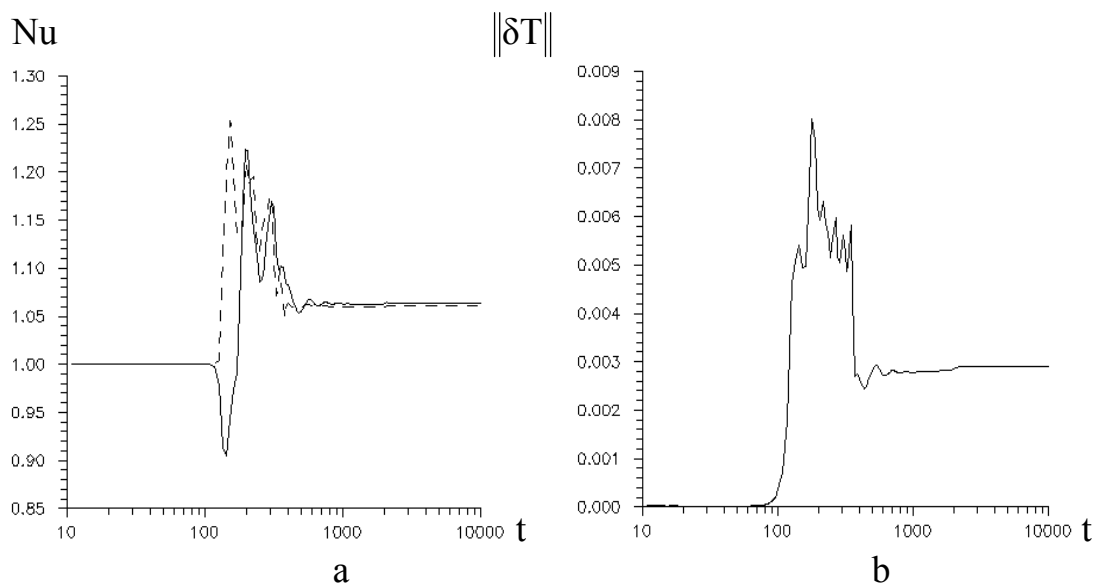
Фиг. 5. Изолинии возмущений δV_z вертикальной компоненты скорости в сечении $z = 0.5$ в моменты времени $t = 170(a), 528(b)$.

нагревателе к стационарным геометрическим структурам, показана для $\varepsilon = 0.1$ на Фиг. 5 и для $\varepsilon = 0.01$ на Фиг. 7.

Фиг. 4а. иллюстрирует характерные моменты установления теплового режима, подтверждающиеся эволюцией более чувствительной характеристики – нормы возмущений температуры. На начальном участке имеют место термоакустические течения, которые при данных параметрах полностью затухают к моменту времени $t = 200$, причем влияния таких течений на средний тепловой поток не видно. По норме возмущений температуры на фиг. 4b такое влияние уже заметно. Временам $t = 200 - 400$ соответствует переходный процесс развития конвективных течений, которые при данных параметрах выходят на стационарный режим при $t = 500$. Заметим, что расчет термоакустических течений и их влияния на перенос тепла требует соответствующего сеточного разрешения, которое в данном случае недостаточно. Например, из фиг. 4b следует, что эти течения не дают вклад в перенос тепла (по крайней мере, для времен порядка $t=10$, хотя длительность этого воздействия требует отдельного изучения). В отношении тепловой конвекции из этих расчетов следует вывод, что при указанных выше параметрах ($K=0.82, \varepsilon=0.1$) реализуются

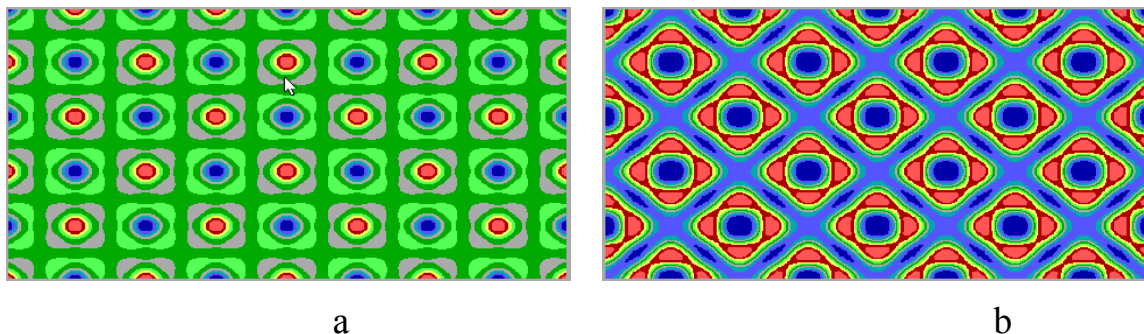
квадратные ячейки в плане. Хотя этот вывод является одним из частных, он указывает, какой путь нужно пройти для поставленной в экспериментах (см. например [30]), но теоретически не решенной задачи определения структур конвекции в плане при приближении к критической точке.

Для того, чтобы начать изучение таких особенностей, проведен сравнительный расчет при прочих равных параметрах, но при дальнейшем приближении к критической точке до ($K=0.98$, $\varepsilon=0.01$).



Фиг.6. Развитие во времени теплового воздействия конвекции Релея в газе Ван-дер-Ваальса при заданных начальных возмущениях при $\varepsilon = 0.01$.

а – эволюция интегральных чисел Нуссельта, б - эволюция нормы возмущений температуры.



Фиг.7. Изолинии возмущений δV_z вертикальной компоненты скорости в сечении $z = 0.5$ в моменты времени $t = 74$ (a), 6807 (b).

Из динамики развития нормы возмущения температуры и вертикальной компоненты скорости во времени от импульсов, заданных в начальный момент времени на нагретой стенке, к стационарным геометрическим структурам показанной на Фиг. 5а, б и 7а, б видны весьма существенные изменения. Во-первых, время воздействия по сравнению с предыдущим случаем сместилось до $t \sim 100$, то-есть в сторону более ранней стадии. Во-вторых, воздействие на переходном участке немонотонно и связано при $t \sim 200$ с кратковременным падением потока тепла до значений, меньших теплопроводностного потока (число Nu на нижней грани становится меньше единицы), в то время как на верхней грани повышается до значения 1.25.

Сравнение структур на фиг. 5а и 7а указывает на их существенное изменение по причинам, точное установление которых затруднительно из-за того, что при изменении ε изменяются и число Рэлея, и параметр

Шварцшильда K , который в этом случае увеличивается до 0.98. Это обстоятельство наряду с уменьшением модифицированного числа Релея может, как показывает параметрический анализ [22], при определенном значении ε приводить к ухудшению теплообмена, что и происходит (см. $Nu \sim 1.30$, Фиг. 6а, $Nu \sim 1.05$ на стационарном режиме Фиг. 4а). Это сопровождается изменением и формы трехмерных конвективных структур как на стационарном, так и на начальном режимах, не столь принципиальным, как перестройка от “спиралей” к “мишеням” в [30]. Вместе с тем, в связи с этими результатами нужно отметить, что хотя трехмерным структурам конвекции Релея-Бенара уделено много внимания в известных обзорах [31-33], но информация, необходимая для анализа таких структур не всегда приводится, а рассмотрение геометрии структур ведется в отрыве от характеристик теплообмена, что обедняет такое рассмотрение. И, наконец, связи наблюдений таких структур с аналитическими исследованиями, а также прямым численным моделированием, подобным выполненному выше, крайне ограничены.

Заключительные замечания о структурах конвекции при приближении к критической точке

Структуры, полученные в экспериментах [30] были одной из побудительных причин теоретического изучения небуссинесковских

пространственных структур, информация о которых, за исключением редких экспериментальных работ, практически отсутствует. Численные расчеты трехмерных околокритических структур пока также редки, за исключением [34], где околокритическая конвекция моделируется в нестационарном режиме в кубической области. В этом цикле исследований нами получены первые результаты по изучению форм околокритических трехмерных структур, что представляет исключительную трудность. Вопрос о получении таких структур методом возмущений, как показано выше, также существенно продвинуто, но решения дисперсионных уравнений имеются пока лишь в некоторых случаях и применялись нами в основном для тестов численных схем. Более продвинуто вопрос об условиях конвективной устойчивости, но аналитические исследования выполнены пока только в случае свободных границ. Для твердых границ численные решения в тонких слоях прямоугольной геометрии на основе полных уравнений Навье–Стокса удается пока получить лишь в случае большой гидростатической сжимаемости ($C_F=0.1$). Для учета реальных условий экспериментов с ^3He в тонких слоях цилиндрической геометрии (заметим, что в трехмерном случае эти отличия существенны) в работе [22] использовано приближение Буссинеска с эффективным числом Прандтля, что пока еще является единственной возможностью.

Заключение

Для системы уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа с постоянными физическими свойствами, но с произвольным уравнением состояния получено выражение для линеаризованного равновесия, на основе которого в случае малых возмущений получена система уравнений в частных производных для возмущений в постоянном гравитационном поле, и дана классификация основных частных случаев небусинесковских режимов конвекции.

В случае стратифицированной среды в гравитационном поле получено дисперсионное уравнение в частных производных относительно возмущения вертикальной компоненты скорости. В предположении граничных условий скольжения найдена зависимость критического значения числа Шварцшильда от числа Рейнольдса и других параметров задачи.

Разработан метод численного решения двух- и трехмерных уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа, основанный на разрешении уравнения состояния относительно температуры и замены в уравнении энергии полной производной по времени от температуры на полную производную по времени от давления. На основе этого метода проведено сравнение критических чисел Рейнольдса (Шварцшильда), полученных методом

малых возмущений и на основе прямого численного решения уравнений Навье-Стокса.

Приведены результаты численного моделирования уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса в случае граничных условий скольжения. Для двумерных надкритических стационарных валиковых структур показана возможность численной реализации одно- и двух валиковых структур, а также возможность управляемого подавления конвекции. Для заданных начальных возмущений в трехмерном случае при значениях $K = 0.82$, $\varepsilon = 0.1$ реализован стационарный режим, с квадратной структурой ячеек в плане. Показано, что при приближении к критической точке ($K = 0.98$, $\varepsilon = 0.01$) структура ячеек в плане существенно усложняется, приобретая квазиквадратный вид. Ввиду предположения о свободных границах в задаче Релея, эти результаты показывают существенную зависимость трехмерных структур от приближения к критической точке, но еще не могут количественно реализовать все разнообразие трехмерных околокритических структур, реализованных в экспериментах [30]. Тем не менее, развитие метода возмущений и прямого численного решения уравнений конвекции дает уверенность в том, что это будет выполнено. Однако для этого следовало бы пройти путь моделирования трехмерных структур в совершенном газе, как, например, в экспериментах с воздухом в

[35]. Заметим также, что имеется необходимость обработки материала, полученного в процессе выполнения этого этапа работ, а именно:

- сравнение трехмерных структур, полученных при заданных начальных возмущениях и при отсутствии таковых, когда играют роль случайные факторы,

- сопоставление трехмерных структур на буссинесковских и небуссинесковских моделях при прочих равных условиях,

- получение трехмерных структур при предельно малых параметрах гидростатической сжимаемости C_F , и, подобно [17] установление асимптотических значений C_F , при которых его влияние не существенно,

- получение решений трехмерных дисперсионных уравнений, подобно тому, как это сделано данной работе, для других случаев классификации (стр.12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987, 840 с.
2. Черный Г.Г. Газовая Динамика М.: Наука, Физматлит, 1988, 424 с.

3. Zappoli B., Durand-Daubin A. Heat and Mass Transport in a Near Supercritical Fluid. *Phys. Fluid.* 6, № 5, 1994, p. 1929-1936.
4. Кикоин И.К. и Кикоин А.К. Молекулярная физика. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963, 500 с.
5. Анисимов М.А. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. М.: Наука, 1987, 272 с.
6. Соболева Е.Б. О влиянии уравнения состояния на моделирование конвективного течения и теплопереноса околокритических жидкостей *Теплофизика высоких температур.* 2000. Т. 38, № 6, 928-934.
7. Горбунов А.А., Никитин С.А., Полежаев В.И. Об условиях возникновения конвекции Рэлея-Бенара и теплообмене в околокритической среде. *Изв. РАН, МЖГ,* № 5, 2007, с. 30-46.
8. Reyleigh. On convection currents in horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Phil. Magazine,* 1916 (6), 32, 529. Л.: ГОНТИ, 1938, 456 p.
9. Сивухин Д.В. *Общий курс физики. Т 2.* М.: Наука, 1975, 552 с.
10. Кочин Н.Е. *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.* М.: 1938, 456 с.
11. Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика. Часть 1.* М.: Наука, 1965, 640 с.

12. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, 392 с.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977, 735 с.
14. Бронштейн И.Н. и Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1967, 608 с.
15. Jeffreys H. 1930. The stability of a compressible fluid heated from below Proc. Cambr. Phil. Soc., 26, 170 p.
16. Полежаев В.И., Власюк М.П. О ячейковой конвекции в бесконечно длинном горизонтальном слое газа, подогреваемом снизу // Доклады АН СССР. 1970. Т. 195. № 5. С. 1058-1061
17. В.И. Полежаев. Течение и теплообмен при естественной конвекции в замкнутой области после потери устойчивости гидростатического равновесия. Изв. АН СССР МЖГ, №5, 1968.
18. Полежаев В.И., Власюк М.П. Модель проникающей конвекции сжимаемого газа в глубокой атмосфере. Доклады Академии Наук СССР, т.2001, №3, 1971.
19. Carles P. Ugurtas B. The onset of free convection near the liquid-vapour critical point. Part I: Stationary initial state. Physica D, 126 (1999), p. 69-82.

20. Гитерман М.Ш., Штейнберг В.А. Критерии возникновения свободной конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости // ПММ, 1970, Т.34, № 2, 325-331
21. Полежаев В.И., Соболева Е.Б. Конвекция Релея–Бенара в околокритической жидкости за порогом устойчивости Изв. РАН, МЖГ, №2, 2005, 48-61
22. Никитин С.А., Полежаев В.И., Соболева Е.Б. Структуры и теплообмен при тепловой гравитационной конвекции Релея-Бенара в гелии (^3He) вблизи критической точки Изв. РАН, МЖГ 2009, (в печати).
23. Kogan A. B. and Meyer H. 2001. Heat Transfer and Convection Onset in a Compressible Fluid: ^3He near the Critical Point Phys. Rev. E 63 (5) 056310
24. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys., 1967. V. 2. P. 12-26.
25. Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 352 с.
26. Горбунов А.А., Емельянов В.М. Вычислительный инструмент для исследования динамики плотностных и температурных неоднородностей сверхкритической среды в замкнутом объеме. Труды XVI Школы-семинара «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках». 2007 г., том 2, с. 533-536.

27. Emelyanov V., Gorbunov A. and Lednev A. The study of Heat Transfer in a Closed Domain of Supercritical SF₆ with the Laboratory and Numerical Instruments. Third International Symposium on Physical Sciences in Space (3rd ISPS 2007), October 22 –26, 2007, Nara-Ken Public Hall, Nara, Japan. P. 435-436.
28. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу Изв. АН СССР МЖГ, №6, 1966.
29. Тарунин Е.Л. О численном исследовании ветвлений при свободной конвекции в замкнутой полости Изв. АН СССР МЖГ, № 5, 1967.
30. Assenheimer M. and Steinberg V. 1993. Rayleigh-Benard convection near the gas-liquid critical point. Phys. Rev. Lett. 70(25) 3888.
31. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея-Бенара. М. Эдиториал УРСС, 1999. 247с.
32. Bodenschatz E., Pesch W., Ahlers G. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection Annual Review of Fluid Mechanics 32, 2000, 709-778
33. Koshmieder E.L. Benard Cells and Taylor Vortices. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
34. Accary G., Raspo I., Bontoux P. and Zappoli B. Stability of a Supercritical Fluid Diffusing Layer with Mixed Boundary Conditions . Phys. Fluids 2005

35. Lir J. T. and Lin T. F. 2001 Visualization of roll patterns in Rayleigh-Benard convection of air in a rectangular shallow cavity Int. J. Heat Mass Transfer 44 2889-2902

А.А. Горбунов, В.И. Полежаев

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
КОНВЕКЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РЕЛЕЯ В ЖИДКОСТЯХ С
ПРОИЗВОЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

Подписано к печати 30.12.2008 Заказ № 57-2008 Тираж - 100 экз.

Отпечатано на ризографе
Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
119526, Москва, пр-т Вернадского 101, к.1