

В.А. Калиниченко С.В. Нестеров

**ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ
В ГИДРОДИНАМИКЕ**

теория и эксперимент



Москва 2025

В.А. Калиниченко, С.В. Нестеров

**ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ –
ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ**

Москва 2025

УДК 532

ББК 22.253

К17

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор *В.В. Булатов*

Доктор физико-математических наук, профессор *А.А. Ярошенко*

Калиниченко В.А., Нестеров С.В. Волны Фарадея в гидродинамике – теория и эксперимент. – М.: Издательство «Перо», 2025. – 267 с.

ISBN 978-5-00258-374-4

Монография посвящена изучению поверхностных и внутренних волн Фарадея, возбуждаемых в вертикально колеблющемся сосуде с жидкостью. Рассматриваются закономерности и особенности возбуждения этих волн в однородной и двухслойной жидкости. Особое внимание уделено малоизученным в теории нелинейных волн эффектам – эффекту критической глубины, явлению массопереноса в стоячих волнах и механизмам их разрушения и регуляризации. Представлены теоретические модели, описывающие наблюдаемые в эксперименте явления. Для специалистов, занимающихся задачами волновых движений жидкости, нелинейными колебаниями и другими вопросами механики жидкости и газа, а также для аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Работа над книгой выполнена в ИПМех РАН по темам государственного задания (№№ госрегистрации 124012500437-9, 124012500442-3) и при частичной поддержке грантом РНФ № 23-19-00451.

© В.А. Калиниченко, С.В. Нестеров, 2025

ISBN 978-5-00258-374-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Волны Фарадея в гидродинамике – теория и эксперимент.....	1
ПРЕДИСЛОВИЕ	6
Список литературы	15
Глава 1. МЕТОД КРЫЛОВА–БОГОЛЮБОВА.....	22
1.1. Автономные колебательные системы с одной степенью свободы.....	22
1.2. Пример: математический маятник.....	24
1.3. Автономная система с отрицательным трением	25
1.4. Возбуждение колебаний внешним периодическим воздействием	27
1.5. Параметрические колебания физического маятника – эксперимент и сравнение с теорией	30
Список литературы	33
Глава 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СТОЯЧИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ	34
2.1. Описание метода	35
2.1.1. Экспериментальная установка	35
2.1.2. Теоретическая модель волн Фарадея	39
2.2. Волны Фарадея в эксперименте.....	43
2.2.1. Поверхностные волны	44
Диаграммы устойчивости и резонансные зависимости	45
Эффект критической глубины жидкости.....	50
Регулярные волны Фарадея максимальной высоты	54
Эффекты вязкого затухания	62
Разрушение волн Фарадея и формирование струйного всплеска	70
Волны Фарадея при гармоническом резонансе.....	90
2.2.2. Внутренние волны.....	94
Постановка эксперимента.....	94
Диаграммы устойчивости.....	95
Резонансные зависимости	100
Эффекты вязкого затухания	103
Развитие сдвиговой неустойчивости в приузловых областях внутренней волны Фарадея. Срыв колебаний	107
Составные внутренние волны Фарадея.....	116
2.3. Вторичные стационарные течения в волнах Фарадея	119

Постановка эксперимента.....	120
Массоперенос в стоячих поверхностных волнах.....	120
Массоперенос в стоячих внутренних волнах	129
Список литературы	132
Глава 3. МЕТОД УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА	139
3.1. Метод ускоренной сходимости для решения задачи Штурма-Лиувилля.....	139
3.1.1. Постановка задачи Штурма-Лиувилля.....	139
3.1.2. Примеры.....	141
3.1.3. Краевые условия второго рода.....	142
3.1.4. Краевые условия третьего рода	144
3.1.5. Заключительные замечания.....	145
3.2. Длинные волны в прямоугольном канале с резким изменением рельефа дна и стенок.....	146
3.2.1. Постановка задачи и алгоритм численно-аналитического метода.....	147
3.2.2. Локальные особенности дна.....	151
3.2.3. Локальные особенности стенок и дна	167
3.3. Колебания жидкости в круговом цилиндре с возвышением на дне.....	177
3.4. Колебания жидкости в сосуде с треугольным основанием	187
Список литературы	196
Глава 4. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАЗРУШАЮЩИХСЯ ВОЛН ФАРАДЕЯ	199
4.1. Вязкая регуляризация – задача Л.Н. Сретенского	199
4.1.1. Дисперсионное уравнение.....	200
4.1.2. Решение дисперсионного уравнения.....	202
4.1.3. Применение результатов анализа в эксперименте с волнами Фарадея	206
4.2. Гравитационные баротропные волны в двухслойной жидкости.....	211
4.2.1. Постановка эксперимента.....	212
4.2.2. Результаты и обсуждение	214
4.3. Регуляризация разрушающихся волн Фарадея слоем плавающих частиц	229
4.3.1. Постановка эксперимента.....	230
4.3.2. Регуляризация, предельная крутизна и затухание волн	232
4.3.3. Динамика слоя плавающих частиц.....	237
4.4. Изгибно-гравитационные волны Фарадея	244
4.4.1. Постановка эксперимента.....	245

4.4.2. Профили и собственные частоты изгибно-гравитационных волн	247
4.4.3. Резонансные зависимости, предельная крутизна и затухание изгибно-гравитационных волн.....	258
Список литературы	261

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя монография посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию волн Фарадея. Под волнами Фарадея понимаются стоячие гравитационные волны, возбуждаемые в однородной или двухслойной жидкости в сосуде, который совершает периодическое движение в направлении силы тяжести. Рассмотрение ограничено низкочастотными колебаниями жидкости в жестком сосуде в условиях идеального параметрического возбуждения, когда источник вертикальных колебаний сосуда с жидкостью имеет неограниченную мощность. При такой постановке проблемы можно пренебречь взаимодействием жидкость – стенки сосуда, а также влиянием сосуда с жидкостью на источник возбуждения колебаний. Частота этих волн кратна половине частоты колебаний сосуда с жидкостью, причем в отличие от чисто вынужденных стоячих волн, только учет нелинейных эффектов позволяет определить характеристики установившегося волнового режима.

Вопросы, связанные с возбуждением волн Фарадея, традиционно возникают в контексте развития авиационно-космической техники, гражданского строительства, транспортировки нефтепродуктов морским и наземным транспортом. В гидродинамике волновые движения жидкости при параметрическом резонансе представляют не только прикладной, но и фундаментальный интерес. Традиционно эти волны исследуются и теоретически, и экспериментально. В значительной мере интерес к волнам Фарадея обусловлен именно возможностью изучения волновых движений жидкости с точки зрения общей теории волн. Нелинейные по своей природе волны Фарадея обладают рядом малоисследованных эффектов, характерных для стоячих волн большой амплитуды. С теоретической точки зрения задача о нелинейных волнах в сосуде, совершающем поступательные гармонические колебания с фиксированной амплитудой и частотой, также представляет значительный интерес, и этот раздел волновой гидродинамики в определенном смысле стал классическим [1–4].

Влияние вертикальных колебаний сосуда на поведение жидкости со свободной поверхностью или границей раздела носит разносторонний

характер. Кроме резонансных движений, высокочастотные колебания сосуда могут при определенных условиях приводить к стабилизации неустойчивости Рэлея-Тейлора, см., например, [5, 6].

К параметрическому возбуждению или резонансу относят такой процесс в колебательной системе, при котором внешнее воздействие приводит непосредственно к относительно малым периодическим изменениям во времени параметров системы, что, в свою очередь, вызывает в системе стационарные колебания достаточно большой амплитуды. Колебания этого типа довольно полно изучены для механических и электрических систем с конечным числом степеней свободы [7–11]. В меньшей степени явление параметрического резонанса исследовано для жидкостей.

Начало исследованиям параметрического резонанса в жидкости было положено экспериментами Фарадея по возбуждению гравитационно-капиллярных волн на свободной поверхности тонкого слоя жидкости, находящейся на вертикально колеблющейся пластинке [12]. Фарадей отметил поразительный для того времени факт, что частота возникающих на поверхности волн вдвое меньше частоты колебаний пластины. Рэлей указал на параметрический характер возбуждаемых в экспериментах Фарадея волн [13].

В гидродинамике систематическое изучение параметрического возбуждения волн в жидкости начинается примерно с 50-х годов прошлого столетия в связи с нуждами аэрокосмической промышленности. Это было связано с необходимостью решения задачи о колебаниях жидкости в топливных баках [14–18].

Большинство работ по изучению параметрического резонанса в однородной жидкости объединяет постановка эксперимента – сосуд с жидкостью совершают колебания в вертикальном направлении. Экспериментально исследовались различные формы движения жидкости. Так, например, в [19–22] изучалось возбуждение гравитационно-капиллярных волн, сопровождающееся фонтанированием капель жидкости, а также возникновением сложных пространственных структур и их разрушением.

При вертикальных колебаниях сосуда движение жидкости характеризуется широким спектром частот, которые могут отличаться от частоты внешнего воздействия. Экспериментально установлено, что даже при малых амплитудах движения сосуда высота возбуждаемых волн достигает больших значений в нескольких узких диапазонах частот внешнего воздействия – относительное равновесие жидкости становится неустойчивым и возникают ее интенсивные колебания. Теория этого явления была независимо разработана авторами [23-25].

Диссипативные факторы в случае волн Фарадея проявляются в наличии пороговых амплитуд колебаний сосуда с жидкостью. Экспериментально влияние вязкости на параметрические колебания жидкости изучалось в [19,26]. В [19] экспериментально подтверждено полученное теоретическое значение порога возбуждения капиллярно-гравитационных волн Фарадея. Экспериментальная зависимость критической величины глубины модуляции от вязкости при параметрических колебаниях жидкости в сообщающихся сосудах получена в [26]. В [25,27,28] предлагается учитывать влияние диссипативных факторов, воспользовавшись результатами линейной теории периодического пограничного слоя [29, 30].

Учет нелинейности в задаче о возбуждении поверхностных волн Фарадея проводился в [31–33] и др. Подробный обзор существующих теоретических моделей и анализ границ их применимости к описанию нелинейных волн Фарадея можно найти в [34–36].

Частота свободных стоячих нелинейных волн на поверхности тяжелой жидкости бесконечной глубины уменьшается с увеличением амплитуды волн [37–39]. Такая зависимость сохраняется и для жидкости конечной глубины [40], но большей, чем некоторая критическая. При конечных глубинах, меньших критической, имеет место обратная зависимость [40]. Эти свойства были выведены путем применения асимптотических методов и подтверждены в эксперименте [41], где возбуждение стоячих волн осуществлялось двумя волнопродукторами на торцевых стенках прямоугольного сосуда по методике [42]. Изменение наклона резонансной зависимости с уменьшением глубины жидкости отмечено в экспериментах

со стоячими волнами, возбуждаемыми волнопродуктором поршневого типа [43] и при горизонтальных колебаниях сосуда с жидкостью [44].

Гармонический резонанс Фарадея (частота волн равна частоте колебаний сосуда) изучен недостаточно полно по сравнению с основным резонансом. Гармоническое возбуждение гравитационных волн на поверхности воды отмечалось в экспериментах [31]; линейная теория, описывающая возможность зарождения волн на поверхности вязкой жидкости малой глубины в сосуде бесконечно больших горизонтальных размеров предложена в [45]. Возбуждение капиллярных волн Фарадея в условиях гармонического резонанса описано в [46]. В [47] для решения линейной задачи о гармоническом параметрическом возбуждении стоячих трехмерных гравитационных волн на свободной поверхности маловязкой жидкости производится разбиение поля скорости жидкости на потенциальную и вихревую компоненты и используется погранслойная методика и метод усреднения Крылова-Боголюбова.

Амплитуда параметрических колебаний нелинейной механической системы при выполнении резонансных условий всегда имеет конечное значение, причем при изменении частоты параметрического возбуждения возможны резкие скачки амплитуды [48]. В экспериментах по параметрическому резонансу в жидкости указанный эффект проявляется во внезапном исчезновении волн Фарадея [31, 49]. Отметим, что задача о срыве параметрических колебаний жидкости пока еще не решена. С ростом высоты волны принципиально изменяется характер колебаний свободной поверхности жидкости – происходит переход от волн регулярных к волнам нерегулярным и затем к волнам разрушающимся. Из экспериментов следует, что срыву параметрических колебаний предшествует интенсивное разрушение волн Фарадея с образованием струйных выбросов и отрывами капель на волновом гребне. Указанная картина разрушения волн характерна и для стоячих поверхностных гравитационных волн, возбуждаемых волнопродукторами на торцевых стенках прямоугольного сосуда [42] и при гармонических колебаниях сосуда в горизонтальном направлении [50].

К настоящему времени достаточно полно изучены условия параметрического возбуждения поверхностных волн в однородной

жидкости, но имеется относительно мало результатов по параметрическому возбуждению внутренних волн в неоднородной жидкости. Экспериментально это явление изучалось в [21, 51, 52], а теоретически – для двухслойной жидкости в [53, 54] и для непрерывно стратифицированной жидкости в [55, 56]. Экспериментально волны Фарадея на границе двухслойной жидкости зафиксированы в [5], но они рассматривались как «паразитные», поскольку оценивались условия стабилизации неустойчивости Рэлея-Тейлора [6, 57].

В экспериментальной гидродинамике известны различные способы возбуждения стоячих волн в жидкости. Как правило, используются волнопродукторы различного типа [42, 43, 58].

С точки зрения лабораторного моделирования волновых движений жидкости параметрический резонанс может рассматриваться как эффективный способ генерации стоячих волн. Волны Фарадея удобны для экспериментального исследования, поскольку возбуждаются и существуют без каких-либо волнопродукторов – их крутизну можно изменять, варьируя частоту колебаний сосуда. Кроме того, возбуждение волн Фарадея происходит при малых относительных ускорениях сосуда, поэтому их профиль близок к профилю свободных стоячих волн.

Несмотря на отличия режима параметрического резонанса в колеблющемся сосуде с жидкостью от режима свободных колебаний жидкости в неподвижном сосуде, свойства нелинейных свободных волн переносятся на стационарные волны, возбуждаемые в сосуде при параметрическом резонансе. Перечислим некоторые из этих свойств [38, 59]: неподвижные узлы отсутствуют; пучности волн неподвижны; ордината гребня больше ординат впадины волны – асимметрия волнового профиля; свободная поверхность однородной жидкости или граница раздела двухслойной жидкости ни в какой момент времени не становится прямолинейной.

В теории нелинейных волн до настоящего времени остаются открытыми вопросы о предельной форме стоячей волны, о механизмах разрушения стоячих поверхностных и внутренних волн, а также о явлении массопереноса в стоячих волнах. Остановимся кратко на наиболее известных результатах.

Для стоячих волн вопрос о форме предельного профиля остается открытым и в настоящее время [60], причем исследования в этом направлении вызывали и продолжают вызывать полемику в научной литературе [61]. Остановимся кратко на наиболее известных результатах. В теоретическом исследовании [38] считалось, что предельный профиль имеет заостренный гребень, и было найдено, что угол заострения 90° , а крутизна 0.218. В последующих теоретических исследованиях наличие заострения и оценка угла подвергались сомнению, а величина предельной крутизны варьировалась от 0.196 в [62] до 0.285 в [63]. Экспериментальной проверке выводов [38] было посвящено исследование [42], в котором стоячие волны возбуждались двумя волнопродукторами на торцевых стенках прямоугольного сосуда. Была предложена оценка 0.228 и приведены соображения в пользу предсказанного максимального значения угла заострения, хотя сам наблюдавшейся волновой профиль был без заострения.

В экспериментах [49, 50, 64, 65] предельная крутизна стоячих волн оценивалась диапазоном от 0.108 до 0.266. Разброс приведенных результатов объясняется различиями в способах и условиях возбуждения волн. Обсуждение формы предельного профиля стоячих волн осложняется отсутствием математически строгих результатов по стоячим нелинейным волнам в жидкости (в отличие от теории прогрессивных волн). С учетом этих обстоятельств представлялось целесообразным продолжить экспериментальные исследования стоячих волн большой высоты, выбрав какой-либо один, удобный, способ их возбуждения.

Ставшие к настоящему времени классическими работы [38, 42] ограничены стоячими двумерными гравитационными волнами предельной высоты. Являясь нелинейными, эти волны могут быть отнесены к волнам регулярным, поскольку их профиль обладает периодичностью во времени и симметрией относительно вертикальных плоскостей, проведенных через пучности волны.

Интерес к нерегулярным и разрушающимся волнам Фарадея, возбуждаемым при вертикальных колебаниях сосуда с жидкостью, обусловлен тем, что в экспериментах эти волны могут быть получены без использования волнопродукторов, их наблюдение и измерение

оказываются более простыми и точными по сравнению с другими способами возбуждения стоячих волн. Так, в [66] описано устроение периода нерегулярных волн Фарадея, в [67, 68] – генерация струй на свободной поверхности жидкости в колеблющемся круговом цилиндрическом сосуде, в [69] – образование струйного выброса из впадины стоячей волны. Процесс каплеобразования при генерации капиллярных волн Фарадея исследовался в [19]; позднее было показано, что выброс капель обусловлен наличием локализованной поверхностной сингулярности [70].

Процесс разрушения внутренних волн Фарадея на границе раздела двухслойной жидкости связан с наличием осциллирующего сдвигового слоя в приузловой области, т.к. векторы тангенциальной составляющей скорости частиц двухслойной жидкости имеют противоположное направление по разные стороны от границы. Если амплитуда стоячей волны достаточно велика, то возможно развитие сдвиговой неустойчивости, приводящей к образованию волновых структур, пространственные масштабы которых существенно меньше длины основной волны.

Впервые о вторичных возмущениях в приузловой области стоячей волны на границе раздела двух смещающихся жидкостей упоминается в [71]. В этих экспериментах для возбуждения стоячей внутренней волны использовался волнопродуктор плунжерного типа на боковых стенках прямоугольного сосуда. При крутизне волны 0.127 в приузловой области наблюдалась пара вихрей с изменяющимся направлением вращения. Сделано предположение о том, что генерация вихрей связана с развитием сдвиговой неустойчивости, но каких-либо детальных исследований не проводилось. Кроме указанной работы [71], для стоячих внутренних волн не известны экспериментальные наблюдения начальной стадии потери устойчивости границы раздела двух осциллирующих жидкостей. Одна из причин отсутствия таких наблюдений – использование в экспериментах волнопродукторов, вносящих существенные искажения в поле скоростей колеблющейся жидкости.

Интерес к проблеме устойчивости границы раздела двух жидкостей, совершающих относительное осциллирующее движение, обусловлен

нестационарностью многих природных процессов [72]. Отметим обрушение внутренних волн в океане [73], образование донных форм при воздействии периодических потоков воды на песчаное дно в прибрежной зоне [74], генерацию пятен турбулентности и изменение начальной стратификации океана и атмосферы [71]. При описании начальной стадии развития сдвиговой неустойчивости на границе раздела жидкостей обычно используется анализ устойчивости малых возмущений основного течения. Однако непосредственное использование методов теории устойчивости для случая вязких осциллирующих жидкостей невозможно, и в основном приходится опираться на экспериментальные результаты.

Волновое движение жидкости часто рассматривается как чисто колебательное. Однако измерения поля скорости в реальных волнах показывают наличие ненулевых компонент усредненной по времени скорости практически во всех точках жидкости. Значения скорости этого стационарного течения существенно меньше максимальной скорости основного волнового движения. Для таких вторичных стационарных течений жидкости, совершающей волновые движения, в литературе используются тождественные по значению термины «волновой перенос», «массоперенос» или «волновой дрейф».

В 1847 г. Стокс показал, что в случае прогрессивных волн малой высоты кроме движения частиц идеальной жидкости по замкнутым траекториям имеется медленный стационарный дрейф элементов жидкости в направлении распространения волн [75]. Использованное в этой работе понятие массопереноса для нелинейных прогрессивных волн на свободной поверхности идеальной жидкости конечной глубины означает, что траектории частиц жидкости оказываются разомкнутыми. Кроме чисто периодической зависимости от времени, горизонтальная координата частицы жидкости содержит дополнительное слагаемое, линейно возрастающее со временем. Именно это слагаемое определяет поступательную составляющую движения частиц жидкости в направлении распространения волны. Впоследствии эксперименты [76, 77] подтвердили наличие медленных придонных течений с ненулевой средней скоростью в жидкости конечной глубины.

Массоперенос в стоячих поверхностных волнах был предсказан в [78] как следствие нелинейности и вязкости, а рассчитан в [79, 80] для волн на свободной поверхности однородной жидкости и в [81] для внутренних волн на границе раздела двухслойной жидкости.

Следует отметить фактически полное отсутствие экспериментальных исследований массопереноса. Скорость массопереноса, но лишь в тонком придонном пограничном слое, измерялась в исследованиях [82, 83]. Было установлено только общее соответствие с выводами [79], отмечены значительные расхождения для волн очень малой и большой амплитуд.

Настоящая монография посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию волн Фарадея.

В главе 1 излагаются основные вычислительные алгоритмы, позволяющие применять метод Крылова-Боголюбова для исследования нелинейных колебаний различных механических и гидродинамических систем.

В главе 2 представлены результаты экспериментального исследования поверхностных и внутренних волн Фарадея и проводится их сравнение с теоретическими моделями, основанными на методе Крылова-Боголюбова.

Полученные в главе 2 результаты применяются в главе 3 для экспериментального исследования характеристик стоячих волн в прямоугольных и круглых цилиндрических сосудах с локальными особенностями дна и стенок. Для интерпретации опытных данных в приближении длинных волн используется метод ускоренной сходимости.

В главе 4 обсуждаются способы регуляризации разрушающихся стоячих гравитационных волн в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде. Рассматривается эффективность перехода к высоковязкой жидкости, к двухслойной жидкости, к слою плавающих частиц и к изгибо-гравитационным волнам.

В монографии обобщены результаты авторов, полученные в ИПМех РАН за период 1979 – 2024 гг. Ряд работ выполнен в соавторстве с Л.Д. Акуленко, С.Я. Секерж-Зеньковичем, А.А. Чайковским и А.Н. Со. Авторы выражают глубокую благодарность своим коллегам Ю.И. Дворникову, Г.Г. Степанову и В.В. Тихомирову за неоценимую помощь в разработке и создании экспериментального стенда.

Работа над книгой выполнена по темам государственного задания (№№ госрегистрации 124012500437-9, 124012500442-3) и частично поддержана грантом РНФ № 23-19-00451.

Список литературы

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 815 с.
2. Mouseev H.H., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. Черноуско Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1969. 230 с.
4. Ibrahim R. A. Liquid Sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.
5. Wolf G.W. The dynamic stabilization of Rayleigh-Taylor instability and corresponding dynamic equilibrium // Zeitschrift für Physic. 1969. V. 227. No. 3. P. 291-300.
6. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 216 с.
7. Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д., Андронов А.А., Витт А.А., Горелик Г.С., Хайкин С.Э. Новые исследования нелинейных колебаний. М.: Радио, 1936, 96 с.
8. Каудерер Г. (1961) Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 777 с.
9. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972, 470 с.
10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981, 568 с.
11. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
12. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1831. V. 121. P. 299-340.
13. Стремм Дж. (Рэлей) Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т.1, 2.

14. *Abramson H.N.* The dynamic behavior of liquids in moving containers // NASA SP-106. 1966.
15. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
16. *Колесников К.С.* Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
17. *Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дружинина Г.З., Либин Э.И.* Введение в динамику сосудов с жидкостью. Томск: Изд-во Том. Ун-та. 1977. 144 с.
18. *Луковской И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка, 1990. 296 с.
19. *Сорокин В.И.* Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости // Акустический журнал.. Т. 3. Вып. 3. С. 262 - 273.
20. *Brand R.P., Nyborg W.L.* Parametrically excited surface waves // J. Acoust. Soc. Am. 1965. V. 37. No. 3. P. 509 - 515.
21. *Hashimoto H., Sudo S.* Dynamic behavior of liquid free surface in a cylindrical container subject to vertical vibration // Bull. JSME. 1984. V. 27. No. 227. P. 923-930.
22. *Kiyashko S.V., Korzinov L.N., Rabinovich M.I., Tsimring L.S.* Rotating spirals in a Faraday experiment // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. No. 5. P. 5037-5040.
23. *Мусеев Н.Н.* Задача о движении твердого тела, содержащего жидкую массу // Матем. Сб. 1953. Т. 32(74). №1. С. 61-96.
24. *Benjamin T.B., Ursell F.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical motion // Proc. Roy. Soc. 1954. V. A225. No. 1165. P. 505-515.
25. *Болотин В.В.* О движении жидкости в колеблющемся сосуде // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 293-294.
26. *Григорян С.С., Жигачев Л.И., Когарко Б.С., Якимов Ю.Л.* Параметрический резонанс в сообщающихся сосудах при

- вертикальных переменных нагрузках // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. №2. С.148-150.
- 27.Богачева Н.Я., Mouseев Н.Н. Три задачи о колебаниях вязкой жидкости // ЖВММФ. 1964. Т.4. №2. С.317-326.
- 28.Крушинская С.И. Колебания тяжелой вязкой жидкости в подвижном сосуде //ЖВММФ. 1965. Т.5. №3. С. 519-536.
- 29.Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
- 30.Keulegan G.H. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. Pt. 1. P. 33 - 50.
- 31.Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N. Liquid surface oscillation in longitudinally excited rigid cylindrical containers // AIAA J. 1965. V. 3. No. 4. P. 685-695.
- 32.Skalak R., Yarymovych M.I. Forced large amplitude surface waves // Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. 1962. V.2, P.1411-1418.
- 33.Miles J.W. Nonlinear Faraday resonance // J. Fluid Mech. 1984. V. 146. P. 285-302.
- 34.Неволин В. Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн // Инж.-Физ. Журнал. 1984. Т. XLVII. № 6. С. 1028-1038.
- 35.Miles J.W., Henderson D. Parametrically forced surface wave // Ann. Rev. Fluid Dyn., 1990. V. 22. P. 143 – 165.
- 36.Ibrahim R.A. Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems // J. Fluids Eng. 2015. V. 137(9). 090801 (52 p.).
- 37.Rayleigh, Lord (Strutt J.W.) Deep water waves, progressive or stationary, to the third order of approximation // Proc. R. Soc. London. 1915. Ser. A91. P. 345 – 353.
- 38.Penney W.G., Price A.T. Finite periodic stationary gravity waves in a perfect fluid // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1952. V. 224. No. 882. P. 254-284.
- 39.Aoki H. Higher order calculation of finite periodic standing gravity waves by means of the computer // J. Phys. Soc. Japan. 1980. V. 49. No. 4. P. 1598 – 1606.
- 40.Tadjakhish I., Keller J.B. Standing surface waves of finite amplitude // J. Fluid Mech. 1960. V. 8. No. 4. P. 442-451.

41. *Fultz D.* An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves // *J.Fluid Mech.* 1962. V.13. No.3. P.193-212.
42. *Taylor G.I.* An experimental study of standing waves // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 1953. V. 218. No. 1132. P. 44-59.
43. *Chester W., Bones J.A.* Resonant oscillations of water waves. II. Experiment. // *Proc. R. Soc. Lond. A* 1968. V.306. P. 23-39.
44. *Kobine J.J.* Nonlinear resonant characteristics of shallow fluid layers // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2008. V. 336. P. 1331-1346.
45. *Kumar K.* Linear theory of Faraday instability in viscous liquids. // *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A.* 1996. V. 452. No. 1948. P. 1113 – 1126.
46. *Muller H. W., Wittmer H., Wagne C., Albers J., Knorr K.* Analytic stability theory for Faraday waves and the jbbservation of the harmonic surface response // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. No.12. P. 2357-2360.
47. *Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Параметрическое возбуждение колебаний вязкой жидкости в замкнутом сосуде // *ЖВММФ.* 1993. Т. 33. № 4. С. 611 – 619.
48. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. испр. доп. М.: Наука, 1974. 504 с.
49. *Jiang L., Ting C.L., Schultz W.W.* Moderate and steep Faraday waves: instabilities, modulation, and temporal asymmetries // *J. Fluid Mech.* 1996. V.329. P.275-307.
50. *Bredmose H., Brocchini M., Peregrine D. H., Thais L.* Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 490. P. 217–249.
51. *McEwan A.D., Robinson R.M.* Parametric instability of internal gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 67. No. 4. P. 667-688.
52. *Benielli D., Sommeria J.* Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 374. P. 117-144.

53. Секерж-Зенькович С.Я. Параметрическое возбуждение волн конечной амплитуды на границе раздела двух жидкостей разных плотностей. // ДАН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С. 1083-1086.
54. Hill D.F. The Faraday resonance of interfacial waves in weakly viscous fluids // Phys. Fluids. 2002. V. 14. No. 1. P. 158-169.
55. Секерж-Зенькович С.Я. Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости при вертикальных колебаниях сосуда // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 5. С. 1089-1091.
56. Нестеров А.В. О параметрическом возбуждении внутренних волн в непрерывно-стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. №2. С. 167-169.
57. Брикман В.А. Параметрическая стабилизация границы раздела жидкостей // ДАН СССР. 1976. Т.226. №5. С.1041-1044.
58. Dean R.G., Dalrymple R.A. Water waves mechanics for engineers and scientists. World Scientific, Singapore. 1991. 353 p.
59. Секерж-Зенькович Я.И. К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 8. № 4. С. 551-553.
60. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
61. Perlin M., Schultz W.W. Capillary effects on surface waves // Ann. Rev. Fluid. Mech. 2000. V. 32. P. 241-274.
62. Hogrefe J. E., Peffley N.L., Goodridge C.L., Shi W.T., Hentschel H.G.E., Lathrop D.P. Power-law singularities in gravity-capillary waves // Physica D. 1998. V.123. No. 1. P.183-205.
63. Mercer G.N., Roberts A.J. Standing waves in deep water: their stability and extreme form // Phys. Fluids. A. 1992. V. 4. No. 2. P. 259- 269.
64. Saffman P.G., Yuen H.C. A note on numerical computations of large amplitude standing waves // J. Fluid Mech. 1979. V. 95. Pt. 4. P. 707-715.
65. Schultz W.W., Vanden-Broeck J.M., Jiang L., Perlin M. Highly nonlinear standing water waves with small capillary effect // J. Fluid Mech. 1998. V. 369. P. 253-272.

66. *Longuet-Higgins M.S., Drazen D.A.* On steep gravity waves meeting a vertical wall: a triple instability // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 466. P. 305–318.
67. *Jiang L., Perlin M., Schultz W.W.* Period tripling and energy dissipation of breaking standing waves // *J. Fluid Mech.*. V.369. P.273–299.
68. *Zeff B.W., Kleber B., Fineberg J., Lathrop D.P.* Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface // *Nature*. 2000. V.403. No. 6768. P.401-404.
69. *Longuet-Higgins M.S., Dommermuth D.G.* Vertical jets from standing waves. II // *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*. 2001. V.457. No. 2013. P.2137-2149.
70. *Goodridge C.L., Shi W.T., Lathrop D.P.* Breaking waves: bifurcations leading to a singular wave state // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V.56. No.4. P.4157-4161.
71. *Thorpe S.A.* On standing internal gravity waves of finite amplitude // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. No. 3. P. 489 - 528.
72. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 319 с.
73. *Woods J.D.* Wave induced shear instability in the summer thermocline // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. No. 4. P. 791 -800.
74. *Sleath J.F.A.* Sea Bed Mechanics. N.Y.: Wiley, 1984. 335 p.
75. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Trans. Camb. Phil. Soc.* 1847. V. 8. P. 441-455; см. также *Math. Phys. Papers*. 1880. V. 1. P. 314-325. Cambridge Univ.Press.
76. *Caligny A.F.H.* Expériences sur les mouvements des molécules liquides des ondes courantes, considérées dans leur mode d'action sur la marche des navires // *Compt. Rendu Acad. Sci. Paris*. V. 87. P. 1019-1023.
77. *Bagnold R.A.* Sand movement by waves: some small-scale experiments with sand of very low density // *J. Inst. Civ. Engrs.*. V. 27. P. 447-469.

78. *Rayleigh, Lord. (Strutt J.W.)* On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. V. 175. P. 1-21.
79. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. V. 245. P. 535-585.
80. *Dore B.D.* Double boundary layers in standing surface waves // Pure Appl. Geophys. // 1976. V. 114. P. 629-637.
81. *Dore B.D.* On mass transport induced by interfacial oscillations at a single frequency // Proc. Camb. Phil. Soc.. V. 74. No. 2. P. 333-347.
82. *Noda H.* A study on mass transport in boundary layers in standing waves // 1968. Proc. 11th Int. Conf. Coastal Eng. London. ASCE, Washington, DC, P. 227-247.
83. *Mei C.C., Liu P.L.-F., Carter T.G.* Mass transport in water waves. – MIT. Dept. Civil Eng. Ralph M. Parsons Lab. Rep. No.146. 287 p.

ГЛАВА 1. МЕТОД КРЫЛОВА–БОГОЛЮБОВА

В книге метод Крылова–Боголюбова применяется для решения нелинейных краевых задач, описывающих колебания жидкости в сосудах. Этот метод широко используется в различных областях механики, радиотехники, электротехники и т.п. Однако в общих курсах математики технических университетов его практически не преподают. Поэтому ниже излагаются основные вычислительные алгоритмы, позволяющие применять метод Крылова–Боголюбова для исследования нелинейных колебаний различных механических и гидродинамических систем.

1.1. Автономные колебательные системы с одной степенью свободы

Пусть имеется колебательная система, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = \varepsilon f(u, \frac{du}{dt}) \quad (1.1)$$

Здесь t – время, ω – частота колебаний, $f(u, \frac{du}{dt})$ – заданная функция,

ε – малый параметр.

Если считать $\varepsilon = 0$, то придем к уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0 \quad (1.2)$$

которое решается стандартными способами, излагаемыми в курсе математического анализа. Общее решение записывается так

$$u(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (a, b = \text{const})$$

Решение (1.2) можно представить в следующей форме

$$u(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$$

Постоянную величину A_0 принято называть амплитудой колебаний, а $\psi = \omega t + \alpha_0$ – фазой.

Интуитивно ясно, что при малых значениях параметра ε общее решение уравнения (2.1.1) будет мало отличаться от периодического

решения уравнения (1.2). Поэтому будем искать общее решение (1.1) в виде

$$u(t) = A(t) \cos \psi(t) + \varepsilon u_1(A, \psi) + \varepsilon^2 u_2(A, \psi) + \dots \quad (1.3)$$

Здесь $A(t)$ и $\psi(t)$ – неизвестные функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Подставляя ряд (1.3) в уравнение (1.1) и учитывая (1.4), находим, что коэффициент $A(t) \cos \psi(t)$ при ε^0 в (1.3) удовлетворяет уравнению (1.2). Приравнивание коэффициентов при ε^1 дает уравнение для нахождения функции u_1

$$\omega^2 \frac{d^2 u_1}{d\psi^2} + \omega^2 u_1 = 2\omega A_0 B_1 \cos \psi + 2\omega A_1 \sin \psi + f(A_0 \cos \psi, -\omega A_0 \sin \psi) \quad (1.5)$$

Потребуем, чтобы уравнение (1.5) имело периодическое решение по переменной ψ . Функции $\cos \psi$ и $\sin \psi$ являются решениями однородного уравнения

$$\omega^2 \frac{d^2 u_1}{d\psi^2} + \omega^2 u_1 = 0$$

Для периодичности функции по переменной ψ необходимо, чтобы правая часть уравнения (1.5) была ортогональна функциям $\cos \psi$ и $\sin \psi$ на сегменте $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Умножая правую часть (1.5) на функции $\cos \psi$ и .. и интегрируя по ψ от 0 до 2π , получим

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -\omega A \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ B_1 &= -\frac{1}{2\pi A \omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -\omega A \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

После определения A_1 и B_1 можно найти периодическое решение уравнения (1.5) и перейти к построению следующего коэффициента $u_2(A, \psi)$ ряда (1.3) и нахождению A_2 и B_2 .

Если ограничиться условиями ортогональности и проинтегрировать систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\varepsilon \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -\omega A \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \varepsilon \frac{1}{2\pi A \omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -\omega A \sin \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

то найдем

$$u(t, \varepsilon) = A(t) \cos \psi(t)$$

Построенное приближенное решение $u(t, \varepsilon)$ имеет медленно изменяющиеся во времени амплитуду $A(t)$ и фазу $\psi(t)$. При $A_1 = 0$ амплитуда остается постоянной, а частота $d\psi / dt$ при этом зависит от амплитуды колебаний.

Приближенное решение $u(t, \varepsilon) = A(t) \cos \psi(t)$ отличается от точного на временном интервале $0 \leq t < T / \varepsilon$ согласно полученной в [1] оценке

$$|u(t) - A \cos \psi| \leq \varepsilon M e^T \quad (M = \text{const})$$

Если построить следующее приближение $u_2(A, \psi), A_2, B_2$, то оценка точности такова

$$|u(t) - A \cos \psi - u_1(A, \psi)| \leq \varepsilon^2 M e^T$$

1.2. Пример: математический маятник

Колебания математического маятника с конечной амплитудой описываются уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 \sin u = 0 \quad (1.8)$$

Здесь $\omega^2 = \sqrt{g/l}$, g – ускорение силы тяжести, l – длина маятника.

Упростим (1.8), полагая $\sin u \approx u - u^3/3$.

Уравнение (1.8) принимает вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = \omega^2 \frac{u^3}{6} \quad (1.9)$$

Здесь следует выбрать малый параметр. Положим $u = A_0 v$; тогда уравнение (1.9) принимает вид

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \omega^2 v = \omega^2 A_0^2 \frac{v^3}{6}$$

В качестве малого параметра принимаем $\varepsilon = A_0^2$. Используя формулы (1.7), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 0 \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \varepsilon \frac{\omega}{12\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 d\psi \end{aligned} \right\}$$

Амплитуда колебаний маятника $A = A_0$, $\varepsilon = A_0^2$; частота колебаний зависит от амплитуды

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{A_0^2}{16}\right)$$

На рис. 2.1 приведена зависимость $u(t)$ и фазовый портрет колебаний математического маятника.

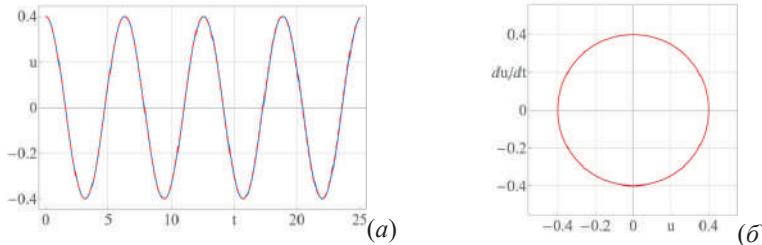


Рис. 2.1. Зависимость $u(t)$ (а) и фазовый портрет математического маятника (б); $\omega_0 = 1$, $A_0 = 0.4$, $\varepsilon = 0.16$.

1.3. Автономная система с отрицательным трением

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \varepsilon(1-u^2) \frac{du}{dt} + \omega^2 u = 0 \quad (1.10)$$

именуемое уравнением Ван-дер-Поля. При $\varepsilon > 0$ уравнение (1.10) широко используется в радиотехнике.

Сравнивая (1.10) с исходным уравнением (1.1), положим

$$f(u, \frac{du}{dt}) = (1-u^2) \frac{du}{dt}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} f(A \cos \psi, -\omega A \sin \psi) &= -A\omega(1 - A^2 \cos^2 \psi) \sin \psi = \\ &= A\left(\frac{A^2}{4} - 1\right) \sin \psi + \frac{A^3 \omega}{4} \sin 3\psi \end{aligned}$$

и потому согласно (1.6)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -\omega A \sin \psi) \sin \psi d\psi &= \frac{A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) \\ -\frac{1}{2\pi A\omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -\omega A \sin \psi) \cos \psi d\psi &= 0 \end{aligned}$$

Тогда для уравнения Ван-дер-Поля в первом приближении из (1.7) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \varepsilon \frac{A}{2} \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Отметим, что $\frac{dA}{dt} = 0$ при $A = 2$, т.е. существуют колебания постоянной амплитуды и постоянной частоты.

Найдем зависимость амплитуды от времени. Умножив первое уравнение системы (1.11) на A , получим

$$A \frac{dA}{dt} = \varepsilon \frac{A^2}{2} \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) \quad (1.12)$$

Интегрируя (1.12), находим

$$\int_{A_0}^A \frac{AdA}{A^2 \left(1 - A^2 / 4\right)} = \frac{\varepsilon}{2} t$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\ln \frac{A^2}{\left(4 - A^2\right)} = \ln \frac{A_0^2}{\left(4 - A_0^2\right)} + \varepsilon t \quad (1.13)$$

Равенство (1.13) приводит к явной зависимости амплитуды колебаний от времени

$$A = \frac{A_0 e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + A_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1) / 4}} \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует, что при $\varepsilon t \rightarrow \infty$ амплитуда колебаний стремится к стационарному значению $A(t) \rightarrow 2$ независимо от начального значения A_0 – рис. 2.2.

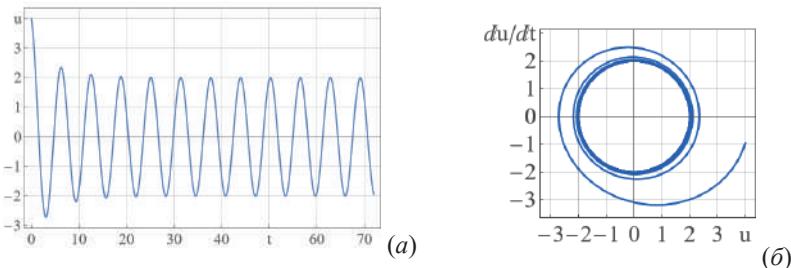


Рис. 2.2. Зависимость ... (а) и фазовый портрет (б) осциллятора Вандер-Поля; $\omega = 1$, $A_0 = 4$, $\varepsilon = 0.16$

1.4. Возбуждение колебаний внешним периодическим воздействием

Пусть имеется система, колебания которой описываются следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \omega^2 u = \omega^2 \frac{u^3}{6} + \alpha \frac{du}{dt} + \varepsilon f_0 \sin \Omega t \quad (1.15)$$

Здесь ω – частота свободных колебаний; α – коэффициент диссипации; f_0 – амплитуда внешнего воздействия; Ω – частота внешнего воздействия.

Требуется найти решение (1.15) при условии, что $|\omega - \Omega| \ll \varepsilon$, т.е. в окрестности резонанса линейной системы. Применять непосредственно к этому уравнению метод Крылова-Боголюбова нельзя, поскольку уравнение (1.15) не приведено к стандартной форме. Для колебательных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями в [2] показано, что если нелинейная поправка по амплитуде к частоте свободных колебаний имеет вид A^m , разложение решения в окрестности основного резонанса следует вести по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{m+1}}$, где ε – безразмерная амплитуда вынуждающей силы.

Для (1.15) введем новую переменную $u = \varepsilon^{1/3} V$ и положим $\alpha = \varepsilon^{2/3} \alpha_0$.

Тогда уравнение (1.15) принимает вид

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \omega^2 V = \varepsilon^{2/3} \left(\frac{V^3}{6} + \alpha \frac{dV}{dt} + f_0 \sin \Omega t \right) \quad (1.16)$$

Полагая

$$V = A \cos(\Omega t + \theta) + \varepsilon^{2/3} u_1 + \dots$$

и применяя к (1.16) изложенные в разд. 2.1 рассуждения, приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\varepsilon^{2/3} \frac{\alpha_0}{2} A - \varepsilon^{2/3} \frac{f_0}{\omega + \Omega} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \Omega - \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\omega A^2}{16} - \frac{f_0}{A(\omega + \Omega)} \sin \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

(1.17)

Если диссипация отсутствует $\alpha_0 = 0$, то система (1.17) с помощью замены переменных $X = A \cos \theta$, $Y = A \sin \theta$ может быть решена аналитически.

Для приложений интерес представляют стационарные решения системы (1.17), когда $\frac{dA}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = 0$.

В этом случае имеем

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon^{2/3} \frac{\alpha_0}{2} A - \varepsilon^{2/3} \frac{f_0}{\omega + \Omega} \cos \theta &= 0 \\ \omega \left(1 - \varepsilon^{2/3} \frac{A^2}{16} \right) - \Omega - \frac{\varepsilon^{2/3} f_0}{(\omega + \Omega)} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Исключая θ , получим зависимость амплитуды колебаний от частоты внешнего воздействия – так называемую резонансную кривую

$$\frac{\varepsilon^{4/3} \alpha_0}{4} A^2 + \left[\omega \left(1 - \varepsilon^{2/3} \frac{A^2}{16} \right) - \Omega \right]^2 = \frac{\varepsilon^{4/3} f_0^2}{(\omega + \Omega)^2} \quad (1.18)$$

Из (1.18) следует вывод, что при всех частотах Ω амплитуда колебаний A конечна, даже при отсутствии диссипации $\alpha_0 = 0$.

Периодическое воздействие на колебательную систему может осуществляться так, что изменяются параметры этой системы. Например, если поместить маятник на платформу, которая периодически поднимается и опускается, то маятник оказывается в переменном поле тяжести. Другой пример – струна, закрепление которой допускает периодическое

изменение ее длины, что приводит также к изменению ее натяжения. Таких примеров систем с изменяющимися во времени параметрами можно привести много; остановимся подробнее на маятнике в периодически изменяющемся поле силы тяжести.

Уравнение, описывающее колебания в периодически изменяющемся поле силы тяжести имеет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} - +\omega^2 (1 + \varepsilon\gamma \cos \Omega t) u + \varepsilon\delta \frac{du}{dt} - \omega^2 \frac{u^3}{6} = 0 \quad (1.19)$$

Для приведения (1.19) к стандартной форме, позволяющей использовать метод Крылова-Боголюбова, следует ввести следующую замену переменной $u = \varepsilon^{1/2}V$. Уравнение (1.19) приобретает стандартный вид

$$\frac{d^2V}{dt^2} - +\omega^2 V = -\varepsilon \left(\omega^2 \gamma V \cos \Omega t + \delta \frac{dV}{dt} - \omega^2 \frac{V^3}{6} \right) \quad (1.20)$$

Установлено, что в системах, колебания которых описываются дифференциальными уравнениями с периодически изменяющимися коэффициентами, наблюдаются резонансные явления в тех случаях, когда частота свободных колебаний удовлетворяет условиям

$$\omega \equiv \frac{\Omega}{2}, \omega \equiv \Omega, \omega \equiv 3\frac{\Omega}{2} \text{ и т.д.}$$

Эти резонансы принято называть параметрическими.

Остановимся на основном параметрическом резонансе, когда $\left| \omega - \frac{\Omega}{2} \right| \equiv \varepsilon\Delta$. Полагая в (1.20) $V = A \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \theta\right)$ и используя описанную выше процедуру нахождения $A(t), \theta(t)$, приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\varepsilon \frac{\delta}{2} A - \varepsilon \frac{\gamma\omega^2}{2\Omega} A \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{\Omega}{2} - \varepsilon \frac{\omega A^2}{16} + \varepsilon \frac{\gamma\omega^2}{2\Omega} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Если диссипация отсутствует $\delta = 0$, то система (1.21) при замене переменных $X = A \cos \theta, Y = A \sin \theta$ может быть решена аналитически.

Для приложений интерес представляют стационарные решения системы (1.21), когда $\frac{dA}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = 0$.

Исключая из системы уравнений фазу θ , получим

$$\varepsilon^2 \frac{\delta^2}{4} + \left(\omega - \frac{\Omega}{2} - \varepsilon \frac{A^2}{16} \omega \right)^2 = \left(\varepsilon \frac{\gamma \omega^2}{2\Omega} \right)^2 \quad (1.22)$$

Равенство (1.22) представляет собой резонансную зависимость амплитуды колебаний A от частоты Ω изменения параметра.

Аналогично можно получить уравнения, описывающие изменение амплитуды $A(t)$ и фазы $\theta(t)$ для резонансов более высокого порядка

$$\omega \ll \Omega, \omega \ll 3\frac{\Omega}{2} \text{ и т.д.}$$

При рассмотрении параметрического возбуждения в конечномерных системах обычно в качестве малого параметра вводят так называемую перегрузку (в нашем случае таковой является отношение $s\Omega^2/g$) и строят асимптотическое разложение по степеням этого параметра. Соответствующие порождающие системы, получающиеся из исходных приравниванием малого параметра нулю, оказываются линейными. Сложность рассматриваемой системы в том, что при аннулировании членов, описывающих внешнее воздействие, порождающая система остается нелинейной.

Построение периодических решений нелинейных систем такого типа, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, занимался И.Г. Малкин [2]. Им было показано, что периодические решения нелинейных систем с периодическими имеющими порядок $\varepsilon \ll 1$ правыми частями следует в случае главного резонанса строить в виде рядов по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{m+1}}$, где m определяется через характеристики периодических решений порождающих систем (в [2] это были системы Ляпунова А.М.).

1.5. Параметрические колебания физического маятника – эксперимент и сравнение с теорией

Рассматривается физический маятник с колеблющейся в вертикальном направлении точкой подвеса, движение которого описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + 2b\dot{\varphi} + (\omega^2 + \frac{s}{l}\Omega^2 \cos \Omega t) \sin \varphi = 0$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали, s , Ω - амплитуда и частота колебаний точки подвеса маятника, b - коэффициент затухания, $\omega = \sqrt{g/l}$ – собственная частота малых колебаний маятника – рис. 2.3.

При выполнении резонансных условий амплитуда φ_m стационарных колебаний согласно (1.22) определяется как

$$\varphi_{m\pm} = -16 \left(\frac{\Omega}{2\omega} - 1 \right) \pm 4 \sqrt{\left(\frac{s\Omega^2}{g} \right)^2 - 4 \left(\frac{2b}{\omega} \right)^2} \quad (1.23)$$

где φ_{m+} отвечает устойчивой, а φ_{m-} - неустойчивой ветви резонансной зависимости.

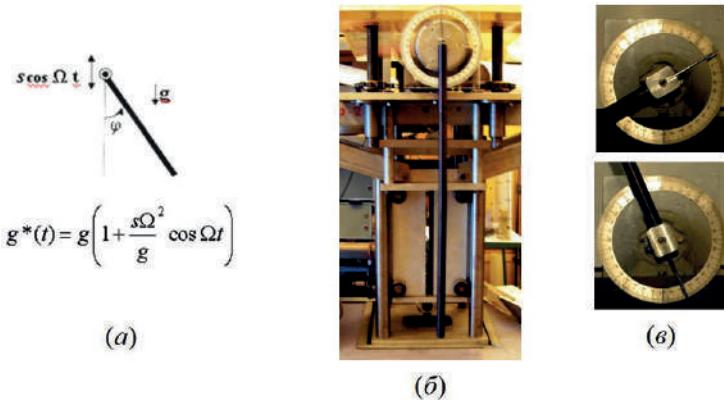


Рис. 2.3. Параметрическое возбуждение колебаний маятника (а); экспериментальная установка (б); и наблюдаемые амплитуды колебаний $\varphi_m = 50$ и 150° (в).

Эксперименты [3] проводились с физическим маятником, представляющим собой однородный стальной цилиндр диаметром 1.5 см, длиной 50.2 см и массой 668 г. Маятник жестко крепился к горизонтальной оси обесточенного электродвигателя АВ50/2ТП, подшипники которого обеспечивали колебания маятника в вертикальной плоскости, причем добротность системы составляла величину порядка 250. На верхнем конце маятника имелась стрелка-указатель, перемещающейся при колебаниях

маятника по шкале с ценой деления 1° . Конструкция маятника допускала его свободное вращение вокруг горизонтальной оси. Весь блок маятника помещался на низкочастотный вибростенд, сообщающий ему колебания в вертикальном направлении (рис. 2.3). Амплитуда s колебаний точки подвеса маятника могла быть установлена любой из интервала 0.3-7.0 см, а частота Ω при фиксированной амплитуде могла плавно изменяться в диапазоне $2-50\text{ c}^{-1}$. Возбуждение колебаний маятника осуществлялось при потере устойчивости его положения равновесия, если амплитуда колебаний точки подвеса превышала некоторое пороговое значение, а частота попадала в один из резонансных диапазонов. Для регистрации углового смещения маятника использовалась видеосъемка (скорость съемки 30 к/с). Точность измерения амплитуды по материалам съемки составляла 0.1° , причем ее среднее стационарное значение φ_m в каждом режиме рассчитывалось по восьми измеренным значениям. Исследовались $\frac{1}{2}$ - субгармоника параметрических колебаний маятника, когда частота возбуждаемых колебаний в 2 раза меньше частоты колебаний точки подвеса $\omega \ll \Omega/2$. Изменение вязкого сопротивления достигалось путем крепления к нижней части маятника небольших тонких пластин, увеличивающих сопротивление воздуха. Ниже приведены основные характеристики маятника как колебательной системы.

Приведенная длина маятника, l (см)	Собственная частота ω , с^{-1} (расчет)	Собственная частота ω , с^{-1} (эксп.)	Коэффициент затухания b , с^{-1}
35.1	5.28	5.58 ± 0.12	0.019

Коэффициент затухания b колебаний маятника оценивался в диапазоне начальных угловых смещений $\varphi_0 \ll 15-60^\circ$. Маятник отклонялся на угол φ_0 , и производилась видеосъемка затухающих колебаний. Величина b оценивалась как

$$b = \frac{1}{T} \ln \frac{\varphi_m}{\varphi_{m+1}}$$

где $T = 2\pi / \omega$ – период маятника, φ_m, φ_{m+1} – отклонения маятника, взятые через период колебаний.

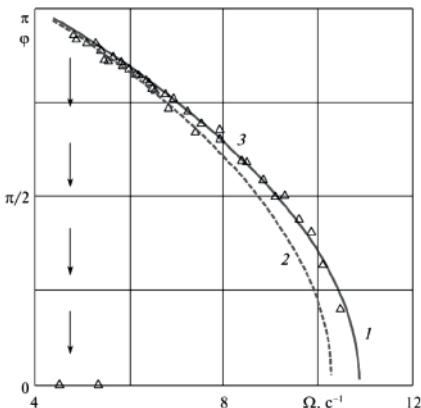


Рис. 2.4. Резонансные зависимости для физического маятника ($s = 0.6$ см, $b = 0.019$ с^{-1}): 1, 2 – устойчивая и неустойчивая ветви, рассчитанные по (1.23); 3 – данные эксперимента [3].

На фиг. 2.4 приведена резонансная зависимость для маятника с коэффициентом затухания $b = 0.019$ с^{-1} при $s = 0.6$ см. После возбуждения колебаний на частоте $\Omega = 11.4$ с^{-1} их амплитуда равна $\phi_m = 0.34$ рад. При плавном уменьшении Ω амплитуда монотонно возрастала до максимальной величины $\phi_m = 2.8$ рад при $\Omega = 5.54$ с^{-1} . Дальнейшее уменьшение Ω привело к срыву колебаний при $\Omega^* = 5.39$ с^{-1} . Рассчитанные по (1.23) ветви резонансной зависимости пересеклись при частоте срыва $\Omega^* = 4.72$ с^{-1} .

Список литературы

1. Богоцубов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. испр. доп. М.: Наука, 1974. 504 с.
2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. 491 с.
3. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. О срыве параметрических колебаний жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 128-136.

ГЛАВА 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СТОЯЧИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ

К параметрическому возбуждению или резонансу относят такой процесс в колебательной системе, при котором внешнее воздействие приводит непосредственно к относительно малым периодическим изменениям во времени параметров системы, что, в свою очередь, вызывает в системе стационарные колебания достаточно большой амплитуды. Колебания этого типа довольно полно изучены для механических и электрических систем с конечным числом степеней свободы. В меньшей степени явление параметрического резонанса исследовано для жидкостей.

Начало исследованиям параметрического резонанса в жидкости положено экспериментами М. Фарадея по возбуждению гравитационно-капиллярных волн на свободной поверхности тонкого слоя жидкости на горизонтальной пластине, колеблющейся в вертикальном направлении [1]. Рэлей указал на параметрический характер возбуждаемых в экспериментах Фарадея волн [2].

Ниже обсуждаются результаты экспериментального и теоретического исследования волн Фарадея. Этим термином в гидродинамике определяют стоячие волны, возбуждаемые в условиях параметрического резонанса в жидкости, содержащейся в вертикально колеблющемся сосуде. Частота этих волн кратна половине частоты колебаний сосуда с жидкостью, причем в отличие от чисто вынужденных стоячих волн, только учет нелинейных эффектов позволяет определить характеристики установившегося волнового режима.

В гидродинамике волновые движения жидкости при параметрическом резонансе представляют не только прикладное, но и фундаментальное значение. Традиционно эти волны исследуются и теоретически, и экспериментально. В значительной мере интерес к волнам Фарадея обусловлен именно возможностью изучения волновых движений жидкости с точки зрения общей теории волн. Нелинейные по своей природе волны

Фарадея обладают рядом эффектов, характерных для стоячих волн большой амплитуды [3, 4].

Значение параметрического резонанса для гидродинамического эксперимента состоит в: (а) отсутствии волнопродукторов; (б) упрощении и уточнении процессов наблюдения и измерения параметров волн; (в) реализации волновых режимов с предварительно заданными высотой и частотой волны; (г) высокой степени повторяемости условий эксперимента (см., напр., [5–7].

В 1979 г. по инициативе С.В. Нестерова в ИПМех РАН проведены первые эксперименты, в которых реализована возможность возбуждения гравитационных волн Фарадея на границе раздела двух жидкостей [8] и апробирована теоретическая модель [9]. К настоящему времени параметрический резонанс в жидкости как эффективный способ генерации стоячих волн используется при лабораторном моделировании сейш в бассейнах с локальными возвышениями на дне и боковых стенках сосуда с жидкостью, в экспериментах по выявлению способов регуляризации разрушающихся волн и т.д.

В настоящей главе представлены результаты экспериментального исследования поверхностных и внутренних волн Фарадея, выполненного в ИПМех РАН за период 1979 -2024 гг.; проводится сравнение данных опытов с теоретическими моделями.

2.1. Описание метода

2.1.1. Экспериментальная установка

При параметрическом возбуждении стоячих гравитационных волн в колеблющемся в вертикальном направлении сосуде с жидкостью переменным параметром для исследуемой гидродинамической системы

является ускорение силы тяжести $g^*(t) = g(1 + \frac{s\Omega^2}{g} \cos \Omega t)$ в системе

отсчета, связанной с колеблющимся сосудом – рис. 2.1.

Поскольку характеристики возбуждаемых волн зависят от частоты и амплитуды колебаний сосуда, основные требования к лабораторной установке состоят в строго вертикальных колебаниях сосуда с жидкостью и возможности изменения частоты Ω и амплитуды s этих колебаний.

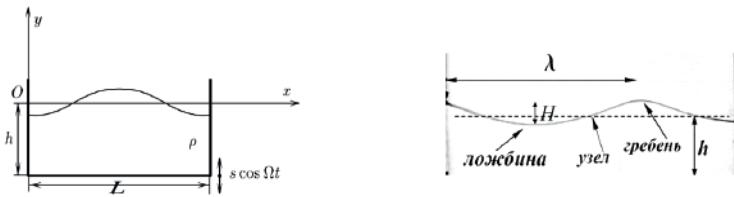


Рис. 2.1. Параметрическое возбуждение поверхностных волн и их основные характеристики: h – глубина жидкости; λ - длина волны; H – высота волны.

Первые эксперименты [8], в которых реализовано возбуждение гравитационных волн Фарадея на границе раздела двух жидкостей, проведены на модернизированной лабораторной мешалке, используемой в качестве источника вертикальных колебаний – рис. 2.2 *a*. Хотя и были сняты некоторые количественные характеристики волн, сама конструкция установки не позволила провести детальные исследования.

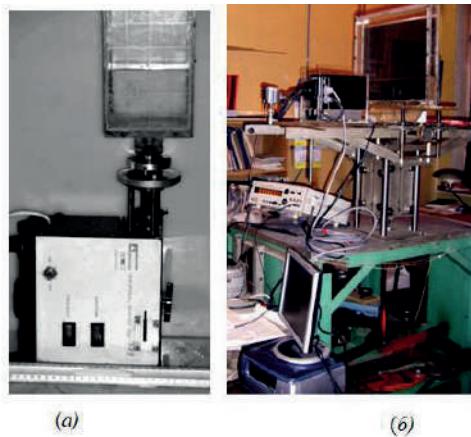


Рис. 2.2. Общий вид экспериментальных установок, используемых (*a*) в первых экспериментах [8] и (*б*) проводимых в настоящее время исследованиях параметрического резонанса.

В дальнейшем была разработана и создана более совершенная установка – электромеханический вибростенд Динамики и структуры

осциллирующих течений¹, входящий в состав Уникальных исследовательских установок «ГФК ИПМех РАН».

Для обеспечения вертикальных колебаний сосуда с жидкостью использовался кривошипно-шатунного механизма, посредством которого вращательное движение вала электромотора преобразовывалось в возвратно-поступательное движение грузовой площадки. Электропривод обеспечивает возвратно-поступательное движение грузовой площадки с заданной частотой, которая регулируется изменением напряжения питания электродвигателя. В ходе эксперимента при фиксированной амплитуде s колебаний сосуда имеется возможность изменения частоты колебаний в диапазоне Ω от 0.01 до 30 c^{-1} . Устройство кривошипно-шатунного механизма позволяет изменять радиус кривошипа, а следовательно, и амплитуду колебаний сосуда в диапазоне $0.03 < s < 7.50 \text{ см}$. Грузовая площадка допускала использование сосудов различной формы общей массы до 40 кг.

При разработке конструкции установки выдвигались следующие требования: движения сосуда с жидкостью должны быть максимально приближены к вертикальным и являться гармоническими.

Вследствие неизбежной малой асимметрии установки происходит нарушение характера движения, а именно, направление, вдоль которого происходит колебательное движение сосуда, составляет некоторый угол с вертикалью. По смещению лазерного луча, отраженного от вертикально установленного на грузовой площадке зеркала, было найдено, что этот угол составлял величину порядка 8° .

Нарушение гармоничности колебаний сосуда может происходить вследствие нестабильности вращения привода и разбалансировки кривошипа. Нестабильность вращения контролировалась по показаниям частотомера. Точность измерения периода $2\pi/\Omega$ вертикальных колебаний сосуда характеризуется отклонением $3 \times 10^{-3} \text{ с}$ от среднего значения. Эксперименты прекращались, если отклонения от среднего значения периода колебаний превышали величину $5 \times 10^{-3} \text{ с}$. Разбалансировка устранялась уравновешиванием плеч кривошипа.

¹ Стенд «Исследования динамики и структуры осциллирующих течений» (ДСО). УИУ «ГФК ИПМех РАН»: <http://www.ipmnet.ru/uniqueequip/gfk/#aboutDSO>

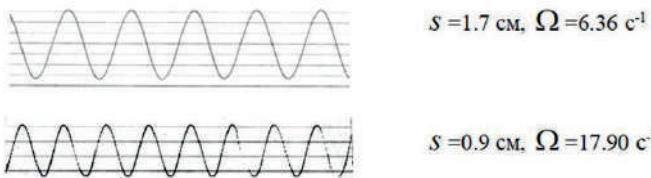


Рис. 2.3. Хронограммы смещения грузовой площадки при различных амплитуде s и частоте Ω колебаний сосуда.

Для оценки гармоничности колебаний сосуда при сбалансированном кривошипе для различных значений частоты Ω и амплитуды s была проведена запись движения грузовой площадки установки – рис. 2.3. При совмещении отдельных записей процесса колебаний сосуда и графиков функций $y(t) = s \cos \Omega t$ оказалось, что их совпадение определяется толщиной линии на записях самописца и на графиках аналитических функций, т.е. величиной порядка 0,02 см.

Данные трехосного акселерометра на рис. 2.4 полностью подтверждают высокую степень вертикальности и гармоничности колебаний грузовой площадки.

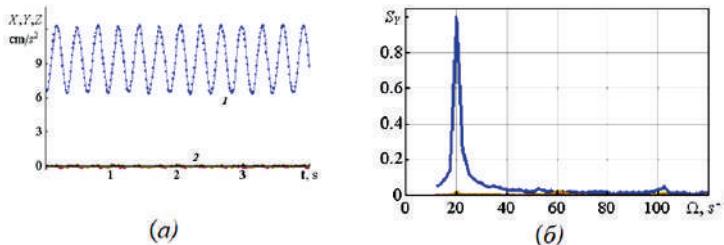


Рис. 2.4. (а) Показания трехосного акселерометра LIS331DLH, установленного на грузовой площадке и (б) спектр при частоте $\Omega = 20.28 \text{ c}^{-1}$ и амплитуде $s = 0.75 \text{ см}$ колебаний: 1 – по вертикальной оси y ; 2 – по горизонтальным осям x, z .

Для регистрации волновых движений жидкости использовалась цифровая фото- и видеосъемка с последующей обработкой результатов на персональном компьютере. Оценки показали, что измерение

пространственных характеристик волн по материалам видеосъемки производилось с точностью 0.1 см (среднеквадратическая ошибка).

2.1.2. Теоретическая модель воли Фарадея

Теоретические модели параметрического возбуждения стоячих гравитационных поверхностных и внутренних волн в прямоугольном сосуде разработаны С.В. Нестеровым [9,10] и С.Я. Секерж-Зенькович [11]. Для решения основных уравнений гидродинамики, записанных в переменных Лагранжа, использовался метод Крылова-Боголюбова-Митропольского [12], широко применяемый в нелинейной механике и рассмотренный в главе 1.

Приведем ряд формул, по которым рассчитывались величины, характеризующие параметрический резонанс и возбуждаемые волны.

Рассмотрим параметрическое возбуждение стоячих гравитационных **поверхностных волн** в однородной жидкости конечной глубины – рис. 2.1. Воспользуемся методом, с помощью которого в [9, 10] решена аналогичная задача для бесконечно глубокой жидкости, и его модификацией на случай конечной глубины [13].

Пусть прямоугольный сосуд с жидкостью глубины h совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с амплитудой s и частотой Ω – рис. 2.1. Рассматривается двумерное движение жидкости.

Используется традиционная схема решение задач о потери гидродинамической устойчивости, т.е. движение жидкости разбивается на основное и возмущенное. За основное состояние принимается поступательное движение жидкости вместе с сосудом, при котором

$$x=a, y=b, p=-gp \left(1 + \frac{s\Omega^2}{g} \cos \Omega t\right)$$

где (a, b, t) - переменные Лагранжа.

Пусть в момент $t=0$ в жидкости возникло возмущение в виде простой гармонической волны с волновым числом $k = \pi n / L$ ($n = 1, 2, 3, \dots$ – номер волновой моды, равный числу узлов стоячей волны), произвольной высоты H и линейной собственной частоты $\omega = (gk \thkh)^{1/2}$.

Рассматриваются волны конечной амплитуды, мало отличающиеся от линейных. Вводится малый параметр ε , характеризующий крутизну волны, и считается, что перегрузка, определяемая как отношение наибольшего ускорения сосуда $s\Omega^2$ к ускорению силы тяжести g , есть малая величина порядка ε , т.е.

$$s\Omega^2 / g = \gamma\varepsilon, \quad \gamma = O(1)$$

Таким образом, хотя в задаче имеется два малых параметра – параметр перегрузки и параметр крутизны волн – в конечном счете, при выборе соотношения между ними используется лишь один из них. При указанном соотношении сдвиг собственных частот, вызываемый нелинейностью волн, и сдвиг, определяемый параметрическим возбуждением, имеют одинаковые порядки.

Пусть $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$ – декартовы координаты индивидуальной движущейся частицы жидкости. Тогда уравнения движения и непрерывности в системе координат, жестко связанной с сосудом, записываются в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g(1 + \gamma\varepsilon \cos \Omega t) \right] \frac{\partial y}{\partial a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g(1 + \gamma\varepsilon \cos \Omega t) \right] \frac{\partial y}{\partial b} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a} = 1 \end{cases}$$

Границные условия задачи таковы: $x(0, b, t) = 0$, $x(L, b, t) = L$, $p(a, 0, t) = 0$. Здесь полагается, что на свободной поверхности $b=0$.

Введем неизвестные функции ξ , η , B по формулам

$$x = a + \sqrt{\varepsilon} \xi, \quad y = b + \sqrt{\varepsilon} \eta$$

$$p / \rho = -g(1 + \gamma\varepsilon \cos \Omega t) y + \sqrt{\varepsilon} B$$

Эти функции должны быть найдены из решения следующей краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial B}{\partial a} - \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial a} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial B}{\partial b} - \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial b} \right)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} = \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\partial \xi}{\partial b} \frac{\partial \eta}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial \eta}{\partial b} \right)$$

$$\xi(0, b, t) = \xi(L, b, t) = \eta(a, -h, t) = 0$$

$$-\rho(g\eta - B) = \varepsilon\gamma g\rho\eta \cos\Omega t$$

Решение этой системы строится в виде рядов по степеням $\sqrt{\varepsilon}$

$$\xi = \xi_0 + \sqrt{\varepsilon} \xi_1(a, b, A, \psi) + \varepsilon \xi_2(a, b, A, \psi) + \dots$$

$$\eta = \eta_0 + \sqrt{\varepsilon} \eta_1(a, b, A, \psi) + \varepsilon \eta_2(a, b, A, \psi) + \dots$$

$$B = B_0 + \sqrt{\varepsilon} B_1(a, b, A, \psi) + \varepsilon B_2(a, b, A, \psi) + \dots$$

где функции ξ_i, η_i, B_i ($i = 1, 2$) периодические по $\psi = \frac{\Omega t}{2} + \theta$. Рассматривается

случай **основного резонанса**, т.е. частота Ω близка к одной из удвоенных собственных частот колебаний жидкости.

Используя процедуру [9, 10], во втором приближении получим следующие выражения для координат (x, y) частиц жидкости на свободной поверхности

$$\begin{cases} x = a - H \frac{\operatorname{ch} kh}{2 \operatorname{sh} kh} \sin ka \cos \psi + H^2 k \frac{\sin 2ka}{32 \operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\psi) - \\ - \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2kh}{\operatorname{sh}^4 kh} \sin 2ka \cos 2\psi + \frac{1}{16} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2kh}{\operatorname{sh}^2 kh} \sin 2ka, \\ y = \frac{H}{2} \cos ka \cos \psi + H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2kh}{32 \operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\psi) + \\ + \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2kh}{\operatorname{sh}^4 kh} \cos 2ka \cos 2\psi - \frac{1}{16} H^2 k \frac{1}{\operatorname{sh} 2kh} \cos 2ka, \psi = \frac{\Omega t}{2} + \theta(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

в которых $H(t) = 2\sqrt{\varepsilon} A(t)$ и $\theta(t)$ – высота и медленная фаза волны, соответственно. Они с точностью до $O(\varepsilon)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 H \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \cos 2\theta - \frac{1}{4} \beta H^2 \omega k^2, \\ \beta = \frac{1}{64} \text{th}^{-4} kh (2\text{th}^6 kh + 3\text{th}^4 kh + 12\text{th}^2 kh - 9) \end{cases} \quad (2.2)$$

Система (2.2) имеет типичный для задач о параметрическом возбуждении вид и может быть исследована традиционными методами [12]. Ограничеваясь случаем основного параметрического резонанса – расстройка $\Delta = \omega - \Omega/2$ порядка величины ε , находим, что усиление волн происходит в том случае, если

$$|\Delta| < \frac{s\Omega^3}{8g} \quad (2.3)$$

При выполнении условия (2.3) возможно существование устойчивых стационарных волн конечной высоты, высота H и фаза ψ которых определяются формулами

$$\begin{cases} k^2 \frac{H^2}{4} \omega \beta = \pm \Delta + \varepsilon \omega^2 \frac{1}{2\Omega}, \\ \psi = \frac{\Omega t}{2} + \frac{\pi \mp \pi}{2} \quad (\beta > 0) \end{cases} \quad (2.4)$$

Приведем основные формулы из работ [9, 11], в которых рассмотрено параметрическое возбуждение **внутренних волн** на границе раздела двух слоев тяжелых жидкостей бесконечной глубины. Верхняя жидкость имеет плотность ρ_1 , нижняя – ρ_2 . Прямоугольный сосуд с жидкостями совершает колебания в вертикальном направлении по закону $y = -s \cos \Omega t$.

При наличии начального возмущения в виде простой гармонической волны координаты x и y частиц жидкости на границе раздела во втором приближении описываются следующими выражениями

$$\begin{cases} x = a - \frac{H}{2} \sin ka \cos \psi + \frac{H^2}{4} k \frac{\rho_1}{2(\rho_1 + \rho_2)} (1 + \cos 2\psi) \sin 2ka, \\ y = \frac{H}{2} \cos ka \cos \psi + \frac{H^2 k}{16} \left(1 - \frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \cos 2ka \right) (1 + \cos 2\psi), \\ \psi = \frac{\Omega t}{2} + \theta(t), \end{cases} \quad (2.5)$$

в которых $H(t)$ и $\theta(t)$ с точностью до $O(\varepsilon)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 H \sin 2\theta \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \cos 2\theta - \frac{\omega}{32} \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} H^2 k^2 \end{cases}$$

где собственная частота определяется как

$$\omega^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

Установлено, что если расстройка $\Delta = \omega - \Omega/2$ удовлетворяет условию

$$|\Delta| < \frac{s\Omega^3}{8g}, \quad (2.6)$$

то высота $H(t)$ волнового возмущения нарастает до стационарного значения

$$H^2 = \frac{4}{P} \left[\omega + \frac{1}{2} \left(\frac{s\Omega^2}{g} - 1 \right) \Omega \right], \quad (2.7)$$

$$\text{где } P = \frac{k^2 \omega}{8} \frac{\rho_2^2 + \rho_1^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}.$$

2.2. Волны Фарадея в эксперименте

При определенных частотах Ω колебаний сосуда на свободной поверхности жидкости или границе раздела двух жидкостей возбуждаются стоячие гравитационные волны частоты $\Omega/2$ в случае основного параметрического резонанса или частоты Ω при гармоническом резонансе. Поскольку картина наблюдаемых волновых движений зависит от частоты Ω и амплитуды s колебаний сосуда, то в ходе экспериментов

исследовались резонансные зоны и порог возбуждения волн Фарадея, проводился анализ волновых профилей и зависимостей высоты волны H от Ω . Для возбуждаемых волн становятся существенными нелинейные эффекты, проявляющиеся в асимметрии волновых профилей и колебаниях узлов стоячей волны. При интерпретации экспериментальных данных использовались асимптотические решения нелинейной задачи о поверхностных волнах Фарадея [9,10].

2.2.1. Поверхностные волны

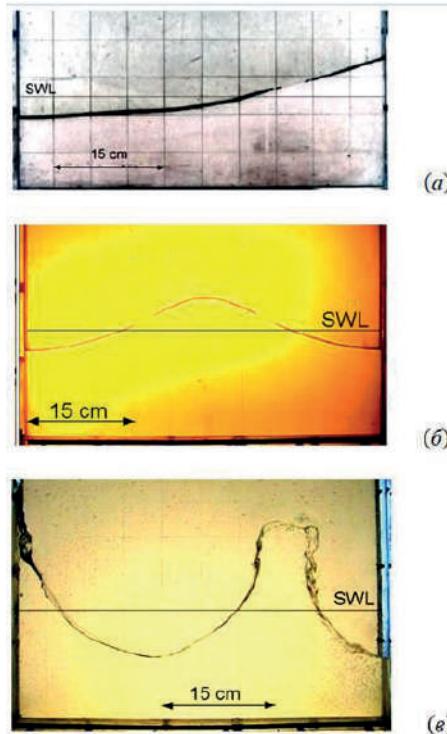


Рис. 2.5. Первая, вторая и третья волновые моды на свободной поверхности воды, наблюдаемые в эксперименте при основном параметрическом резонансе: (a– σ) – (n, h, Ω, H) = (2, 15 см, 23.10 c^{-1} , 7.6 см); (3, 15 см, 23.71 c^{-1} , 16.2 см); амплитуда колебаний сосуда $s = 0.9$ см.

Проведено многоплановое исследование поверхностных волн Фарадея, возбуждаемых при основном параметрическом резонансе в широком диапазоне экспериментальных параметров [14, 15]. Изучались первые три волновые моды $n = 1-3$ на свободной поверхности жидкости глубины $h = 6-25$ см в вертикально колеблющемся сосуде при перегрузке $\varepsilon = s\Omega^2 / g = 0.068 - 0.262$.

На рис. 2.5 представлены фотографии гравитационных волн максимального развития на свободной поверхности воды.

Диаграммы устойчивости и резонансные зависимости

Частотный диапазон параметрического возбуждения волн, согласно (2.3), определяется амплитудой s и частотой Ω колебаний сосуда. В экспериментах использовалась следующая методика оценки границ этого диапазона. Сначала рассчитывалась собственная частота ω для данной моды и устанавливалась частота колебаний сосуда $\Omega \sim 2\omega$ при выбранной амплитуде s . После выхода колебаний на стационарный режим частота Ω плавно изменялась так, чтобы высота волны уменьшалась. Это изменение продолжалось до значения Ω_A , при котором амплитуда волны практически равна нулю; $\Omega = \Omega_A$ принималось за граничное значение.

Другая граница Ω_B диапазона находилась путем дискретного изменения с малым шагом частоты колебаний сосуда в обратном направлении, т.е. при увеличении амплитуды волны.

При каждом новом значении Ω вибростенд выключался. Волновые движения жидкости затухали. После их полного прекращения сосуду опять сообщались колебания с частотой Ω , и фиксировалось наличие или отсутствие раскачки волны. Если в течение 20 мин стационарный режим колебаний жидкости не достигался, то соответствующая частота Ω принималась за граничное значение Ω_B .

Для второй ($n=2$) и третьей ($n=3$) волновых мод при $h=15$ см проведены серии измерений значений Ω_A и Ω_B для различных значений амплитуды колебаний сосуда s . В результате для указанных мод построены диаграммы устойчивости, представленные на рис. 2.6. Сплошными линиями показаны границы диапазона параметрического возбуждения,

рассчитанные по (2.3). Сопоставляя экспериментальные и теоретические данные, можно отметить довольно хорошее их совпадение практически для всех значений s .

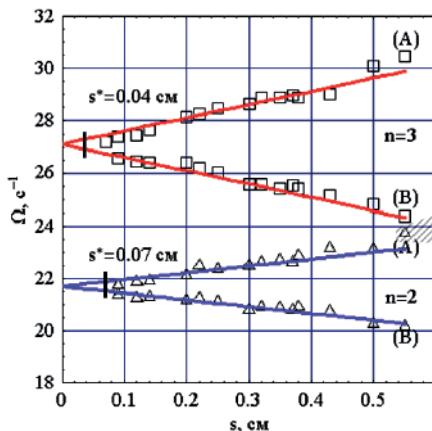


Рис. 2.6. Диаграммы устойчивости, определяющие возбуждение второй и третьей волновых мод: $h=15$ см.

Отметим, что при $s > 0.4$ см экспериментальная зона неустойчивости несколько шире теоретической. На примере второй моды колебаний это можно объяснить следующим образом. Верхняя граница смещена в область высоких частот за счет того, что при данных s происходит перекрытие второй и третьей мод (на рис. 2.6 эта область показана штриховкой), и возможны режимы, когда вторая мода, просуществовав некоторое время, переходит в третью, которая через некоторое время переходит во вторую, и затем весь процесс периодически повторяется.

Из рис. 2.6 следует наличие пороговых амплитуд колебаний сосуда s^* , ниже которых для любых Ω и любых начальных возмущений свободная поверхность жидкости остается невозмущенной. Для второй моды $s^*=0.07$ см, для третьей - $s^*=0.04$ см.

Существование для данной моды пороговой амплитуды s^* является опытным фактом, поскольку в соответствии с формулой (2.3) при $s=0$ мы имели бы свободные колебания жидкости с частотой ω .

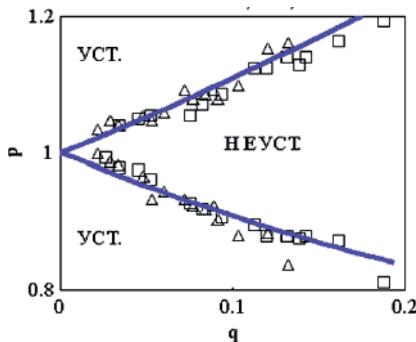


Рис. 2.7. Диаграмма устойчивости в безразмерном виде: $h=15$ см.

Введем следующие безразмерные переменные: частотную расстройку $p = (2\omega_n / \Omega)^2$ и параметр внешнего воздействия $q = 2k_n s \operatorname{th} k_n h$.

Тогда для исследуемых мод на (p,q) – плоскости можно построить область неустойчивости свободной поверхности жидкости.

Для второй и третьей мод при $h=15$ см эти области показаны на рис. 2.7. При таком представлении экспериментальных данных вместо разнесенных по частоте неустойчивых областей (рис. 2.6), на (p,q) – плоскости получаем общую для второй и третьей мод область неустойчивости в случае основного параметрического резонанса. Для того, чтобы определить устойчива или неустойчива свободная поверхность жидкости при заданных значениях амплитуды s и частоты Ω колебаний сосуда, для каждой моды номера n необходимо вычислить величины (p,q) и нанести на (p,q) -диаграмму; если одна из точек оказывается в неустойчивой области, то для соответствующей моды свободная поверхность неустойчива, т.е. амплитуда этой моды экспоненциально возрастает до установления стационарного режима колебаний. Пороговое значение параметра внешнего воздействия, ниже которого для всех Ω свободная поверхность остается невозмущенной, равно $q^* \approx 0.018$.

Безразмерная диаграмма устойчивости для второй и третьей волновых мод при различной глубине жидкости $h=7.5, 10$ и 15 см приведена на рис. 2.8, из которого следует наличие порогового значения параметра $q^* \sim 0.013$.

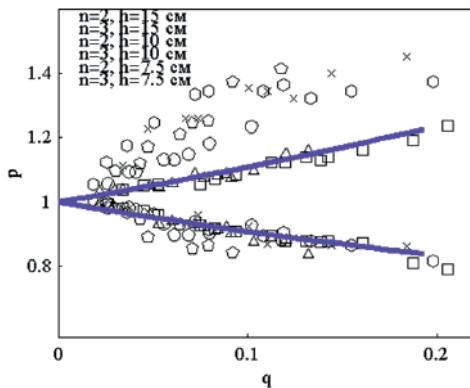


Рис. 2.8. Диаграмма устойчивости в безразмерном виде.

Если амплитуда колебаний сосуда превосходит пороговое значение ($s > s^*$), а частота Ω принадлежит резонансной зоне, то на поверхности жидкости возбуждаются волны, основными характеристиками которых являются их высота H и частота $\Omega/2$. Высота H волновой моды номера n зависит не только от частоты Ω и амплитуды s колебаний сосуда, но и от глубины жидкости h – см. (2.4). На рис. 2.9 в качестве примера для второй моды представлены зависимости высоты H от частоты Ω колебаний сосуда при различных глубинах жидкости.

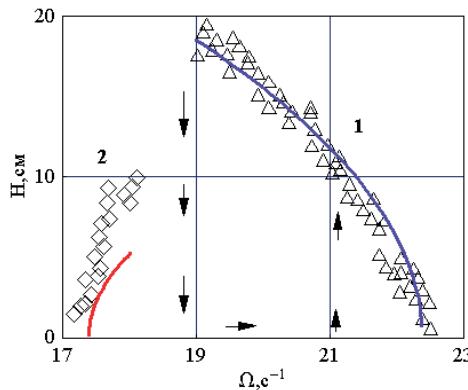


Рис. 2.9. Резонансные зависимости для второй волновой моды $n=2$: 1 – $h=15$ см, $s=0.25$ см, $\beta=0.11>0$; 2 – $h=6.0$ см, $s=0.34$ см, $\beta= -0.33<0$; сплошные кривые – расчет по (2.4).

Для второй моды $n=2$ при глубине $h=15$ см и $s=0.25$ см (кривая 1) при уменьшении частоты амплитуда возрастает (случай $\beta>0$). Это наблюдается до значения Ω , при котором происходит срыв колебаний (направленные вниз стрелки на рис. 2.9). При дальнейшем уменьшении Ω свободная поверхность остается невозмущенной при условии, что Ω не попадает в пределы резонансной зоны соседних мод. Если после срыва колебаний медленно увеличивать Ω , то при некоторой частоте Ω_B (нижняя граница области неустойчивости на рис. 2.6) наблюдается скачкообразный рост амплитуды – жесткое возбуждение, на рис. 2.9 направленные вверх стрелки – и при дальнейшем увеличении Ω высота волны H уменьшается.

С уменьшением глубины наклон резонансных кривых изменяется. Для второй моды при $h=6.0$ см, $s=0.34$ см получена резонансная зависимость 2 с явно выраженным наклоном вправо.

Для сравнения с данными эксперимента на рис. 2.9 приведены кривые, рассчитанные по формулам (2.4).

На рис. 2.10 приведены резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод при $h=15$ и 10 см, из которых следует как сужение частотного диапазона существования волновых мод, так и увеличение крутизны зависимостей $H(\Omega)$.

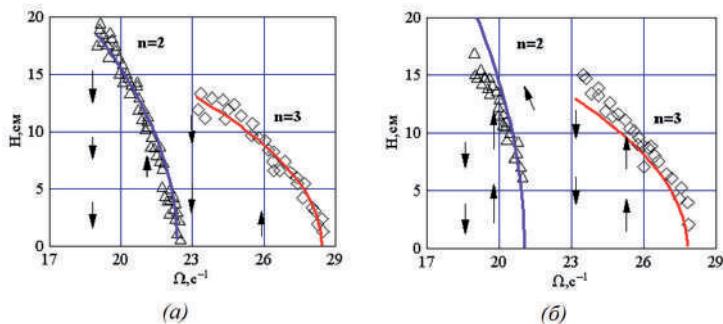


Рис. 2.10. Резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод $n=2, 3$ при $s=0.25$ см: $a, б$ – $h=15, 10$ см; сплошные кривые – расчет по (2.4).

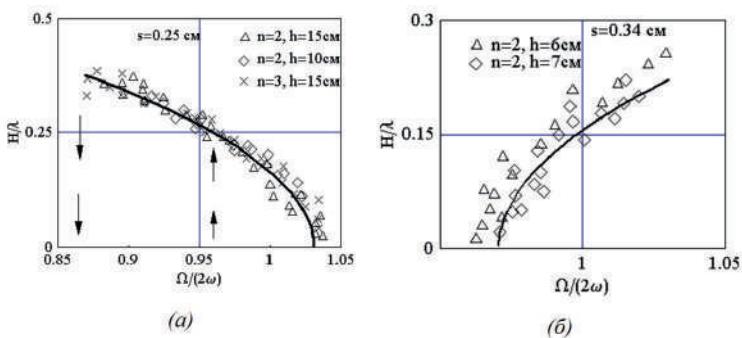


Рис. 2.11. Эффект мягкой (а) и жесткой (б) восстанавливающей силы, определяемый параметром h / λ ; сплошная кривая – расчет по (2.4).

На рис. 2.11 показан эффект мягкой (а) и жесткой (б) восстанавливающей силы на безразмерные резонансные зависимости второй и третьей мод при разной глубине жидкости. В первом случае высота волны монотонно растет с уменьшением частоты колебаний сосуда, параметр $\beta > 0$; во втором - H растет с увеличением Ω , $\beta < 0$. Определяющим параметром является безразмерная глубина h / λ , причем ее критическое значение определяет этот переход. Рассчитанные по (2.4) зависимости полностью соответствуют данным эксперимента.

Естественно встает вопрос о характере зависимости $H(\Omega)$ при глубинах жидкости, равных или близкой к критической. Решение уравнения $\beta = 0$ дает критическое значение $h / \lambda = 0.168$.

Эффект критической глубины жидкости

Зависимость высоты волн Фарадея при глубине жидкости, равной или близкой к критической, была получена в работах [16, 17]. Решение задачи о параметрическом возбуждении волн Фарадея в пятом приближении строилось в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/4}$, коэффициенты которых определялись по методу [9–11, 16].

Резонансные кривые при глубине жидкости, близкой к критической h_{cr} , распадаются на две непересекающиеся ветви $H_-^+ = \varepsilon^{1/4} \kappa C_-^+$ и $H_+^- = \varepsilon^{1/4} \kappa C_+^-$, имеющие разные знаки наклона и разные фазы:

$$\begin{cases} C_{-}^{+} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\varepsilon^{1/2}} - \sqrt{\beta_1^2 \varepsilon - 4\beta_2 \left(\frac{\Delta}{\varepsilon \omega} + \frac{1}{4}\right)}}{2\beta_2}, \quad \Theta = 0, \pi \\ C_{+}^{-} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\varepsilon^{1/2}} + \sqrt{\beta_1^2 \varepsilon - 4\beta_2 \left(\frac{\Delta}{\varepsilon \omega} - \frac{1}{4}\right)}}{2\beta_2}, \quad \Theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{64} \operatorname{th}^{-4} kh (2\operatorname{th}^6 kh + 3\operatorname{th}^4 kh + 12\operatorname{th}^2 kh - 9), \\ \beta_2 = -\frac{\operatorname{cth}^{10} kh}{16384} \left(36\operatorname{th}^{16} kh - 64\operatorname{th}^{14} kh - 883\operatorname{th}^{12} kh + 691\operatorname{th}^{10} kh - 1611\operatorname{th}^8 kh + 6138\operatorname{th}^6 kh - 4077\operatorname{th}^4 kh + 1323\operatorname{th}^2 kh - 81 \right). \end{cases}$$

Характерной особенностью резонансных кривых при глубине жидкости, близкой к критической, является то, что они распадаются на две непересекающиеся ветви, имеющие разные знаки наклона. Резонансная ветвь H_{-}^{+} имеет отрицательный наклон, а H_{+}^{-} – положительный наклон.

Полученный в [16, 17] результат инициировал серию экспериментов, в которых для второй волновой моды $n=2$ сняты резонансные зависимости параметрически возбуждаемых волн на поверхности жидкости, глубина которой изменялась от 8.8 до 6.0 см. Для второй моды решение уравнения $\beta=0$ – значение критической глубины $h_{cr}=8.42$ см ($h_{cr}/\lambda=0.168$), т.е. в эксперименте изменение безразмерной глубины оценивалось диапазоном $0.71 < h/h_{cr} < 1.05$.

Экспериментальные зависимости $H(\Omega)$ приведены на рис. 2.12. Видно, как с уменьшением h меняется форма и наклон резонансной зависимости.

При $h=15$ см (рис. 2.12) в эксперименте удается зафиксировать минимальное значение высоты волны $H=0.7$ см при $\Omega=22.5$ с⁻¹, и при уменьшении частоты высота растет до 19.5 см, после чего на частоте $\Omega=18.8$ с⁻¹ происходит срыв колебаний. Наклон резонансных зависимостей, определяемый эффектом мягкой восстанавливющей силы, сохраняется до глубины жидкости $h=7.35$ см.

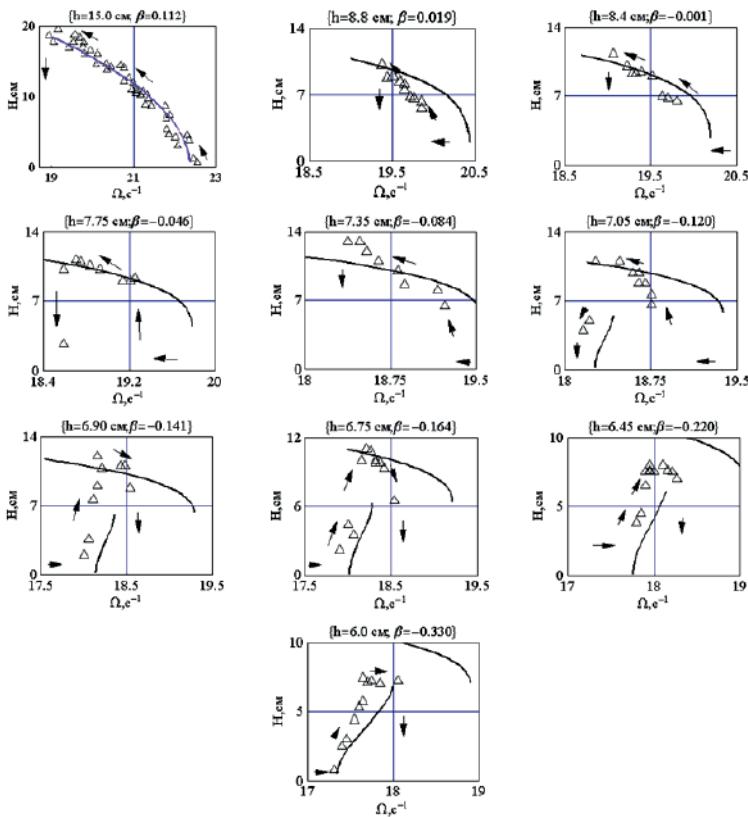


Рис. 2.12. Резонансные зависимости для второй волновой моды $n=2$: $h=15.0-6.0$ см, $s=0.24$ см; $\beta=0.112, 0.19, -0.001, -0.046, -0.084, -0.120, -0.141, -0.164, -0.220, -0.330$; (Δ) - экспериментальные данные; сплошные кривые – расчет по (2.8); стрелками показано направление изменения частоты Ω .

С уменьшением глубины для зависимостей $H(\Omega)$ характерено не только сужение резонансного диапазона и его смещение в низкостотную область, но значительное увеличение минимального значения высоты волны, регистрируемой в эксперименте – резонансная зависимость становится круче с одновременным подъемом ее правой части. Отметим, что для $h = 15-7.35$ см срыв колебаний происходит после прохождения частоты, отвечающей максимальной высоте волны. Форма резонансной зависимости принципально меняется при глубине $h = 7.05$ см, для которой

четко прослеживаются две ветви резонансной зависимости – сначала восходящая ветвь (мягкая восстанавливающая сила), затем ветвь нисходящая (жесткая восстанавливающая сила). Обе ветви резонансной зависимости были сняты при уменьшении частоты от 18.75 до 18.2 с⁻¹.

При дальнейшем уменьшении глубины жидкости h от 6.9 до 6.0 см (рис. 2.12) для резонансных зависимостей характерно изменение направления их прохождения по частоте – для того, чтобы измерить $H(\Omega)$, необходимо было увеличивать частоту Ω колебаний сосуда. При всех глубинах, кроме $h=6$ см, резонансные зависимости имеют две ветви – сначала восходящая ветвь (жесткая восстанавливающая сила), затем ветвь нисходящая (мягкая восстанавливающая сила). Картина меняется при $h = 6$ см; здесь прослеживается случай «чистой» жесткой восстанавливающей силы. Мы имеем одну ветвь резонансной зависимости, при которой высота волны растет при увеличении частоты колебаний сосуда.

Проведенный анализ экспериментальных данных рис. 2.12 позволяет сделать заключение, что переход от «мягкой» резонансной зависимости к «жесткой» резонансной зависимости не является резким или скачкообразным. Для этого перехода характерно целое семейство резонансных зависимостей, имеющих две ветви – восходящую и нисходящую. Единственным признаком, по которому можно оценить значение критической глубины, является изменение направления прохождения этих резонансных зависимостей. Смена направления происходит при глубине $6.90 < h_{cr} < 7.05$ см. Таким образом, в качестве критической глубины принимаем $h_{cr} \approx 7$ см, что соответствует безразмерной глубине $h/\lambda = 0.14$.

Рассчитанные по (2.8) резонансные зависимости для глубин $h = 6\text{--}15$ см показаны на рис. 2.12 сплошными кривыми. В целом модель [16, 17], если не на количественном, то на качественном уровне, объясняет и описывает распад резонансных зависимостей на две устойчивые ветви.

Таким образом, исследован эффект критической глубины, состоящий в немонотонной резонансной зависимости волн Фарадея вблизи критического значения глубины жидкости. Наблюдаемая в экспериментах сложная картина бифуркаций амплитудно-частотных характеристик волновых движений жидкости при параметрическом возбуждении

представляет значительный теоретический и прикладной интерес. Резонансные зависимости вблизи критической глубины жидкости не являются однозначными функциями частоты колебаний сосуда, а имеют две устойчивые ветви. Одна ветвь отображает эффект мягкой восстанавливающей силы (увеличение высоты волны с уменьшением частоты колебаний сосуда); а вторая ветвь – эффект жесткой восстанавливающей силы (увеличение высоты волны с ростом частоты).

В результате этого могут происходить резкие изменения амплитуды волн при плавном изменении частоты, а также явления гистерезиса. Для глубин жидкости, далеких от критической, наблюдается исчезновение одной из ветвей резонансных кривых. Так, для глубокой жидкости исчезает ветвь H_+^+ , а ветвь H_-^- имеет отрицательный наклон. Для жидкости, глубина которой значительно меньше критической, исчезает ветвь H_-^- , а ветвь H_+^+ имеет положительный наклон.

Регулярные волны Фарадея максимальной высоты

Проведено разделение наблюдаемых поверхностных волн Фарадея на три категории. Поскольку в условиях эксперимента профили волн Фарадея мало отличаются от профилей свободных волн, то были учтены основные свойства последних, известные из теории стоячих нелинейных волн [18]. По определению, в свободной стоячей волне поверхность жидкости совершает периодические во времени колебания с характерным пространственным распределением ее узлов и пучностей. Пучности стоячей волны неподвижны, а узлы совершают горизонтальные колебания. В рассматриваемых здесь двумерных волнах расстояние между пучностями равно $\lambda_n/2$, а траектории жидких частиц вертикальны вдоль вертикальных плоскостей, проведенных через пучности волны. Профиль волны симметричен относительно вертикальных плоскостей, проведенных через пучности.

Волны, профили которых являются наиболее близкими к теоретически предсказываемым профилям свободных стоячих волн, были названы регулярными. Точнее, к **регулярным** волнам Фарадея, были отнесены те волны, профиль которых обладает двумя свойствами: 1) он

периодичен во времени; 2) он симметричен относительно вертикальных плоскостей, проведенных через пучности волны.

Волны, у которых нарушено хоть одно из двух перечисленных свойств, но объем колеблющейся жидкости сохраняет связность, были отнесены к **нерегулярным** волнам Фарадея.

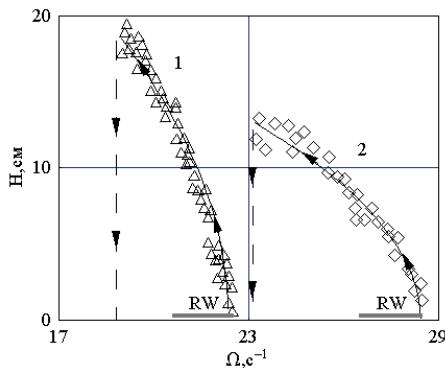


Рис. 2-13. Зависимость высоты H волн Фарадея от частоты Ω колебаний сосуда ($50 \times 4 \times 40$ см), $h=15$ см, $s=0.25$ см: 1 – вторая мода, $n=2$, $\omega_2=10.85$ с $^{-1}$; 2 – третья мода, $n=3$, $\omega_3=13.55$ с $^{-1}$, RW – частотный диапазон возбуждения регулярных волн.

Наконец, волны, в которых со свободной поверхности срывались либо отдельные капли жидкости, либо струи, были отнесены к **разрушающимся** волнам Фарадея.

На рис. 2.13 для второй и третьей волновых мод представлены зависимости высоты H возбуждаемой волны от частоты Ω колебаний сосуда – резонансные зависимости. При уменьшении частоты Ω высота волн монотонно возрастает, и это происходит до тех пор, пока при некоторой частоте колебаний сосуда волны внезапно не пропадут (направленные вниз стрелки на рис. 2.13). Символами RW на оси Ω отмечены частотные диапазоны $20.58 < \Omega_{n=2} < 22.52$ с $^{-1}$ и $26.46 < \Omega_{n=3} < 28.58$ с $^{-1}$, в которых были зафиксированы регулярные волны второй и третьей волновых мод, соответственно.

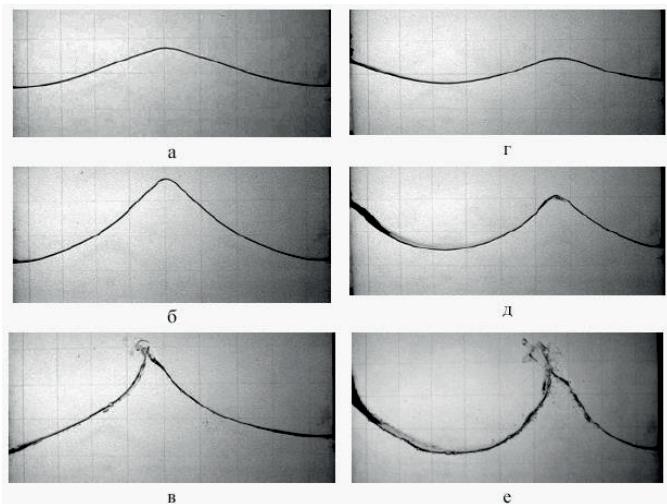


Рис. 2.14. Форма профилей второй (a-е) и третьей (г-е) волновых мод в зависимости от частоты: a-е – $\Omega=21.74; 20.74; 20.27; 27.44; 27.18; 24.17 \text{ c}^{-1}$.

На рис. 2.14 в двух столбцах приведены фотографии второй (слева) и третьей (справа) волновых мод в моменты их наибольшего развития для соответствующих значений Ω . Из фотографий видно, что при $\Omega=21.74$ и 27.44 c^{-1} форма волновых профилей (a, г) близка к синусоидальной. При меньших значениях Ω гребни волновых профилей сужаются, а подошвы уплощаются (б, д), причем высота волн увеличивается. Эти изменения профилей предсказываются нелинейной теорией. При еще меньших частотах, $\Omega=20.27$ и 24.17 c^{-1} , высота волн становится еще больше и наблюдается отрыв капель с гребня (в, е), т.е. наблюдается разрушение волн.

Различие между профилями регулярных и нерегулярных волн в моменты их наибольшего развития, т.е. в те моменты, когда в процессе колебаний волны достигают наибольшей высоты, иллюстрируется рис. 2.15 a и б. На каждой из них для второй волновой моды представлен результат наложения десяти последовательных изображений профилей в указанные моменты через период волны. Изображения профилей на рис. 5-3, a и б были получены при безразмерных частотах $p = 0.949$ и 0.946

колебаний сосуда, соответственно, где $p=\Omega/(2\omega_2)$. Для этих частот глубина модуляции параметра возбуждения, перегрузка, $\varepsilon = (s\Omega^2)/g$ равна 0.108 и 0.107, соответственно.

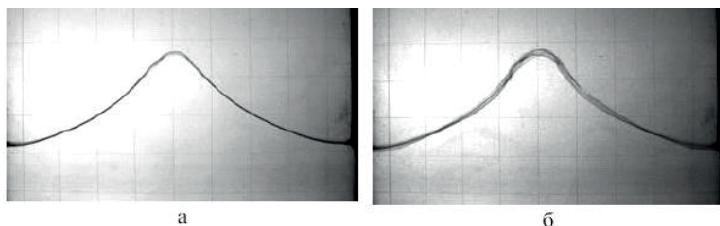


Рис. 2.15. Результат наложения десяти последовательных профилей максимального развития второй моды при $h=15$ см, $s=0.25$ см, $\omega_2=10.85$ с⁻¹: *а*, *б* – $(p, \Gamma) = (0.949, 0.255), (0.946, 0.259)$.

Полученная на рис. 2.15 *а* тонкая кривая свидетельствует о точной повторяемости формы профиля через период волны. Поскольку профиль симметричен относительно вертикали, проходящей через гребень волны, то данную волну, наблюданную при $p=0.949$, следует отнести к категории регулярных волн. «Размытая кривая» на рис. 2.15 *б* свидетельствует об отсутствии повторяемости формы профиля через период волны. Поэтому волну, наблюданную при $p=0.946$, нельзя отнести к категории регулярных волн. Поскольку размытость кривой на рис. 2.15 *б* – небольшая, то можно сделать вывод о сохранении связности жидкого объема и поэтому отнести данную волну к категории нерегулярных (но не разрушающихся) волн.

Отметим, что профиль, изображенный на рис. 2.15 *а*, есть профиль регулярной волны наибольшей высоты, наблюданной в эксперименте. Эта регулярная волна наибольшей высоты второй волновой моды возбуждалась на частоте колебаний сосуда $p=0.949$, ее крутизна $\Gamma_m=0.255$ и $\varepsilon=0.108$.

Для третьей моды крутизна профиля регулярной волны Фарадея максимальной высоты была определена как $\Gamma_m=0.236$ при $p=0.954$ и $\varepsilon=0.167$.

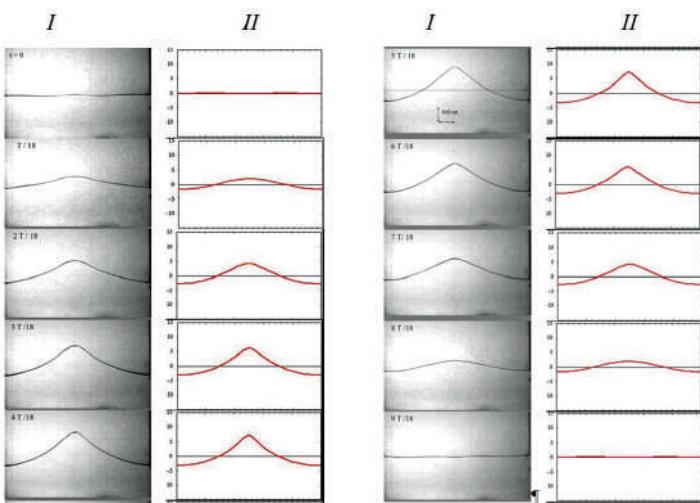


Рис. 2.16. Покадровое представление профиля регулярной волны в течение интервала $T/2$; шаг по времени $\Delta t = T/18$, $T=0.600\text{с}$, $p=0.965$, $H=10.7$ см: I – эксперимент; II – расчет по (2.1); $h=15$ см, $s=0.25$ см.

На рис. 2.16 проводится сравнение профилей наблюданной в эксперименте регулярной волны и рассчитанных в рамках теоретической модели параметрического резонанса в однородной жидкости [9,10,14] – соотношение (2.1). Из представленных на рисунке данных следует, что в случае регулярных стоячих волн Фарадея результаты аналитической модели полностью соответствуют эксперименту. Нелинейность исследуемых волн проявляется в асимметрии профиля и колебаниях узлов.

Асимметрия волнового профиля оценивалась как отношение минимальной ординаты y_2 (нижняя точка долины волны) к максимальной ординате y_1 (гребень волны) в зависимости от крутизны волны H/λ (значения y_1 и y_2 берутся в моменты максимального развития волны). Отметим, что в случае чисто синусоидальных волн независимо от высоты H волны отношение $y_2/y_1=1$.

Экспериментальные зависимости коэффициента асимметрии профиля от крутизны волны второй и третьей мод ($h=15$ см, $s=0.25$ см) приведены на рис. 2.17 *a*. Эксперименты показали, что даже при $H/\lambda=0.08$ коэффициент асимметрии $y_2/y_1=0.8$, а при увеличении высоты волны

асимметрия возрастает: при $H/\lambda = 0.24$ коэффициент асимметрии составляет величину $y_2/y_1 = 0.4-0.5$.

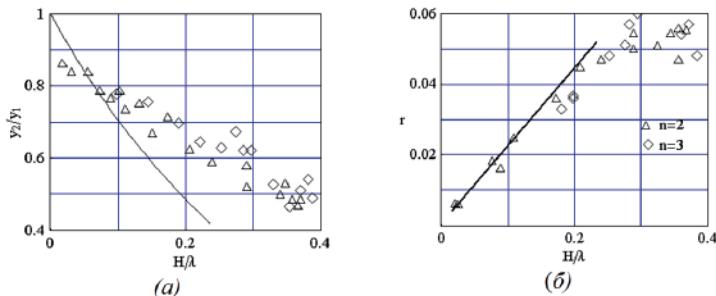


Рис. 2.17. (а) Зависимость коэффициента асимметрии волны от ее крутизны для второй и третьей волновых мод. (б) Зависимость безразмерной амплитуды колебаний узлов волны Фарадея от крутизны для второй и третьей волновых мод. ($h=15$ см, $s=0.25$ см).

Значения y_1 и y_2 можно вычислить по формулам (2.1), при этом значение фазы соответствует моментам наибольшего развития волны. Для сравнения с данными опыта на рис. 2.17 а представлена рассчитанная по (2.1) зависимость коэффициента асимметрии волны от ее крутизны.

Нелинейные эффекты проявляются и в колебаниях узлов стоячей волны. Узла как неподвижной точки волновой поверхности не существует. Узел в этом случае можно определить как точку свободной поверхности, имеющую нулевое смещение относительно невозмущенного начального уровня жидкости (рис.2.16).

Экспериментальная зависимость безразмерной амплитуды r колебаний узлов от крутизны H/λ для второй моды ($h=15$ см, $s=0.25$ см) показана на рис. 2.17 б. Видно, что амплитуда этих колебаний увеличивается с ростом высоты волны. Величина r линейно растет с увеличением крутизны при $H/\lambda < 0.24$, а затем рост замедляется. При $H/\lambda > 0.24$ наблюдается процесс обрушения волн с отрывом жидкости с гребня волны. Линейная часть экспериментальной зависимости $r=r(H/\lambda)$ соответствует только асимметрии волны; второй участок – разрушению волн Фарадея, рассматриваемого в главе 5.

Исключая a из (2.1), получим уравнение волнового профиля в переменных Эйлера $y = y(t, x, H)$. Положение узлов в момент времени t удовлетворяет уравнению $y(t, x, H) = 0$.

Отсюда следует, что обезразмеренная на H амплитуда колебаний узлов в первом приближении описывается формулой

$$r = \frac{1}{4} \left(\frac{\operatorname{ch} kh}{\operatorname{sh} kh} - \frac{\operatorname{sh} 2kh}{4\operatorname{sh}^2 kh} + \frac{3\operatorname{sh} kh}{16\operatorname{sh}^4 kh} - \frac{1}{4\operatorname{sh} 2kh} \right) \frac{H}{\lambda} \quad (2.9)$$

Рассчитанная по (2.9) зависимость $r = r(H/\lambda)$ приведена на рис. 2.17 б. Видно, что теория неплохо описывает данные эксперимента до $H/\lambda \sim 0.24$ -0.26.

Остановимся на вопросе о предельном угле φ_m при вершине, который был предсказан в [19, 20] как $\varphi_m = 90^\circ$. Поскольку все наблюдавшиеся в эксперименте профили были гладкими (без угловой точки), то по аналогии с [19, 20] был выполнен следующий предельный переход.

Рассматривалась последовательность профилей максимального развития волн, крутизна Γ которых увеличивалась с уменьшением p до значения $\Gamma_m = 0.255$, отвечающего максимальной крутизне регулярных волн. Для каждого значения Γ определялся угол $\varphi(\Gamma)$ между касательными, проведенными в точках перегиба гребня, расположенными симметрично относительно вертикали, проходящей через пучность волны. На рис. 2.18 приведена зависимость $\varphi(\Gamma)$, из которой видно, что предельной крутизне $\Gamma_m = 0.255$ соответствует угол $\varphi_m \approx 80^\circ$, причем при дальнейшем увеличении Γ (переход к разрушающимся волнам) этот угол будет уменьшаться. Таким образом, измеренное значение $\varphi_m \approx 80^\circ$ оказалось значительно меньше величины, приведенной в [19, 20].

У нерегулярных и разрушающихся волн форма профиля, вообще говоря, стохастическая. Однако анализ большого числа фотографий различных профилей максимальной высоты таких волн в частотном диапазоне $p < 0.944$ показал, что среди них можно выделить отдельные реализации, в которых волновые профили похожи на профили волн регулярных: они пространственно симметричные и нет срыва жидкости с гребня волны. На рис. 2.19 приведены указанные профили максимальной

высоты, выбранные из серий наблюдаемых профилей нерегулярных и разрушающихся волн, соответственно. Их крутизна равна $\Gamma_m=0.288$ для волн нерегулярных и 0.429 для волн разрушающихся.

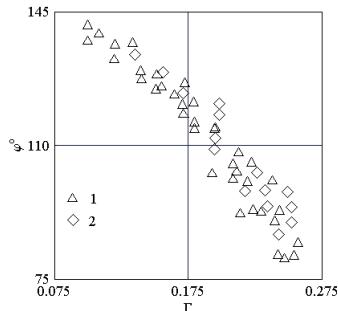


Рис. 2.18. Угол между касательными, проведенными в точках перегиба гребня волны, для сосуда 50x4x40 см, $s=0.25$ см: 1, 2 – $n=2,3$ (вода).

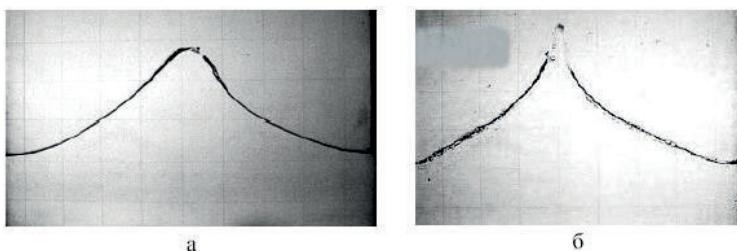


Рис. 2.19. Самые высокие профили, близкие по форме к профилям регулярных волн: (а) нерегулярная волна $p=0.946$, $\Gamma=0.288$; (б) разрушающаяся волна $p=0.877$, $\Gamma=0.429$. Сетка 5x5 см.

Все представленные выше результаты [14,21] были получены для волн Фарадея на свободной поверхности воды при глубине $h=15$ см ($h/\lambda=0.3$), т.е. случай жидкости бесконечной глубины. Уменьшение глубины в значительной мере влияет на максимальную крутизну регулярных волн Γ_m . Это видно из рис. 2.20, на котором представлены зависимости Γ_m от h/λ для второй и третьей волновых мод.

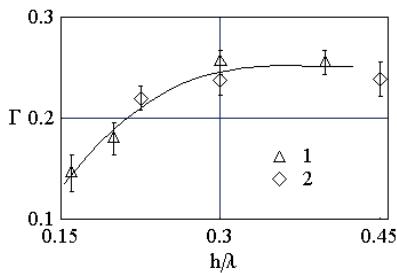


Рис. 2.20. Зависимость предельной крутизны Γ регулярных волн Фарадея от безразмерной глубины h/λ жидкости для сосуда 50x4x40 см, $s = 0.25$ см: 1, 2 – $n = 2, 3$ (вода).

Для оценки возможного влияния поверхностного натяжения жидкости на максимальную крутизну исследуемых волн Фарадея выполнена серия экспериментов, в которых вместо воды использовался керосин (поверхностное натяжение 30 дин/см). Для второй моды ($n=2$, $\lambda = 50$ см) при $h = 15$ см, $s = 0.25$ см предельная крутизна оказалась $\Gamma_m = 0.242$ при $p_m = 0.946$. Это значение с точностью до 4% совпадает с величиной, полученной для воды (71 дин/см). Таким образом, для гравитационных волн, как в данном эксперименте, максимальная крутизна мало чувствительна к изменению поверхностного натяжения.

Эффекты вязкого затухания

В экспериментах [14, 22, 23] показано, что вязкость жидкости оказывает существенное влияние на параметрическое возбуждение стоячих поверхностных волн Фарадея – наличие пороговых амплитуд колебаний сосуда с жидкостью и срыв стационарных колебаний жидкости.

Как следует из приведенных на рис. 2.6 диаграмм устойчивости, измеренные значения пороговой амплитуды колебаний сосуда для второй и третьей волновых мод равны $s^* = 0.07$ и 0.04 см. Пороговое значение имеет также параметр внешнего воздействия $q = 2k_n s \operatorname{th} k_n h$ на рис. 2.8: $q^* \approx 0.013$. Для резонансной зависимости второй волновой моды ($n=2$, $h=15$ см, $s=0.25$ см, $\beta=0.11 > 0$) на рис. 2.9 характерен срыв колебаний при $\Omega \approx 17.8$ с^{-1} (направленные вниз стрелки).

Воспользуемся результатами приближенной теории пограничного слоя и оценим влияние вязкости на процесс параметрического возбуждения волн.

В приближении линейной теории пограничного слоя [24, 25] коэффициент затухания волновой моды номера n на поверхности жидкости глубины h в сосуде заданных размеров ($L \times W$) определяется как

$$b = b_1 + b_2 + b_3 \quad (2.10)$$

где $b_1 = 2\sqrt{\nu k^2}$, $b_2 = \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}} \left(\frac{L+W}{LW} + k \frac{L-2h}{L\sinh 2kh} \right)$, $b_3 = \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}} k \frac{1}{\sinh 2kh}$.

Здесь ν - кинематическая вязкость жидкости; коэффициенты b_1 , b_2 и b_3 определяют диссиацию волновой энергии во всем объеме жидкости, на передней и задней стенках и дне сосуда, соответственно.

Экспериментальное значение коэффициента затухания b оценивалось следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась волновая мода n . Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась видеосъемка процесса затухания волновых движений жидкости. Измерения смещения свободной поверхности жидкости от положения равновесия по материалам кино/видеосъемки производились с точностью 0.1 см. Величина b оценивалась как

$$b = \frac{1}{T} \ln \frac{H_m}{H_{m+1}},$$

где $T = 2\pi/\omega$ - период волны, $\omega = \sqrt{gk\sinh kh}$ - собственная частота волны, g - ускорение свободного падения, $\kappa k = n\pi/L$ - волновое число, n - номер волновой моды, равный числу узлов стоячей волны, H_m и H_{m+1} - значения высоты волны, взятые через период колебаний. Оценки коэффициента затухания b осуществлялись в диапазоне волновых высот $H \sim 2-6$ см.

С целью проверки справедливости соотношения (2.10) были измерены коэффициенты затухания b первых трех волновых мод $n = 1-3$ при различных глубинах жидкости $h = 7.5, 10$ и 15 см в прямоугольном сосуде $L = 50$ см, $W = 4$ см. Соответствующие измеренные и рассчитанные значения b приводятся ниже в табл. 1.

Таблица 1

h , см	n	b , с^{-1} эксперимент	b , с^{-1} расчет по (2.10)
7.5	1	0.071 ± 0.012	0.061
10.0	1	0.068 ± 0.010	0.057
15.0	1	0.060 ± 0.011	0.055
7.5	2	0.098 ± 0.012	0.071
10.0	2	0.078 ± 0.012	0.067
15.0	2	0.061 ± 0.012	0.064
7.5	3	0.087 ± 0.020	0.075

Отметим, что измеренные величины b превосходят теоретические оценки не более чем 15%.

В работе [9] асимптотическое решение нелинейной задачи о поверхностных волнах Фарадея строилось методом Крылова-Боголюбова в переменных Лагранжа. Предполагалось, что сила трения, действующая между частицами жидкости, пропорциональна их скорости с коэффициентом b . Из этого решения следует, что резонансные зависимости высоты волны от частоты параметрического воздействия определяются соотношением

$$k^2 \omega \beta H_{\pm}^2 = 4 \left(\omega - \frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s\omega^2 \Omega}{2g} \right)^2 - b^2} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{64} \text{th}^{-4} kh (2\text{th}^6 kh + 3\text{th}^4 kh + 12\text{th}^2 kh - 9), \quad (2.11)$$

$$\omega^2 = gk\text{th}kh, \quad k = \pi n / L.$$

Здесь L – длина сосуда; g – ускорение силы тяжести; H_+ отвечает реализуемой в эксперименте устойчивой, а H_- – неустойчивой ветвям резонансной зависимости.

В [9] также показано, что параметрическое возбуждение имеет место, если амплитуда колебаний сосуда превосходит пороговое значение

$$s^* = b g / \omega^3 \quad (2.12)$$

При отсутствии колебаний сосуда ($s=0$) любые начальные синусоидальные возмущения свободной поверхности жидкости будут затухать по закону e^{-bt} . При $s > s^*$ возмущения экспоненциально возрастают.

Ниже в табл. 2 приведены экспериментально полученные и рассчитанные по (2.12) значения пороговой амплитуды s^* . В опытах величина s^* определялась при построении диаграммы устойчивости.

Таблица 2

h , см	n	s^* , см	s^* , см
		эксперимент	расчет по (2.12)
7.5	2	0.10	0.06
7.5	3	0.05	0.03
10	2	0.07	0.05
10	3	0.04	0.03
15	2	0.07	0.05
15	3	0.04	0.03

Исследуем процесс нарастания малых начальных волновых возмущений до значений, отвечающих стационарным режимам параметрических колебаний. Используя теоретическую модель [9], проведем анализ установления стационарного режима колебаний. Обратимся к системе (2.2), в которой в правой части первого уравнения добавлен член $(-bH)$, определяющий эффекты вязкого затухания

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -bH + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 H \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \cos 2\theta - \beta \frac{H^2}{4} \omega k^2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ имеем $H=H_0$ и $\theta = \theta_0$. Численно интегрируя систему (2.13), можно проследить эволюцию этого возмущения.

Для $\Omega=21.63$ с⁻¹, $n=2$, $h=15$ см, $s=0.25$ мм начальные условия выбирались следующим образом:

$$H_0: \quad 0.01 \quad 0.05 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 1.0 \text{ см}$$

$$\theta_0: \quad 0 \quad \pi/4 \quad \pi/2 \quad 3\pi/4 \quad \pi \text{ радиан}$$

Вычисления показали, что независимо от H_0 решение выходит на стационарное значение $H_{st}=8.8$ см. Что касается функции $\theta(t)$, то при $\theta_0 < 5\pi/6$ она выходит на стационарное значение $\theta_1=0.098$ рад, а при $\theta_0 \geq 5\pi/6$ на $\theta_2=\pi + 0.098$ рад. Согласно [9]

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{bg}{2\Omega\omega^2 s} = 0.123,$$

$$\theta_2 = \pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{bg}{2\Omega\omega^2 s} = \pi + 0.123$$

На рис. 2.21 приведены рассчитанная и экспериментальная зависимости установления стационарных колебаний. Отметим, что для процесса выхода волн на стационарный режим характерны затухающие колебания около значения, соответствующего стационарной амплитуде.

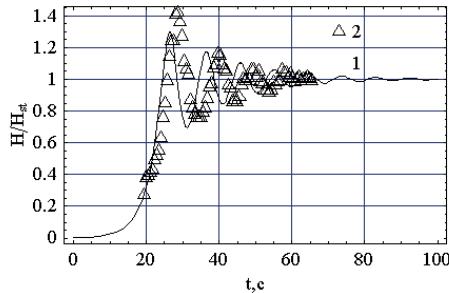


Рис. 2.21. Процесс выхода колебаний на стационарный режим - $n=2$, $h=15$ см, $s=0.25$ мм, $\Omega=21.630$ с $^{-1}$, $H_{st}=8.8$ см: 1 - расчет; 2 - эксперимент, $H_0=0.1$ см, $\theta_0=0$.

Как показано в главе 1, теория срыва параметрических колебаний простейшей механической системы — маятника [12] — основана на предположении об определяющей роли диссипативных факторов. Обсудим экспериментальное обоснование [23] использования такого подхода к описанию срыва колебаний жидкости, т.е. системы с бесконечным числом степеней свободы.

В безразмерном виде резонансные зависимости (2.11) схематично изображены на рис. 2.22. При медленном уменьшении частоты до значения Ω_A стационарная высота волны равна нулю. При дальнейшем уменьшении Ω от Ω_A до Ω_B высота определяется сплошной кривой H_+ . В точке B происходит срыв колебаний, и при дальнейшем уменьшении частоты высота волны равна нулю.

При увеличении частоты от нуля до Ω_B высота волны равна нулю, и при $\Omega > \Omega_B$ она определяется участком ЕА резонансной кривой H_+ . Таким

образом, реализуемой в эксперименте зависимости $H(\Omega)$ присущ гистерезис - участок $AEBCDEA$ рис. 2.22, а частота срыва колебаний

$$\Omega_B = \frac{2gb}{s\omega^2} \quad (2.14)$$

определяется пересечением устойчивой $H=H_+(\Omega)$ и неустойчивой $H=H_-(\Omega)$ ветвей резонансной зависимости. При отсутствии затухания ($b=0$) устойчивая и неустойчивая ветви резонансной зависимости становятся эквидистантными, и точка их пересечения отсутствует.

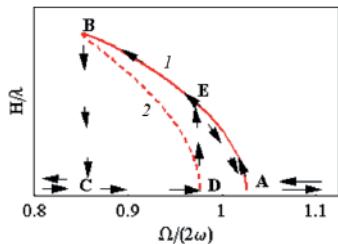


Рис. 2.22. Схематичное изображение двух ветвей резонансной зависимости: 1, 2 –устойчивая $H(\Omega)=H_+$ и неустойчивая $H(\Omega)=H_-$ ветви.

Экспериментальные резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод приведены на рис. 2.23. Направленные вертикально вниз стрелки определяют соответствующие экспериментальные значения частоты срыва колебаний $\Omega_B = 18.8$ и 23.2 c^{-1} соответственно.

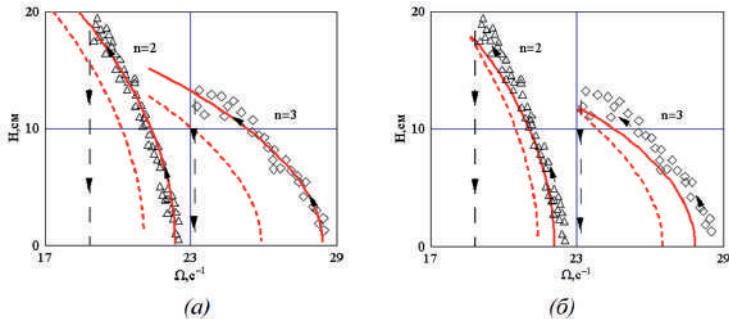


Рис. 2.23. (a) Зависимости $H(\Omega)$ для двух мод поверхностных волн Фарадея при $h = 15 \text{ см}$, $s = 0.25 \text{ см}$. Направленные вниз стрелки

соответствуют частоте срыва колебаний 18.8 и 23.2 c^{-1} . Сплошные и пунктирные кривые – устойчивая и неустойчивая ветви (2.11). (б) Результат использования эквивалентного коэффициента затухания 0.283 и 0.540 c^{-1} при построении $H(\Omega)$.

Исследование процесса затухания регулярных поверхностных волн Фарадея высотой 5-10 см позволило оценить соответствующие коэффициенты затухания $b = 0.066$ и 0.071 c^{-1} для второй и третьей волновых мод, используемые для построения резонансных зависимостей и оценки частоты срыва Ω_B . Устойчивая и неустойчивая ветви резонансной зависимости, рассчитанной по (2.11), показаны на рис. 2.23 *a* сплошной и штриховой линиями, соответственно. Соотношение (2.14) для второй и третьей волновых мод дает $\Omega_B = 4.4$ и 3.1 c^{-1} соответственно. Получены явно заниженные по сравнению с экспериментом значения. Отметим, что анализ резонансных зависимостей указанных волновых мод на поверхности жидкости глубиной 10 и 7.5 см приводит к аналогичным результатам. С другой стороны, модель достаточно точно описывает зависимость $H(\Omega)$, рис. 2.23 *a*.

В окрестности частот срыва наблюдаемые волны Фарадея можно классифицировать как разрушающиеся волны, для которых характерны струйные выбросы и каплеобразование [21, 26]. На рис. 2.24 представлена последовательность восьми волновых профилей максимального развития для третьей моды, зарегистрированных на частоте $\Omega = 23.6 \text{ c}^{-1}$.

С физической точки зрения процесс разрушения волн в виде струйных выбросов можно рассматривать как дополнительный механизм диссипации волновой энергии и к потерям энергии на вязкую диссипацию необходимо добавлять потери на разрушение. По результатам [27] мощность, рассеиваемая при разрушении волн, вдвое превосходит вязкую диссипацию. Увеличение диссипации вследствие каплеобразования при параметрическом возбуждении капиллярных волн на поверхности слоя воды отмечено также в [28].

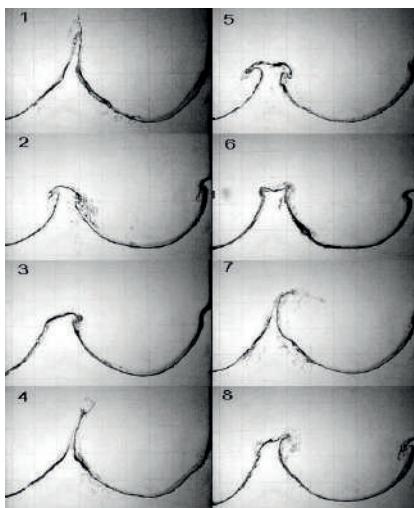


Рис. 2.24. Разрушающиеся волны Фарадея; последовательность восьми волновых профилей максимального развития; $h=15$ см, $s=0.25$ см, $n=3$, $\Omega=23.6$ с⁻¹.

Учитывая вышесказанное, можно предположить, что разрушение волн Фарадея приводит к резкому увеличению диссипации волновой энергии. По аналогии с тем, как это делается при описании сложных диссипативных систем с конечным числом степеней свободы, напр., [29], вместо измеренного b вводится эквивалентный коэффициент затухания. Для каждой волновой моды этот коэффициент выбирался таким образом, чтобы рассчитанная частота срыва колебаний совпадала с измеренной.

Соответствующий эквивалентный коэффициент затухания b^* , рассчитанный по формуле (2.14), для данных рис. 2.23 *а* принимает значения $b^*=0.283$ и 0.540 с⁻¹. Подчеркнем, что при расчете b^* в (2.14) использовалась измеренная частота срыва Ω_B .

Построенные с использованием b^* резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод приведены на рис. 2.23 *б*. Введенный эквивалентный коэффициент затухания в 4 и 7 раз превышает определенные по обычной методике коэффициенты. На рис. 2.25 представлены резонансные зависимости для второй и третьей мод при

$h=10$ и 7.5 см с соответствующими значениями эквивалентного коэффициента затухания.

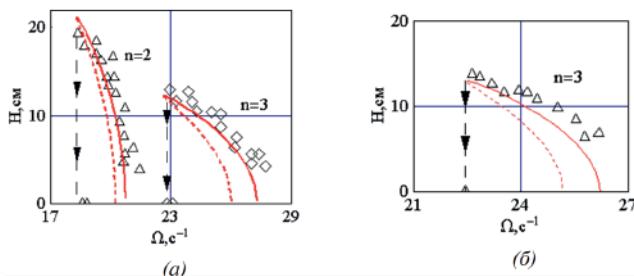


Рис. 2.25. Экспериментальные и рассчитанные по (2.11) резонансные зависимости для второй и третьей волновых мод: *a* - $h=10$ см, $b^*=0.245$, 0.51 c^{-1} ; *б* - $h=7.5$ см, $b^*=0.47$ c^{-1} ($s=0.25$ см).

Разрушение волн Фарадея и формирование струйного всплеска

Наблюдаемые волны Фарадея могут быть разделены на три категории [21] – регулярные, нерегулярные и разрушающие волны. В соответствии с линейной теорией область неустойчивости свободной поверхности жидкости при параметрическом резонансе определяется следующими безразмерными параметрами – расстройкой частоты $p=(2\omega_n/\Omega)^2$ и величиной внешнего воздействия $q=2k_n s \operatorname{th} k_n h$. Эти же параметры, являясь мерой внешнего воздействия, могут использоваться для описания регулярных, нерегулярных и разрушающихся волн Фарадея. Расположение трех наблюдаемых в эксперименте категорий волн на плоскости (p,q) показано на рис. 2.26.

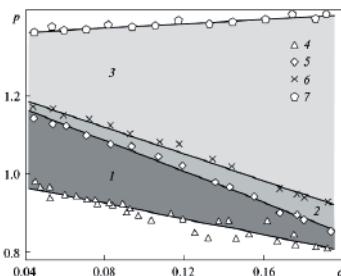


Рис. 2.26. Расположение трех категорий волн на (p,q) -плоскости: *1* –

регулярные; 2 – нерегулярные; 3 – разрушающиеся волны; 4-7 – экспериментальные точки, определяющие границы трех категорий волн ($n=2, 3$), $h = 15$ см (вода).

Детальное описание регулярных волн приведено выше, поэтому далее рассматриваются волны нерегулярные и разрушающиеся.

Среди **нерегулярных волн** (рис. 2.26, область 2), занимающих достаточно узкую область между регулярными и разрушающимися волнами, могут быть выделены волны с небольшой лункой или углублением в гребне волны, а также периодический триплет. При крутизне $\Gamma \sim 0.260$ в экспериментах наблюдались стоячие волны с плоским гребнем или гребни с небольшим углублением (лункой), как показано на рис. 2.27. Такая форма гребня, а также нарушение временной симметрии, скорее всего, являются результатом взаимодействия основной и второй гармоник.



Рис. 2.27. Нерегулярные волны с «плоским» гребнем и углублением (лункой) на гребне; $p=1.042$, $q=0.110$ ($s=0.45$ см, $T=0.590$ с, $\Gamma \sim 0.260$).

Режим периодического триплета можно также отнести к категории нерегулярных волн. Данный режим характеризуется тремя периодически повторяющимися волновыми профилями A , B и C - периодический триплет, как показано на рис. 2.28 а.

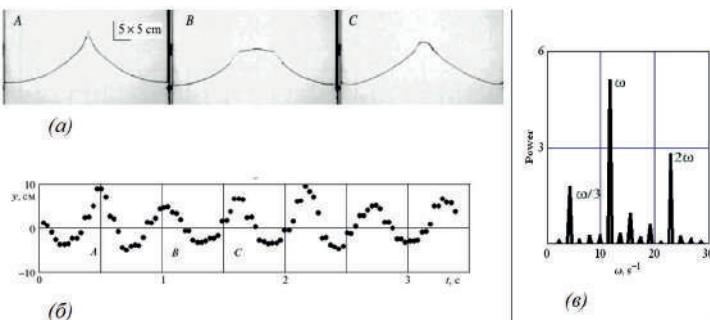


Рис. 2.28. Режим периодического триплета в случае нерегулярных волн Фарадея для $p=0.902$, $q=0.180$ ($s=0.75$ см): a – волновые профили A , B и C с временным промежутком между кадрами, равным периоду волны $T=0.550$ с; δ - хронограмма смещения свободной поверхности жидкости в центре сосуда; δ – частотный спектр смещения жидкости в центре сосуда, $\omega=2\pi/T$.

Для профиля A характерна наибольшая крутизна и острый угол при гребне. В случае профиля B на гребне имеется лунка, или гребень является плоским. Профиль C имеет скругленный гребень. Волновой профиль A с заостренным гребнем вновь появляется после профиля C – тем самым формируется повторяющийся цикл, период которого равен трем волновым периодам $3T$. Это видно из рис. 2.28 δ , на котором представлена хронограмма смещения точки свободной поверхности жидкости в центре сосуда. В режиме периодического триплета амплитудный спектр нерегулярной волны имеет три сильно выраженных пика на частотах 11.68 , 23.11 и 4.12 с^{-1} , соответствующих основной гармонике, второй гармонике, а также $1/3$ – субгармонике – рис. 2.28 ω . Хотя существование режима периодического триплета также отмечено в [27, 30], отсутствует какая-либо физическая модель данного явления.

Разрушающиеся волны Фарадея (область 3 на рис. 2.26) занимают большую часть (p,q) -плоскости и характеризуются переходом от односвязосвязной к многосвязной свободной поверхности. Этим волнам также свойственен периодический триплет, описываемый тремя периодически повторяющимися волновыми профилями A , B и C , как показано на рис. 2.29. Волновой профиль A характеризуется наибольшей высотой, крутизной и выбросом струи. Профиль B имеет сглаженный гребень, по краям которого также наблюдаются два выброса. Увеличение параметров возбуждения (p,q) приводит к интенсификации боковых выбросов для составляющей B триплета, причем в составляющей C отсутствуют какие-либо признаки разрушения. Из визуальных наблюдений следует, что именно составляющая A триплета определяет такие внешние проявления разрушения волн как струйный выброс с последующим отрывом фрагментов жидкости из волнового гребня.

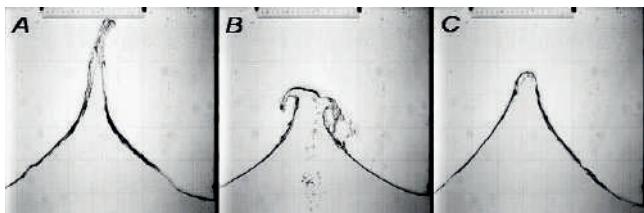


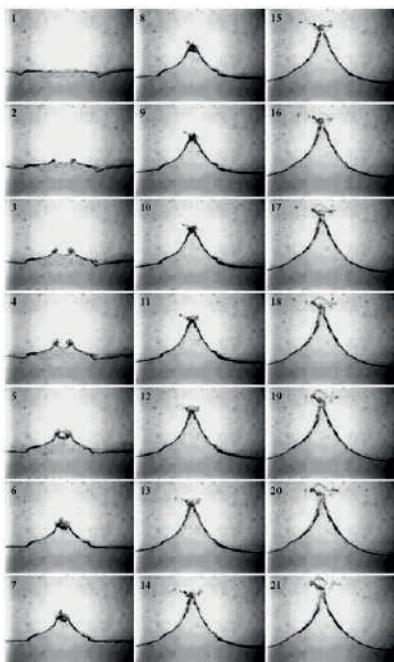
Рис. 2.29. Режим периодического триплета в случае разрушающихся волн Фарадея: $p=1.146$, $q=0.180$.

Детальный анализ процесса разрушения составляющей A показывает, что имеются два принципиально различных механизма образования струйных выбросов. Прежде всего, отметим схлопывание каверны на стадии формирования гребня, когда в случае второй моды центральная часть жидкости перемещается вверх, рис. 2.30 а. Схлопывание каверны на растущем гребне волны приводит к формированию высокоскоростной струи; этот процесс обладает определенной периодичностью $3T$ и достаточно четко локализован (центральная часть волнового гребня). Второй источник формирования струйных выбросов - коллапсирующая каверна во впадине волны. Эта каверна образуется в результате падения столбика жидкости или крупных капель на свободную поверхность - рис. 2.30 б. Отметим, что соударяющиеся со свободной поверхностью фрагменты жидкости формируются на предыдущей стадии растущего гребня (рис. 2.30 а).

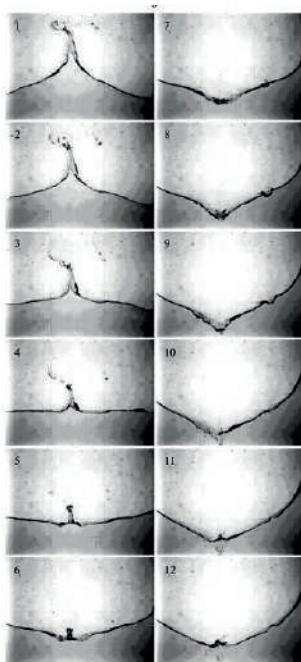
Как следует из рис. 2.30 а, при формировании гребня из горизонтального начального положения свободной поверхности жидкости, динамика каверны четко прослеживается, начиная с кадра 2. Для количественного описания процесса схлопывания использовались длина l и глубина d каверны. В качестве начальной длины l_0 принят горизонтальный размер той каверны, которая идентифицировалась по материалам скоростной видеосъемки. Измерения l и d проводились относительно подвижной свободной поверхности жидкости, что позволило исключить влияние волнового движения жидкости на оценки горизонтальной и вертикальной составляющих скорости схлопывания.

Длина каверны монотонно уменьшается (кадры 2-6). Однако глубина каверны сначала достигает максимального значения d_o (4), уменьшаясь затем до нуля в момент t_0 схлопывания каверны (10, время $t_0=0.1\text{с}$). Наличие максимальной глубины d_o свидетельствует о прекращении углубления каверны и начале ее коллапса. Это, в свою очередь, означает, что вертикальная составляющая скорости основания впадины изменяет знак. Принимая во внимание монотонное уменьшение l , можно говорить о весьма сложной картине течения жидкости вблизи границы каверны. Отметим, что в момент достижения максимальной глубины впадина приобретает полуцилиндрическую форму. Схлопывание каверны сопровождается формированием струйного выброса из гребня волны (11-14). В дальнейшем происходит распад этого струйного выброса на капли и достаточно крупные фрагменты жидкости (15-21). Следовательно, весь процесс схлопывания (продолжительность 70-100 мс) можно разделить на две стадии: 1) зарождение и развитие каверны на формирующемся гребне волны над невозмущенным уровнем жидкости (40-60 мс), и 2) схлопывание или коллапс каверны (40-50 мс).

Процесс формирования впадины волны показан на рис. 2.30 б. Здесь, при движении вниз центральной части жидкости (кадры 1-4) формируется столбик жидкости (5-6), соударяющийся со свободной поверхностью, в результате чего формируется каверна (7-9). Каверна начинает схлопываться, при этом ее глубина быстро уменьшается (10). Коллапс этой каверны приводит к формированию небольшой струи из основания впадины волны (11-12). В этом случае струйный выброс полностью зависит от предыдущей стадии движения жидкости (рис.5-14,а) и менее выражен. Ниже рассматривается только коллапсирующая каверна на стадии формирования гребня, а также анализ данных ограничивается стадией, предшествующей струеобразованию.



(а)



(б)

Рис. 2.30. Последовательность кадров, отображающих детали разрушения волн Фарадея: а – зарождение, развитие и схлопывание каверны на стадии формирования гребня; б – переход от гребня к впадине с образованием небольшой струи при схлопывании каверны, для $p=1.109$, $q=0.180$, временной интервал между кадрами 0.01с (а), 0.03с (б).

Детальный анализ процесса схлопывания каверны показан на рис. 2.31.) показал, что через 0.01 секунды после момента, соответствующего максимальной глубине $d_o=1.3$ см (кадр 1), каверна принимает коническую форму (3) с углом при вершине порядка 112° . Затем происходит округление дна (4), и до закрытия каверны (5 и 6) никаких-либо признаков струеобразования не наблюдается. Первые признаки струйного выброса прослеживаются на кадрах 7 и 8.

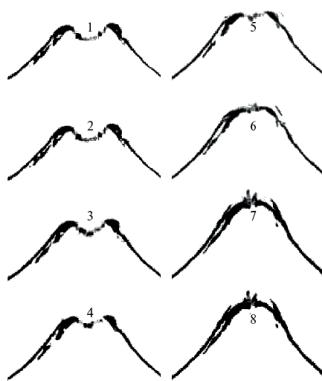


Рис. 2.31. Схлопывание каверны на формирующемся гребне для $p=0.941$, $q=0.180$, максимальная глубина каверны $d_o=1.3$ см, поле зрения 5×5 см; временной интервал между кадрами 0.005с.

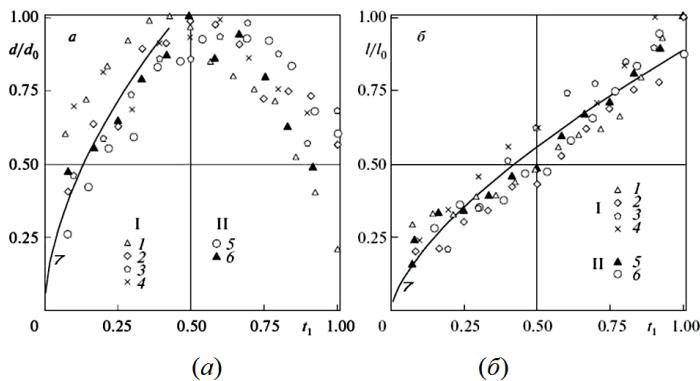


Рис. 2.32. Зависимость глубины (а) и длины (б) каверны от времени на интервале от появления каверны $t_1=1$ до ее схлопывания $t_1=0$; $q=0.18$, I-6 - $p=0.942$, 0.983, 1.017, 1.110 и 1.010, 1.080; I и II - вода и водный раствор сахара; 7 - функциональная зависимость $t_1^{2/3}$.

Описанная выше последовательность событий – общая для разрушающихся волн Фарадея (составляющая A периодического триплета) на свободной поверхности воды и водного раствора сахара в прямоугольном сосуде. Зарождение, развитие и схлопывание каверны происходит на формирующемся (растущем) гребне волны после того, как свободная поверхность жидкости пересекает горизонтальный начальный

уровень. Отметим, что в экспериментах [31,32] исследовался процесс струеобразования в осесимметричных стоячих волнах на свободной поверхности различных жидкостей в круговых цилиндрических сосудах, причем наблюдался переход поднимающейся впадины в узкую струю.

Зависимости безразмерных глубины глубины d/d_0 и длины l/l_0 каверны от безразмерного времени $t_1 = (t_o - t)/t_o$, представленные на рис. 2.32, показывают. Что все экспериментальные данные для воды и водного раствора сахара на стадии схлопывания могут быть аппроксимированы функциями

$$\begin{pmatrix} l/l_0 \\ d/d_0 \end{pmatrix} \sim t_1^{2/3}.$$

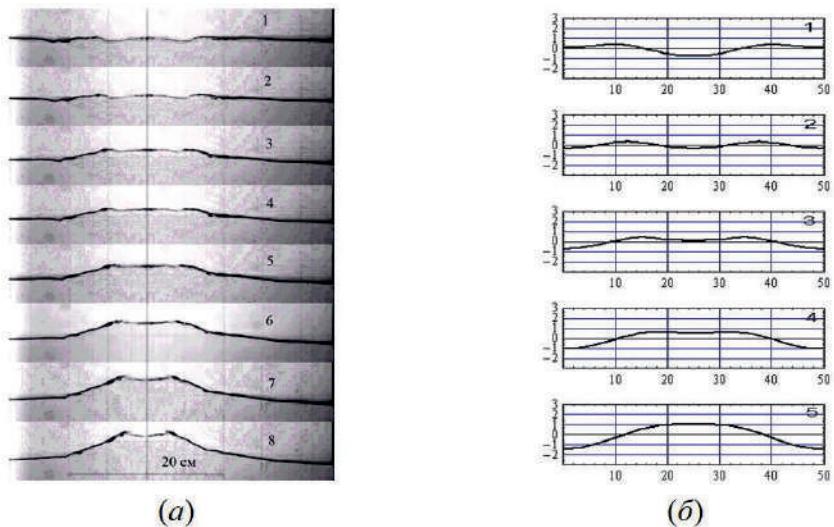


Рис. 2.33. Процесс зарождения каверны: а - эксперимент $p=0.942$, $q=0.180$ для 1-8 - $t=0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ и 35 мс. б - последовательность волновых профилей 1-5 - $t=0, 5, 10, 15$ и 20 мс, рассчитанных в рамках модели [9, 14].

Показатель степени $2/3$ отражает общие закономерности, присущие задачам с коническим углублением на свободной поверхности жидкости [32-35], в которых анализировалась автомодельность коллапса каверны.

Автомодельность задач подобного рода отмечена в [36] и соответствует балансу между поверхностными силами и силами инерции. В случае коллапсирующей каверны на формирующемся гребне волны эффектами вязкости можно пренебречь. Отметим, что показатель 2/3 можно получить из простых соображений размерности, если предположить зависимость пространственного масштаба l^* каверны – глубины или длины – от плотности жидкости ρ , поверхностного натяжения σ и времени t . Используя соотношение $l^* \sim \rho^\alpha \sigma^\beta t^\gamma$, и приравнивая размерности в правой и левой частях, получим $\alpha=1/3$, $\beta=-1/3$ и $\gamma=2/3$. Для выяснения происхождения каверны рассмотрим последовательность кадров, описывающих формирование гребня волны, начиная с момента прохождения свободной поверхностью горизонтального уровня. На рис. 2.33 а показана начальная стадия формирования каверны. Отметим наличие двух небольших возмущений, бегущих навстречу друг другу и образующих каверну. Соответствующие экспериментальным условиям волновые профили (рис. 2.33 б) рассчитаны на основе нелинейной модели волн Фарадея [9,14]. Существенное проявление высших гармоник связано с формированием пары волновых возмущений при прохождении свободной поверхности жидкости невозмущенного горизонтального уровня. Последующее их взаимодействие или «конструктивная интерференция» указанных возмущений, перемещающихся навстречу друг другу от боковых стенок сосуда к центру сосуда, обуславливает образование каверны на формирующемся гребне волны.

В экспериментах по изучению механизма разрушения стоячих поверхностных гравитационных волн исследовались или вторая волновая мода в достаточно узком прямоугольном сосуде [26, 27], или низшая осесимметричная волновая мода в круговом цилиндрическом сосуде [31, 32]. В обоих случаях волновое движение жидкости характеризуется наличием пучностями в центре сосуда и на боковых стенках. Основное внимание уделялось формированию струйного выброса при схлопывании каверны на стадии формирования гребня волны, когда центральная часть жидкости перемещается вверх. Указанная постановка эксперимента исключала эффекты боковых стенок сосуда, поскольку наблюдаемая в

центре сосуда при разрушении волны высокоскоростная струя может рассматриваться как свободная. С другой стороны, с практической точки зрения особое значение имеют низшие волновые моды как наиболее энергонесущие – основная асимметричная и первая волновые моды колебаний жидкости в круговом цилиндрическом и прямоугольном сосудах, соответственно.

Ниже обсуждаются результаты экспериментов [67] по возбуждению первой моды двумерной стоячей гравитационной волны на поверхности воды в прямоугольном сосуде, совершающем колебания в вертикальном направлении. Волновая картина характеризуется одним узлом в центре сосуда и двумя пучностями на боковых стенках. Если для регулярной волны предельной высоты характерна высокая степень нелинейности, то при разрушении первой моды на боковой стенке формируется тонкая плоская высокоскоростная струя большой высоты подъема.

При набегании волн на вертикальную стенку в случае глубокой воды часто образуются волновые структуры, близкие к стоячим или прогрессивно-стоячим волнам, и при расчете динамических нагрузок на морские гидротехнические сооружения вертикального профиля используется нелинейная теория стоячих волн [18, 37]. При относительно малой глубине жидкости ударные давления со стороны набегающих волн могут достигать очень больших значений, причем при подходе неразрушающейся волны к стенке наблюдается образование высокоскоростной вертикальной струи – см. обзор [38]. Аналитическое описание этого явления отсутствует, а среди имеющихся полуэмпирических и приближенных математических моделей выделим пионерскую работу [39]. Имеется большое количество экспериментальных работ (напр., [40, 41]), в которых в больших гидролотках (длина до 50 м) оценивались ударные давления и определялись условия формирования струйного выброса при набегании волн на вертикальную стенку. Следует отметить работу [42], в которой на основе экспериментальных данных проведен детальный анализ устойчивости сформировавшихся плоских струй. Авторам известны лишь две экспериментальные работы [43, 44], в которых исследовалась первая мода разрушающейся стоячей гравитационной волны в плоском прямоугольном сосуде, совершающем

колебания в горизонтальном направлении. Наряду с измерением давления на вертикальной стенке в [43] по материалам высокоскоростной видеосъемки проведен анализ условий формирования плоской струи, а в [44] исследован эффект гидрофобности стенки. Отметим, что при интерпретации данных эксперимента [43] по струеобразованию в стоячих волнах не совсем корректно использована модель [39] для волн, набегающих на вертикальную стенку.

Рассмотрим первую моду гравитационных волн Фарадея на свободной поверхности жидкости малой глубины в прямоугольном сосуде.

На рис. 2.34 представлены профили первой (*a*-*в*) и второй (*г*) мод регулярной гравитационной волны при различной глубине h жидкости. Высота H всех волн не велика, и если ввести крутизну волны как отношение высоты к длине волны, то эта величина не превосходит $H/\lambda < 0.1$. Волны на рис. 2.34 существенно нелинейные, что проявляется в асимметричности профиля (ордината гребня больше ординаты ложбины) и значительных колебаниях узлов. Особо отметим, что при прохождении поверхности жидкости через невозмущенный уровень ($t=T/4$) на всех видеокадрах четко прослеживается вторая по отношению к основной гармоника.

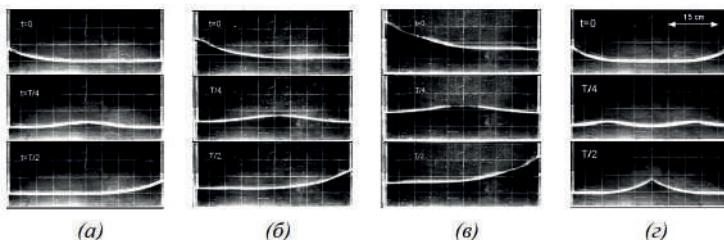


Рис. 2.34. Профили регулярных волн с шагом по времени четверть периода: (*а*-*в*) – $n=1$, ($h = 5, 7.5, 10$ см, $T = 1.356, 1.224, 1.110$ с, $H = 4.0, 5.8, 7.9$ см); (*г*) – $n = 2$, $T = 0.814$ с, $H = 4.4$ см. Временной интервал для трех профилей на (*а*-*в*) соответствует четверти периода волны.

Резонансная зависимость $H(\Omega)$ высоты волн Фарадея от частоты колебаний сосуда является весьма показательной характеристикой параметрического резонанса как способа возбуждения стационарных колебаний жидкости.

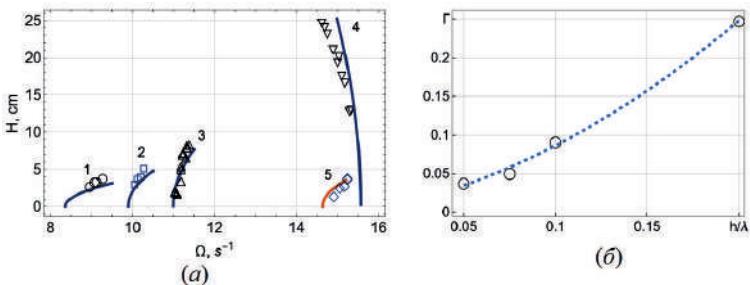
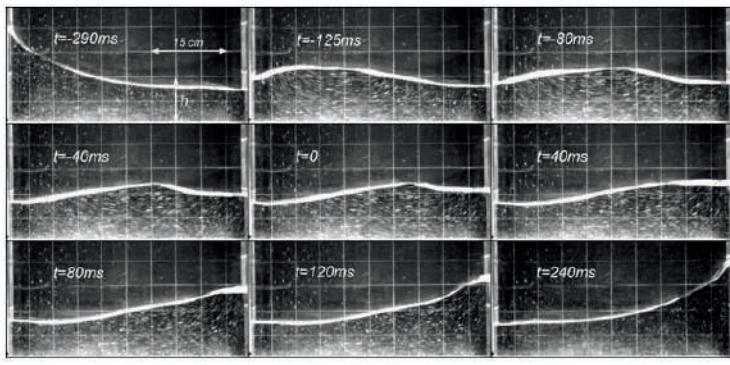


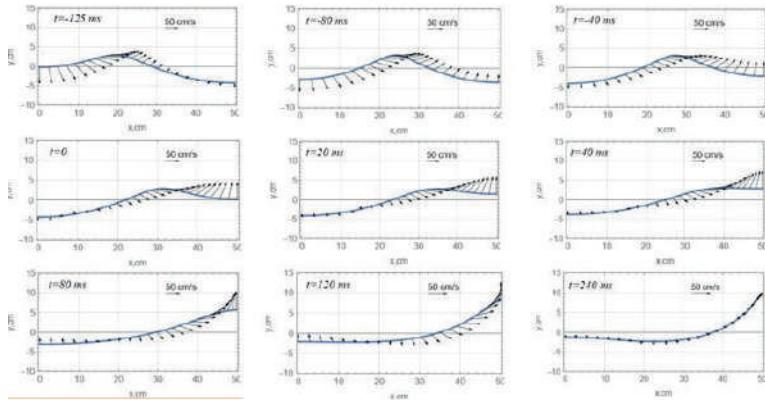
Рис. 2.35 (a) Резонансные зависимости $H(\Omega)$ для первой (1-4) и второй (5) мод регулярных волн на поверхности воды различной глубины h : 1–4 – $n = 1$, $h = 5, 7.5, 10, 20$ см; 5 – $n = 2$, $h = 5$ см; сплошные кривые – рассчитанная зависимость $H(\Omega)$ для гравитационных волн Фарадея [15, 17]. (б) Зависимость крутизны волны предельной высоты от безразмерной глубины жидкости.

На рис. 2.35 (a) приведены резонансные зависимости для первой и второй мод регулярных волн при варьировании глубины жидкости. В экспериментах для возбуждения волн использовался основной параметрический резонанс – при определенных частотах Ω вертикальных колебаний сосуда свободной поверхности жидкости возбуждаются стоячие волны частоты $\Omega/2$. Таким образом, кривые (1–5) позволяют для каждой моды оценить как частоту, так и значения стационарной высоты волны. Кроме того, для зависимостей (1–3, 5) при $h = 5, 7.5, 10$ см ($h/\lambda = 0.05, 0.075, 0.1$) высота волны H растет с увеличением частоты Ω – эффект жесткой восстанавливающей силы. При глубине $h = 20$ см ($h/\lambda = 0.2$) наклон резонансной зависимости (4) меняется, величина H растет с уменьшением Ω – эффект мягкой восстанавливающей силы. Отметим, что согласно [17] критическое значение безразмерной глубины жидкости, при которой происходит переход от мягкой к жесткой резонансной зависимости, оценивается как $h/\lambda \approx 0.14$.

Увеличение глубины жидкости приводит к росту предельной крутизны $\Gamma = H/\lambda$ регулярной гравитационной волны, как это показано на рис. 2.35 (б). Данные эксперимента для первой моды аппроксимируются квадратичной зависимостью $\Gamma = 3.906h^*^2 + 0.449h^* + 0.002$, $h^* = h/\lambda$.



(a)



(b)

Рис. 2.36. Регулярная волна на свободной поверхности воды ($h = 10$ см; $T = 1.058$ с; $\Omega = 11.87$ с $^{-1}$; $H = 10.8$ см; $\omega = 5.938$ с $^{-1}$; $s = 0.7$ см): (a) последовательность снимков свободной поверхности в течение полупериода волны (видеосъемка, частота кадров 1000 к/с); (b) профили и скорости частиц свободной поверхности, рассчитанные по (2.1).

Проведем анализ наблюдаемых в эксперименте профилей первой волновой моды при глубине воды $h = 10$ см, причем особое внимание уделим проявлению высшей гармоники. На рис. 2.36 (a) представлена последовательность профилей в течение полупериода регулярной волны, причем отсчет времени ($t = 0$) производится с момента прохождения свободной поверхностью воды невозмущенного уровня на правой стенке

сосуда. Это соответствует переходу от ложбины к гребню волны, и именно такой отсчет времени используется ниже при анализе разрушающихся волн и формирования струи на стенке. Каждый снимок на рис. 2.36 (а) получен в результате наложения 20 видеокадров, что при частоте кадров 1000 к/с соответствует временному интервалу 20 мс. Данный способ представления видеоматериала позволяет получить треки частиц-трассеров.

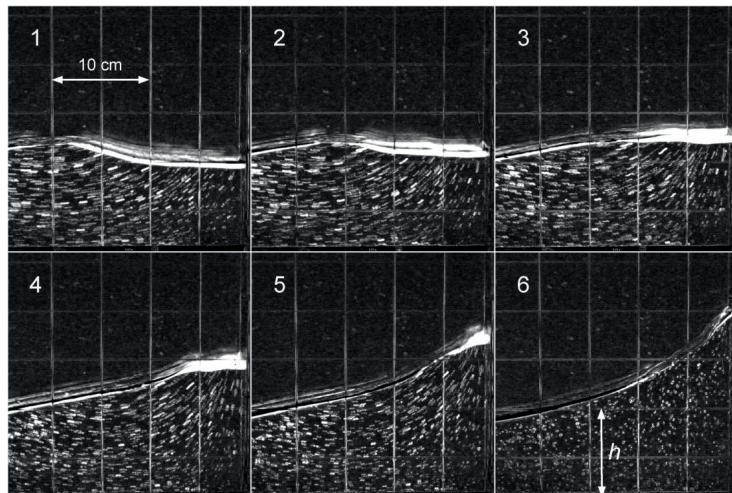


Рис. 2.37. Профили регулярной волны и траектории частиц-трассеров ($h = 10$ см $T = 1.058$ с; $H = 10.8$ см; $\omega = 5.938$ с⁻¹; $s = 0.7$ см): 1–6 – $t = 0, 40, 80, 120, 160, 240$ мс; правая половина сосуда.

При $t = -290, 240$ мс имеем профили максимального развития: на одной стенке – вершина гребня, на другой – подошва волны. Поскольку колебания жидкости происходят в замкнутом сосуде, то указанные профили определяют стоячую волну. На снимках, соответствующих $t = -125 - 0$ мс, прослеживается поверхностный горб, перемещающийся слева направо. Хотя само локальное возвышение перемещается, треки трассеров под вершиной горба не является замкнутыми – рис. 2.37. Таким образом, наблюдаемый поверхностный горб – результат проявления нелинейных эффектов, характерных для рассматриваемой волны. Данный вывод можно интерпретировать, воспользовавшись результатами нелинейных моделей [9, 18].

Приведенные на рис. 2.37 видеокадры описывают растущий гребень на интервале $t = 0 - 240$ мс от момента прохождения поверхностью воды невозмущенного уровня на правой стенке сосуда до вершины волны и полностью соответствуют рис. 2.36 (a). Треки частиц-трассеров на кадрах (2–5) показывают, что происходит своеобразная фокусировка жидкости в растущий гребень. Отметим практически нулевую длину треков на кадре (6), соответствующем максимальному развитию волны.

Для описания профиля стоячих гравитационных волн и расчета скорости частиц жидкости на свободной поверхности используем переменные Лагранжа (a, b, t); см. (2.1):

$$\begin{cases} x = a - H \frac{\operatorname{ch} k(h+b)}{2 \operatorname{sh} kh} \sin ka \cos \psi + H^2 k \frac{\sin 2ka}{32 \operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\psi) - \\ - \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2k(h+b)}{\operatorname{sh}^4 kh} \sin 2ka \cos 2\psi + \frac{1}{16} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2k(h+b)}{\operatorname{sh}^2 kh} \sin 2ka, \\ y = b + \frac{H}{2} \frac{\operatorname{sh} k(h+b)}{\operatorname{sh} kh} \cos ka \cos \psi + H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2k(h+b)}{32 \operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\psi) + \\ + \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2k(h+b)}{\operatorname{sh}^4 kh} \cos 2ka \cos 2\psi - \frac{1}{16} H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2k(h+b)}{\operatorname{sh}^2 kh} \cos 2ka, \end{cases}$$

где $\psi = \frac{\Omega t}{2} + \theta(t) \square \frac{\Omega t}{2}$, $\omega \square \frac{\Omega}{2}$, $\omega = \sqrt{g k \operatorname{th} kh}$, $n = 1$; $L = 50$ см; $k = n\pi / L = 0.031$ см⁻¹.

Для расчета поля скоростей продифференцируем приведенную систему по времени t (производная вдоль траектории частицы) и получим горизонтальную и вертикальную составляющие скорости.

Результаты расчетов волнового профиля и скорости частиц жидкости приведены на рис. 2.36 (б) при использовании параметров эксперимента (a). Из сравнения (a) и (б) следует скорее качественное, чем количественное соответствие между экспериментом и моделью. Наблюдаемый в опытах и полученный в расчетах поверхностный горб связан с нелинейностью стоячей волны.

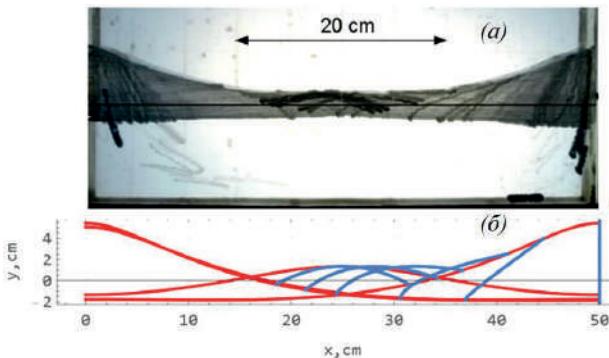


Рис. 2.38. Траектории частиц – трассеров на свободной поверхности воды в случае регулярной волны ($h = 10$ см; $T = 1.141$ с; $H = 7.2$ см): (а) эксперимент (наложение 137 кадров при съемке 120 к/с); (б) расчет по формулам (2.1).

На рис. 2.38 (а) представлены траектории частиц – трассеров, помещенных на поверхности воды в течение периода волны. Видно, что их траектории искривлены практически по всей длине сосуда, причем наибольшая кривизна характерна для центральной части (узел стоячей волны). Рассчитанные траектории частиц жидкости приведены на (б), причем сравнение с (а) показывает если не количественное, то качественное совпадение. Из рис. 2.38 следует, что узлы первой моды стоячей волны движутся не по горизонтали, а это и обуславливает наличие поверхности горба.

Процесс разрушения второй волновой моды на поверхности воды показан на рис. 2.39. Если механизм разрушения поверхностных волн Фарадея, состоящий в образовании свободного струйного всплеска в центре сосуда (а), рассмотрен в [26], то формирование струйных выбросов на боковых стенках (б) не исследовался. Для второй моды такие исследования затруднены из-за падения фрагментов жидкости от распавшейся струи на стадии (а) – см. первые два кадра (б). Ниже приведены результаты экспериментов по разрушению первой моды стоячих волн Фарадея.

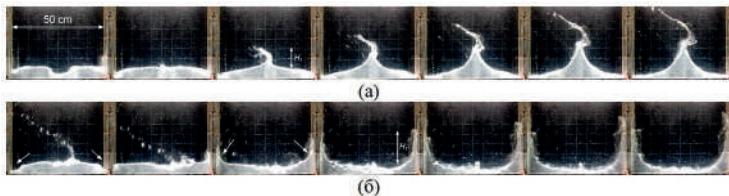


Рис. 2.39. Последовательность кадров (слева направо), отображающих процесс разрушения второй волновой моды: (а) – схлопывание каверны в центре сосуда и формирование струйного всплеска на стадии формирования гребня; (б) – две каверны и формирование двух плоских струй (стрелки) на боковых стенках сосуда на стадии формирования впадины волны; $n=2$; $h = 5$ см; $s = 1.9$ см; $\Omega = 15.70$ с⁻¹; шаг по времени 0.04 с; видеосъемка 120 к/с.

Регулярная первая мода на поверхности воды глубиной $h = 10$ см наблюдалась при частоте колебаний сосуда $\Omega = 11.87$ с⁻¹ – рис. 2.35 (а). Если, двигаясь вдоль резонансной кривой, увеличить частоту колебаний сосуда до значения $\Omega = 12.24$ с⁻¹, то наблюдается разрушающаяся на боковых стенках волна.

На рис. 2.40 представлена последовательность снимков свободной поверхности в течение полупериода волны (частота кадров 1000 к/с). Каждый снимок получен путем наложения 50 видеокадров, но на снимке показан только каждый десятый волновой профиль. Таким образом, например, при $t = (-200, -150)$ мс на снимке видны шесть волновых профилей, а треки формируются 6 точками.

На рис. 2.40 представлена последовательность снимков свободной поверхности в течение полупериода волны (частота кадров 1000 к/с). Каждый снимок получен путем наложения 50 видеокадров, но на снимке показан только каждый десятый волновой профиль. Таким образом, например, при $t = (-200, -150)$ мс на снимке видны шесть волновых профилей, а треки формируются 6 точками.

Из анализа представленного на рис. 2.40 материала следует, что перемещающийся к правой стенке поверхностный горб имеет более крутой передний фронт. На снимке $t = (-70, -20)$ мс при подходе гребня к стенке между его передним фронтом и ложбиной просматривается каверна по

форме близкая к сектору круга с прямым центральным углом радиусом около 10 см. В отличие от второй моды на рис. 2.39 (a) эта каверна не схлопывается, а сливается с уменьшающейся ложбиной и растущим гребнем: $t = 0-50$ и $50-100$ мс. На этих же снимках траектории частиц-трассеров подтверждают фокусировку течения на боковую стенку сосуда с последующим образованием струи при $t = 100-150$ мс.

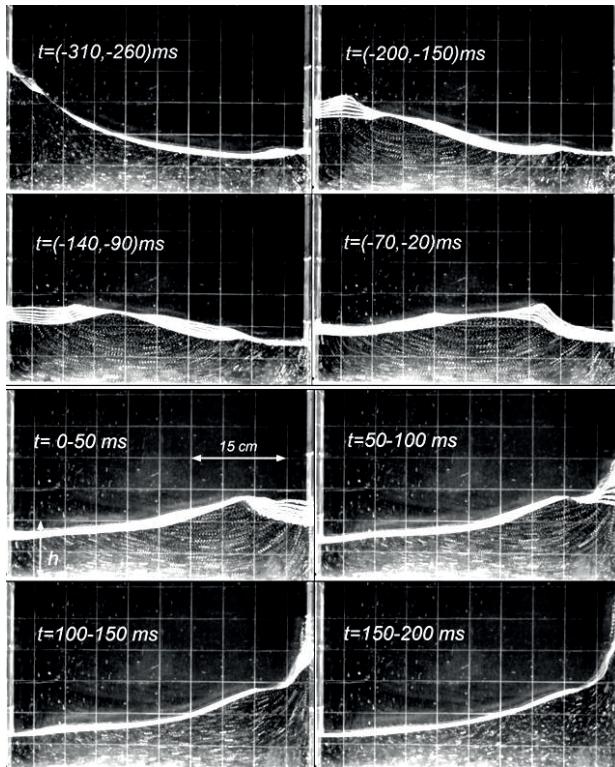


Рис. 2.40. Разрушающаяся первая волновая мода на свободной поверхности воды ($h = 10$ см, $T = 1.026$ с; $\Omega = 12.24$ с⁻¹; $s = 0.7$ см).

В более крупном масштабе процесс формирования струйного течения на стенке показан на рис. 2.41. Каждый снимок получен при наложении 20 последовательных видеокадров, что соответствует 20 мс при частоте кадров 1000 к/с. По представленным фотографиям можно проследить

фокусировку течения (1, 2), зарождение струи (3) струйное течение вдоль вертикальной стенки (4, 5). На снимке (6) имеем струю максимального подъема, поскольку частицы-трассеры неподвижны.

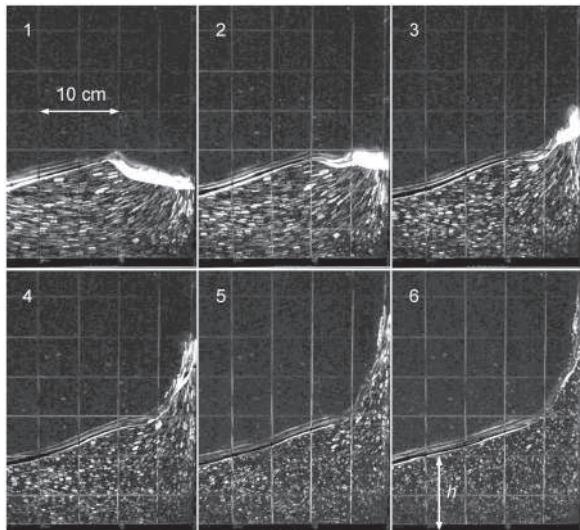


Рис. 2.41. Детализация процесса формирования плоской струи на боковой стенке: 1–6 – $t = 0, 40, 80, 120, 160, 200$ мс; наложение 20 видеокадров (20 мс). Экспериментальные параметры такие же, как в подписи к рис. 2.40.

На рис. 2.42 показан процесс формирования плоской струи на боковой стенке при видеосъемке под углом. Приведенные снимки свидетельствуют о двумерном волновом движении жидкости при ширине сосуда $W = 4$ см. Если на кадре (3) прослеживаются признаки зарождения струи, то на (4–6) это сформировавшаяся движущаяся вертикально вверх плоская струя. Отметим устойчивость края или ребра струи на всех снимках; кадр (6) соответствует максимальному подъему струйного всплеска.

На рис. 2.42 показан процесс формирования плоской струи на боковой стенке при видеосъемке под углом. Приведенные снимки свидетельствуют о двумерном волновом движении жидкости при ширине сосуда $W = 4$ см. Если на кадре (3) прослеживаются признаки зарождения струи, то на (4–6) это сформировавшаяся движущаяся вертикально вверх плоская струя.

Отметим устойчивость края или ребра струи на всех снимках; кадр (6) соответствует максимальному подъему струйного всплеска.

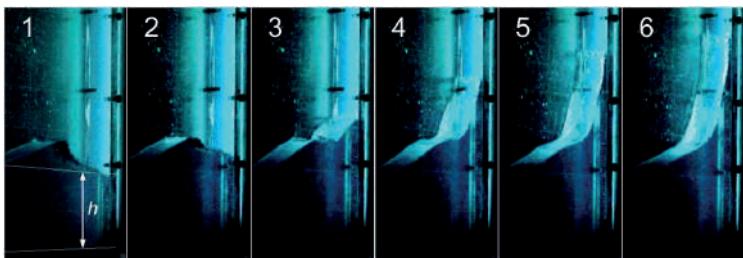


Рис. 2.42. Разрушение первой моды на боковой стенке при видеосъемке под углом: 1–6 – $t = 0, 40, 80, 120, 160, 200$ мс. Экспериментальные параметры такие же, как в подписи к рис. 2.40.

Проведем сравнительный анализ временных зависимостей высоты $H_1(t)$ подъема плоской струи в случае разрушающейся волны и высоты растущего гребня регулярной волны; величина H_1 отсчитывается от горизонтального невозмущенного уровня воды.

На рис. 2.43 (а) представлены зависимости $H_1(t)$ для регулярной (1) и разрушающейся (2) первой волновой моды на свободной поверхности воды глубины $h = 10$ см. см. рисунки 2.36 и 2.40. Если в случае регулярной волны максимальное значение $H_1 \sim 10$ см, для струнного всплеска $H_1 \sim 18$ см. Аппроксимирующие данные (1) и (2) функции имеют вид $H_1 = 7.4 \cos(5.9 t) - 8.5 \cos(10.1 t) + 1.1$ и $H_1 = 26.7 \cos(5.9 t) - 19.7 \cos(11.7 t) - 5.8$, соответственно. На рис. 2.42 (а) они показаны пунктирными кривыми. Зная аппроксимирующие функции, можно получить оценки максимальной скорости, которая для регулярных волн (1) порядка 40 см/с, а для разрушающихся (2) – 80 см/с. Используя формулы (2.1) можно описать кинематику растущего гребня – кривая (3).

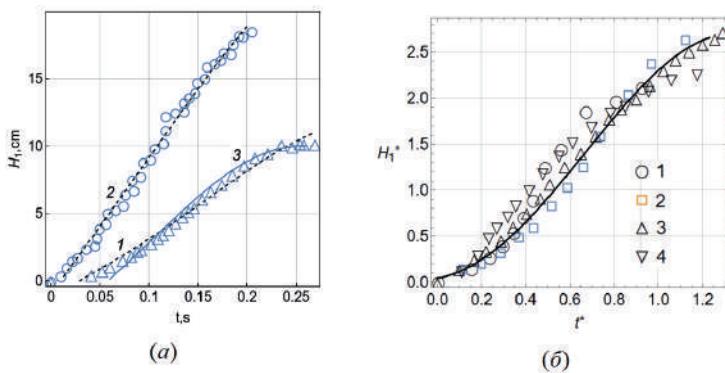


Рис. 2.43. (а) Временная зависимость высоты струйного всплеска на боковой стенке для первой волновой моды: 1, 2 – $T = 1.058, 1.026$ с (период волны); 3 – расчет по (2.1); $h = 10$ см; $s = 0.7$ см; $\omega = 5.938$ с⁻¹ (по результатам видеосъемки со скоростью 1000 к/с). (б) Временная зависимость высоты струйного всплеска в безразмерной форме $H_1^*(t^*)$: 1–4 – $(h, s, \Omega/2, H_{\lim}) = (5, 1.9, 4.88, 4), (7.5, 1.9, 5.51, 5.5), (10, 1.9, 5.72, 7), (10, 0.7, 6.12, 7)$.

Если ввести безразмерное время $t^* = \Omega t / 2$ и безразмерную высоту подъема плоской струи $H_1^* = H_1 / H_{\lim}$ (H_{\lim} – предельная высота регулярной волны, см. рис. 2.35 (а)), то данные по подъему плоской струи в случае разрушающейся волны на свободной поверхности воды различной глубины h и различных частот Ω колебаний сосуда можно сгруппировать и описать безразмерной аппроксимирующей функцией. Отметим, что высота подъема плоской струи в 2.5 раза превышает предельную высоту регулярной волны. На рис. 2.43 (б) приведены данные эксперимента в форме $H_1^*(t^*)$ и аппроксимирующая их функция $H_1^* = 0.43 \sin(t^*) + 1.92 \cos(t^*) - 1.96 \cos(2t^*) + 0.08$.

Волны Фарадея при гармоническом резонансе

Гармонический резонанс Фарадея изучен недостаточно полно по сравнению с субгармоническим (основным), при котором частота возбуждаемых волн равна половине частоты колебаний сосуда

Ниже приводятся условия гармонической неустойчивости маловязкой жидкости в сосуде конечных горизонтальных размеров [45] и результаты экспериментальной проверки этих условий [46, 47]. В [45] поле скорости жидкости разбивалось на потенциальную и вихревую компоненты и использовались погранслойная методика и метод усреднения Крылова-Боголюбова.

Согласно [45] частотный диапазон вертикальных колебаний прямоугольного сосуда, в котором возможно нарастание амплитуды поверхностных волн в жидкости вблизи гармонического резонанса ($\omega \sim \Omega$) при данной амплитуде s колебаний сосуда оценивается как

$$R_- < \frac{\Omega}{\omega} < R_+, \quad (2.15)$$

$$\text{где } R_{\pm} = 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} - \frac{1}{12} \left(\frac{s\Omega^2}{g} \right)^2 \pm \left[\frac{1}{64} \left(\frac{s\Omega^2}{g} \right)^4 - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\Delta\omega = -2^{-3/2} \nu^{1/2} g^{-1} \omega^{5/2} I_s / I_{\Sigma},$$

$$I_s = \frac{LW}{2(2 - \delta_{0m}) \operatorname{sh}^2(k_{nm}h)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi^2 \operatorname{sh}(2k_{nm}h)}{k_{nm}} \left[\frac{n^2}{L^2} \left(\frac{2 - \delta_{0m}}{W} + \frac{1}{L} \right) + \frac{m^2}{W^2} \left(\frac{2}{L} + \frac{1}{W} \right) \right] - \\ - 2h\pi^2 \left(\frac{n^2}{L^3} + \frac{m^2}{W^3} \right) + k_{nm}^2 \end{array} \right\},$$

$$I_{\Sigma} = 2^{-2+\delta_{0m}} LW k_{nm}^2,$$

$$k_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{W^2} \right)^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots$$

δ_{nm} – символ Кронекера; L, W – длина и ширина сосуда, соответственно; n, m – номера продольной и поперечной волновых мод.

Отметим, что из-за наличия диссипативных эффектов амплитуда колебаний сосуда должна некоторое пороговое значение s_{cr} , определяемое как

$$s_{cr} = 2^{3/4} \nu^{1/4} g^{1/2} \omega^{-5/4} (I_s / I_{\Sigma})^{1/2} \quad (2.16)$$

Здесь ν – вязкость жидкости.

С целью проверки теоретических результатов [45] проведена серия экспериментов по измерению ширины резонансных зон гармонического

возбуждения второй волновой моды ($n = 2$) в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде ($L = 50$ см, $W = 4$ см), заполненном водой ($h = 25$ см, $v = 0.01$ см²/с). Для второй волновой моды диаграмма устойчивости приведена на рис. 2.44. Сплошными линиями показаны границы диапазона параметрического возбуждения, рассчитанные по (2.15). Сопоставляя экспериментальные и теоретические данные, можно отметить довольно хорошее их совпадение.

Из рис. 2.44 следует наличие пороговой амплитуды колебаний сосуда, которая равна $s_{cr} = 1.69$ см, ниже которой для любых Ω свободная поверхность жидкости остается невозмущенной. Согласно (2.16) соответствующее рассчитанное значение пороговой амплитуды равно $s_{cr} = 1.79$ см. Отметим, что для тех же значений параметров L , W , h и n пороговая амплитуда в случае основного резонанса ($\omega \sim \Omega/2$) равна $s_{cr} = 0.07$ см (см. рис. 2.7), т.е. почти в 25 раз меньше, чем при гармоническом резонансе.

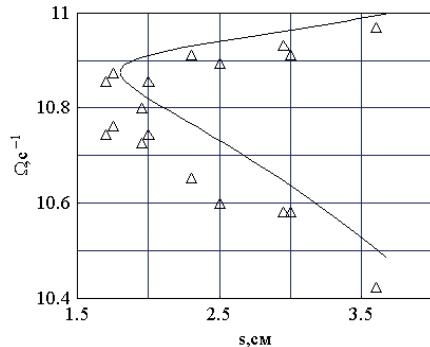


Рис. 2.44. Диаграммы устойчивости, определяющие возбуждение второй волновой моды при гармоническом резонансе: $n = 2$, $h = 25$ см.

Высота H возбуждаемой волновой моды зависит от частоты Ω – см. рис. 2.45.

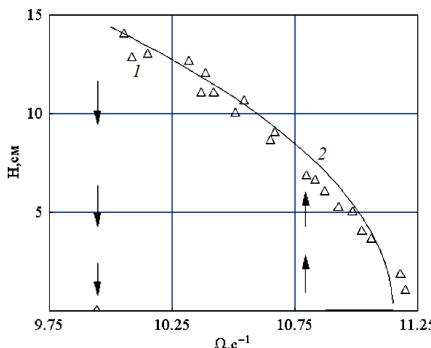


Рис. 2.45. Резонансная зависимость для $n = 2$, $h = 25$ см, $s = 2,5$ см: 1 – эксперимент, 2 – расчет по формулам (2.17).

Экспериментально резонансная зависимость снималась по следующей методике. Сначала устанавливалась частота колебаний сосуда $\Omega = 11.10 \text{ с}^{-1}$ ($\Omega \sim \omega$), и после достижения стационарного режима колебаний жидкости частота Ω плавно увеличивалась до величины $\Omega = 11.20 \text{ с}^{-1}$ ($\Omega > \omega$), при которой волновые движения практически затухали. Эта величина принималась за верхнюю границу резонансной зоны. Затем производилось пошаговое уменьшение частоты Ω , и для каждого ее значения определялась высота H . При уменьшении частоты Ω высота волны возрастила. Это наблюдалось до значения $\Omega_{min} = 9.94 \text{ с}^{-1}$, при котором происходил срыв колебаний (направленная вниз стрелка на рис. 2.44). При дальнейшем уменьшении Ω волны на свободной поверхности отсутствовали. Если после срыва колебаний медленно увеличивать частоту сосуда, то волны возбуждаются лишь при $\Omega = 10.80 \text{ с}^{-1}$. Наблюдался скачкообразный рост амплитуды (жесткое возбуждение, на рис. 2.45 направленная вверх стрелка). Указанное значение Ω было принято за нижнюю границу резонансной зоны.

Резонансная зона показана на рис. 2.45 отрезком на оси абсцисс Ω . Для сравнения с данными эксперимента на рисунке приведена резонансная кривая, рассчитанная по формуле [45]

$$k^2 \frac{H^2}{32} = 1 - \frac{\Omega}{\omega} + \frac{s\Omega^2}{24g} \quad (2.17)$$

Сопоставляя экспериментальные и теоретические данные, можно отметить довольно хорошее их совпадение.

2.2.2. Внутренние волны

В отличие от поверхностных волн Фарадея параметрический резонанс в двухслойной жидкости исследован менее полно как в теоретическом, так и в экспериментальном отношении. Границы резонансных зон параметрически возбуждаемых внутренних волн были найдены в [10], а выражения, описывающие амплитуды и профили возбуждаемых волн Фарадея, получены в [11]. Экспериментально явление параметрического резонанса на границе двухслойной жидкости было зафиксировано в [48], но оно рассматривалось как «паразитное», поскольку оценивались условия стабилизации неустойчивости Рэлея-Тейлора. В экспериментах [49] исследовалась параметрическая неустойчивость в непрерывно стратифицированной жидкости.

Таким образом, параметрический резонанс в двухслойной жидкости относится к классу малоизученных и весьма сложных явлений. По этой причине представлялись целесообразными эксперименты по возбуждению волн Фарадея на границе раздела двухслойной жидкости и сравнение данных опыта с результатами теории.

Ниже обсуждаются результаты лабораторных экспериментов [50–53] по параметрическому возбуждению внутренних волн на границе раздела двухслойной жидкости при вертикальных колебаниях прямоугольного сосуда.

Постановка эксперимента

Параметрическое возбуждение стоячих волн осуществлялось при вертикальных колебаниях прямоугольного сосуда ($L=50$ см, $W=4$ см, $H=40$ см) с двухслойной жидкостью с амплитудой s и частотой Ω . Исследовался основной параметрический резонанс, при котором частота волн на границе раздела равна $\Omega/2$. В качестве рабочих жидкостей использовались смешивающиеся и несмешивающиеся жидкости, основные характеристики которых приведены ниже.

Двухслойная жидкость	Плотность ρ_1 (г/см ³)	Вязкость ν_1 (г/см ³)	Плотность ρ_2 (г/см ³)	Вязкость ν_2 (г/см ³)	Поверхн. натяжение σ (дин/см)
Керосин – вода	0.79	1.6	1.00	1.0	24
Керосин – водный раствор сахара	0.79	1.6	1.22	13.43	28
Керосин – водный раствор глицерина	0.79	1.6	1.09	2.76	21
Керосин – водный раствор тиосульфита натрия	0.79	1.6	1.24	1.3	26
Вода – водный раствор NaCl	1.00	1.00	1.19	1.2	

На рис. 2.46 представлены фотографии внутренних волн Фарадея (вторая мода) на границе раздела керосин–вода.

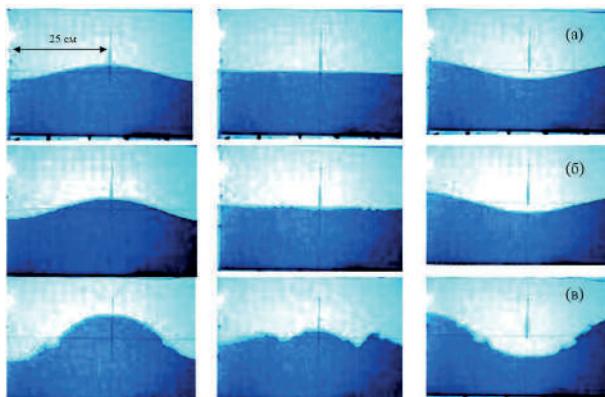


Рис. 2.46. Вторая волновая мода на границе раздела керосин–вода, наблюдаемые в эксперименте при основном параметрическом резонансе: (a–e) – $\Omega = 7.81, 7.63, 7.22$ с⁻¹; $h_{1,2}=15$ см, $\rho_1=0.792$ г/см³, $\rho_2=1.000$ г/см³, амплитуда колебаний сосуда $s = 1.9$ см.

Диаграммы устойчивости

Диаграммы устойчивости, характеризующие резонансные зоны в зависимости от амплитуды колебаний сосуда s , для внутренних волн

номера $n=2-5$ и $8-12$ на границе раздела керосин-вода приведены на рис. 2.47. Видно, что с ростом амплитуды колебаний сосуда ширина резонансной зоны увеличивается, причем при фиксированном значении s зона шире для высоких волновых мод. Оказывается, что если резонансные зоны второй и третьей мод разнесены по частоте, то для высоких мод ($n=4,5,8-12$) и значительных s возможно взаимное наложение частотных диапазонов параметрического возбуждения. Из рисунков также следует наличие пороговых значений амплитуды колебаний сосуда s^* , ниже которых для любых Ω граница раздела керосин-вода остается невозмущенной, причем с увеличением номера n значение s^* уменьшается.

Вследствие перекрытия резонансных зон возможно взаимная перестройка соседних мод колебаний. Так при исследовании области неустойчивости 12-й моды ($n=12$) при амплитуде $s=0.48$ см и частоте $\Omega=18.315$ с⁻¹ был зафиксирован следующий режим колебаний границы раздела. После установления стационарных колебаний в течение 1.5 мин наблюдалась 12 мода, которая затем перешла в 11-ю моду ($n=11$). Время перехода – 1 мин. Через 1.5 мин происходил обратный переход, ($n=11$) \rightarrow ($n=12$), и далее весь процесс периодически повторяется.

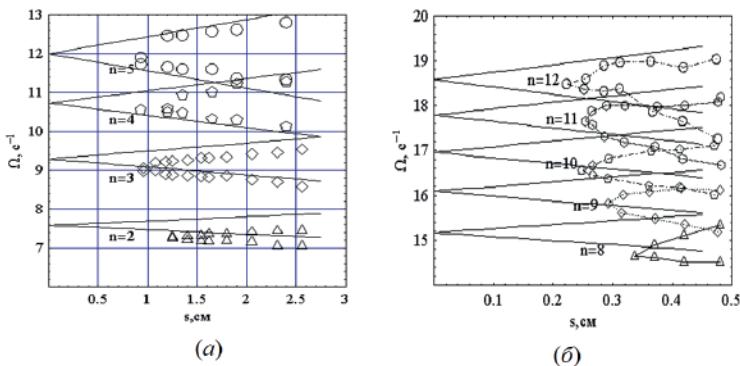


Рис. 2.47. Диаграмма устойчивости для двухслойной жидкости керосин-вода ($h_{1,2}=15$ см, $\rho_1=0.792$ г/см³, $\rho_2=1.000$ г/см³): $a - n=2-5$; $b - n=8-12$.

Отметим, что для внутренних волн резонансные зоны значительно уже, а пороговая амплитуда колебаний сосуда больше, чем для поверхностных волн того же номера моды (см. рис. 2.6).

Сплошные линии на рис. 2.47 соответствуют результатам расчета резонансных зон по формуле (2.6):

$$2\left(\omega - \frac{s\omega^3}{2g}\right) < \Omega < 2\left(\omega + \frac{s\omega^3}{2g}\right), \quad \omega^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1},$$

где $k=\pi n/L$, g – ускорение силы тяжести, L – длина сосуда.

Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов следует, что рассчитанные границы резонансных зон смещены в область высоких частот. При $s=0$ частота колебаний сосуда равна удвоенной собственной частоте n -й моды внутренних волн. Таким образом, собственную частоту ω можно определить по данным эксперимента. Для сравнения в табл. 3 приведены экспериментальные и рассчитанные значения ω .

Таблица 3

Сравнение экспериментальных и рассчитанных значений собственной частоты колебаний границы раздела керосин-вода; $n=2-5$: $h_{1,2}=15$ см; $n=8-12$: $h_{1,2}=10$ см; $L=50$ см, $W=4$ см

Номер моды <i>n</i>	ω_{exp} , 1/с (эксперимент)	ω_{th} , 1/с (теория)	$\Delta\omega = \omega_{th} - \omega_{exp}$, 1/с	$\delta^* = \Delta\omega / \omega_{th}$ (%)
2	3.653	3.786	0.133	3.5
3	4.508	4.634	0.126	2.7
4	5.294	5.350	0.056	1.1
5	5.922	5.985	0.063	1.3
8	7.461	7.568	0.107	1.4
9	7.917	8.027	0.110	1.4
10	8.347	8.461	0.114	1.4
11	8.834	8.874	0.040	0.4
12	9.221	9.268	0.047	0.5

Из табл. 3 следует, что с увеличением номера волновой моды отличие между измеренными и рассчитанными значениями собственных частот уменьшается. Максимальное относительное отклонение δ^* не превышает 3.5%, что на 1-2% превышает ошибку измерения частоты колебаний сосуда Ω .

В работе [54] отмечено, что наблюдаемое в опытах по возбуждению внутренних волн уменьшение собственной частоты вызвано влиянием диссипативных факторов. С целью проверки данного положения были проведены эксперименты, в которых использовался сосуд других размеров и двухслойная жидкость, для которой вязкость верхней жидкости ν_1 существенно отличалась от вязкости нижней жидкости ν_2 . Отметим, что для системы керосин-вода предполагалось $\nu_1 \approx \nu_2$.

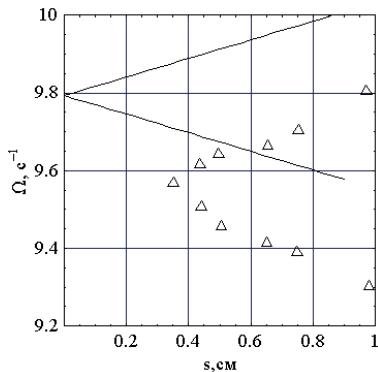


Рис. 2.48. Диаграмма устойчивости: керосин-вода, $h_{1,2}=10$ см, $\rho_1=0.792$ г/см³, $\rho_2=1.000$ г/см³, $n=4$; сосуд 60×13.4 см.

Диаграмма устойчивости четвертой моды для сосуда размерами $L=60$ см, $W=13.4$ см при глубине слоев $h_{1,2}=10$ см (керосин-вода) показала (рис. 2.48), что

$$\omega_{exp} = 4.797 \text{ 1/c}, \quad \omega_{th} = 4.879 \text{ 1/c}, \quad \Delta\omega = 0.082 \text{ 1/c}, \quad \delta=2\%.$$

Таким образом, при значениях коэффициента формы (параметра, характеризующего геометрию сосуда) $W/L=0.08$ и 0.20 найденная экспериментально для различных мод собственная частота меньше соответствующей теоретической величины.

Исследование параметрического возбуждения второй моды внутренних волн на границе раздела керосина и водного раствора сахара ($\rho_2=1.235$ г/см³, $\nu_2=0.134$ см²/с) показало, что

$$\omega_{exp} = 4.869 \text{ 1/c}, \quad \omega_{th} = 5.192 \text{ 1/c}, \quad \Delta\omega = 0.223 \text{ 1/c}, \quad \delta^*=4.5\%.$$

Соотношение $\omega^2 = gk(\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1)$, используемое для расчета собственной частоты внутренних волн, верно для бесконечно глубоких идеальных жидкостей. С учетом конечности глубины [10, 54] величина ω уменьшается и становится ближе к экспериментальному значению. Можно ввести соответствующую поправку, которая по оценкам оказывается порядка $0.25\Delta\omega$.

В заключение отметим, что в работах [54, 55], посвященных исследованию стоячих волн на границе раздела двухслойной жидкости, зафиксировано отличие экспериментального значения собственной частоты ω_{exp} от теоретической ω_{th} на 6%, при этом $\omega_{th} > \omega_{exp}$.

Параметрическое возбуждение внутренних волн, как и поверхностных, при предположении, что на границе раздела образуется стоячая синусоидальная волна с неизвестной зависимостью амплитуды колебаний $H(t)$, описывается уравнением Матье

$$\frac{d^2H}{d\tau^2} + [p - 2q \cos 2\tau]H = 0,$$

где $\tau = \Omega t / 2$, $p = (2\omega / \Omega)^2$, $q = 2sk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$.

Из анализа функций Матье следует, что на плоскости (p, q) существует ряд областей, в которых решение приведенного выше уравнения неограниченно возрастает со временем. Для устойчивых решений характерна периодичность по τ и экспоненциальное возрастание амплитуды. Каждая неустойчивая область определяет колебания с частотой

$$\omega = \Omega m / 2, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Для исследованных мод ($n = 4, 5, 8-12$) область неустойчивости $\frac{1}{2}$ -субгармоники внутренних волн на (p, q) -плоскости показана на рис. 2.49. В качестве ω использовалось экспериментально найденное значение. Полученная диаграмма устойчивости обладает следующим универсальным свойством: для того, чтобы определить устойчива или неустойчива граница раздела жидкости при заданных значениях амплитуды s и частоты Ω колебаний сосуда, для каждой моды номера n необходимо вычислить

величины (p, q) и нанести на (p, q) -плоскость; если одна из точек попадает в область неустойчивости, то для соответствующей моды граница раздела неустойчива, т.е. амплитуда данной моды увеличивается до установления стационарного режима колебаний.

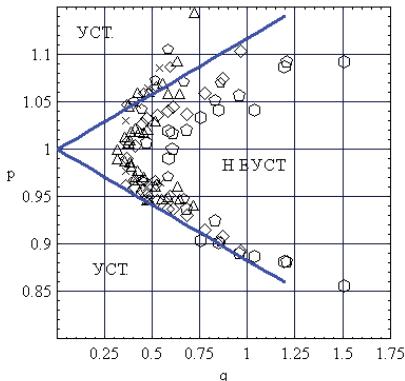


Рис. 2.49. Область неустойчивости границы раздела керосин-вода: $n=2-5$ ($h_{1,2}=15\text{см}$) и $n=8-12$ ($h_{1,2}=10\text{ см}$)

Следует отметить наличие порогового значения параметра q , равного $q^* \sim 0.35$.

Резонансные зависимости

Зависимости высоты H волны Фарадея на границы раздела двухслойной жидкости ($n=2, 3$; $s=1.9$ см; $h_{1,2}=15\text{см}$; керосин-вода) представлены на рис. 2.50. Резонансные зависимости получены при измерении по материалам видеосъемки высоты H волны, соответствующей данному значению частоты колебаний сосуда Ω .

Из рис. 2.50 следует, что если на границе раздела возбуждаются волны (Ω принадлежит резонансной зоне n -ой моды), то высота волны растет с уменьшением частоты колебаний сосуда до тех пор, пока не произойдет срыв колебаний (направленные вниз стрелки). Если теперь увеличивать Ω , то колебания в некоторой точке возбуждаются скачком (направленные вверх стрелки) – жесткое возбуждение. При дальнейшем увеличении Ω высота волны уменьшается. Отметим, что вследствие

наложения четвертой и пятой волновых мод трудно определить точку срыва пятой моды.

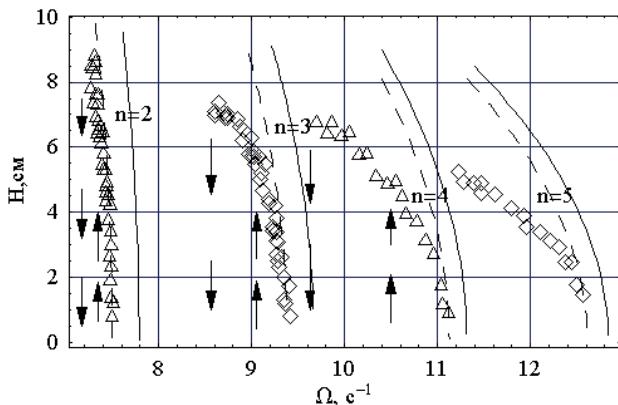


Рис. 2.50. Резонансные зависимости: керосин-вода, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=1.9$ см, $h_{1,2}=15$ см, сплошные и пунктирные кривые – теория.

Сравним вторые и третьи моды поверхностных (глубина жидкости $h=15$ см, амплитуда колебаний сосуда $s = 0.25$ см; рисунки 2.10 *a* и 2.23) и внутренних волн (рис. 2.50). Кроме отличия частотных диапазонов, в которых происходит возбуждение волн (для поверхностных волн $21.99 < \Omega < 28.27$ с^{-1}) следует отметить тот факт, что если высота поверхностных волн имеет максимальное значение $H_{\max} \sim 15$ см, то при $s = 1.9$ см для внутренних волн $H_{\max} \sim 8$ см.

Сплошные линии на рис. 2.50 соответствуют резонансным зависимостям, описываемым (2.7), причем значение собственной частоты ω находится по соотношению (2.6). Видно, что рассчитанные зависимости смещены в область высоких частот, причем смещение по частоте определяется величиной $\Delta\omega = \omega_{\text{th}} - \omega_{\text{exp}}$. Относительная ошибка $\delta = \Delta\omega / \omega_{\text{th}}$ не превышает 4.5%.

В качестве собственной частоты ω можно подставить в (2.7) значение ω_{exp} , найденное из эксперимента. На рис. 2.50 также представлены резонансные зависимости, построенные таким образом – пунктирные кривые.

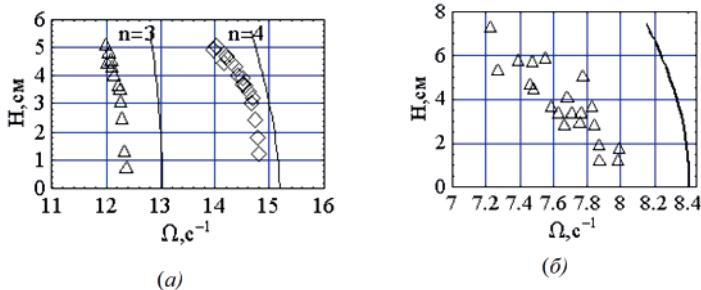


Рис. 2.51. Резонансные зависимости внутренних волн для двухслойной жидкости (а) керосин-раствор тиосульфита $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$, $\rho_1=0.792$ г/см³, $\rho_2=1.239$ г/см³, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=0.5$ см, $h_{1,2}=15$ см и (б) вода-раствор поваренной соли ($n=3$, $\rho_1=1$ г/см³, $\rho_2=1.195$ г/см³), $L=50$ см, $W=4$ см, $s=2$ см, $h_{1,2}=15$ см.

Зависимости высоты третьей и четвертой волновых мод ($n=3, 4$) от частоты колебаний сосуда Ω для несмешивающихся жидкостей керосин-раствор тиосульфита, $\rho_2=1.239$ г/см³, $h_{1,2}=15$ см – представлены на рис. 2.51 а, причем сплошные кривые соответствуют рассчитанным по (2.7) теоретическим зависимостям.

В случае смешивающихся жидкостей (вода-водный раствор поваренной соли, $\rho_1=1$ г/см³, $\rho_2=1.195$ г/см³, $\Delta\rho_2=0.195$ г/см³) сняты резонансные зависимости для третьей моды $n=3$ – рис. 2.51 б. Отметим, что при $H > 3$ см вследствие интенсивных волновых движений жидкости происходило размытие первоначально резкой границы раздела. На рис. 2.51 б приведена также рассчитанная резонансная зависимость.

Из рис. 2.50 следует, что кроме сдвига по частоте существует качественное отличие теоретических и экспериментальных резонансных зависимостей, а именно, в крутизне резонансных кривых, особенно существенное в зоне жесткого возбуждения. Для этих участков рассчитанные высоты волн в 1.6 раз больше измеренных. Отметим также, что это отличие наклона экспериментальных и теоретических зависимостей сохраняется и при замене в соотношении (2.7) частоты ω_{th} на ω_{exp} .

Точке расхождения экспериментальных и теоретических резонансных зависимостей соответствует частота Ω^* , при которой начинается процесс искажения профиля волны в приузловых областях короткими вторичными волнами и вихревыми образованиями –рис. 2.46 *б* и *в*. Поскольку вторичная неустойчивости границы раздела в теоретической модели [10, 11] не учитывалась, то выполненные по формуле (2.7) расчеты могут давать завышенное значение высоты волны H при $\Omega < \Omega^*$.

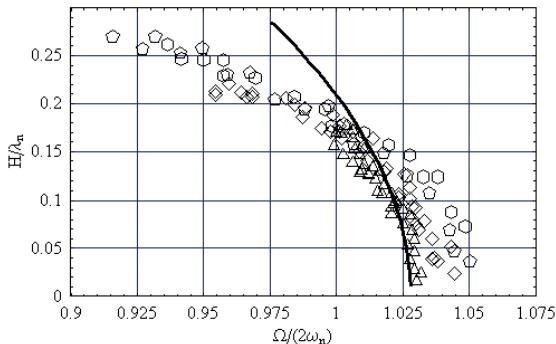


Рис. 2.52. Безразмерная резонансная зависимость для волновых мод $n=2-5$: керосин-вода, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=1.9$ см, $h_{1,2}=15$ см, сплошная кривая – рассчитанная зависимость для четвертой моды.

Используя переменные H/λ_n и $\Omega/2\omega_n$ (n – номер моды) можно построить обобщенную резонансную зависимость для волновых мод $n=2-5$ (керосин-воды, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=1.9$ см, $h_{1,2}=15$ см), представленную на рис. 2.52.

Эффекты вязкого затухания

При анализе диаграмм устойчивости внутренних волн Фарадей ($n = 2-5, 8-12$) отмечено наличие пороговых амплитуд колебаний s^* сосуда, ниже которых для всего диапазона частот Ω граница раздела жидкостей остается невозмущенной.

По аналогии с поверхностными волнами воспользуемся результатами приближенной теории пограничного слоя и оценим влияние вязкости на процесс параметрического возбуждения внутренних волн. Определим пороговую амплитуду следующим образом

$$s^* = \frac{bg}{2\omega^3} \quad (2.18)$$

где b - коэффициент затухания волн.

Используя результаты [24, 54], можно оценить коэффициент затухания с учетом потерь энергии стоячей внутренней волны на границе раздела жидкостей и на боковых стенках сосуда

$$b = \left[\frac{L+W}{LW} + \frac{k}{2} \right] \left[\frac{\omega v}{2} \right]^{1/2} \quad (2.19)$$

при условии, что $(\rho_2 - \rho_1) \ll \rho_1$, $v_1 \approx v_2$.

Из эксперимента по материалам видеосъемки процесса затухания внутренних волн на границе раздела керосин-вода ($h_{1,2}=15$ см, $s=1.9$ см, $v_{1,2} \sim 1$ с/с) были оценены значения коэффициента затухания b . В расчетах не учитывалась диссипация на дне сосуда, т.к. соответствующая величина на два порядка меньше диссипации на стенках сосуда и границе раздела жидкостей. Близость теоретических и экспериментальных значений b позволяет определить s^* (2.18)

$$\begin{array}{lll} n=2 & s^*_{\text{эксп}} = 1.2 \text{ см} & s^*_{\text{теор}} = 1.1 \text{ см} \\ n=3 & s^*_{\text{эксп}} = 0.9 \text{ см} & s^*_{\text{теор}} = 0.7 \text{ см} \end{array}$$

Воспользовавшись тем, что приближенные формулы для коэффициента затухания и пороговой амплитуды дают величины, близкие к экспериментальным данным, можно оценить соответствующие значения для широкого сосуда ($L=60$ см, $W=13.4$ см, $h_{1,2}=10$ см, керосин-вода). Для четвертой моды по формуле (2.19) имеем

$$b = (1.4 \cdot 10^{-2} + 1.6 \cdot 10^{-2}) = 3 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

Видно, что в этом случае диссипация на боковых стенках сосуда (первое слагаемое) одного порядка с диссипацией на границе раздела (второе слагаемое). Используя формулу (2.18), получим величину пороговой амплитуды

$$s^*_{\text{теор}} = 0.25 \text{ см},$$

Соответствующая экспериментальная величина (см. рис. 2.48) равна $s^*_{\text{эксп}} = 0.35$ см

Для исследования влияния вязкости на значение коэффициента затухания b и пороговой амплитуды s^* была проведена серия экспериментов по параметрическому возбуждению внутренних волн на

границе раздела керосин - водный раствор сахара: $h_{1,2}=15$ см, $\rho_2=1.235$ г/см³, $v_2=13.4$ сСт. Вязкость измерялась на вискозиметре ВПЖ-2, диаметр капилляра 1.77 мм. Из эксперимента следует, что пороговая амплитуда для второй моды

$$s^*=1.56 \text{ см},$$

а коэффициент затухания

$$b=0.184 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку значения кинематической вязкости верхней и нижней жидкостей отличалась, то коэффициент затухания рассчитывался по формуле [24]

$$b^* = \left[\frac{L+W}{LW} \frac{1}{\rho_2 + \rho_1} \left(\rho_1 \left(\frac{\omega v_1}{2} \right)^{1/2} + \rho_2 \left(\frac{\omega v_2}{2} \right)^{1/2} \right) \right],$$

согласно которой

$$b^* = 0.116 \text{ с}^{-1}$$

$$s^*=1.29 \text{ см},$$

Использование результатов теории пограничного слоя позволяет определить пороговую амплитуду и коэффициент затухания, т.е. те параметры, которые являются критическими для процесса параметрического возбуждения внутренних волн в двухслойной жидкости. Сравнение основных выводов теории с данными эксперимента дает хорошее совпадение.

С учетом диссипативных факторов система уравнений, описывающая вызванное колебаниями сосуда изменение во времени начального возмущения границы раздела, принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -bH + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 H \sin 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{s\Omega}{2g} \omega^2 \cos 2\theta - \frac{\omega}{32} \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} H^2 \kappa^2, \\ H_{t=0} = H_0, \theta_{t=0} = \theta_0. \end{cases} \quad (2.20)$$

где θ_0 и H_0 - "медленная" фаза и высота исходного волнового возмущения.

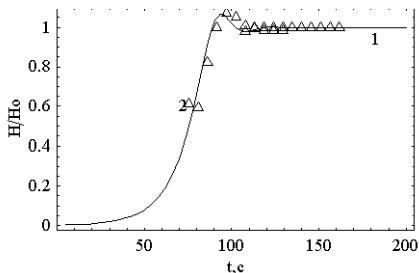


Рис. 2.53. Процесс выхода колебаний на стационарный режим - внутренние волны Фарадея (вода - керосин, $n=2$, $h_{1,2}=15$ см, $s=1,9$ см, $\Omega=9.299$ с $^{-1}$): 1 – расчет, 2 – эксперимент; $H_o=0.2$ см, $\theta_o=0$.

Для третьей моды (керосин-вода, $h_{1,2}=15$ см, $L=50$ см, $W=4$ см, $s=1.9$ см) система (2.20) интегрировалась численно, при этом $\omega^{эксп}=4.508$ с $^{-1}$, а в качестве коэффициента затухания взято экспериментальное значение $b=0.095$ с $^{-1}$. Начальное возмущение задавалось следующим образом $H_o=0.2$ см, $\theta_o=0$. Вычисления показали, что функция $H(t)$ выходит на стационарное значение сплошная кривая 1 на рис. 2.53. Стационарное значение $\theta=0.271$ рад. Для указанных выше экспериментальных параметров на рис. 2.53 приведены экспериментальные данные 2.

Для поверхностных и внутренних волн система, описывающая изменение со временем начального возмущения имеет один и тот же вид. Отличаются только коэффициенты в правой части уравнений. Качественный анализ такой системы дифференциальных уравнений показывает [9], что стационарному режиму на фазовой плоскости соответствует устойчивый фокус. Оказывается, что соотношение между коэффициентами уравнений определяет характер установления стационарного режима. Так для поверхностных волн фазовая траектория представляет собой спираль из близко расположенных витков. Для внутренних волн расстояние между витками увеличивается. Справедливость вышесказанного подтверждается данными эксперимента и расчета. Из рис. 2.21 следует, что для процесса выхода поверхностных волн на стационарный режим характерны периодические затухающие колебания около значения, соответствующего стационарной амплитуде.

Установление стационарных колебаний границы раздела двухслойной жидкости происходит монотонно, как показано на рис. 2.53.

Развитие сдвиговой неустойчивости в приузловых областях внутренней волны Фарадея. Срыв колебаний

Рассмотрим изменение профиля внутренних волн Фарадея при увеличении их крутизны.

Зависимость крутизны $\Gamma=H/\lambda$ возбуждаемых волн от безразмерной частоты $p=\Omega/(2\omega)$ колебаний сосуда приведена на рис. 2.54.

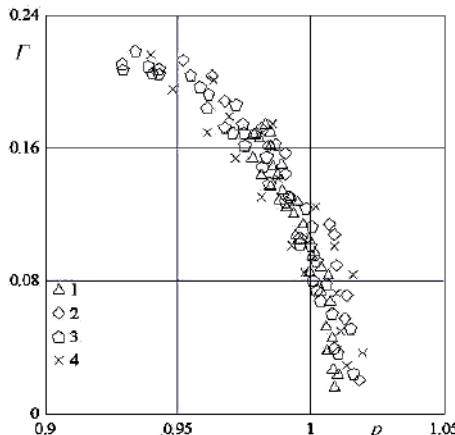


Рис. 2.54. Зависимость крутизны Γ от частоты p для двухслойных жидкостей и волновых мод n : 1 – керосин – вода, $n=2$; 2 – керосин – водный раствор сахара, $n=2$; 3 – керосин – вода, $n=3$; 4 – керосин – водный раствор NaCl, $n=3$.

Два положения границы раздела керосин – раствор сахара в моменты ее максимального отклонения и прохождения через положение равновесия представлены на рис. 2.55. При крутизне $\Gamma=0.072$ и частоте $p=1.015$ профиль волны практически синусоидальный (рис. 2.55 а). При $\Gamma=0.116$ и $p=1.009$ в приузловых областях наблюдается образование довольно регулярных групп коротких волн, рис. 2.55 б. Симметричный относительно узловой точки участок вторичного волнообразования имеет протяженность порядка четверти длины основной волны $\lambda/4 \sim 12$ см, причем на нем укладывается $N=8$ волновых возмущений. Их длина порядка $\Lambda \sim 1.3-1.5$ см,

а амплитуда 0.2–0.6 см. При $\Gamma=0.147$ и $p=0.992$ вторичные волны в приузловых областях становятся неустойчивыми, как видно из рис. 2.55 в. Наблюдаемая картина похожа на обрушение поверхностных волн. Отметим, что с ростом крутизны основной волны наблюдается увеличение длины вторичных волн Λ .

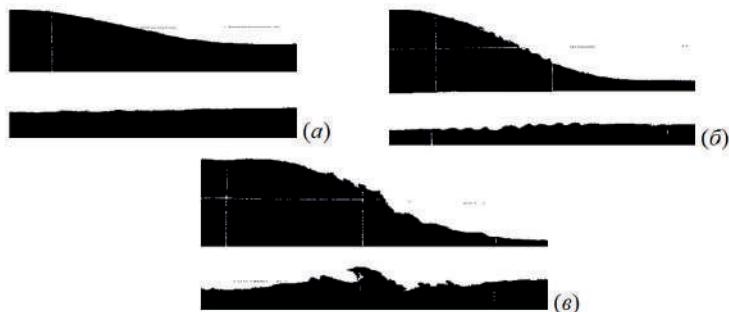


Рис. 2.55. Профили второй волновой моды в моменты максимального отклонения границы раздела керосин – водный раствор сахара и прохождения положения равновесия (показана половина длины волны $\lambda/2=25$ см): $a\text{--}b - \Gamma = 0.072, 0.116, 0.147$.

При дальнейшем увеличении Γ происходит переход от системы коротких неустойчивых волн к паре вихрей с периодически изменяющимся направлением вращения, рис. 2.56.

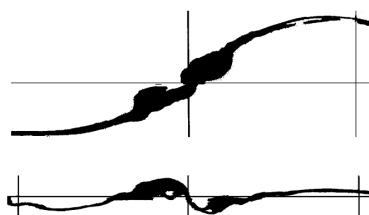


Рис. 2.56. Профили третьей волновой моды в моменты максимального отклонения границы раздела керосин – вода и прохождения положения равновесия (показана половина длины волны), $\Gamma=0.222$.

Описанное выше изменение волнового профиля справедливо для всех несмешивающихся жидкостей, используемых в экспериментах. Для жидкостей с близкими кинематическими вязкостями (например, керосин-

вода) не всегда удавалось четко выделить режим неустойчивых вторичных волнообразований; в этом случае наблюдался переход от гладкого волнового профиля к профилю с парой вихрей в приузловой зоне. Использование двухслойной жидкости, для которой вязкости существенно отличались (керосин - водный раствор сахара), позволило проследить начальную стадию вторичного волнообразования, хотя при этом и не наблюдалось интенсивного вихреобразования в приузловых областях.



Рис. 2.57. Развитие сдвиговой неустойчивости в приузловой зоне третьей волновой моды на границе раздела вода – водный раствор NaCl , $h_{1,2} = 15$ см, $s=2.0$ см: $a - \Gamma=0.150, p=0.981$; $b - \Gamma=0.172, p=0.961$.

В случае смешивающихся жидкостей (пресная вода - водный раствор NaCl или тиосульфата) вместо образования вторичных волн наблюдалось размытие границы раздела с последующим переходом к “трибообразной” форме профиля, рис. 2.57.

Из рисунков 2.55 и 2.56 следует, что образование системы коротких волн и их переход к паре вихрей с изменяющимся направлением вращения происходит в приузловых областях, для которых характерен максимальный относительный сдвиг локальных скоростей частиц верхней и нижней жидкостей.

Анализ экспериментальных данных показал, что для использованных в опытах двухслойных жидкостей переход от гладкого профиля к профилю с возмущениями (вторичные волнообразования или пара вихрей) в приузловой зоне стоячих волн Фарадея происходит при крутизне $\Gamma \sim 0.08 - 0.13$.

Для выявления структуры вторичных волнообразований использовалось фотографирование треков частиц нейтральной плавучести

(янтарь, максимальный размер частиц порядка 0,3 мм). На рис. 2.58 для второй волновой моды на границе керосин-вода приведены фотографии приузловой области при $\Gamma \sim 0.124$ и 0.165, причем время экспозиции в первом случае составляло четверть периода, а во втором период волны. Анализ фотографий показывает, что вторичные возмущения в приузловой области носят скорее вихревой, чем волновой характер.

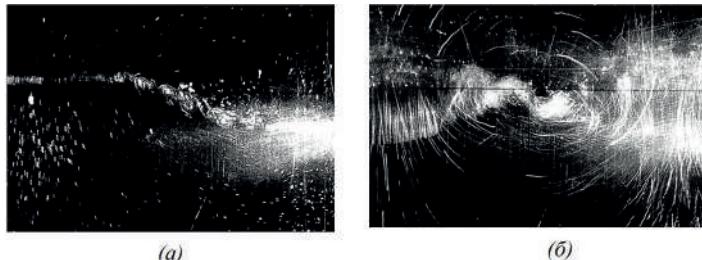


Рис. 2.58. Визуализация вихревых структур в приузловой зоне с помощью частиц янтаря; керосин – вода, $n = 2$: $a-b - \Gamma = 0.124, 0.165$.

Для измерений локального сдвига в узловых точках для второй и третьей волновых мод использовался лазерный доплеровский анемометр [51]. Соответствующие вертикальные профили амплитуды горизонтальной составляющей скорости двухслойной жидкости приведены на рис. 2.59.

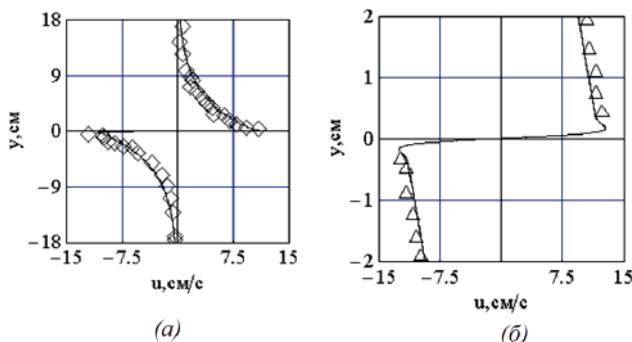


Рис. 2.59. Вертикальные профили горизонтальной составляющей скорости жидкости; керосин – вода, $n=3$, $\Gamma=0.115$: a – по глубине двухслойной системы; b – более крупный масштаб по вертикали.

В приближении стоячих волн Фарадея бесконечно малой амплитуды поле горизонтальной скорости вязкой двухслойной жидкости описывается следующими соотношениями [45]:

$$\begin{cases} u_1(x, y, t) = \zeta \omega [-e^{-ky} \cos \omega t + 2\rho_2 \sqrt{v_2} r^{-1} e^{-y\delta_1^{-1}} \cos(\omega t - y\delta_1^{-1})] \sin kx, & (y \geq 0) \\ u_2(x, y, t) = \zeta \omega [e^{ky} \cos \omega t - 2\rho_1 \sqrt{v_1} r^{-1} e^{y\delta_2^{-1}} \cos(\omega t + y\delta_2^{-1})] \sin kx, & (y \leq 0) \end{cases} \quad (2.21)$$

$$r = \rho_1 \sqrt{v_1} + \rho_2 \sqrt{v_2}, \quad \delta_i = \left(\frac{2v_i}{\omega} \right)^{1/2}$$

где величины δ_i определяют толщину ламинарного пограничного слоя на границе раздела верхней и нижней жидкостей. Кривые на рис. 2.59 отвечают профилям, рассчитанным по (2.21). Видно неплохое соответствие между теорией и экспериментом.

Поскольку отсутствуют какие-либо аналитические работы по анализу устойчивости границы раздела двух вязких осциллирующих жидкостей, то для интерпретации результатов эксперимента используем квазистационарное приближение. Осциллирующее течение в каждый момент времени рассматривается как стационарный поток, определяемый соответствующим данному моменту времени профилем скорости. Анализ рассчитанных по (2.21) вертикальных профилей горизонтальной составляющей скорости для различных фаз волнового цикла показал, что для временного интервала, равного одной восьмой периода волны для второй моды и одной шестой для третьей моды, граница раздела близка к горизонтальной, и относительный сдвиг максимален. В этом случае следует рассматривать задачу устойчивости двух горизонтальных разнонаправленных потоков жидкости. Отметим, что для указанных интервалов различие профилей скорости не превышает 10-15%, а описываемые ими потоки наблюдаются дважды за цикл волны при смене направления течения.

Согласно классической теории [24] волновые возмущения вида $A \exp[ik_1(x-ct)]$ на границе раздела двух разнонаправленных стационарных потоков идеальной жидкости являются нейтрально устойчивыми, если

$$c_i = \left[\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_1 - U_2)^2 - \frac{\Delta \rho g + \sigma k_1^2}{(\rho_1 + \rho_2) k_1} \right]^{1/2} = 0 \quad (2.22)$$

где $k_1 = 2\pi/\Lambda$ – волновое число, $c = c_r + i c_i$, c_r - фазовая скорость, $k_1 c_i$ - коэффициент, определяющий временной рост возмущений.

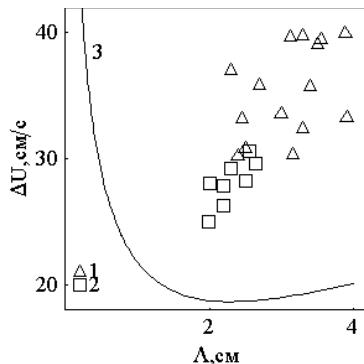


Рис. 2.60. Зависимость длины Λ волновых возмущений на границе керосин – вода от максимальной относительной скорости ΔU : 1–2 – $n=2$; 3 – расчет по (2.22).

На рис. 2.60 представлены зависимости между максимальным значением относительной скорости ΔU течения двух жидкостей типа керосин-вода и длиной Λ волновых возмущений, измеренных в экспериментах и рассчитанных по соотношению (2.22) для второй и третьей волновых мод. Модель Кельвина-Гельмгольца дает критические значения $\Lambda=2.2$ см и $\Delta U=18.6$ см/с. В эксперименте для второй моды внутренних волн $\Lambda=2.4$ см и $\Delta U=30.2$ см/с, а для третьей моды - $\Lambda=2.0$ см и $\Delta U=24.95$ см/с, т.е. имеются существенные различия в величинах рассчитанного и измеренного относительного сдвига скорости.

Модель Кельвина – Гельмгольца предполагает наличие плоского разрыва скорости на границе раздела двух жидкостей. Из рис. 2.59 б следует, что в качестве переходного слоя между двумя потоками могут

рассматриваться пограничные слои толщиной δ_i . Тогда для оценки влияния вязкости на развитие возмущений в приузловой зоне данные эксперимента могут быть представлены в безразмерном виде на (α, R) – плоскости, как это принято в теории неустойчивости стационарных течений вязкой жидкости [56]. Здесь $\alpha = 2\pi\delta / \Lambda, R = H\Omega\delta / 2v$. На рис. 2.61 приведены значения α и R , определяющие возникновение и развитие регулярных волновых возмущений в приузловых областях в условиях обсуждаемого эксперимента.

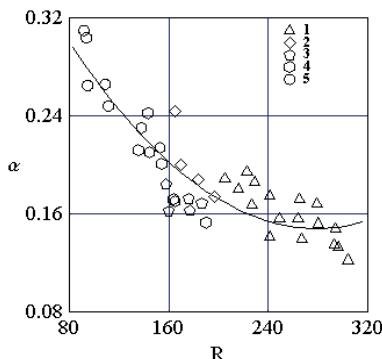


Рис. 2.61. Экспериментальная зависимость безразмерной длины волны α от числа Рейнольдса R для осцилирующего потока, создаваемого волной Фарадея на границе раздела: 1 – керосин – вода, $n = 2$; 2 – керосин – вода, $n = 3$; 3 – керосин – раствор тиосульфита, $n = 3$; 4 – керосин – раствор тиосульфата, $n = 4$; 5 – керосин – раствор сахара, $n = 2$.

В [57] экспериментально изучалось сдвиговое течение пресной воды над раствором сахара. Показано, что вязкое затухание значительно снижает скорость роста возмущений на границе раздела двух жидкостей. Используя соображения размерности, введен безразмерный параметр K :

$$K = U^3 / vg',$$

где U – средняя скорость верхнего слоя; $g' = g(\rho_2 - \rho_1) / \rho_1$; v – кинематическая вязкость нижней жидкости. Эксперименты показали, что появление волновых возмущений границы раздела зависят от величины K и определяются критическим значением $K \sim 500$.

В случае стоячих внутренних волн горизонтальная составляющая скорости верхней жидкости в первом приближении равна $H\omega/2$. Параметр K можно переопределить следующим образом:

$$K^* = \frac{(H\omega/2)^2}{\bar{v}g'},$$

$$g' = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \omega \sim \Omega^*, \bar{v} = \left[\frac{4\rho_2\rho_1\sqrt{v_1v_2}}{(\rho_1\sqrt{v_1} + \rho_2\sqrt{v_2})(\rho_2 + \rho_1)} \right]$$

Значения K^* приведены в табл. 4. Видно, что для указанных волновых мод параметр K^* имеет близкие значения, и его средняя величина $\bar{K}^* = 520$ при максимальной относительной ошибке 20%.

Таблица 4

n	Тип жидкости	H^* , см	$\Omega/2\pi$, Гц	$\Gamma \times 10^{-2}$	K^*	Ri
2	1	4.4	1.170	4.4	490	0.18
3	1	3.4	1.480	5.2	447	0.19
3	2	3.6	1.95	5.4	629	0.18
4	2	3	2.325	6.0	597	0.18
2	3	4.6	1.595	4.6	411	0.17

1- керосин-вода; $\rho_1=0.792 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1 \text{ г/см}^3$

2- керосин-раствор тиосульфита; $\rho_1=0.792 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1.239 \text{ г/см}^3$

3- керосин-раствор сахара; $\rho_1=0.792 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1.235 \text{ г/см}^3$

$$v_1=1 \text{ сСт}, \quad v_2=13 \text{ сСт}$$

Если ввести вязкий масштаб длины, равный толщине периодического пограничного слоя на границе раздела $\beta = (2\bar{v}/\omega)^{1/2}$, то выражение для K^* примет вид

$$K^* = \frac{U^{*2}}{\beta g'} \left(\frac{U^* H}{\bar{v}} \right)^{1/2}, \quad Ri = \frac{\beta g'}{U^{*2}}.$$

По аналогии с [58] этот критерий возникновения неустойчивости можно рассматривать как соотношение между числом Ричардсона, в которое входит толщина сдвига скорости, и числом Рейнольдса. Значения Ri приведены в табл. 4, из которой следует, что его среднее значение равно 0.18.

В случае внутренних волн Фарадея на границе раздела двух жидкостей резонансные зависимости [11] с учетом диссипативных эффектов имеют вид

$$H_{\pm}^2 P = 4 \left(\omega - \frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s\omega^2 \Omega}{2g} \right)^2 - b^2} \right), \quad (2.23)$$

$$\text{где } P = \frac{k^2 \omega}{8} \frac{\rho_2^2 + \rho_1^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}, \quad \omega^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

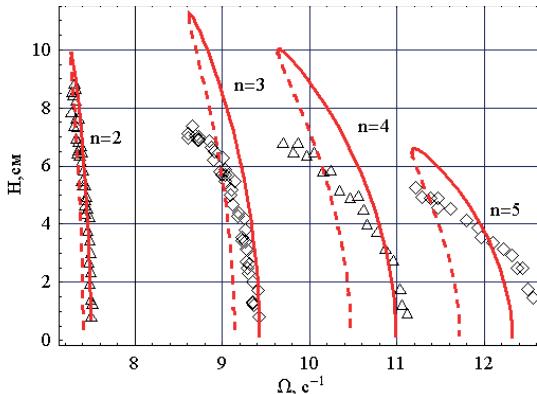


Рис. 2.62. Экспериментальные и рассчитанные резонансные зависимости для внутренних волн Фарадея ($n = 2-5$).

Экспериментальные резонансные зависимости для волновых мод $n = 2-5$ приведены на рис. 2.62. Как и в случае поверхностных волн, по частоте срыва выполнены оценки эквивалентного коэффициента затухания b^* . Ниже приведены значения b и b^* :

n	2	3	4	5
$b, \text{с}^{-1}$	0.045	0.055	0.065	0.073
$b^*, \text{с}^{-1}$	0.097	0.179	0.268	0.388

Эквивалентный коэффициент затухания b^* превышает измеренный коэффициент затухания b в 2-5 раз. Отметим, что разрушение внутренних волн в окрестности точки срыва колебаний в отличие от поверхностных волн обуславливается развитием сдвиговой неустойчивости в их узловых областях [52].

Составные внутренние волны Фарадея

Понятие составных нелинейных волн введено в гидродинамике в 1951 г. Я.И. Секерж-Зеньковичем, заложившим основы теории, как свободных, так и возбуждаемых внешним воздействием составных волн [59–61].

По определению составная волна в линейном приближении есть суперпозиция линейных волн, в случае стоячих волн - линейных мод. В линейной волновой моде движение жидких частиц описывается одной из собственных функций соответствующей математической задачи.

Выполнено очень мало исследований гравитационных волн более сложной структуры, чем одномодовая, причем в них рассматривались только поверхностные волны. Многомодовая пространственная картина наблюдалась в экспериментах [28], но волны были ближе к капиллярным, чем к гравитационным. Периодическая перекачка энергии из одной двумерной волновой моды в другую наблюдалась в экспериментах [62].

Описываемое ниже возбуждение составных волн осуществлялось за счет главного параметрического резонанса [53]. Прямоугольному сосуду с двухслойной жидкостью сообщались гармонические колебания в вертикальном направлении с заданными амплитудой и частотой. Установив амплитуду колебаний сосуда больше некоторой пороговой, круговую частоту Ω близкой к удвоенной собственной частоте 2ω какого-либо волновой моды, можно добиться возбуждения волн на границе раздела жидкостей.

Прямоугольный сосуд ($L=50$ см, $W=10$ см, $H=40$ см) заполнялся двухслойной жидкостью: керосин - вода, $\rho_1=0.79$ г/см³, $\rho_2=1.00$ г/см³, $h_{1,2}=10$ см.

Собственные частоты различных мод вычислялись по формуле

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{g\pi}{l} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \sqrt{n^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2 m^2} \quad (2.24)$$

где n и m - число узловых линий на передней и боковой стенках сосуда, g - ускорение силы тяжести.

В экспериментах амплитуда колебаний сосуда $s = 0.9$ см, а частота Ω варьировалась. При этом на границе раздела устанавливались следующие волны.

При $\Omega=13.12 \text{ с}^{-1}$ возбуждалась плоская шестая волновая мода. Удвоенная ее собственная частота $2\omega_{6,0}=13.11 \text{ с}^{-1}$. Профиль волны близок к профилю соответствующей линейной волны в неподвижном сосуде.

При $\Omega=12.47 \text{ с}^{-1}$ возбуждалась трехмерная мода, отвечающая $n=3$, $m=1$. Для этой моды $2\omega_{3,1}=12.92 \text{ с}^{-1}$.

При $\Omega = 12.75 \text{ с}^{-1}$ возбуждалась волна более сложной структуры. Фотографии поверхности раздела, взятые через $\frac{1}{2}$ периода волны, приведены на рис. 2.63 а и б. На фотографиях видна масштабная сетка; на передней стенке сосуда сторона квадрата равна 10 см, на боковой стенке расстояние между горизонтальными прямыми 5 см.

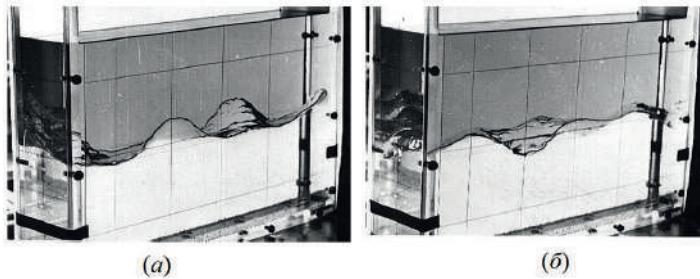


Рис. 2.63. Составные волны Фарадея (эксперимент): керосин - вода, $\rho_1 = 0.79 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 1.00 \text{ г/см}^3$, $h_{1,2} = 10 \text{ см}$; суперпозиция волновых мод (6,0) и (3,1) на частоте $\Omega = 12.75 \text{ с}^{-1}$: а, б – $t=0$ и $T/2$.

Проанализируем смещение границы раздела вдоль левой боковой стенки сосуда. Видно, что у заднего левого ребра сосуда частицы жидкости колеблются с амплитудой 3 см, а у переднего неподвижны. Следовательно, движение трехмерное и неодномерное, поскольку ни у какой моды узел не может находиться на ребре сосуда.

Если сосуд остановить, то волна постепенно затухает подобно обычной свободной волне: ее высота уменьшается, а форма в целом сохраняется, по крайней мере, в течение восьми периодов.

В предположении, что жидкость идеальная, глубины ее слоев бесконечные, а сосуд неподвижен, возвышение границы раздела в линейном приближении для каждой моды представляется формулой

$$\eta_{n,m}(x, y, t) = \frac{H_{n,m}}{2} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{W} \cos(\omega_{n,m} t + \theta_{n,m}).$$

Здесь ось Ox декартовой прямоугольной системы координат проведена вдоль передней стенки сосуда на уровне невозмущенной границы раздела, ось Oy - вдоль левой боковой стенки, $\omega_{n,m}$ определена из (2.24), а $H_{n,m}$ и $\theta_{n,m}$ - высота и фаза волны, вообще говоря, произвольные.

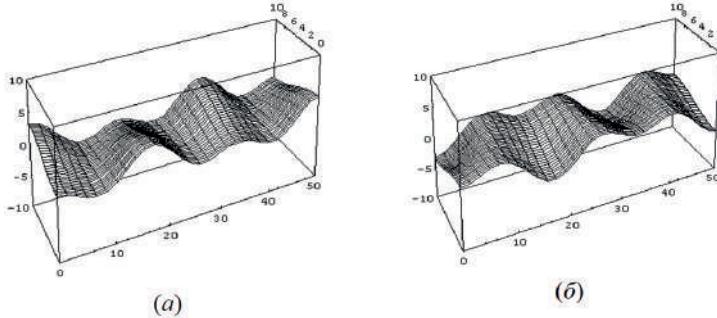


Рис. 2.64. Составные волны Фарадея (модель): $a, \delta - t=0$ и $T/2$.

Рассмотрим суперпозицию линейных мод с номерами $n=6$, $m=0$ и $n=3$, $m=1$. Положим

$$\eta = \eta_{6,0} + \eta_{3,1},$$

$$H_{6,0} = -H_{3,1} = H,$$

$$\omega_{6,0} \approx \omega_{3,1} = \omega,$$

$$\theta_{6,0} = \theta_{3,1} = 0.$$

Тогда

$$\eta(x, y, t) = \frac{H}{2} \left(\cos \frac{6\pi x}{L} - \cos \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{W} \right) \cos \omega t \quad (2.25)$$

Поверхности, рассчитанные по формуле (2.25), изображены на рисунках 2.64 a и δ в виде системы ортогональных сечений в изометрической проекции для моментов времени $t=0$ и $T/2$. Их форма очень похожа на форму границы раздела жидкостей, представленной на рис. 2.63.

На рис. 2.65 приведен профиль волны на передней стенке сосуда: сплошная линия – полученный экспериментально, и (o) – рассчитанный по формуле (2.25). Они почти совпадают.

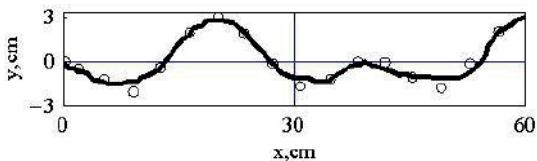


Рис. 2.65. Профиль составной стоячей волны на передней стенке сосуда: $\Omega = 12.75 \text{ с}^{-1}$; кружки соответствуют расчету по (2.25).

Таким образом, описанная волна является стоячей трехмерной составной волной.

Устойчивое возбуждение такой волны в условиях эксперимента объясняется двумя обстоятельствами: вырождением – близостью собственных частот взаимодействующих мод ($\omega_{6,0}$ и $\omega_{3,1}$), и нелинейностью. В линейной системе наличие даже небольшого отличия в собственных частотах привело бы к сложной интерференционной волновой картине, характеризующейся, в частности, явлением биений.

Если частоту колебаний сосуда изменять, оставляя ее в пределах $12.57 < \Omega < 13.09 \text{ с}^{-1}$, то форма составной волны меняется, приближаясь к форме одной из составляющих ее мод. Это объясняется нарушением равенства $H_{6,0}=H_{3,1}$ в формуле для $\eta(x,y,t)$.

В заключение отметим, что можно возбудить составные волны, являющиеся суперпозицией и других пар волновых мод. Для номеров n и m в каждой такой паре для сосуда данных размеров должны быть близкими выражения $(n^2+25 \text{ м}^2)$ – см. (2.24). Например, при $12.13 < \Omega < 12.17 \text{ с}^{-1}$ возбуждалась составная волна, для которой номера взаимодействующих мод были $(n=5, m=0)$ и $(n=2, m=1)$; аналогично, $(n=1, m=1)$ и $(n=2, m=1)$ при $\Omega = 12.11 \text{ с}^{-1}$.

2.3. Вторичные стационарные течения в волнах Фарадея

В настоящем разделе обсуждаются результаты экспериментов [63, 64] по исследованию вторичных течений в волнах Фарадея, причем параметрический резонанс используется как способ генерации стоячих волн в прямоугольном сосуде.

Постановка эксперимента

Изучение процесса массопереноса в стоячих волнах на свободной поверхности слоя воды (плотность $\rho=1.00$ г/см³; кинематическая вязкость $\nu=1.00$ сСт; глубина $h=10-15$ см) осуществлялось для волн Фарадея по методике [63, 64]. Сосуду сообщались колебания в вертикальном направлении, причем для генерации волн использовался не только субгармонический, но и гармонический резонанс [14, 46], что позволило минимизировать колебания узлов в волне.

Для визуализации вторичных течений в воду вводился краситель нейтральной плавучести. Для измерения скоростей течений использовались трассеры - частицы янтаря плотностью 1.1 г/см³ и размером не более 1 мм. С учетом общей картины течения область измерений ограничивалась длиной $\lambda/2$ по горизонтали и глубиной жидкости по вертикали. Эта область разбивалась на зоны размерами 1x1 см, чтобы вторичное течение в пределах одной зоны можно было считать близким к однородному. Модуль вектора скорости вторичного течения оценивался как отношение перемещения трассера в пределах зоны к соответствующему временному промежутку, кратному периоду волны. Для нахождения одного значения скорости выполнялись четыре серии из десяти измерений в каждой серии. Проведенные оценки показали, что предельная ошибка определения средней скорости не превышала 10%.

Массоперенос в стоячих поверхностных волнах

Из теории нелинейных стоячих волн в идеальной жидкости следует, что частицы жидкости совершают колебания около своего положения равновесия. Однако в теоретических работах [65, 66] показано, что учет кроме нелинейных еще и вязких эффектов, приводит к выводу о возможном существовании в стоячих волнах наряду с колебательным движением системы стационарных циркуляционных течений, охватывающих всю толщу жидкости.

Это утверждение было проверено экспериментально на третьей моде поверхностных волн Фарадея, возбуждаемых при вертикальных колебаниях сосуда с амплитудой $s = 1.8$ см. Глубина воды была $h = 10$ см, а высота и период волны были $H=5$ см и $T=0.482$ с соответственно.

Приведенные на рис. 2.66 фотографии отражают начальную стадию формирования вторичного течения в одной из двух циркуляционных ячеек между пучностью и расположенными слева и справа от нее узлами волны. В начальный момент времени краситель нейтральной плавучести помещался на свободную поверхность воды и дно сосуда вдоль правой торцевой стенки. За счет колебаний воды с периодом волны краситель распространился в течение нескольких секунд по свободной поверхности и по дну. Это видно на фотографии, сделанной в один из этих моментов времени, для которого принято $t = 0$.

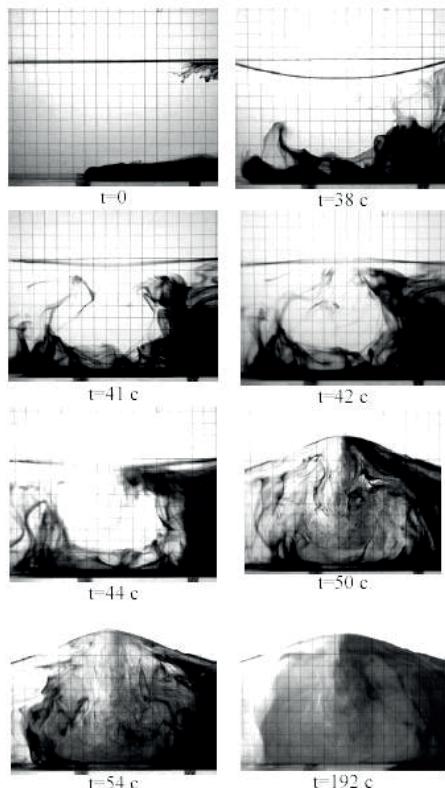


Рис. 2.66. Процесс установления стационарных циркуляционных течений в третьей моде волны Фарадея: $s = 1.8$ см, $h = 10$ см, $n = 3$, $T = 0.482$ с, $H = 5$ см; сетка 1×1 см.

Если бы жидкость совершила только колебания около положения равновесия, то краситель мог бы отдалиться от свободной поверхности и дна, лишь за счет молекулярной диффузии. Вследствие этого он оставался бы вблизи свободной поверхности и дна достаточно долго, по крайней мере, в течение нескольких сотен секунд.

Из фотографий для моментов $t = 38\text{--}44$ с видно, как два «языка» красителя поднимаются вверх слева и справа от центральной части фотографий со дна почти до свободной поверхности. Эти две ветви течения располагаются вблизи вертикалей, проходящих через два узла волны Фарадея, отстоящих друг от друга примерно на половину длины волны. При анализе фотографий следует учитывать то обстоятельство, что узлы нелинейной стоячей волны в жидкости не являются неподвижными в пространстве, а подвержены малым колебаниям. Заметим также, что, начиная с момента $t = 41$ с, две ветви вторичного течения имеют и горизонтальные компоненты скоростей – прослеживаются встречные течения к центральной части сосуда (к пучности волны).

Начиная с момента $t = 44$ с и до $t = 50$ с правая ветвь поднявшегося почти до свободной поверхности течения опускается вниз примерно по вертикали, проходящей через пучность волны. Визуально в эксперименте прослеживалось движение вниз и левой ветви течения, но оно не зафиксировано на фотографиях.

Таким образом, подтверждается вывод [65, 66] о наличии вторичных течений в толще жидкости. На рис. 2.66 четко прослеживается формирование пары циркуляционных ячеек вторичного течения – справа и слева от пучности волны. В окрестности узлов происходит подъем двух медленных циркуляционных потоков. Несколько ниже свободной поверхности жидкости потоки поворачивают навстречу друг другу, и под пучностью волны потоки направлены вниз. В эксперименте прослеживается разделение вблизи дна направленного вниз потока под пучностью на два горизонтальных, направленных к ближайшим узлам волны течения. Характерное время циркуляции вторичного течения составляет около 50 T . Горизонтальный размер циркуляционной ячейки равен четверти длины волны, а по вертикали течение охватывает весь слой

жидкости, который, что видно из фотографий в моменты $t = 54$ и 192 с, весь окрашен красителем.

Результаты измерений поля скоростей циркуляционных течений в поверхностных волнах Фарадея приведены на рис. 2.67. Измерения проводились в волне, изображенной на рис. 2.66. Оценки показывают, что модули максимальных вертикальных скоростей (направленное вниз течение, $x \sim 33-34$ см) и под углом (направленное вверх течение, $x \sim 41-43$ см) характеризуются величинами одного порядка – от 1.5 до 3 см/с. Близкие к горизонтальным течениям от узла к подошве вблизи свободной поверхности ($y > -2.5$ см, $37 < x < 40$ см) и от подошвы к узлу ($-9 < y < -7$ см, $37 < x < 40$ см) характеризуются модулем скорости 3–4 см/с. Если в качестве характерной скорости колебательного движения частиц жидкости принять величину $H\omega/2 \approx 30$ см/с, то скорость вторичного циркуляционного течения оказывается на порядок меньше.

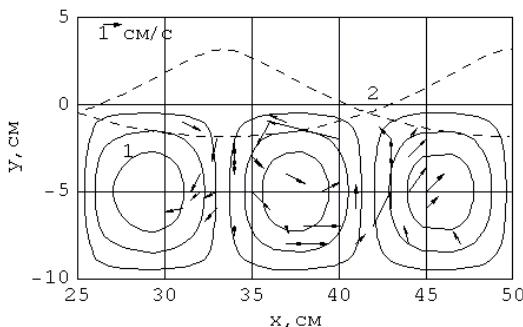


Рис. 2.67. Поле скоростей установившихся вторичных течений в третьей моде поверхности волны Фарадея: $s = 1.8$ см, $h = 10$ см, $n = 3$, $T = 0.482$ с, $H = 5$ см: 1 – линии тока, рассчитанные по (2.26); 2 – свободная поверхность. Слева вверху указан масштабный вектор скорости 1 см/с.

На рис. 2.67 нанесены также линии тока вторичных течений, рассчитанные через приведенную в [65] функцию тока:

$$\Psi_2 = \frac{3kH^2\omega \sin 2kx}{4\operatorname{sh}^2 kh (\operatorname{sh} 4kh - 4kh)} (kh \operatorname{ch} 2kh \operatorname{sh} 2ky - ky \operatorname{ch} 2ky \operatorname{sh} 2kh) \quad (2.26)$$

где k и ω – волновое число и частота стоячей поверхности волны, соответственно, а координаты x и y – те же, что и на рис. 2.67.

Необходимо сделать два замечания. Во-первых, выражение (2.26) для функции тока было получено в [65] при условии, что отношение высоты H стоячей волны к толщине $\delta = (2v / \omega)^{1/2}$ пограничного слоя Стокса есть малая величина, тогда как в условиях данного эксперимента оно имеет порядок 10^2 . Во-вторых, в формуле (2.26) опущен знак минус, который был у выведенной в [65] функции тока. Если бы этого не было сделано, то направление течения вдоль рассчитанных линий тока в узловых областях и под пучностью волны оказалось противоположным определенному экспериментально направлению.

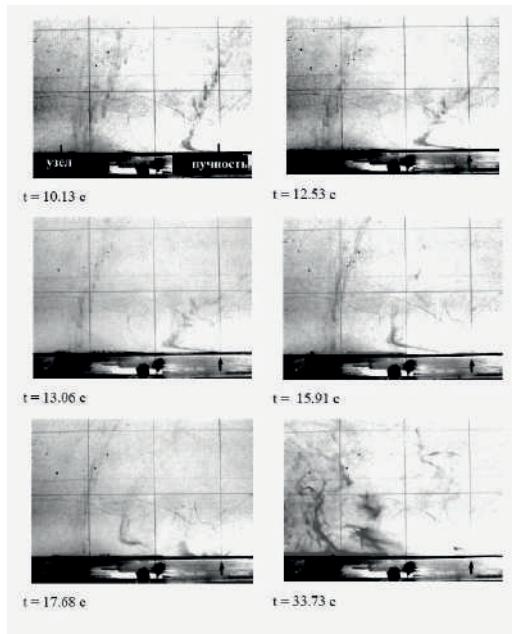


Рис. 2.68. Процесс распространения красителя (перманганата калия) в придонной области под пучностью и узлом второй моды волны Фарадея: $s=1.8$ см, $h=15$ см, $n=2$, $T=0.584$ с, $H=8.9$ см; сетка 5×5 см.

Для подтверждения вывода о направлении течений в циркуляционных ячейках несколько кристаллов перманганата калия помещались на дно сосуда под пучностью и узлом второй моды стоячей волны. После установления стационарных колебаний жидкости производилась видеосъемка со скоростью 30 к/с. Последовательность кадров,

характеризующая процесс распространения красителя, представлена на рис. 2.68. На кадре $t = 0$ указаны положения пучности и узла волны. В течение почти 16 секунд (или 28 периодов волны) на расстоянии 1-2 см от дна наблюдается устойчивое течение от пучности к узлу, тогда как под узлом имеется достаточно развитое струйное течение от дна к свободной поверхности. Только к моменту $t = 33.73$ с (около 60 периодов волны) нарушается регулярность этих течений, причем именно эта величина по данным эксперимента отвечает полному времени прохождения частицы – трассера по замкнутой траектории в циркуляционной ячейке.

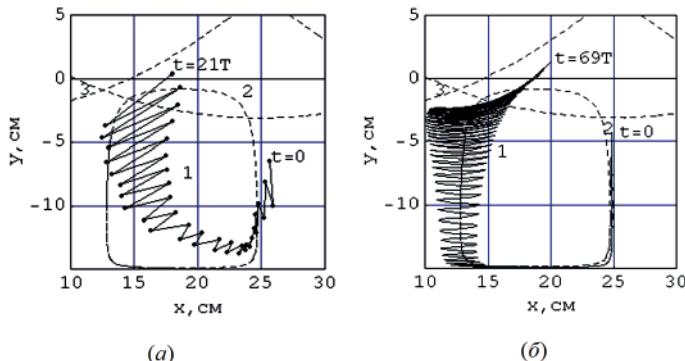


Рис. 2.69. Траектория индивидуальной частицы во второй моде волны Фарадея: $H=8.9$ см, $T=0.583$ с, $h=15$ см: а – эксперимент; б – результаты расчета, 1 – траектория частицы – трассера, 2 – линия тока, 3 – свободная поверхность.

Для определения траектории индивидуальной жидкой частицы в сложном движении – колебательном и медленном стационарном переносе – была использована цифровая видеосъемка со скоростью 30 к/с. Съемка проводилась для второй волновой моды, имеющей $H = 8.9$ см и $T = 0.583$ с, при глубине воды $h=15$ см. В воду были введены около 10 частиц янтаря (максимальный размер порядка 0.3–0.5 мм), и регистрировалось движение трассеров в области между пучностью и узлом волны. На полученной последовательности кадров была выбрана частица с начальными координатами $x_0 = 25.7$, $y_0 = -6.5$ см. С шагом по времени $\Delta t = T/2 = 0.29$ с измерялись координаты этой частицы. Траектория частицы приведена на рис. 2.69 а, где точками отмечены координаты, измеренные через Δt .

Кривые 3 на рис. 2.69 а соответствуют двум крайним положениям свободной поверхности. Частица, которая в начальный момент времени находилась под пучностью волны, через время, соответствующее 21 периоду волны, переместилась в область узла, причем движение происходило по ходу часовой стрелки $-x = 18.0\text{см}$, $y = 0.4 \text{ см}$ при $t = 21T = 12.24 \text{ с}$. Для наглядности на рисунке также приведена линия тока, определяющая данную циркуляционную ячейку.

Рассматривая движение индивидуальной частицы жидкости как сумму колебаний около ее начального положения, определяемых потенциалом скорости Φ , и медленного дрейфа, определяемого функцией тока Ψ_2 , можно рассчитать траекторию частицы жидкости в поле стоячей волны. В первом приближении функция Φ определяется как

$$\Phi(x, y, t) = -H \frac{\omega \operatorname{ch} k(y + h)}{2k \operatorname{sh} kh} \cos kx \sin \omega t$$

где H , ω , k – высота волны, частота волны и волновое число, соответственно.

Для построения траектории какой-либо частицы жидкости была проинтегрирована система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \end{cases} \quad (2.27)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, где x_0 и y_0 – координаты частицы жидкости в некоторый начальный момент времени.

Решение $x=x(t)$, $y=y(t)$ системы (2.27) описывает движение частицы в переменных Лагранжа.

Результаты численного решения системы (2.27) представлены на рис. 2.69 б. В качестве H , ω , к использованы данные эксперимента (см. рис. 2.69 а), а начальное положение частицы было задано координатами $x_0 = 24.7$, $y_0 = -7.8 \text{ см}$. Время прохождения частицей траектории счета составило 40 с или 69 периодов T . Видно, что рассчитанная траектория напоминает экспериментальную. Отметим, однако, что расчетное время (69 T) существенно превосходит время перемещения реальной частицы (21 T),

причем данное расхождение нельзя списать на гидродинамические характеристики частицы – трассера (форма, плавучесть).

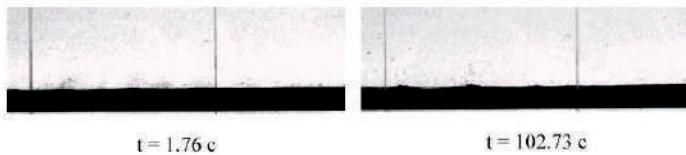


Рис. 2.70. Возмущение первоначально горизонтальной поверхности слоя осадков в области под узлом волны Фарадея: $s = 0.25$ см, $h = 15$ см, $n = 2$, $T = 0.584$ с, $H = 8.9$ см. На фотографиях видна сетка со стороной квадрата 5 см, середина между вертикальными линиями соответствует узлу волны.

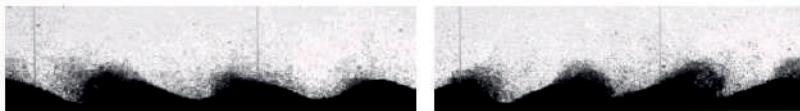


Рис. 2.71. Регулярные донные формы в области под узлом волны Фарадея: $s = 0.25$ см, $h = 15$ см, $n = 2$, $T = 0.612$ с, $H = 12.5$ см. Высота донных форм ~ 8 мм, длина ~ 20 мм.

Исследовалась начальная стадия образования донных форм на поверхности слоя осадков на дне сосуда под воздействием волн Фарадея. В экспериментах использовался полидисперсный песок с максимальным размером частиц $d=0.12\text{--}0.18$ мм. Начальная толщина горизонтального слоя составляла величину 7 мм. Оказалось, что во взвешенное состояние сначала переходят мелкие частицы под узлом волны, и через достаточно продолжительное время на первоначально горизонтальной границе вода – песок появляются три возмущения в виде бугорков, выступающих приблизительно на 1 мм и расположенных друг от друга на расстоянии 17 мм. Можно предположить, что именно описанные выше стационарные вторичные течения инициируют образование возмущений на поверхности слоя осадков. При увеличении амплитуды стоячей волны на основе этих малых возмущений образуются регулярные донные формы – рисунки 2.70 и 2.71.

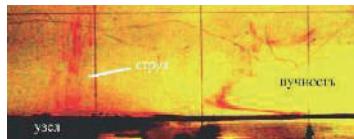


Рис. 2.72. Визуализация течений в придонной области: под пучностью волны течение направлено справа налево, а под узлом стоячей волны – вертикально вверх: $s = 0.25$ см, $h = 15$ см, $n = 2$, $T = 0.590$ с, $H = 8$ см.

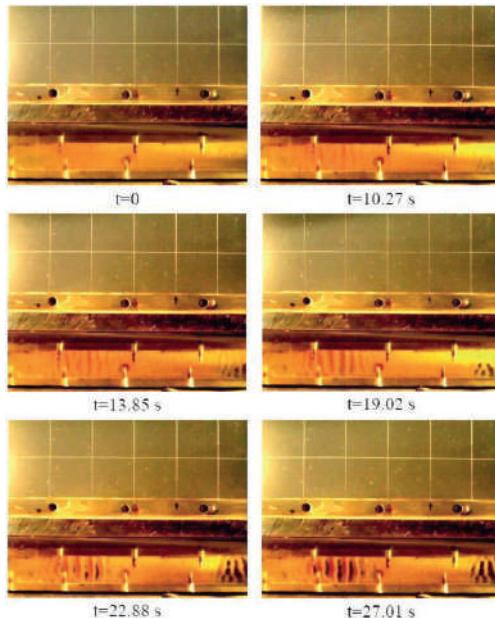


Рис. 2.73. Образование донных форм в областях под узлами стоячей волны: $s = 0.25$ см, $h = 15$ см, $n = 2$, $T = 0.590$ с, $H = 8$ см, максимальный размер частиц песка $d = 0.12 - 0.18$ мм, толщина слоя песка $h_s = 0.2$ см.

Была проведена серия экспериментов по исследованию течений в области вблизи дна. Посредством кристаллов перманганата калия выявлены стационарные струйные течения в области под узлом стоячей волны – рис. 2.72. Именно течения такого типа, по мнению авторов, инициализируют образование донных форм при наличии слоя осадков на дне сосуда.

На рис. 2.73 приведена последовательность снимков, описывающих процесс развития регулярных донных форм. В экспериментах использовался песок максимального размера $d=0.12\text{--}0.18$ мм. Начальная толщина горизонтального слоя составляла величину $h_s = 0.2$ мм (см. рис. 2.73, $t = 0$). Под дном сосуда под углом 45° устанавливалось зеркало, что позволяло производить съемку донных осадков спереди и снизу.

Массоперенос в стоячих внутренних волнах

Изучались стоячие внутренние волны на границе раздела двух слоев несмешивающихся жидкостей (керосин-водный раствор глицерина, плотности $\rho_1 = 0.79$ г/см³, $\rho_2 = 1.09$ г/см³; кинематические вязкости $\nu_1 = 1.71$ сСт, $\nu_2 = 2.76$ сСт; глубины слоев $h_{1,2} = 8$ см) в прямоугольном сосуде ($L = 50$ см, $W = 4$ см, $H = 40$ см). Сосуду сообщались гармонические колебания в вертикальном направлении с амплитудой s и частотой Ω . При $s = 2.4$ см и $\Omega = 7.48$ с⁻¹ возбуждалась вторая мода внутренних волн, имеющая два узла, частоту $\Omega/2$ и высоту $H = 4.4$ см. Исследовалось поле средних скоростей в нижней жидкости – водном растворе глицерина.

Для индикации течений в нижнюю жидкость вводился краситель нейтральной плавучести. Если бы частицы жидкости совершали только гармонические колебания около своих положений равновесия, то распространение красителя определялось лишь амплитудой этих колебаний (≤ 4.4 см) и молекулярной диффузией, вследствие чего он оставался бы вблизи границы раздела, по крайней мере, в течение нескольких десятков периодов волны. В эксперименте же он опускался вниз и через 5-6 периодов достигал дна. Это доказывает существование в стоячих волнах дополнительных течений.

На рис. 2.74 представлена серия кадров, определяющих процесс распространения красителя для моментов времени $t_N = TN$, где T – период волны. Четко прослеживается динамика формирования пары циркуляционных ячеек течения – справа и слева от пучности волны. Под пучностями течение направлено вниз. У дна происходит его разделение на два горизонтальных потока. Затем – поворот каждого потока вдоль вертикальной линии, проходящей через ближайший узел волны. Наконец,

потоки замыкаются вдоль линии вблизи границы раздела - рис. 2.74. Характерное время полной циркуляции равно 10-15 периодам волны.

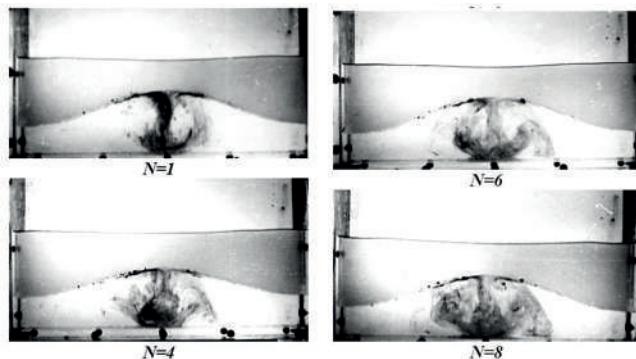


Рис. 2.74. Процесс установления стационарных циркуляционных течений в нижнем слое при возбуждении второй моды волны Фарадея на границе раздела керосин - водный раствор глицерина; $t_N = TN$, $T = 0.840$ с.

Горизонтальный размер ячейки равен четверти длины волны ($\lambda/4$), а вертикальный зависит от амплитуды волны и может приближаться к глубине слоя.

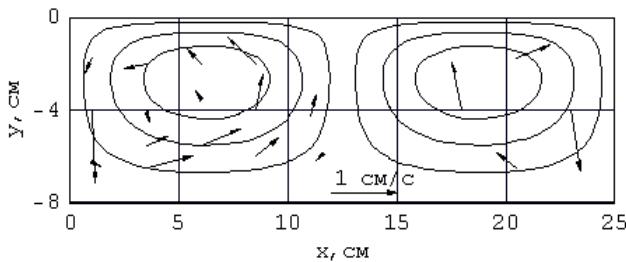


Рис. 2.75. Поле скоростей установившихся вторичных течений во второй моде внутренней волны Фарадея: керосин – водный раствор глицерина, плотности $\rho_1=0.79$ г/см 3 , $\rho_2=1.09$ г/см 3 ; кинематические вязкости $v_1=1.71$ сСт, $v_2=2.76$ сСт; $s=2.4$ см, $h_{1,2}=8$ см, $n=2$, $\Omega=7.48$ с $^{-1}$, $H=4.4$ см. Внизу в центре рисунка указан масштаб вектора скорости 1 см/с.

Скорости течения относительно сосуда измерялись следующим образом. В нижний слой жидкости вводились трассеры - частицы янтаря,

плотность которых $1,1 \text{ г/см}^3$, а максимальный размер каждой не превышал 1 мм. С учетом общей картины течения измерительная область, граничащая с левой торцевой стенкой сосуда, разбивалась на 17 зон размерами $1 \times 2 \text{ см}$ так, чтобы течение в пределах одной зоны можно было считать однородным. Медленное циркуляционное течение представляется на рис. 2.75 векторами средней скорости с началом в центре каждой зоны. Векторы скорости определялись как отношение вектора перемещения частиц в пределах зоны к соответствующему временному промежутку, кратному периоду волны. Для нахождения одного вектора скорости выполнялись четыре серии из десяти измерений в каждой. Проведенные оценки показали, предельная ошибка определения средней скорости не превышает 10%.

Приведенное на рис. 2.75 поле скоростей полностью подтверждает циркуляционный характер осредненных течений нижней жидкости. Оценка максимальных средних значений горизонтальной u^{dr}_{max} и вертикальной v^{dr}_{max} компонент дрейфовой скорости дают

$$u^{dr}_{max} = 0.9 \text{ см/с}, \quad v^{dr}_{max} = 1.1 \text{ см/с},$$

тогда как по результатам измерений с помощью лазерного доплеровского анемометра максимальная скорость колебательного движения составляет величину порядка 10-20 см/с, т.е. скорость дрейфа частиц жидкости на порядок меньше скорости колебательной.

В качестве нижней жидкости также использовался водный раствор NaCl ($\rho_2 = 1.08 \text{ г/см}^3$), глубина слоев оставались прежними $h_{1,2} = 8 \text{ см}$. Оказалось, что для второй моды при $H = 4$ и 6 см циркуляционные ячейки существуют, однако их вертикальный масштаб оценивается величиной $h_2/2$, т.е. циркуляционные течения не достигают придонной области. Скорость дрейфа в 3-4 раза меньше соответствующей величины для случая волны на границе керосин - водный раствор глицерина. Единственное отличие данного эксперимента от прежнего заключается в значениях вязкости нижней жидкости - вязкость раствора поваренной соли почти в три раза меньше вязкости раствора глицерина.

Отметим, что результаты гидродинамической модели [66] находятся в полном качественном соответствии с данными настоящего эксперимента. Функция тока, описывающая движение жидкости при наличии стоячих

волн на границе раздела двух вязких жидкостей, представлялась в виде асимптотического ряда, причем в качестве малого параметра разложения использовалась величина α порядка крутизны волны [66]. Усредненный по времени квадратичный по α член разложения описывает стационарную диффузию завихренности (массоперенос) и для более тяжелой жидкости с точностью до константы определяется выражением:

$$\Psi_2 \square \frac{\rho_1 \sqrt{v_1}}{\rho_1 \sqrt{v_1} + \rho_2 \sqrt{v_2}} \frac{H^2}{4} \omega S_2(y) (\operatorname{cth} kh_1 + \operatorname{cth} kh_2)^2 \sin 2kx, \quad (2.28)$$

$$S_2(y) = M_2 [(1 + y/h_2) \operatorname{sh} ky - \frac{y}{\kappa h_2^2} \operatorname{sh} kh_2 \operatorname{sh} k(y + h_2)],$$

где

$$M_2 = -\frac{\rho_2 v_2}{2G_2(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)}, \quad G_2 = \frac{\operatorname{sh} kh_2 \operatorname{ch} kh_2 - kh_2}{h_2^2} L^{*2}$$

Здесь $L^* = \lambda$ - характерный масштаб длины, в качестве которого выбрана длина стоячей волны.

На рис. 2.75 приведена система линий тока, определяемых соотношением (2.28). Отметим, что для верхней жидкости соответствующая картина может быть получена зеркальным отображением относительно оси x .

Список литературы

1. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1831. V. 121. P. 299-340.
2. Стrett Дж. (Рэлей) Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т.1, 2.
3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 815 с.
4. Секерж-Зенькович Я.И. К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 8. № 4. С. 551-553.
5. Miles J.W., Henderson D. Parametrically forced surface wave // Ann. Rev. Fluid Dyn. 1990. V. 22. P. 143 – 165.
6. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.

7. *Ibrahim R.A.* Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems // ASME J. Fluids Eng. 2015. V. 137(9). 090801, 52p.
8. Секерж-Зенькович С.Я., Калинченко В.А. О возбуждении внутренних волн в двухслойной жидкости вертикальными колебаниями // ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 4. С. 797-799.
9. Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3(45). С. 87-97.
10. Нестеров С.В. Исследование по нелинейной теории гравитационных волн: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05. М., 1972. 220 с.
11. Секерж-Зенькович С.Я. Параметрическое возбуждение волн конечной амплитуды на границе раздела двух жидкостей разных плотностей. // ДАН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С. 1083-1086.
12. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. испр. доп. М.: Наука, 1974. 504 с.
13. Бордаков Г.А., Карпов И.И., Секерж-Зенькович С.Я., Шингарева И.К. Параметрическое возбуждение поверхностных волн при глубине жидкости, близкой к критической // ДАН. 1994. Т. 334. № 6. С. 710-711.
14. Калинченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. Экспериментальной исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 122-129.
15. Калинченко В.А. Нелинейные эффекты в поверхностных и внутренних волнах Фарадея: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05. М., 2010. 212 с.
16. Бордаков Г.А., Карпов И.И., Секерж-Зенькович С.Я., Шингарева И.К. Параметрическое возбуждение поверхностных волн при глубине жидкости, близкой к критической // ДАН. 1994. Т. 334. № 6. С. 710-711.
17. Sekerj-Zenkovich S.Ya., Bordakov G.A., Kalinichenko V.A., Shingareva I.K. Faraday Resonance in water waves at nearly critical depths // Exp. Therm. Fluid Scie. 1998. V.18. No. 2. P. 123-133.

18. Секерж-Зенькович Я.И. К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. Сер. Географ. и Геофиз. 1951. Т. 15. № 1. С. 57-73.
19. Penney W.G., Price A.T. Finite periodic stationary gravity waves in a perfect fluid // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1952. V. 224. No. 882. P. 254-284.
20. Taylor G.I. An experimental study of standing waves // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 218. No. 1132. P. 44-59.
21. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 120-126.
22. Базилевский А.В., Вонгвизес С., Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. Экспериментальное исследование влияния структуры дна на затухание стоячих поверхностных волн в прямоугольном сосуде // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 4. С. 143-148.
23. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. О срыве параметрических колебаний жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 128-136.
24. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
25. Keulegan G.H. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. Pt. 1. P. 33 - 50.
26. Калиниченко В.А. О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 4. С. 112-122.
27. Jiang L., Perlin M., Schultz W.W. Period tripling and energy dissipation of breaking standing waves // J. Fluid Mech. 1998. V.369. P.273-299.
28. Сорокин В.И. Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости // Акустический журнал. 1957. Т. 3. Вып. 3. С. 262 - 273.
29. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле: - М.: Машиностроение, Пер. с англ. 1985. 472 с.
30. Longuet-Higgins M.S., Drazen D.A. On steep gravity waves meeting a vertical wall: a triple instability // J. Fluid Mech. 2002. V. 466. P. 305-318.

31. *Hogrefe J. E., Peffley N.L., Goodridge C.L., Shi W.T., Hentschel H.G.E., Lathrop D.P.* (1998) Power-law singularities in gravity-capillary waves // *Physica D*. 1998. V.123. No. 1. P.183-205.
32. *Zeff B.W., Kleber B, Fineberg J., Lathrop D.P.* (2000) Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface // *Nature*. 2000. V.403. No. 6768. P.401-404.
33. *Cooker M. J.* (2002) Unsteady pressure fields which precede the launch of free-surface liquid jets // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 2002. V.458. No. 2018. P. 473-488.
34. *Duchemin L., Popinet S., Josserand C., Zaleski S.* Jet formation in bubbles bursting at a free surface // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. № 9. P. 3000–3008.
35. *Eggers J., Fontelos M., Leppinen D.M., Snoeijer J.H.* Theory of the collapsing axisymmetric cavity // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. 094502 (1–4).
36. Борисова Э.П., Корявов П.П., Мусеев Н.Н. Плоские и осесимметричные автомодельные задачи погружения и содарения струй // *ПММ*. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 347–360.
37. Лаппо Д.Д., Стрекалов С.С., Завьялов В.К. Нагрузки и воздействия ветровых волн на гидротехнические сооружения. Теория. Инженерные методы. Расчеты. Л.: ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1990. 433 с.
38. *Ibrahim R.A.* Assessment of breaking waves and liquid sloshing impact // *Nonlinear Dyn.* 2020.V. 100. P. 1837–1925.
39. *Cooker M.J., Peregrine D.H.* Violent motion as near breaking waves meet a vertical wall // *Breaking Waves*. IUTAM. Berlin: Springer, 1992. P. 291–297.
40. *Hull P., Müller G.* An investigation of breaker heights shapes and pressures // *Ocean Eng.* 2002. V. 29(1). P.,59–79.
41. *Bredmose H., Hunt-Raby A., Jayaratne R., Bullock G.N.* The ideal flip-through impact: experimental and numerical investigation // *J Eng Math.* 2010. V. 67. P. 115–136.

42. *Watanabe Y., Ingram D.M.* Transverse instabilities of ascending planar jets formed by wave impacts on vertical walls // Proc. R. Soc. 2015. V. A471: 20150397.
43. *Lugni C., Brocchini M., Faltinsen O.M.* Wave impact loads: the role of the flip-through // Phys. Fluids. 2006. V.18. 122101.
44. *Korkmaz F.C., Güzel B.* Insights from sloshing experiments in a rectangular hydrophobic tank // Exp. Therm. Fluid Sci. 2023. Vol. 146. 110920.
45. *Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Параметрическое возбуждение колебаний вязкой жидкости в замкнутом сосуде // ЖВММФ. 1993. Т. 33. № 4. С. 611-619.
46. *Калиниченко В.А., Лизаррага-Селайа К., Секерж-Зенькович С.Я.* О наблюдении стоячих волн большой амплитуды в условиях гармонического резонанса Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 185-188.
47. *Калиниченко В.А., Кравцов А.В., Родригес-Мижсангес Р., Секерж-Зенькович С.Я., Флорес-Эспиноза Р.* Гармоническая неустойчивость поверхности маловязкой жидкости в вертикально колеблющемся сосуде // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 285 - 292.
48. *Wolf G.W.* The dynamic stabilization of Rayleigh-Taylor instability and corresponding dynamic equilibrium // Z. Phys. 1969. V. 227. No. 3. P. 291-300.
49. *McEwan A.D., Robinson R.M.* Parametric instability of internal gravity waves // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. No. 4. P. 667-688.
50. *Калиниченко В.А.* Лабораторное исследование параметрической неустойчивости в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. № 2. С. 206-210.
51. *Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Тимофеев А.С.* Экспериментальное исследование поля скоростей параметрически возбуждаемых волн в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 161-166.

52. Калиниченко В.А. Развитие сдвиговой неустойчивости в приузловых областях стоячей внутренней волны // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 6. С. 140-149.
53. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. О возбуждении составных стоячих трехмерных волн на границе раздела двухслойной жидкости // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 4. С. 810-813.
54. Thorpe S.A. On standing internal gravity waves of finite amplitude // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. No. 3. P. 489 - 528.
55. Weddenburn E.M., Williams A.M. The temperature seishe // Trans. Roy. Soc. Edin. 1911. V. 47. No. 22 (4). P. 619-642.
56. Drazin P.G. On stability of parallel flow of incompressible fluid of variable density and viscosity // Proc. Camb. Philos. Soc. 1962. Vol. 58. P. 646-661.
57. Keulegan G.H. Interfacial instability and mixing in stratified flows // J. Res. Nat. Bur. Stand. 1949. V.43. P.487-500.
58. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости. М.: Мир, 1977. 432с.
59. Секерж-Зенькович Я.И. Составные стоячие волны конечной амплитуды на поверхности жидкости бесконечной глубины // Изв. АН СССР. Сер. Геофиз. 1951. № 5. С. 68-78.
60. Секерж-Зенькович Я.И. О составных установившихся гравитационных волнах конечной амплитуды // ПММ. 1969. Т. 33. №.4. С. 648-658.
61. Секерж-Зенькович Я.И. О составных установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды // ПММ. 1975. Т. 39. №.2. С. 298-305.
62. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. Экспериментальной исследование параметрического возбуждения поверхностных волн. Препринт № 243. М.: ИПМ АН СССР, 1985. 56 с.
63. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. Экспериментальное исследование массопереноса в стоячих внутренних волнах в двухслойной жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 3. С. 553-555.

64. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 141-148.
65. Longuet-Higgins M.S. Mass transport in water waves // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 245. P. 535-585.
66. Dore B.D. On mass transport induced by interfacial oscillations at a single frequency // Proc. Camb. Phil. Soc. 1973. V. 74. No. 2. P. 333-347.
67. Калиниченко В.А. Кинематика первой волновой моды Фарадея на боковой стенке прямоугольного сосуда // Изв. РАН. МЖГ. 2024. № 5. С. 15–24.

ГЛАВА 3. МЕТОД УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА

Теоретически и экспериментально обсуждается эффект локальных изменений глубины жидкости и ширины прямоугольного сосуда на характеристики стоячих поверхностных волн. Представлены результаты анализа колебаний жидкости в круговом цилиндре с возвышением на дне и в сосуде с треугольным основанием. Все расчетные оценки получены методом ускоренной сходимости в приближении мелкой воды.

3.1. Метод ускоренной сходимости для решения задачи Штурма-Лиувилля

В огромном множестве прикладных задач возникает необходимость решать задачу Штурма-Лиувилля. Несколько таких задач приведены ниже. Поскольку область применения задачи Штурма-Лиувилля весьма обширна, в настоящей главе подробно излагается метод ускоренной сходимости, разработанный приблизительно 30 лет тому назад. Приводятся примеры использования метода ускоренной сходимости при решении задач о стоячих волнах в сосудах с локальными геометрическими особенностями.

3.1.1. Постановка задачи Штурма-Лиувилля

Задача формулируется следующим образом. Требуется найти такие значения параметра λ , для которых существуют нетривиальные решения $u(x, \lambda)$ линейного уравнения второго порядка

$$\cdot \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + (\lambda r(x) - q(x))u = 0. \quad (3.1.1)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (3.1.2)$$

Здесь $p(x), r(x), q(x)$ – известные функции аргумента x , изменяющегося на единичном сегменте $x \in [0, 1]$. Эти функции предполагаются достаточно гладкими. Более того принимаем, что коэффициенты уравнения (3.1.1) удовлетворяют следующим неравенствам

$$0 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty; 0 < r^- \leq r(x) \leq r^+ < \infty;$$

$$0 \leq q(x) \leq q^+ < \infty (p^\pm, r^\pm, q^+ = \text{const})$$

Краевые условия (3.1.2) для уравнения (3.1.1) могут быть и другими, например,

$$u'(0) = u'(1) = 0$$

или

$$u(0) = 0, h_1 u(1) + h_2 u'(1) = 0 (h_1, h_2 \geq 0)$$

Искомые значения параметра λ принято называть *собственными числами* краевой задачи, а соответствующие им решения уравнения (3.1.1) *собственными функциями* (формами). Отметим, что математики предпочитают термин «собственные функции», тогда как физики и инженеры называют их «модами или формами».

Обоснование и вывод необходимых формул, реализующих метод ускоренной сходимости, приведены в монографии [1]. Ниже изложен алгоритм реализации метода с помощью систем Maple или Mathematica.

- 1) Каким-либо способом производится оценка сверху λ_1^* для первого собственного числа $\lambda_1 < \lambda_1^*$.

- 2) Наряду с задачей (3.1.1) решается задача Коши

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + (\lambda_1^* r(x) - q(x)) u = 0 \\ & u(0) = 0; u'(0) = 1 \end{aligned} \right\}. \quad (3.1.3)$$

Решение $u(x, \lambda_1^*)$ задачи Коши находится численно на сегменте $0 \leq x \leq 1 + \delta$, где δ – малое число. Следует подчеркнуть, что функция $u(x, \lambda_1^*)$ удовлетворяет краевому условию в точке $x = 0$.

- 3) Находится точка ξ , в которой $u(\xi, \lambda_1^*) = 0$. Согласно осцилляционным теоремам Штурма [2] при $\lambda_1^* > \lambda_1$ точка $\xi < 1$. Эта точка .. находится либо с помощью интерполяции, или уменьшением шага интегрирования задачи Коши. Поскольку $u(\xi, \lambda_1^*) = 0$, то решение задачи Коши является также решением задачи Штурма-Лиувилля, причем для

собственного числа λ_1^* и нетривиального решения $u(\xi, \lambda_1^*)$ выполняются краевые условия $u(0, \lambda_1^*) = u(\xi, \lambda_1^*) = 0$.

4) Вычисляется поправка к первому собственному числу

$$\lambda_{1(1)} = \lambda_1^* - \varepsilon p(1) \frac{u_1'^2(1, \lambda_1^*)}{\|u_1\|^2} \quad (3.1.4)$$

Здесь $\varepsilon = 1 - \xi$, а интеграл $\|u_1\|^2 = \int_0^1 u_1^2(x, \lambda_1^*) r(x) dx$ вычисляется с

помощью метода Симпсона, например. Как показано в [1] имеет место оценка

$$|\lambda_1 - \lambda_{1(1)}| \leq \varepsilon^2 M$$

где M – постоянная величина.

После получения уточненного значения собственного числа $\lambda_{1(1)}$, подставляем его в задачу Коши и повторяем цикл вычислений. Получим

$$\lambda_{1(2)} = \lambda_{1(1)} - \varepsilon_1 p(1) \frac{u_1'^2(1, \lambda_{1(1)})}{\|u_1\|^2} \quad (3.1.4)$$

Имеет место оценка

$$|\lambda_1 - \lambda_{1(2)}| \leq \varepsilon^4 M$$

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена требуемая точность.

5) После определения с требуемой точностью собственного числа λ_1 , его значение подставляется в задачу Коши (3.1.3) и численно находится соответствующая собственная функция. Чтобы найти последующие собственные числа и функции, определяем оценки сверху $\lambda_2^*, \lambda_3^*, \dots, \lambda_n^*$ и проводим все действия, описанные в пунктах 4-5.

3.1.2. Примеры

Чтобы продемонстрировать эффективность методы ускоренной сходимости, приведем несколько примеров.

Пусть дана задача Штурма-Лиувилля

$$u'' + \lambda(1 + \sin \pi x)u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (3.1.5)$$

Используя метод Релея-Ритца, находим оценку сверху ..5.33827. Интегрируя задачу Коши, получаем функцию $u_1(x, \lambda_1^*)$, которая имеет корень $\xi = 0.99942$; малый параметр $\varepsilon = 5.8 \cdot 10^{-4} \ll 1$. Вычисления уточненного значения приводят к результату $\lambda_{1(1)} = 5.33284$, который отличается от точного значения $|\lambda_1 - \lambda_{1(1)}| \leq 10^{-5}$.

Рассмотрим еще пример, допускающий точное аналитическое решение

$$u'' + \frac{\lambda}{(1+x^2)^2}u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (3.1.6)$$

В результате преобразований можно установить, что $\lambda_1 = 15$; $u_1(x, \lambda_1) = 2x(1-x^2)(1+x^2)^{-3/2}$ есть точное решение краевой задачи (3.1.6). При оценке сверху $\lambda_1^* = 15.33728$ получаем $\xi = 0.98383$, малый параметр $1.617 \cdot 10^{-2}$, 14.99719 ; при следующей итерации имеем $\lambda_{1(2)} = 15.000005$ и оценку $|\lambda_1 - \lambda_{1(2)}| < 10^{-7}$.

Аналогично находятся $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, но для каждого собственного числа должны быть найдены оценки сверху.

3.1.3. Краевые условия второго рода

Ниже показано, что в задачах гидродинамики реализуются краевые условия второго рода. Приведем все формулы, относящиеся к этому случаю.

Имеем следующую краевую задачу

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + (\lambda r(x) - q(x))u = 0 \\ \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.1.7)$$

Пусть λ_1^* – оценка первого собственного числа. Наряду с краевой задачей (3.1.7) решаем задачу Коши

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + (\lambda^* r(x) - q(x))u = 0 \\ u(0, \lambda^*) = 1; \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0 \end{array} \right\}. \quad (3.1.8)$$

Пусть $u_1(x, \lambda^*)$ – решение задачи (3.1.8). В левой граничной точке выполняется краевое условие $du_1(0, \lambda^*)/dx = 0$. Найдем точку ξ , в которой $du_1(\xi, \lambda^*)/dx = 0$; тогда функция $u_1(x, \lambda^*)$ будет решением задачи Штурма-Лиувилля

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + (\lambda^* r(x) - q(x))u = 0 \\ u'(0, \lambda^*) = 0; \quad u'(\xi, \lambda^*) = 0 \end{array} \right\} \quad (3.1.9)$$

Уточненное значение $\lambda_{1(1)}$ определяется следующим образом

$$\lambda_{1(1)} = \lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|u_1\|^2} [\lambda_1^* r(1) - q(1)] u_1^2(1) \quad (3.1.10)$$

$$\text{где } \varepsilon = 1 - \xi, \quad \|u_1\|^2 = \int_0^1 u_1^2(x, \lambda_1^*) r(x) dx.$$

Далее вычисления проводятся так, как это описано в предыдущих разделах.

В качестве примера приведем следующую краевую задачу

$$u'' + \frac{\lambda}{(1+x^2)^2} u = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0 \quad (3.1.11)$$

Отметим, что наименьшим собственным числом в случае краевой задачи (3.1.11) является $\lambda_0 = 0$. Этому собственному числу соответствует $u_0 = 1$. Проведя ряд простых преобразований, удается показать, что все собственные числа являются корнями следующего трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi \sqrt{\lambda+1}}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}} \quad (3.1.12)$$

Корни (3.1.12) являются собственными числами краевой задачи $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 17.416869848$. В качестве оценки сверху примем $\lambda_1^* = 18$. Решая задачу Коши и определив $\xi = 0.96875$, $\varepsilon = 0.03125$, находим $\lambda_{1(1)} = 17.41687084$.

3.1.4. Краевые условия третьего рода

Приведем формулы, позволяющие найти решение задачи Штурмана-Лиувилля, в которой задаются краевые условия третьего рода

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + (\lambda r(x) - q(x))u = 0 \\ & u(0) = 0; \quad u(0)h_1 + u'(0)h_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.13)$$

Решается вспомогательная задача Коши

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + (\lambda^* r(x) - q(x))u = 0 \\ & u(0) = 0; \quad u'(0) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.14)$$

Пусть $u(x, \lambda^*)$ есть решение задачи Коши (3.1.14), полученное численно или аналитически. С помощью этого решения составим функцию

$$E(x, \lambda^*) = h_1 u'(x, \lambda^*) + h_2 u(x, \lambda^*) \quad (3.1.15)$$

Затем определяем точку ξ , в которой функция $E(x, \lambda^*)$ обращается в нуль — $E(x, \lambda^*) = 0$; вводим малый параметр $\varepsilon = 1 - \xi$.

Далее находим уточненное значение собственного числа

$$\lambda_{1(1)} = \lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|u_1\|^2} \left[p(1)u_1'^2(1) + (\lambda_1^* r(1) - q(1))u_1^2(1) \right]$$

где $\|u_1\|^2 = \int_0^1 u_1^2(x, \lambda_1^*) r(x) dx$.

После этого проводятся последующие итерации до получения необходимой точности.

В качестве примера приведем краевую задачу с краевым условием третьего рода

$$u'' + \lambda(1 - 0.9 \sin \pi x)^{-1} u = 0, \quad u(0) = 0; \quad u(1) + 2u'(1) = 0$$

Используя в качестве оценки сверху для первого собственного числа $\lambda_1^* = 1.125$, интегрируем задачу Коши (3.1.14) и находим функцию $E(x, \lambda_1^*)$,

а также ее корень $\xi_1 = 0.93321$ и $\varepsilon = 6.679 \cdot 10^{-2}$. Последующие итерации приводят к $\xi = 0.999726$, $\varepsilon = 2.74 \cdot 10^{-5}$ и $\lambda_{1(4)} = 1.073440$.

3.1.5. Заключительные замечания

1. Выше описано применение метода ускоренной сходимости для тех случаев, когда в левой граничной точке даются нулевые краевые условия, налагаемые на решения дифференциального уравнения. Если в левой граничной точке задаются краевые условия третьего рода, например, следующего вида

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u(1) = 0 \quad (\alpha_0, \beta_0 \neq 0)$$

то следует задать начальные условия в вспомогательной задаче Коши таким образом $u(0) = 1$ и $u'(0) = -\alpha_0 / \beta_0$.

Все дальнейшие вычисления и рассуждения аналогичны описанным выше.

2. В разд. 3.1.1–3.1.5 подробно описана процедура определения первого собственного числа, однако не сказано как найти последующие собственные числа. Здесь кратко поясним, как это сделать.

После нахождения первого собственного числа λ_1 , производится оценка сверху второго собственного числа λ_2^* . Имеется очень простой способ установить, что это именно оценка сверху для второго собственного числа. Решение задачи Коши для λ_2^* обязательно должно иметь два корня на отрезке $[0,1]$: первый корень λ_1 и второй корень ξ , близкий к 1. Если это так, то все выше приведенные вычисления и рассуждения справедливы и пригодны для точного нахождения λ_2 . Определив λ_2 , переходим к нахождению λ_3 . Для этого λ_3^* подставляется в задачу Коши, решение которой должно иметь три корня — x_1, x_2 и ξ , близкий к 1. То же самое справедливо и для последующих собственных чисел. Следует понимать, что с увеличением номера собственного числа расстояния между корнями уменьшается. Поэтому с увеличением номера λ не исключена возможность перескока с одного собственного числа на другое.

3. Во всех разделах 3.1.1–3.1.5 явно не обсуждался способ нахождения собственных функций, соответствующих собственным числам. После

определения собственного числа λ_k оно подставляется в задачу Коши, и производится интегрирование. В результате получаем численное в виде таблицы или графическое представление собственной функции (моды/формы). Таким образом, для каждого собственного числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ получаются соответствующие собственные функции. Таблицы собственных функций позволяют проверить точность выполнения краевых условий в левой и правой граничных точках.

3.2. Длинные волны в прямоугольном канале с резким изменением рельефа дна и стенок

Исследования волновых движений жидкости в замкнутых бассейнах в форме длинных стоячих поверхностных волн – сейш – представляют несомненный интерес для решения ряда фундаментальных гидродинамических и многих прикладных задач [3–5]. Основными количественными характеристиками свободных колебаний водной массы являются легко измеряемые в натурных условиях периоды или частоты сейш, теоретические оценки которых затруднены из-за нерегулярности береговой линии и сложной топографии дна естественных водоемов. Поскольку сейши классифицируются как стоячие волны на свободной поверхности воды, то форму колебаний задают узловые линии, определение положения которых связано с рядом проблем при проведении натурных и теоретических исследований.

При оценке периода двумерных сейш в водоеме прямоугольной формы и постоянной глубины h_o часто используется формула Мериана [5, 6]

$$T_{n0} = 2\pi / \omega_{n0} = 2l / (n\sqrt{gh_o})$$

где T_{n0} и ω_{n0} – период и частота волновой моды номера n ; n – число узлов стоячей поверхности волны (сейши); l – длина бассейна; g – ускорение силы тяжести. На практике использование формулы Мериана дает вполне удовлетворительные результаты для бассейнов с простыми очертаниями в плане и незначительными изменениями глубины [5]. Однако погрешности расчета T_n возрастают до 25% при резком нарушении условия постоянства ширины и (или) площади $S = S_o = h_o d_o$ поперечного сечения бассейна.

При сложной геометрии береговой линии и дна для реальных водоемов в лимнологии разработаны различные расчетные схемы, среди которых отметим методы Дюбуа, Кристала, Дефанта, Праудмэна [4, 5, 7].

К наиболее продуктивным относится метод Дефанта, детально описанный в [8] и использованный при анализе первых четырех сейшевых мод в замкнутом водоеме, состоящем из длинного узкого канала, соединенного с широким бассейном [9].

При расчете сейш методом Дефанта план замкнутого водоема разбивается на приблизительно равные участки; для каждого поперечного сечения при начально заданном периоде сейш рассчитывается расход и величина изменения уровня воды. При правильном выборе периода сейш на концах водоема в пучностях волны расход равен нулю, в узловой линии его величина максимальна. Уровень будет иметь наибольшие значения в пучностях волны. Расчеты продолжаются при постепенном изменении периода до тех пор, пока не будут выполнены указанные условия для расхода и изменения уровня.

Отметим значительные погрешности метода Дефанта при наличии на обоих или даже на одном конце бассейна обширных отмелей [5].

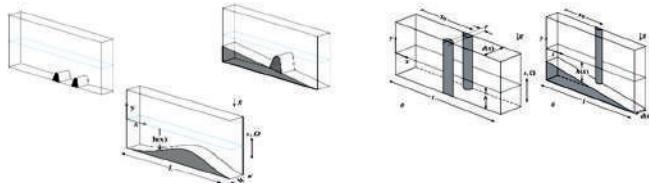


Рис. 3.1. Геометрия прямоугольного сосуда с локальными особенностями дна и стенок.

Ниже в настоящем разделе теоретически и экспериментально обсуждается эффект локальных изменений глубины жидкости и ширины прямоугольного сосуда на характеристики стоячих поверхностных волн [10–12] – см. рис. 3.1.

3.2.1. Постановка задачи и алгоритм численно-аналитического метода

Согласно [3] при формулировке задачи о собственных колебаниях тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в протяженном водоеме длины

1 предполагаем, что его переменное прямоугольное сечение ортогонально оси x (рис. 3.2) и имеет площадь $S = S(x) = d(x)h(x)$, $0 \leq x \leq l$.

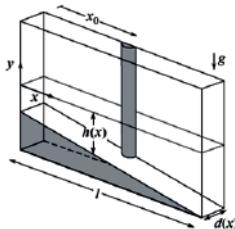


Рис. 3.2. Постановка задачи.

Здесь $d(x)$ - переменная ширина канала, $h(x)$ - глубина, отсчитываемая от верхнего уровня покоящейся жидкости; соответствующая система координат (x, y) показана на рис. 3.2.

Лицевая (тыльная) стенка и дно канала могут содержать участки резкого изменения (сужения / расширения и возвышения / углубления), которые должны быть адекватно описаны соответствующими зависимостями $d(x)$ и $h(x)$. Канал предполагается достаточно мелким, что в реальных условиях для определения давления p внутри жидкости позволяет использовать гидростатическое приближение

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0 + \rho g (\eta - y), \\ p(x, t) &= p_0, \quad \eta \leq y \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Здесь $\eta = \eta(x, t)$ - возвышение жидкости, ρ - плотность жидкости, y - вертикальная координата, p_0 - постоянное атмосферное давление.

Из соотношения (3.2.1) находится выражение для градиента давления

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta \geq y \\ \frac{\partial p}{\partial x} &\equiv 0, \quad y > \eta \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Отсюда следует, что частицы жидкости в каждый момент времени t остаются в сечении x . Горизонтальная компонента u вектора скорости - функция x, t . Из уравнений Эйлера в линейном приближении следует [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.2.3)$$

Отметим, что при выводе уравнения (3.2.3) использовано выражение (3.2.2) для $\partial p / \partial x$.

Соответствующее уравнение неразрывности принимает вид [3]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{d(x)} \frac{\partial (S(x)u)}{\partial x}, \quad t \geq t_o, 0 \leq x \leq l \quad (3.2.4)$$

Исключив стандартным образом неизвестную u из (3.2.3) и (3.2.4), уравнение волновых движений жидкости представляется в виде

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{g}{d(x)} \frac{\partial}{\partial x} (S(x) \frac{\partial \eta}{\partial x}) \quad (3.2.5)$$

Для решения уравнения (3.2.5) представляет интерес задача на собственные значения (частоты колебаний жидкости) и собственные функции (профили свободной поверхности) [3, 4]. Для волн типа сейш торцы канала $x=0, l$ ограничиваются жесткими вертикальными стенками, на которых выполняются краевые условия непротекания

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x=l} = 0, \quad t \geq t_o \quad (3.2.6)$$

Ищем периодические решения краевой задачи в виде функции $\eta(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$, после подстановки которой в (3.2.5), (3.2.6) получим

$$\frac{d}{dx} \left(d(x) h(x) \frac{dW}{dx} \right) + \frac{d(x) \omega^2}{g} W = 0, \quad W'(0) = W'(l) = 0 \quad (3.2.7)$$

Если $h(x) = h_0, d(x) = d_0$, то из (3.2.7) имеем аналитическое решение, отвечающее соответствующим модам стоячих волн

$$\lambda_n = \frac{\omega^2 l^2}{g h_0} = (\pi n)^2, \quad W_n(x) = A \cos \frac{\pi n}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Для решения задачи в случае локальных нерегулярностей $h(x) \neq h_0, d(x) \neq d_0$ на дне и боковых стенах воспользуемся высокоточным численно-аналитическим методом ускоренной сходимости [1].

Рассматриваемая краевая задача на собственные значения и функции приводится к виду

$$\frac{d}{dx} \left(d(x) h(x) \frac{dW}{dx} \right) + d(x) \lambda_n W = 0, \quad W'(0) = W'(1) = 0 \quad (3.2.8)$$

Здесь x , d и h – нормированные на l , d_0 и h_0 горизонтальная координата, ширина и глубина, соответственно. Искомый параметр λ_n связан с частотой ω соотношением

$$\lambda_n = \frac{\omega^2 l^2}{g h_0} = (\pi n)^2$$

Для определения собственных значений λ_n и функций $W_n(x)$. задачи (3.2.8) с граничными условиями типа Неймана (второго рода) применим теорию Штурма - Лиувилля и алгоритм ускоренной сходимости [1].

Отметим, что решению нулевой моды отвечают $\lambda_0 = 0$, $W_0(x) \equiv \text{const}$, в частности $W_0(x) \equiv 0$. Последующие моды $n = 1, 2, \dots$ колебаний требуют высокоточного решения краевой задачи на собственные значения λ_n и собственные функции W_n . Они строятся ниже для используемых в эксперименте особенностей стенок и дна сосуда.

Алгоритм метода заключается в последовательном уточнении величины λ_n на основе невязки $\varepsilon = 1 - \xi$ ($|\varepsilon| \ll 1$) по оси абсцисс для соответствующего n узла ξ функции $W'_n(x)$ и известной производной $\lambda'_n(\xi)$ – рис. 3.3.

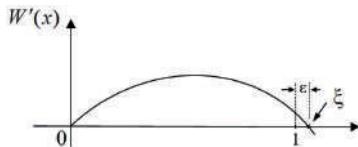


Рис. 3.3. Алгоритм метода ускоренной сходимости [1].

Расчету собственных значений λ_n или частот ω_n сопутствует построение функций $W_n(x)$. Эти функции удовлетворяют граничным условиям с требуемой точностью для заданных функций $d(x)$, $h(x)$ и номера моды n , см. [1].

Далее изложенная численно-аналитическая модель используется для описания длинных волн на свободной поверхности жидкости в прямоугольном сосуде с различными локальными особенностями дна и стенок.

3.2.2. Локальные особенности дна

Исследуем собственные колебания жидкости в канале при наличии резких существенных возвышений и углублений дна, рис. 3.4; вихревые движения жидкости не учитываются. Приведем уравнение (3.2.7) к безразмерному виду, предполагая ширину канала постоянной и стенки плоскопараллельными на длине l канала. Тогда параметр d сокращается, а краевая задача на собственные значения и функции приводится к виду

$$(h(x)W)' + \lambda W = 0; \\ W'(0) = W'(l) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.2.9)$$

Здесь $\eta \square W(x)e^{i\omega t}$; x , h – нормированные на l и h_0 горизонтальная координата и глубина, соответственно. Искомый параметр λ связан с частотой соотношением

$$\lambda = \omega^2 l^2 (gh_0)^{-1} \quad (3.2.10)$$

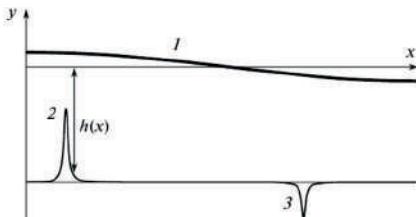


Рис. 3.4. Сейши 1 в канале длины l над резким локальным возвышением 2 или углублением 3 дна.

Для определения собственных значений λ_n и функций $W_n(x)$ с граничными условиями второго рода (типа Неймана) применим теорию Штурма-Лиувилля и алгоритм ускоренной сходимости [1]. Ограничимся случаем одного возвышения или углубления, которые описываются трехпараметрическим семейством функций

$$h = h(x - x_0; a, c) = 1 - \frac{ac}{a^2 + (x - x_0)^2}, \quad 0 < x_0 < 1; -\infty < c/a < 1 \quad (3.2.11)$$

Согласно (3.2.11) экстремальные отклонения Δh рельефа дна достигаются при $x = x_o$ и равны c/a . Поскольку возвышение имеет место при $c/a > 0$, а углубление при $c/a < 0$, то из условия положительной глубины $h > 0$ следует неравенство $ch < 1$, а углубление ($c < 0$) может быть неограниченным: $c/h > -\infty$. Ограничимся ситуацией $(|a|, |h|) \ll 1$, что соответствует относительно узким, но достаточно высоким возвышениям ($0 < c/a < 1$) и глубоким понижениям ($-\infty < c/a < 0$) дна, сравнимым с единицей (рис. 3.4). Площадь $\sigma(a, c) \approx \pi c$ аппроксимирующего треугольника принимается достаточно малой. Заметим, что производная $h'(x - x_o; a, c)$ в уравнении (3.2.9) может быть сколь угодно большой, например, $h' \ll a^{-1}$ для $|x - x_o| \ll a$ ($a \ll 1$). Это потребует дополнительных мер для обеспечения высокой точности расчетов при решении задачи Штурма-Лиувилля 2-го рода.

Сходным с (3.2.11) образом можно описать нерегулярности рельефа дна, представляющие теоретический и прикладной интерес. В частности, с помощью малопараметрического семейства функций задаются линейные или близкие к ним наклоны, Г-образные уступы, П-образные или полиномиальные возвышения и углубления, волновые изменения дна и многие другие топографические формы.

Вычисление частот главной волновой моды. Отметим, что решению нулевой моды отвечают $\lambda_0 = 0$, $W_0(x) \equiv \text{const}$, в частности $W_0(x) \equiv 0$. Последующие моды колебаний $n = 1, 2, \dots$ требуют высокоточного решения краевой задачи на собственные значения λ_n и функции W_n или частоты $\omega_n = \lambda_n^{1/2}$ и формы $W_n^* = W_n \|W_n\|^{-1}$. Они строятся ниже для допустимых значений $x_0 \in (0, 1)$ и некоторого множества параметров a, c с точностью $O(10^{-6})$.

Алгоритм метода ускоренной сходимости разработан авторами и неоднократно применялся при исследованиях сложных волновых задач гидродинамики и теории упругости [1]. Он заключается в последовательном уточнении величины λ_n на основе невязки

$\varepsilon = 1 - \xi$ ($|\varepsilon| \ll 1$) по абсциссе для соответствующего n узла ξ функции $W'_n(x)$ и известной производной $\lambda'_n(\xi)$.

В табл. 3.1 приведены семейства значений $\omega_1(x_o; a, c)$ с аргументом x_o и показательными значениями параметров $a = 10^{-2}$, c_i ($i = 1 - 4$). Отметим, что зависимость ω_1 симметрична относительно $x_o = 0.5$. Значению параметра $c_1 = 3 \times 10^{-3}$, $c_1/a = 0.3$ отвечает относительно невысокое возвышение дна. Далее, при $c_2 = 4 \times 10^{-3}$, $c_2/a = 0.4$ имеем среднее по величине возвышение, а случай $c_3 = 7 \times 10^{-3}$, $c_3/a = 0.7$ условно соответствует значительному возвышению, сравнимому с характерной нормированной глубиной. Значение $c_4 = -3 \times 10^{-3}$, $c_4/a = -0.3$ определяет сравнительно неглубокое по сравнению с $h_0 = 1$ понижение дна или локальное увеличение глубины.

Таблица 3.1

x_0	ω_1			
	$c_1 = 0.003$	$c_1 = 0.004$	$c_1 = 0.007$	$c_1 = -0.003$
0.05	3.1402	3.1396	3.1372	3.1427
0.10	3.1377	3.1361	3.1282	3.1445
0.15	3.1340	3.1306	3.1144	3.1472
0.20	3.1293	3.1238	3.0972	3.1506
0.25	3.1240	3.1163	3.0787	3.1544
0.30	3.1190	3.1090	3.0608	3.1582
0.35	3.1144	3.1024	3.0453	3.1616
0.40	3.1108	3.0973	3.0333	3.1643
0.45	3.1085	3.0940	3.0257	3.1661
0.50	3.1077	3.0929	3.0232	3.1667

Семейство графиков $\omega_1(x_o; a, c_i)$ для полного интервала $x_0 \in (0, 1)$ представлено на рис. 3.5. Видно, что повышение дна приводит к уменьшению частоты ω_1 . На торцевых стенках канала отмеченные эффекты практически не сказываются; они наиболее значительны в середине ($x_o = 0.5$), отвечающей узлу первой моды колебаний стоячей волны.

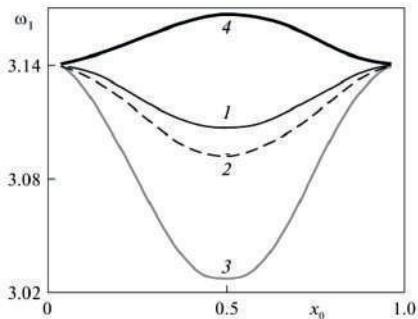


Рис. 3.5. Зависимость собственных частот первой волновой моды от локализации неоднородности дна: 1-4 – $c/a = 0.3, 0.4, 0.7, -0.3$.

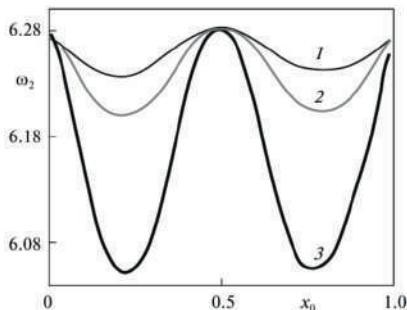


Рис. 3.6. Зависимость собственных частот второй волновой моды от локализации неоднородности дна: 1-3 – $c/a = 0.3, 0.4, 0.7$.

На рис. 3.6 показано семейство графиков $\omega_2(x_0; a, c_i)$ для второй моды стоячих волн. Из него следует более резкое изменение собственных частот. Как и в случае первой моды, наибольшее изменение наблюдается в окрестности узлов волны, а в пучностях они незначительны. Таким образом, наличие возвышения дна приводит к уменьшению собственных частот, а углубления – к увеличению. В областях пучностей они практически совпадают со случаем невозмущенных колебаний. Частоты при наличии углубления увеличиваются на полуинтервалах $0 < x_0 < 0.5$ и $0.5 < x_0 < 1$ аналогично кривым на рис. 3.5.

Расчет последующих мод ($n \geq 3$) сейшевых волн свидетельствуют о сходном поведении собственных частот ω_n в зависимости от координаты x_0 локализации возвышения или углубления.

Установлены следующие общие закономерности. Сейши в канале обладают простым частотным спектром, периодически зависящим от координаты x_0 локализации возвышения или углубления.

Число минимумов или максимумов (полуволн функции ω_n) по x_0 равно номеру моды $n \geq 1$. Величины этих экстремальных значений возрастают с увеличением n .

Повышения или понижения рельефа дна по сравнению с характерным его уровнем приводят, как показано выше, к уменьшению или увеличению собственных частот, соответственно, причем величина изменения частоты зависит от c/a . Однако простая пропорциональность отсутствует.

Посредством рассмотренных моделей и соответствующих алгоритмов достаточно просто исследуются случаи наличия нескольких возвышений и углублений типа (3.2.11). Эти нерегулярности могут идти подряд или располагаться в произвольной последовательности. Как следует из вышеизложенного, наличие особенностей рельефа приводит к тонким структурам при определении частот и форм.

Построение собственных функций волновых движений. Расчету собственных значений λ_n или частот ω_n сопутствует построение функций $W_n(x)$. Эти функции удовлетворяют граничным условиям с требуемой точностью для заданных значений x_0, a, c и номера моды n [1].

Приведем расчеты собственной функции W_1 и ее производной W'_1 для аргумента $0 \leq x \leq 1$ и параметров $a = 10^{-2}, b = 3 \times 10^{-3}$ и двух значений $x_0 = 0.2, 0.5$ точки локализации возвышения. Отметим, что его относительная высота $c/a = 0.3$.

На рис. 3.7 представлены графики, отвечающие указанным значениям параметров. Они обладают следующими основными свойствами.

Вследствие малой площади возмущения σ поведение собственной функции W_1 визуально совпадает с отрезком полуволны косинусоиды, т.е. с невозмущенным решением.

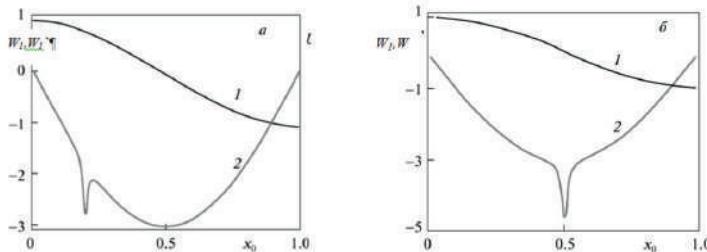


Рис. 3.7. Собственная функция $W_1(x)$ (1) и ее производной $W_1'(x)$ (2) первой волновой моды для двух значений (a, δ) $x_0 = 0.2, 0.5$ точки локализации возвышения: $a = 10^{-2}, b = 3 \times 10^{-3}$.

В малой окрестности локализации возмущающего возвышения наблюдается более резкое изменение наклона касательной. Оно отсутствует при $x_0 = 0, 1$ и увеличивается при $x_0 \rightarrow 0.5$.

Зависимость угла наклона касательной от величины и координаты x_0 наглядно проявляется для кривых W_1' с областями резкого изменения рельефа дна.

Экспериментальное подтверждение. Проведена серия экспериментов по выявлению эффекта резкого изменения рельефа дна на характеристики стоячих волн.

Для моделирования сейшевых колебаний воды над возвышением дна использовалась первая мода ($n = 1$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде ($50 \times 4 \times 40$ см), совершающем гармонические колебания в вертикальном направлении [6]. Возбуждение волн осуществлялось при основном резонансе Фарадея, когда частота возбуждаемых волн в 2 раза меньше частоты колебаний сосуда Ω . При фиксированной амплитуде колебаний сосуда $s = 2.5$ см вариации Ω обеспечивали изменения высоты волны H от 0.5 до 2 см. Глубина жидкости во всех экспериментах составляла $h = 7$ см, что при длине волны $\lambda = 100$ см определяло значение $h/\lambda = 0.07$. Для регистрации волновых движений жидкости использовалась видеосъемка со скоростью 30 к/с в системе отсчета, связанной с колеблющимся сосудом. Измерения периода колебаний сосуда проводились с точностью до 2 мс.

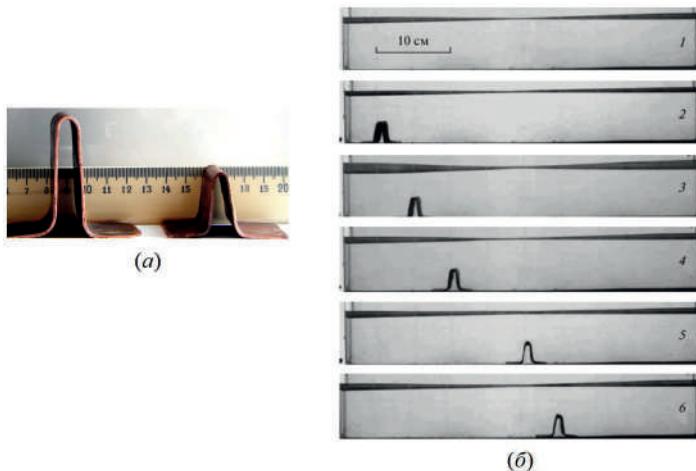


Рис. 3.8. (а) Данные возвышения, используемые в эксперименте. (б) Огибающие волновых профилей при отсутствии (1) и наличии (2-6) возвышения на дне сосуда.

Для выявления эффекта рельефа дна на первую волновую моду в эксперименте использовались возвышения различных размеров и форм, изготовленные из 1 мм листовой меди рис. 3.8 а. Поскольку исследовались двумерные колебания жидкости, то все препятствия имели фиксированный поперечный размер 3.9 см и по ширине перекрывали сосуд. Первое малое возвышение (см. кадр 5 на рис. 3.8 б) высотой $h_1 = 3.6$ см имело ширину 3 см в основании и 1 см в верхней окружной части при расположении боковых сторон под углом 10° к вертикали. Второе препятствие имело те же горизонтальные размеры, но его высота составляла 5.6 см. Таким образом, относительная высота h_1/h донных выступов составляла 0.5 и 0.8, соответственно.

В экспериментах оценивалась частота длинных стоячих волн и строились огибающие свободной поверхности жидкости при изменении положения препятствия. Для минимизации нелинейных эффектов измерения проводились при малой крутизне возбуждаемых волн. Отметим также, что при проведении опытов малая крутизна волн исключала вихреобразование и отрывы волнового потока с возвышений дна.

На фиг. 3.8 б приведены профили волн для случая $h_1/h = 0.5$. Кадр 1 отвечает волновым огибающим при гладком горизонтальном дне - изменения рельефа дна отсутствуют. Анализ приведенных данных позволяет сделать вывод о том, что возбуждаемая волна частоты $\omega = 4.833 \text{ c}^{-1}$ относится к регулярной стоячей волне малой крутизны $H/\lambda = 0.011$. Если пучности волны располагаются на торцевых стенках сосуда, то в центре четко локализуется ее узел. При наличии возвышения, расположенного на расстоянии $x_0 = 6.3, 10.6$ и 16 см от левой торцевой стенки волновая картина практически не изменяется (2-4). Аналогично (1) наблюдаемые волны классифицируются как регулярные стоячие волны крутизны $0.008, 0.02$ и 0.012 . Однако в отличие от (1) их частота уменьшается соответственно $\omega = 4.818, 4.781, 4.703 \text{ c}^{-1}$ при увеличении x_0 . При $x_0 = 25.6$ см (возвышение в центре сосуда или под узлом волны) кроме уменьшения частоты $\omega = 4.675 \text{ c}^{-1}$ на кадре 5 видно расхождение верхней и нижней огибающих профиля при крутизне 0.011 . Это свидетельствует о значительном влиянии относительно малого возвышения на форму стоячей волны, проявляющемся в колебаниях узловой точки. После прохождения середины сосуда $x_0 = 30.2$ см, волна на кадре 6 имеет крутизну 0.008 , и ее частота $\omega = 4.704 \text{ c}^{-1}$ увеличилась по сравнению с (5).

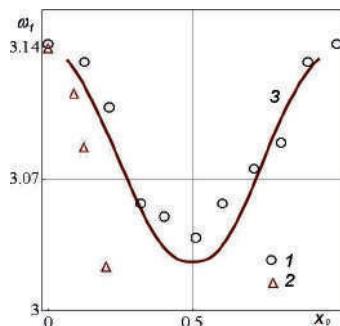


Рис. 3.9. Зависимость частоты первой волновой моды от локализации неоднородности дна: 1-2 – $h_1/h = 0.5, 0.8$; 3 – расчет, кривая 3 на рис. 3.6.

На рис. 3.9 приведены экспериментальные данные (1) о зависимости безразмерной частоты ω_1 описанной выше первой волновой моды от относительного положения малого возвышения. Нормировка проведена на

частоту волны в случае гладкого горизонтального дна (рис. 3.8, *1*) и на длину сосуда $L = 50$ см, соответственно. Видно, что при смещении возвышения от торцевой стенки к середине сосуда частота уменьшается и достигает минимума в центре. Этот результат полностью подтверждает основной вывод рассмотренной выше теоретической модели. Для количественного сравнения на рис. 3.9 приведена рассчитанная зависимость (3), отвечающая случаю $c/a = 0.7$ – кривая (3) на рис. 3.6.

В случае $h_1/h = 0.8$ влияние положения возвышения на частоту первой волнной моды проявляется значительно ярче. Так, изменение $x_0 = 4.5$ см на $x_0 = 6.2$ см приводит к уменьшению частоты $\omega = 4.796 \text{ c}^{-1}$ на $\omega = 4.752 \text{ c}^{-1}$ при сохранении формы стоячей волны и соответствующих малых крутизнах $H/\lambda = 0.02, 0.011$. Однако в интервале $10.5 < x_0 < 40$ см волну возбудить не удалось. Данный результат свидетельствует о существенном влиянии большого возвышения на геометрию сосуда и связанные с этим условия генерации волны. На рис. 3.9 данные (2) описывают уменьшение частоты при смещении препятствия к центру сосуда для $x_0 \leq 10.5$ см.

Таким образом, экспериментально показано уменьшение частоты первой волновой моды в прямоугольном сосуде при смещении одиночного донного возвышения с $h_1/h = 0.5$ и 0.8 к узлу волны (к центру сосуда).

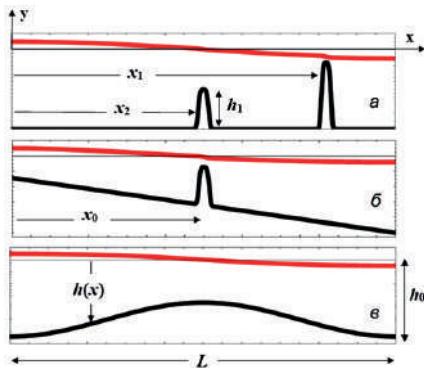


Рис. 3.10. Стоячие волны в канале с различной топографией дна: *а* – два возвышения; *б* – возвышение на линейной отмели; *в* – COS-образное дно.

Проведена серия экспериментов, в которых для моделирования сейшевых колебаний воды над локальными нерегулярностями дна

применялась первая и вторая моды ($n = 1, 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности жидкости в прямоугольном сосуде размерами ($L=50$ см, $W=4$ см), совершающем гармонические колебания в вертикальном направлении. Возбуждение волн осуществлялось при основном резонансе Фарадея. При фиксированной амплитуде колебаний сосуда $s=1.1$ и 2.5 см вариации Ω обеспечивали изменения высоты волны H от 0.5 до 2 см. Глубина жидкости во всех экспериментах составляла $h_0 = 7$ см, что при длинах волны $\lambda=50$ и 100 см первых двух мод $n=1, 2$ определяло значения $h_0/\lambda = 0.14$ и 0.07 соответственно. Дно канала содержит участки изменения глубины жидкости $h(x)$ различного вида - рис. 3.10.

Для выявления эффекта рельефа дна на волны в эксперименте использовались возвышения различных размера и формы (рис. 3.11), изготовленные из 1 мм листовой меди (1, 2) и технического пластилина (3, 4). Поскольку исследовались двумерные колебания жидкости, то все препятствия имели фиксированный поперечный размер 3.9 см и по ширине перекрывали сосуд. Их относительная высота составляла $h_{1\max} / h_0 = 0.8, 0.5, 0.37, 0.23$.

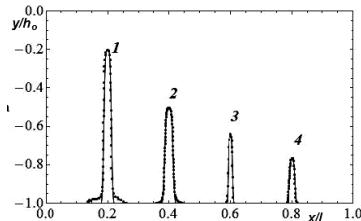


Рис. 3.11. Форма четырех возвышений; показаны результаты оцифровки их профиля и соответствующие графики функций: 1-4 - $h_{1\max} = 5.6, 3.6, 2.6, 1.6$ см; $h_0 = 7$ см.

Для выявления эффекта рельефа дна на волны в эксперименте использовались возвышения различных размера и формы (рис. 3.11), изготовленные из 1 мм листовой меди (1, 2) и технического пластилина (3, 4). Поскольку исследовались двумерные колебания жидкости, то все препятствия имели фиксированный поперечный размер 3.9 см и по ширине

перекрывали сосуд. Их относительная высота составляла $h_{1max} / h = 0.8, 0.5, 0.37, 0.23$.

На рис. 3.11 показаны использованные в экспериментах возвышения и графики аппроксимирующих их функций $h_l(x-x_0) / h_0 = 1 + A^* e^{-B^*(x-x_0)^4}$. Значения параметров функций для каждого возвышения представлены ниже.

Возвышение	Высота h_{1max} (см)	A^*	B^*
1	5.6	0.80	2.95×10^7
2	3.5	0.50	2.00×10^7
3	2.6	0.37	18.55×10^7
4	1.6	0.23	9.38×10^7

Рассмотрим сначала влияние двух возвышений на горизонтальном дне сосуда на волновое движение жидкости (рис. 3.10 *a*).

Положения возвышений 1, 2 задавались координатами x_1 и x_2 , при которых определялись частоты волновых мод. В экспериментах координата x_2 фиксирована, а x_1 варьировалась по длине сосуда.

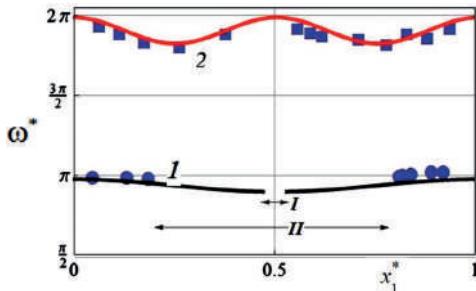


Рис. 3.12. Зависимость частоты первой 1 и второй 2 волновых мод от горизонтальной координаты x_1^* возвышения: I, II – зоны отсутствия возбуждения первой волновой моды, модель и эксперимент, соответственно.

Данные эксперимента и результаты расчетов безразмерной частоты первой и второй волновых мод $\omega_n^* = \omega_n L / \sqrt{gh_0}$ в зависимости от относительного положения $x_1^* = x_1 / L$ приведены на рис. 3.11. Видно, что

при фиксированных положениях малого возвышения $x_2^* = x_2 / L = 0.5$ и 0.43 для $n=1$ и 2 вариации x_1^* приводят к значительным изменениям ω^* .

В случае второй моды перемещение возвышения I от боковой стенки сосуда к его центру приводит сначала к уменьшению частоты, причем минимум достигается под узлами волны. Затем частота увеличивается и достигает максимума при расположении возвышений вблизи центра сосуда. Аналогичный результат дает и численно-аналитическая модель.

Влияние положения возвышения I на частоту первой волнной моды проявляется значительно ярче. Так, в эксперименте выявлен диапазон I значений $0.201 < x_1^* < 0.788$ этого возвышения, для которого волновое движение жидкости полностью подавляется. Данный результат свидетельствует о существенном влиянии большого возвышения на геометрию сосуда и связанные с этим условия генерации волны. Результаты численной модели подтверждают выявленный экспериментально эффект, хотя рассчитанный диапазон I подавления волн $0.475 < x_1^* < 0.528$ несколько уже наблюдаемого в опытах.

Наличие локальных возвышений на дне сосуда сказывается не только на частоте волн, но и на волновых профилях. На рис. 3.13 для указанных мод ($n=1, 2$) приведены огибающие свободной поверхности, полученные в экспериментах (a, c) и расчетах (b, d), а также собственных функций $W(x)$ и их производных $W'(x)$ (e, e). В случае первой моды $x_1=46$ см, $x_2=25$ см (рис. 3.13 a) измеренная частота волны составляет $\omega_1 = 4.763$ с^{-1} , соответствующая при ровном горизонтальном дне $\omega_1 = 4.856$ с^{-1} . Помещенное вблизи правой пучности локальное препятствие обуславливает незначительные возмущения свободной поверхности (a, b), тогда как производная собственной функции $W'(x)$ имеет два локальных экстремума (e), отвечающих нерегулярностям дна с координатами (x_1, x_2).

Для второй моды расположение нерегулярностей $x_1=35.5$, $x_2=21.5$ см привело к снижению частоты $\omega_2 = 8.18$ с^{-1} по сравнению с гладким дном, для которого $\omega_2=8.49$ с^{-1} . Расположение большого возвышения под

узлом стоячей волны приводит к значительным возмущениям свободной поверхности (σ , δ) и к резкому изменению наклона касательной $W'(x)$.

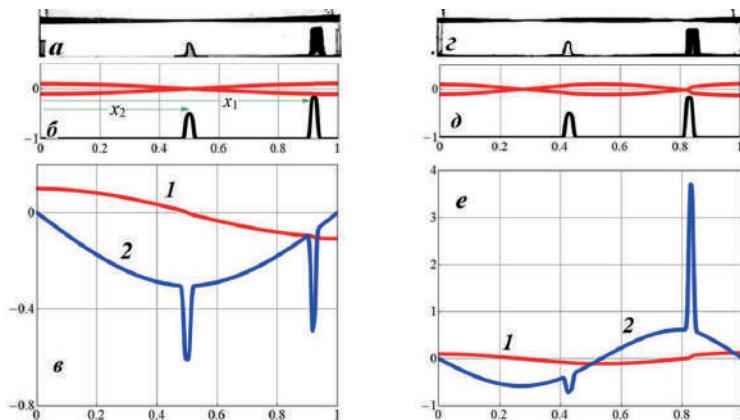


Рис. 3.13. Наблюдаемые в эксперименте (*a*, *г*) и рассчитанные (*б*, *д*) огибающие свободной поверхности для первой и второй волновых мод, а также графики (*в*, *е*) собственных функций $W(x)$ (1) и их производных $W'(x)$ (2): (*а-в*) – $n = 1$, $x_1 = 46$ см, $x_2 = 25$ см, $\omega_1 = 4.76$ с⁻¹; (*г-е*) – $n = 2$, $x_1 = 41.5$ см, $x_2 = 21.5$ см, $\omega_2 = 8.18$ с⁻¹; 1, 2 – графики функций $W(x)$, $W'(x)$.

Проведена серия экспериментов по изучению влияния линейной отмели и расположенного на ней отдельного возвышения – рис. 3.10 *б*. Отметим, что в данном случае влияние резкого одиночного возвышения на волновую картину в известной авторам литературе не исследовалось.

Используемая в экспериментах отмель имела уклон 5:50 или 0.1. На отмели помещались одиночные возвышения 2-4 (рис. 3.11), положение которых задавалось координатой x_0 , отсчитываемой от левой торцевой стенки. Оценивались частота и высота первой волновой моды в зависимости от типа и положения возвышения на отмели.

Рассмотрим изменение волновых колебаний жидкости при различной топографии дна – рис. 3.14.

При гладком горизонтальном дне (1) возбуждаемая волна частоты $\omega = 4.73$ с⁻¹ относится к регулярной первой моде малой крутизны

$H/\lambda \approx 0.0086$. Если пучности волны располагаются на торцевых стенках сосуда, то в центре локализуется ее узел.

В случае линейной отмели (2) частота возбуждаемой волны малой крутизны составляла $\omega = 3.92 \text{ c}^{-1}$, причем на правой стенке (глубокая вода) высота достигала $H = 0.66 \text{ см}$, а на левой стенке (мелкая вода) - $H = 0.95 \text{ см}$. Пучности также располагаются на торцевых стенках сосуда, однако происходит относительное размытие огибающих в области узла.

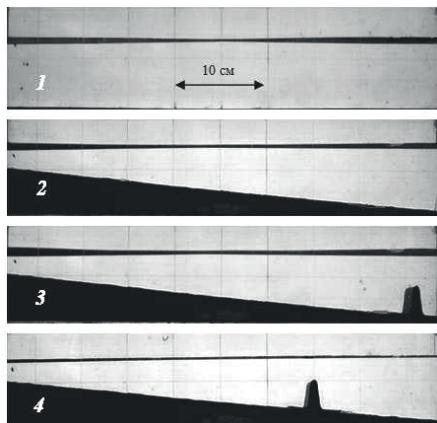


Рис. 3.14. Огибающие свободной поверхности в случае первой волновой моды над горизонтальным дном (1), линейной отмелью (2) и возвышением 2 (рис. 3.11) на наклонной дне (3,4) с координатами $x_0 = 47$, 35 см.

При наличии возвышения 2 на наклонном дне $x_0 = 47 \text{ см}$ волна также имеет малую крутизну и частоту $\omega = 3.90 \text{ c}^{-1}$ (3). На правой стенке (глубокая вода) высота достигала $H = 0.72 \text{ см}$, а на левой стенке (мелкая вода) - $H = 0.90 \text{ см}$. Перемещение этого выступа в точку $x_0 = 35 \text{ см}$ (4) приводит к дальнейшему уменьшению частоты $\omega = 3.80 \text{ c}^{-1}$; высота волны на правой стенке $H = 0.21 \text{ см}$ и на левой стенке $H = 0.34 \text{ см}$. Анализ огибающих свободной поверхности (построены при наложении волновых профилей за время десяти периодов волны при скорости видеосъемки 15 к/с) в этом случае практически не выявляет узловую точку. Эксперименты

показывают, что волна не возбуждается при дальнейшем смещении возвышения к левой боковой стенке сосуда, т.е. при уменьшении x_0 .

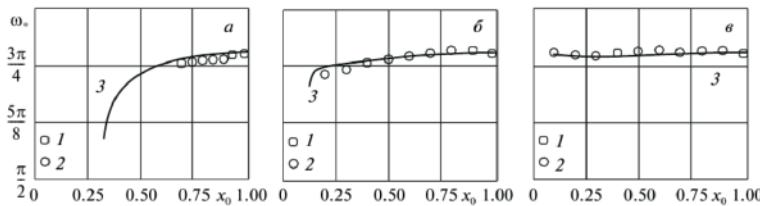


Рис. 3.15. Зависимость частоты первой волновой моды от локализации неоднородности дна: $a-b - h_{lmax} / h_0 = 0.5, 0.37, 0.23$: 1 - линейное дно; 2 - эксперимент; 3 - результаты расчета.

На рис. 3.15 приведены экспериментальные данные 2 зависимости безразмерной частоты ω^* описанной выше первой волновой моды от относительного положения $x_0^* = x_0 / L$ трех возвышений разной высоты. Нормировка проведена на частоту волны в случае гладкого горизонтального дна (рис. 3.14, 1) и на длину сосуда, соответственно. Экспериментальные данные 1 отвечают безразмерной частоте возбуждаемой волны для линейной отмели.

Видно, что при смещении возвышения от правой торцевой стенки к левой стенке частота уменьшается. Этот результат полностью подтверждает основной вывод рассмотренной выше теоретической модели. Для количественного сравнения на рис. 3.15 приведена рассчитанная зависимость 3.

Поскольку исследуемые в эксперименту стоячие волны возбуждались при параметрическом резонансе, то рассмотрим их резонансные зависимости $H(\Omega)$ как интегральную характеристику волн Фарадея – см. гл. 2.

Сравнение резонансных зависимостей $H(\Omega)$ первой моды стоячих волн в сосуде с горизонтальным дном и линейной отмелю (рис. 3.16 а) показывает значительный относительный сдвиг (15-20%) в низкочастотную область. Отметим также трехкратное уменьшение высоты волн в случае наклонного дна.

Наличие одиночного возвышения на отмели приводит к дополнительному подавлению (до 60-70%) волнового движения жидкости с одновременным уменьшением собственной частоты – рис. 3.16 б.

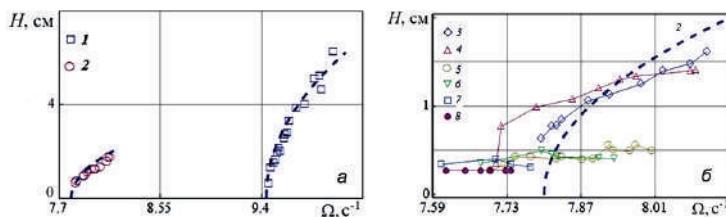


Рис. 3.16. Зависимости $H(\Omega)$ первой волновой моды в случае горизонтального дна и линейной отмели (а), а также при различном положении возвышения высотой $h_{max} = 3.6$ см на линейной отмели (б): 1 – горизонтальное дно; 2 – линейная отмель; 3-8 – положение $x_0 = 47, 45, 42.5, 40, 37.5$ и 35 см возвышения на наклонном дне.

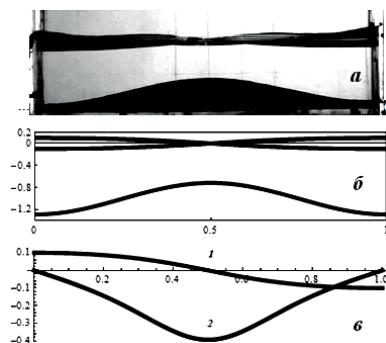


Рис. 3.17. Наблюдаемые в эксперименте (а) и рассчитанные (б) огибающие свободной поверхности для первой моды, а также график (б) собственной функции $W(x)$ (1) и ее производной $W'(x)$ (2): $h_0 = 7.5$ см, $\omega = 4.61 \text{ c}^{-1}$.

Исследовался случай топографии дна, при которой глубина жидкости изменялась по гармоническому закону $h(x) = h_0(1 - a \cos \frac{2\pi x}{L})$ ($h_0 = 7.5$ см; $a = 2$ см; $L = 50$ см) – COS-образное дно, рис. 3.10 *в*.

На рис. 3.17 приведены огибающие свободной поверхности для первой волновой моды $n = 1$, полученные в эксперименте (*а*) и расчете (*б*), а также собственная функция $W(x)$ и ее производная $W'(x)$. При такой же глубине в случае ровного горизонтального дна частота волны составляет $\omega = 4.85$ с⁻¹. Наличие COS-образного дна в сосуде приводит к уменьшению частоты $\omega = 4.61$ с⁻¹. Наблюдаемый в эксперименте профиль волны на поверхности (рис. 3.17 *а*) указывает существенное влияние геометрия дна.

Несмотря на плавное изменение геометрия дна, здесь наблюдались сложные по форме волновые профили при отсутствии четкой локализации узла. Вследствие центральной симметрии дна имеем одинаковые значения измеренной высоты волны $H = 2.68$ см на левой и правой торцевых стенках сосуда (в отличие от случая наклонного дна, рис. 3.14).

3.2.3. Локальные особенности стенок и дна

В приближении длинных волн рассматривается задача о собственных колебаниях тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в протяженном канале переменной ширины $d(x)$ при горизонтальном дне $h = \text{const}$ или при наличии линейной отмели $h(x)$ – рис. 3.18.

Сейшевые колебания моделировались первой модой ($n=1$) двумерных гравитационных стоячих волн на свободной поверхности жидкости в прямоугольном сосуде размерами $50 \times 10 \times 40$ см или $50 \times 4 \times 40$ см, совершающем гармонические колебания в вертикальном направлении [10-12]. Возбуждение волн осуществлялось при основном резонансе Фарадея, когда частота возбуждаемых волн в 2 раза меньше частоты колебаний сосуда $\omega \ll \Omega/2$. При фиксированной амплитуде колебаний сосуда $s = 2.25$ см вариации Ω обеспечивали изменения высоты волны H от 0.5 до 5 см. Глубина жидкости во всех экспериментах составляла $h_0 = 7$ см, что при длине волны $\lambda = 100$ см первой моды определяло значение $h_0/\lambda = 0.07$. Измерения периода колебаний сосуда проводились с точностью до 2 мс.

Для регистрации волновых движений жидкости использовалась цифровая видеокамера Canon PowerShot SX50HS (частота кадров 15 – 30 к/с) в подвижной жестко связанной с сосудом системе координат. Последующая обработка видеокадров осуществлялась в пакете ImageJ 1.46г. Разрешение видеоизображения составляло 0.15 мм/пиксель.

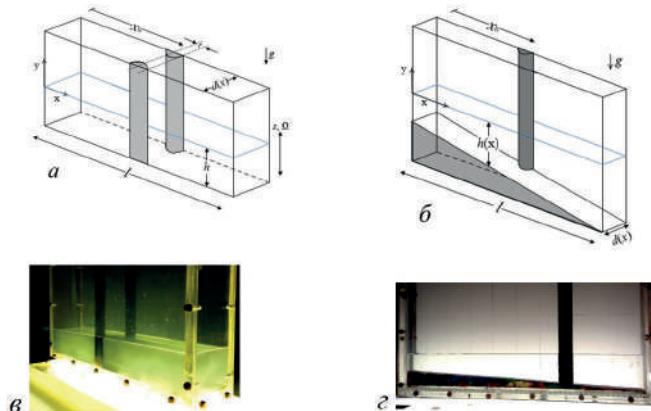


Рис. 3.18. Стоячие волны в канале с резким изменением ширины: *а*, *в* – два полуцилиндра радиуса $r = 1.5$ см на боковых стенах сосуда ($l = 50$ см, $d_0 = 10$ см); *б*, *г* – один полуцилиндр над линейной отмелью в сосуде ($l = 50$ см, $d_0 = 4$ см)

Локальное изменение ширины $d(x)$ сосуда обеспечивалось установкой на лицевой и тыльной стенах канала одного или двух вертикальных пластиковых полуцилиндров радиусом $r = 1.5$ см – рис. 3.18. Для выявления эффекта переменной ширины канала полуциилиндры перемещались вдоль стенок по горизонтальному дну или линейной отмели, причем в случае двух вставок их горизонтальные координаты x_0 изменялись синхронно. Использованная в ряде экспериментов донная отмель изготовлена из технического пластилина и имела уклон 3:50 или 0.06.

В опытах при изучении эффекта резкого изменения ширины сосуда на свойства длинных стоячих волн оценивалась их частота, строились резонансные зависимости $H(\Omega)$ и оценивались декременты δ при изменении положения x_0 полуциилиндров. Для минимизации нелинейных

эффектов измерения проводились при малой крутизне возбуждаемых волн $\Gamma = H / \lambda \leq 0.05$.

Экспериментальное значение коэффициента затухания b и декремента $\delta = bT$ оценивалось по методике, детально описанной в [13, 16]. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась первая волновая мода $n = 1$. Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась видеосъемка процесса затухания волновых движений жидкости. Измерения смещения свободной поверхности жидкости от положения равновесия по материалам видеосъемки производились с точностью 0.1 см. Величина b определялась как $b = T^{-1} \ln(H_m / H_{m+1})$, где $T = 2\pi/\omega$ – период волны, H_m и H_{m+1} – значения высоты волны, взятые через период колебаний. Определение коэффициента затухания b осуществлялось в диапазоне волновых высот $H \sim 1-3$ см, соответствующих крутизне $\Gamma \sim 0.01-0.03$.

При интерпретации данных опыта использовалась численно-аналитическая модель стоячих волн в сосуде с локальными особенностями боковых стенок и дна – см. разд. 3.2.1.

Рассматриваемая краевая задача на собственные значения и функции приводится к виду (3.2.7)

$$\frac{d}{dx} \left(d(x) h(x) \frac{dW}{dx} \right) + d(x) \lambda_n W = 0, \quad W'(0) = W'(1) = 0$$

Здесь x , d и h – нормированные на l , d_0 и h_0 горизонтальная координата, ширина и глубина, соответственно. Искомый параметр λ_n связан с частотой ω соотношением $\lambda_n = \frac{\omega^2 l^2}{gh_0} = (\pi n)^2 /$

Для определения собственных значений λ_n и функций $W_n(x)$ задачи с граничными условиями типа Неймана (второго рода) применим теорию Штурма - Лиувилля и алгоритм ускоренной сходимости [1].

Отметим, что решению нулевой моды отвечают $\lambda_0 = 0$, $W_0(x) \equiv \text{const}$, в частности $W_0(x) \equiv 0$. Последующие моды колебаний $n = 1, 2, \dots$ требуют высокоточного решения краевой задачи на собственные значения λ_n и

собственные функции W_n . Они строятся ниже для используемых в эксперименте особенностей стенок и дна сосуда, описываемых следующими функциями: при наличии одного полуцилиндра $d(x) = 1 - 0.36 \exp[-(x - x_0)^4 / 0.0000008]$ и для линейной отмели $h(x) = -(4 + 3x) / 7$.

В экспериментах влияние локального изменения ширины сосуда на первую волновую моду на свободной поверхности воды исследовалось при анализе резонансных зависимостей, их частотного сдвига и диссипативных характеристик. Проведена серия опытов по исследованию совместного эффекта изменения ширины сосуда и наличия линейной отмели.

Ранее в экспериментах с поверхностными волнами Фарадея в прямоугольном сосуде с гладкими стенками [13] в качестве интегральной волновой характеристики строилась резонансная зависимость $H(\Omega)$ установившейся высоты волн от частоты вертикальных колебаний сосуда. В настоящих опытах данная характеристика также использовалась для оценки эффекта локальных особенностей геометрии сосуда.

Резонансная зависимость $H(\Omega)$ для жидкости глубиной $h_0 = 7$ см в сосуде ($l = 50$ см, $d_0 = 10$ см) с гладкими стенками приведена на рис. 3.19 *a* – кривая 1. Каждой экспериментальной точке 1 отвечает установившийся режим колебаний: при частоте $\Omega / 2$ волна характеризуется стационарным значением высоты H . Полученная по данным эксперимента интерполяционная кривая $H(\Omega) = \sqrt{-1146.3 + 119\Omega}$ рассматривается далее как базовая и на графиках рис. 3.19 обозначена как 1. Отметим монотонный рост высоты волны H с увеличением частоты сосуда Ω , что отвечает случаю жесткой восстанавливающей силы.

Рассмотрим сначала влияние двух вертикальных пластиковых полуцилиндров, расположенных друг против друга на лицевой и тыльной стенках канала с горизонтальным дном. Полуцилиндры синхронно перемещались по длине сосуда, их положение определялось координатой $1.5 \leq x_0 \leq 48.5$ см, отсчитываемой от левой торцевой стенки сосуда, рис. 3.19 *a*. Для каждого значения x_0 снималась резонансная зависимость $H(\Omega)$, которая сравнивалась с базовой кривой 1. На рис. 3.19 на графиках *a*-*e*

приведены характерные зависимости $H(\Omega)$, отвечающие положениям полуцилиндров $x_0 = 4, 13, 25$ см (2-4). Выбор указанных значений x_0 связан с тождественным изменением зависимостей $H(\Omega)$ при перемещении пары полуцилиндров от центра сосуда $x_0 = 25$ см к правой ($x_0 > 25$ см) или левой ($x_0 < 25$ см) торцевой стенке. Данное обстоятельство свидетельствует о симметрии эффекта вставок на вид резонансных зависимостей относительно плоскости, проходящей через узловую линию первой волновой моды.

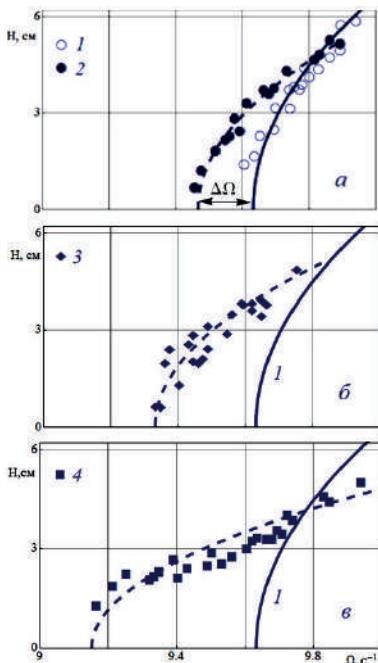


Рис. 3.19. Зависимости $H(\Omega)$ первой волновой моды при наличии двух полуцилиндров на стенках сосуда ($l = 50$ см, $d_0 = 10$ см): 1- данные эксперимента и базовая кривая ($H(\Omega) = \sqrt{-1146.3 + 119\Omega}$) в случае сосуда с гладкими стенками и дном; 2-4 – $x_0 = 4, 13, 25$ см ($H(\Omega) = \sqrt{-603.9 + 63.8x}; \sqrt{-531 + 56.8x}; \sqrt{-250.8 + 27.4x}$).

Сравнение резонансных зависимостей первой моды стоячих волн в сосуде с полуцилиндрами (рис. 3.19) показывает относительный сдвиг $\Delta\Omega$

в низкочастотную область. При расположении пары полуцилиндров около левой торцевой стенки $x_0 = 4$ см наблюдается сдвиг $H(\Omega)$ влево по оси Ω на величину $\Delta\Omega = 0.16 \text{ c}^{-1}$ - данные 2 на рис. 3.19 *а*. При перемещении вставок к центру сосуда $x_0 = 13$ и 25 см (данные 3 и 4 на рис. 3.19 *б*, *в*) значение величина сдвига возрастает и равна $\Delta\Omega = 0.27$ и 0.48 c^{-1} соответственно. Следует отметить, что относительное значение $\Delta\Omega/\Omega$ частотного смещения кривых оценивается диапазоном от 1.7 до 4.8%. Поскольку при основном параметрическом резонансе [13] частота возбуждаемых волн в два раза меньше частоты колебаний сосуда $\omega \ll \Omega/2$, то смещение резонансных зависимостей на $\Delta\Omega$ свидетельствует об изменении собственной частоты $\Delta\omega \ll \Delta\Omega/2$. Кроме частотного смещения $\Delta\Omega$ резонансные зависимости 2–4 становятся более пологими по сравнению с кривой 1, что связано с уменьшением высоты волны почти на 25% - рис. 3.19 *в*. Отметим, что вставки независимо от их положения практически не влияли на форму волновых профилей за исключением областей размерами 2–3 мм в окрестности полуцилиндров за счет капиллярных эффектов.

Проведена серия экспериментов, в которых исследовалось совместный эффект геометрических особенностей дна в виде линейной отмели и одной полуцилиндрической вставки на тыльной стороне сосуда (рис. 3.18 *б*) на резонансные зависимости первой волновой моды. Снятые зависимости $H(\Omega)$ показаны на рис. 3.20.

Наличие отмели приводит к значительному частотному сдвигу $\Delta\Omega = 0.75 \text{ c}^{-1}$ резонансной зависимости 2 по сравнению со случаем сосуда с гладким дном 1 (рис. 3.20 *а*); причем $\Delta\Omega/\Omega \approx 7.9\%$. Отметим отсутствие изменений крутизны $H(\Omega)$ - эффект отмели сводится к параллельному сдвигу резонансной зависимости в низкочастотную область. Для выбранных экспериментальных параметров (уклон отмели и глубина жидкости) отсутствовали какие-либо искажения волновых профилей; отличие в высотах волн на левой $H = 3.4$ см и правой $H = 3.0$ см торцевых стенках составляло $\Delta H = 0.4$ см.

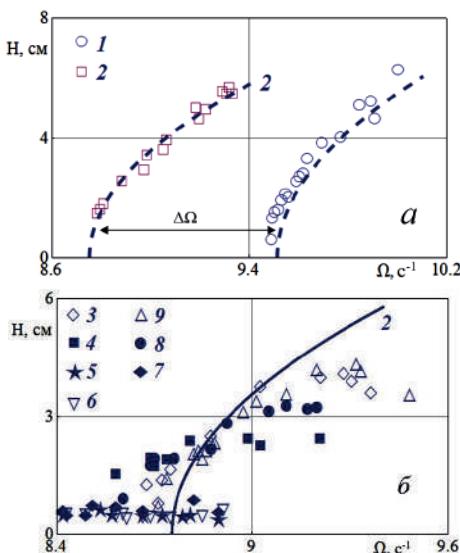


Рис. 3.20. Зависимости $H(\Omega)$ первой волновой моды в случае одиночной вставки на тыльной стенке и линейной отмели на дне сосуда ($l = 50$ см, $d_0 = 4$ см, рис. 3.18 б): (а) – сосуд с гладкими дном и стенками 1 и линейная отмель 2 ($H(\Omega) = \sqrt{-590.8 + 62.1\Omega}$ и $\sqrt{-453.5 + 51.8\Omega}$, соответственно); (б) – отмель (2) и вставка: 3 - 9 - $x_0 = 5, 10, 20, 25, 30, 40, 45$ см.

Совместный эффект отмели и вставки на торцевой стенки в значительной мере определяется положением x_0 полуцилиндра – рис. 3.20 б. Приведенные зависимости $H(\Omega)$ получены при изменении координаты x_0 вставки с шагом 5 см по всей длине сосуда $l = 50$ см. При $x_0 = 5$ и 45 см (данные 3 и 9) резонансные зависимости практически совпадают и характеризуются смещением $\Delta\Omega = 0.1$ с^{-1} и уменьшением высоты волны H . Следующая пара (4 и 8) зависимостей $H(\Omega)$ соответствует $x_0 = 10$ и 40 см и характеризуется как частотным смещением $\Delta\Omega = 0.18$ с^{-1} , так и уменьшением H . Отметим, что данные 4 определяют более пологую зависимость $H(\Omega)$. Наконец, отвечающие положению полуцилиндра $x_0 = 20, 25$ и 30 см резонансные зависимости 5-7 практически горизонтальны – высота волны оценивается как $H \approx 0.6$ см и не изменяется во всем

частотном диапазоне . Таким образом, при положении вставки в центральной части сосуда наблюдалось значительное подавление волнового движения жидкости, проявляемое в десятикратном уменьшении H .

Такое существенное изменение формы резонансных зависимостей можно объяснить следующим образом. Исследуемые волны характеризуются параметром $h_0 / \lambda = 0.07$, что отвечает случаю мелкой воды: скорость частиц жидкости не зависит от глубины жидкости. Оценки показывают, что в диапазоне значений x_0 от 20 до 30 см (центральная часть сосуда) горизонтальная составляющая скорости частиц жидкости максимальна. Это, в свою очередь, определяет наибольшие потери энергии волн при вихревом обтекании вставки, и, в конечном счете, приводит к уменьшению высоты волны H .

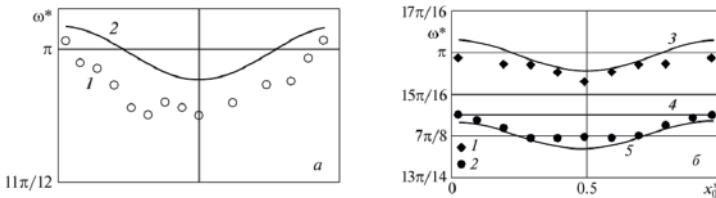


Рис. 3.21. Зависимость безразмерной частоты первой волновой моды от локализации особенностей стенок и дна: (а) – два полуцилиндра на стенках сосуда ($l = 50$ см, $d_0 = 10$ см) (рис. 3.20 а); 1 – эксперимент; 2 – расчет; (б) – одиничный полуцилиндр над горизонтальным дном и линейной отмелю в сосуде ($l = 50$ см, $d_0 = 4$ см): 1, 3 – эксперимент и расчет в случае одиничного полуцилиндра над горизонтальным дном; 4 – линейная отмель с уклоном 3:50; 2, 5 – эксперимент и расчет в случае одиничного полуцилиндра над отмелю.

Оценим эффект геометрических особенностей сосуда на частоту первой волновой моды. При сравнении данных эксперимента с результатами численно-аналитической модели использовалось характерное для основного параметрического резонанса соотношение $\omega \square \Omega/2$ между частотами волны и колебаний сосуда, а также вытекающая из него связь между изменением частоты волны и смещением резонансной зависимости: $\Delta\omega \square \Delta\Omega/2$.

На рис. 3.21 приведены экспериментально полученные зависимости безразмерной частоты $\omega^* = \pi\omega / \omega_0$ (ω_0 - экспериментальное значение частоты в случае гладкого сосуда) первой волновой моды от относительного положения $x_0^* = x_0 / l$ пары полуцилиндров (a) и одиночного полуцилиндра над горизонтальным дном и линейной отмелю (b). Для интерпретации данных эксперимента показаны расчетные кривые $\omega^*(x_0^*)$, полученные из основанной на методе ускоренной сходимости модели длинных волн – см. разд. 3.2.

При синхронном перемещении двух полуцилиндрических вставок по лицевой и тыльной стенкам сосуда (рис. 3.21 a) эксперимент (1) и расчет (2) показывают периодическую зависимость ω^* от x_0^* с максимальным значением частоты на торцевых стенках и с минимумом в центре сосуда. Из эксперимента при $x_0^* = 0.03$ и 0.97 частота волны $\omega^* = 3.158$, что несколько выше $\omega^* = 3.142$ для сосуда с гладкими стенками. Возможная причина, в том что, несмотря на небольшое относительное перекрытие сосуда вставками $2r/d_0 = 0.3$, их положение вблизи торцевых стенок приводит к уменьшению эквивалентной длины сосуда и к увеличению частоты волны. Аналогичный результат следует из расчета (2). Минимальное значение $\omega^* = 3.011$ получено при $x_0^* = 0.5$ – расположение вставок в центре сосуда. Расчетная зависимость 2 расположена несколько выше данных 1 эксперимента, что, вероятно связано с не учитываемым в модели процессом вихреобразования на вставках.

Данные по изменению частоты в сосуде ($l = 50$ см, $d_0 = 4$ см) с одиночной полуцилиндрической вставкой и линейной отмелю приведены на рис. 3.21 б. Зависимости 1 и 3 характеризуют изменение ω^* в зависимости от x_0^* для сосуда с гладким дном. Аналогично случаю (a) имеем периодический характер изменения $\omega^*(x_0^*)$ при минимальных экспериментальном $\omega^* = 3.007$ и расчетном $\omega^* = 3.056$ значениях. Отметим, что численная модель в отличие от эксперимента дает завышенные значения ω^* при локализации вставки в торцах сосуда. Линейная отмель в сосуде без вставки приводит к уменьшению частоты до величины $\omega^* = 2.851$ – прямая 4; соответствующее рассчитанное значение

$\omega^* = 2.765$. Совместный эффект отмели и вставки на рис. 4, б показан зависимостями 2 и 5. Видно, что помимо связанного с отмелю смещения частоты прослеживается периодическое изменение ω^* , определяемое положением вставки, причем характерно неплохое качественное и количественное соответствие между данными эксперимента и модели.

Геометрические особенности стенок и дна сосуда в виде вставок и отмели приводят не только к изменению собственной частоты первой волновой моды, но и к подавлению колебаний жидкости. В предположении, что изменение крутизны резонансных зависимостей на рисунках 3.19 и 3.20 связано с потерями волновой энергии на геометрических особенностях, проведены оценки декрементов волн.

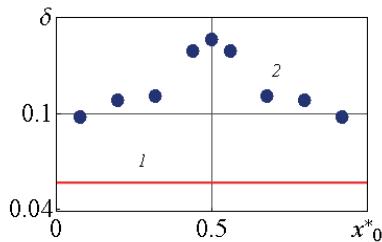


Рис. 3.22. Изменение декремента первой волновой моды при варьировании положения двух вставок на стенках сосуда ($l = 50$ см, $d_0 = 10$ см) (рис. 3.18 а); 1 – гладкие стенки и дно; 2 – два полуцилиндра на лицевой и тыльных стенках.

Зависимость декремента от положения двух полуцилиндрических вставок показано на рис. 3.22. Прямая 1 отвечает сосуду с гладкими стенками и дном; значение декремента $\delta = 0.057$. Наличие вставок на лицевой и тыльной стенках существенным образом сказывается на величине δ . При расположении вставок вблизи торцевых стенок сосуда $x_0^* = 0.08$ имеем $\delta = 0.098$. При смещении вставок к центру сосуда декремент возрастает и при $x_0^* = 0.5$ достигает величины $\delta = 0.146$. Таким образом, размещение вставок в центре сосуда приводит почти к трехкратному увеличению декремента, см. резонансную зависимость 4 на рис. 3.19 в.

Линейная отмель и одиночная вставка в сосуде ($l = 50$ см, $d_0 = 4$ см) (рис. 3.18 б) следующим образом влияет на декремент волны. Для сосуда с гладкими стенками и горизонтальным дном $\delta = 0.139$. При локализации полуцилиндра (без отмели) в точках $x_0^* = 0.7$ и 0.97 имеем $\delta = 0.227$ и 0.142 , соответственно. Таким образом, расположение цилиндра вблизи торцевых стенок практически не изменяет величину декремента, а при его смещении к центру наблюдается почти двукратное увеличение δ . Линейная отмель (3:50) в сосуде без полуцилиндрической вставки увеличивает декремент до $\delta = 0.238$. При расположении вставки в точке $x_0^* = 0.03$ над отмелью измеренная величина декремента равна $\delta = 0.294$.

Приведенные данные по волновому демпфированию в сосуде с геометрическими особенностями показывают, что кроме вязких потерь следует учитывать процесс рассеяния волновой энергии на вставках и отмели. Как показывают наблюдения, для вставок энергетические потери связаны с формированием и срывом присоединенных вихрей.

3.3. Колебания жидкости в круговом цилиндре с возвышением на дне

При рассмотрении волновых движений жидкости со свободной поверхностью в сосудах произвольной формы одна из гидродинамических задач состоит в определении собственных частот колебаний. В классических работах [14, 15] рассмотрен случай колебаний жидкости в круговом цилиндрическом сосуде с горизонтальным дном. В середине прошлого столетия было опубликовано большое количество работ, в которых определены собственные частоты и формы колебаний жидкости в круговом цилиндре с коническим, параболическим и сферическим дном – см., напр., [16]. Указанное направление исследований, проведенных в основном вариационными методами, связано с потребностями космической техники – расчет колебаний топлива в баках. Отметим, что особое значение придавалось основной моде колебаний, имеющей одну диаметральную узловую линию.

В приближении теории длинных волн в [15] рассмотрена задача о стоячих волнах в круговом цилиндре при убывании глубины жидкости от оси сосуда к стенкам по параболическому закону. Указанная геометрия дна

сосуда использована в [17] для получения изохронных колебаний жидкости, при которых частота волн (аналогично маятнику Гюйгенса) не зависит от амплитуды.

Ниже рассмотрено влияние возвышения на дне кругового цилиндра на собственные частоты низших волновых мод на свободной поверхности жидкости. Все количественные оценки получены методом ускоренной сходимости в приближении мелкой воды. Проводится сравнение результатов теоретической модели и лабораторного эксперимента [18].

Решение задачи о гравитационных волнах на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости в жестком круговом цилиндре радиуса R_0 с горизонтальном дном приведено во многих публикациях, напр., [16]. Потенциал скоростей $\phi(r, \varphi, z, t)$ и смещение свободной поверхности $\eta(r, \varphi, t)$ определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned}\phi(r, \varphi, z, t) &= [\alpha_{nm} \cos n\varphi + \beta_{nm} \sin n\varphi] J_n(k_{nm} r) \frac{\operatorname{ch}(k_{nm}(z + h))}{\operatorname{ch}(k_{nm} h)} \\ \eta(r, \varphi, t) &= [A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi] J_n(k_{nm} r) \cos \omega_{nm} t \quad (3.3.1) \\ &\quad (n = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты, причем z отсчитывается вертикально вверх от невозмущенной поверхности жидкости; h – глубина жидкости; $J_n(k_{nm} r)$ – функция Бесселя; α_{nm}, β_{nm} – зависящие от времени t коэффициенты, которые могут быть выражены через гармонические функции $\sin \omega_{nm} t$.

Выражение для собственной частоты имеет вид

$$\omega_{nm} = \sqrt{g k_{nm} \operatorname{th}(k_{nm} h)} \quad (3.3.2)$$

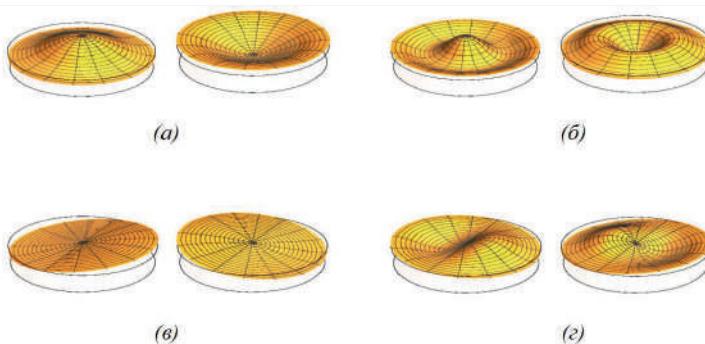


Рис. 3.23. Профили волн максимального развития для осесимметричных и асимметричных мод при $t = 0, \pi / \omega$ ($A_{nm} = 3$ см, $B_{nm} = 0$; $R_0 = 9.8$ см; $h = 4$ см): (a–e) – (01), (0, 2), (1, 1) и (1, 2).

Используя граничное условие на стенках сосуда $\partial\phi / \partial r|_{r=R_0} = J_n'(k_{nm}R_0) = 0$, для первых двух осесимметричных мод получаем $k_{01}R_0 = 3.832$ и $k_{02}R_0 = 7.015$, а для асимметричных мод – $k_{11}R_0 = 1.841$ и $k_{12}R_0 = 5.335$.

Рассчитанные по (3.3.1) профили волн максимального развития для осесимметричных (0, 1), (0, 2) и асимметричных мод (1, 1) и (1, 2) приведены на рис. 3.23. Расчет проведен для сосуда радиуса $R_0 = 9.8$ см при глубине жидкости $h = 4$ см и $A_{nm} = 3$ см, $B_{nm} = 0$.

Рассмотрим случай, когда глубина бассейна $H = H_0 f(r / R_0)$ зависит от расстояния, измеряемого от центра бассейна. Обозначим через $\eta = \eta(x, y, t)$ возвышение свободной поверхности над уровнем покоящейся жидкости.

Согласно [15] смещение свободной поверхности удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \quad (3.3.3)$$

где g – ускорение свободного падения.

Поскольку стоячие волны представляют собой периодические во времени движения свободной поверхности, будем искать решение уравнения (3.3.3) в виде

$$\eta = u(x, y)e^{i\omega t}$$

(3.3.4)

После подстановки (3.3.4) в уравнение (3.3.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\omega^2}{g} u = 0 \quad (3.3.5)$$

Так как предполагается, что глубина жидкости зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то переходя к полярным координатам (r, φ) , получаем для (3.3.5)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(H r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} H \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{g} u = 0$$

В дальнейшем полагаем, что $u = U_m(r) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$, где n – целое число.

Функция $U(r)$ подчиняется следующим краевым условиям

$$|U_m(0)| \leq M; \left. \frac{dU_m}{dr} \right|_{r=R_0} = 0$$

Вводя безразмерную переменную $z = r / R_0$, приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dz} \left(z f(z) \frac{dU_m}{dz} \right) + \left(\lambda z - \frac{n^2}{z} f(z) \right) U_m = 0$$

(3.3.6)

$$\text{где } n = 0, 1, 2, \dots, \lambda_{n,m} = \frac{\omega^2 R_0^2}{g H_0}.$$

Требуется найти такие значения $\lambda_{n,m}$, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.6), удовлетворяющие краевым условиям

$$|U_m(0)| \leq M; U_m'(1) = 0 \quad (3.3.7)$$

Искомые значения $\lambda_{n,m}$ принято называть собственными числами, а соответствующие решения краевой задачи (3.3.6), (3.3.7) – собственными функциями или формами (модами) колебаний.

Введем следующим образом регуляризирующий параметр a задачи

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left[(z+a) f(z) \frac{dU_m}{dz} \right] + \left(\lambda z - \frac{n^2}{z+a} f(z) \right) U_m = 0 \\ & |U_m(0)| \leq M; \quad U_m' = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.3.8)$$

Для нахождения собственных чисел применяется метод ускоренной сходимости, подробно описанный в [1]. Отметим, что с помощью этого метода при $a = 10^{-7}$ удается получить собственные числа с точностью до 10^{-6} .

Если найдены собственные числа $\lambda_{n,m}$, то размерные собственные частоты колебаний определяются формулой

$$\omega_{n,m} = \frac{\sqrt{\lambda_{n,m}}}{R_0} \sqrt{gH_0}$$

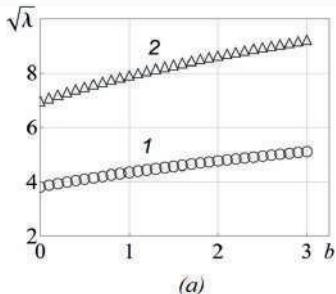
Все вычисления проводятся в предположении, что глубина бассейна задается формулами

$$f(z) = \begin{cases} 1 + bz^2 \\ 1 + bz \end{cases}$$

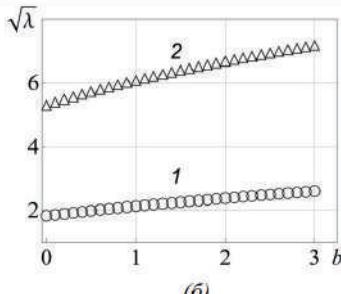
Указанные формы дна бассейна (параболоид или конус) достаточно просто реализовать в экспериментальных условиях. Описание проведенных опытов и сравнение измеренных и рассчитанных значений частоты приводятся ниже.

На рис. 3.24 *a* приведены зависимости безразмерной собственной частоты $\sqrt{\lambda_{0,1}}$ и $\sqrt{\lambda_{0,2}}$ от параметра b . Соответствующие формы свободной поверхности в случае волновых мод (0, 1) и (0, 2) при $b=0$ (горизонтальное дно бассейна) представлены на рис. 3.23 *a* и *б*.

На рис. 3.24 *б* приведены зависимости безразмерной собственной частоты $\sqrt{\lambda_{1,1}}$ и $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ от параметра b . Соответствующие формы свободной поверхности в случае волновых мод (1, 1) и (2, 2) при $b=0$ (горизонтальное дно бассейна) представлены на рис. 3.23 *в* и *г*.



(a)



(б)

Рис. 3.24. Зависимости безразмерных собственных частот от параметра b : (а) – осесимметричные волновые моды $\sqrt{\lambda_{0,1}}$ (1) и $\sqrt{\lambda_{0,2}}$ (2); (б) – асимметричные волновые моды $\sqrt{\lambda_{1,1}}$ (1) и $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ (2).

Из рис. 3.24 следует, что с увеличением параметра b , характеризующего возвышение на дне сосуда, безразмерные собственные частоты $\sqrt{\lambda_{n,m}}$ симметричных и асимметричных волновых мод монотонно растут. Ниже полученные результаты сравниваются с данными лабораторного эксперимента.

Отметим, что приведенные на рис. 3.24 численные значения $\sqrt{\lambda_{n,m}}$ проверялись с помощью метода Рэлея–Ритца для решения краевой задачи (3.3.6), (3.3.7). В качестве тестовых функций использовались функции Бесселя. Собственные частоты, полученные методом Рэлея–Ритца, несколько превышали приведенные на рис. 3.24 – совпадали первые три знака после запятой. Кроме того, вычисления по методу Рэлея–Ритца потребовали больших временных затрат по сравнению с методом ускоренной сходимости.

Для верификации численно-аналитической модели проведена серия экспериментов. Волновые движения исследовались в режиме основного и гармонического резонансов Фарадея [13, 19] – см. главу 2. В первом случае для моды (1,1) частота вертикальных колебаний сосуда в два раза превышала частоту возбуждаемых волн ($\Omega \sim 2\omega$); при гармоническом резонансе для моды (0,1) эти частоты совпадали (). При фиксированной амплитуде сосуда $s = 0.7$ см вариации Ω обеспечивали возбуждение

соответствующей волновой моды (n, m) . В качестве рабочей жидкости использовалась вода.

В опытах собственная частота гравитационных волн определялась следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась волновая мода (n, m) . Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась видеосъемка процесса затухания волновых движений воды. Поскольку частота волн существенно превосходит коэффициент затухания, то предполагалось, что процесс затухания волн происходит с собственной частотой. Это позволило по материалам видеосъемки затухающих волн оценить собственную частоту.

В экспериментах использовались два сосуда с радиусами $R_0 = 7$ и 9.8 см при глубине воды $h = 3.7$ и 4 см соответственно. Оценивалась собственная частота волновых мод $(0,1)$ и $(1,1)$ в сосудах с горизонтальным и профилированным дном.

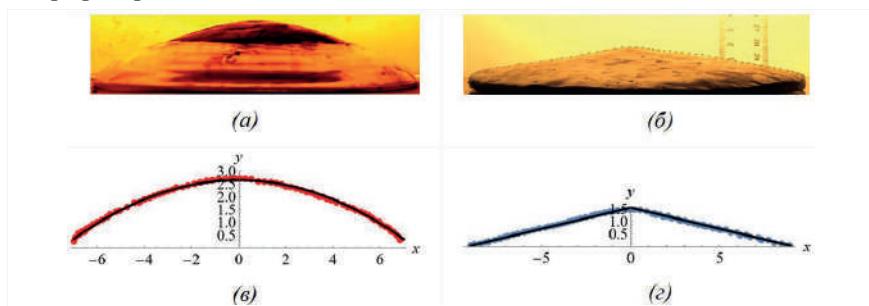


Рис. 3.25. (а, б) Форма возвышения на дне сосуда и (в, г) графики аппроксимирующих профиль дна функций: (а, в), (б, г) – $R_0 = 7$ и 9.8 см; точки – данные оцифровки фотографий (а, б).

Профилированное дно представляло собой симметричное относительно оси сосуда возвышение, изготовленное из технического пластилина. На рис. 3.25 а и б приведены фотографии дна сосудов с $R_0 = 7$ и 9.8 см, соответственно.

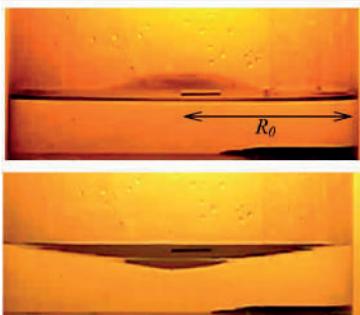
Для получения описывающих форму дна функций с помощью программы ImageJ проведена оцифровка донного профиля, данные которой позволили получить следующие аппроксимирующие зависимости

$$y = 2.66 - 0.05r^2 \text{ при } R_0 = 7 \text{ см}$$

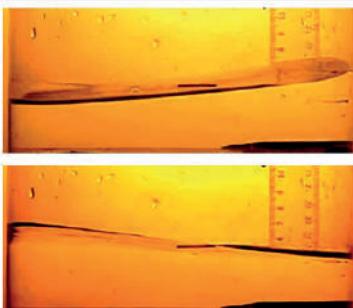
$$y = 1.45 - 0.15r \text{ при } R_0 = 9.8 \text{ см}$$

графики которых приведены на рис. 3.25 *в* и *г*. Таким образом, если для цилиндра с $R_0 = 7$ см форма возвышения описывалась квадратичной функцией, то в случае $R_0 = 9.8$ см имеем линейную зависимость от радиальной координаты r .

Экспериментально проведены оценки собственных частот волновых мод $(0, 1)$ и $(1, 1)$ в сосудах с горизонтальным дном. Фотографии волновых профилей в случае сосуда радиуса $R_0 = 9.8$ см представлены на рис. 3.26. Видно полное их соответствие с формами рис. 3.23 *а* и *в*.



(*a*)



(*б*)

Рис. 3.26. Профили волн максимального развития в круговом цилиндре радиуса $R_0 = 9.8$ см с горизонтальным дном при глубине жидкости $h = 4$ см: (*a*, *б*) – осесимметричные $(0, 1)$ и асимметричные $(1, 1)$ волновые моды.

Измеренные по описанной выше методике собственные частоты волн в сосудах с горизонтальным дном приведены в табл. 3.2. Средняя частота и соответствующая погрешность оценивались по 15-20 экспериментальным значениям. В таблице также приведены частоты, рассчитанные по формуле (3.3.2) и полученные при решении краевой задачи (3.3.8). Видно, что классическая теория и метод ускоренной сходимости в случае сосудов указанных размеров с горизонтальным дном дают практически совпадающие значения собственных частот волновых мод на свободной поверхности воды малой глубины. Данные эксперимента с учетом

погрешности измерений частоты неплохо соответствуют численно-аналитическим оценкам.

Таблица 3.2.

$R_0 = 7$ см, $h = 3.7$ см						
Горизонтальное дно				Профицированное дно		
Мода (n, m)	ω_{nm} (с ⁻¹) эксперимент	ω_{nm} (с ⁻¹) расчет		Мода (n, m)	ω_{nm} (с ⁻¹) эксперимент	ω_{nm} (с ⁻¹) расчет, краевая задача (1.8)
		формула (1.2)	краевая задача (1.8)			
		22.60 ± 0.99	22.72	22.76	$(0, 1)$	20.92 ± 1.85
$(0, 1)$				$(1, 1)$	11.73 ± 0.72	22.75
$(1, 1)$	13.84 ± 0.23	13.96	13.90			11.43

$R_0 = 9.8$ см, $h = 4$ см						
Горизонтальное дно				Профицированное дно		
Мода (n, m)	ω_{nm} (с ⁻¹) эксперимент	ω_{nm} (с ⁻¹) расчет		Мода (n, m)	ω_{nm} (с ⁻¹) эксперимент	ω_{nm} (с ⁻¹) расчет, краевая задача (1.8)
		формула (1.2)	краевая задача (1.8)			
$(0, 1)$	19.22 ± 0.65	18.82	18.74	$(0, 1)$	18.20 ± 0.35	22.21
$(1, 1)$	11.03 ± 0.54	10.82	10.82	$(1, 1)$	10.20 ± 0.50	10.75

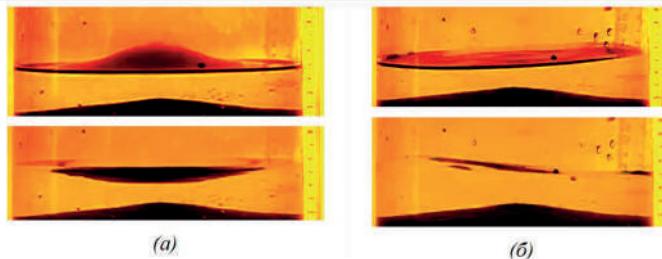


Рис. 3.27. Профили волн максимального развития в круговом цилиндре радиуса $R_0 = 9.8$ см с коническим возвышением на дне при максимальной глубине жидкости $h = 4$ см: (а, б) – осесимметричная $(0, 1)$ и асимметричная $(1, 1)$ волновые моды.

Перейдем к рассмотрению волновых движений жидкости в круговых цилиндрах с профицированным дном. Фотографии волновых мод $(0, 1)$ и

(1, 1) в случае сосуда радиуса $R_0 = 9.8$ см представлены на рис. 3.27. Визуально эти профили не отличаются от показанных на рис. 3.26. Однако собственные частоты, как следует из табл. 3.2, существенно ниже значений, отвечающих сосуду с горизонтальным дном – уменьшение частоты порядка 10–15%.

Дадим интерпретацию экспериментальных результатов об уменьшении собственных частот волновой моды (1,1) в сосудах с возвышением на дне в рамках модели мелкой воды – краевая задача (3.3.8).

Сосуд радиуса $R_0 = 7$ см имел профиль дна $y = 2.66 - 0.05r^2$, которому соответствовала глубина жидкости $H = H_0(1 + 0.054192 R_0^2 z^2) = 1.0122(1 + 2.6553z^2)$. Здесь $z = r / R_0$, $H_0 = 1.0122$ см.

Вычисленная безразмерная частота волновой моды (1, 1) равна $\sqrt{\lambda_{1,1}} = 2.54037$. Соответствующая размерная частота составляет $\omega_{1,1} = 11.43 \text{ c}^{-1}$. Измеренная в эксперименте (см. табл. 3.2) собственная частота волновой моды (1,1) равна $\omega_{1,1} = 11.73 \text{ c}^{-1}$. Таким образом, различие между данными эксперимента и численными оценками составляет 2.6%.

Сосуд радиуса $R_0 = 9.8$ см имел профиль дна $y = 1.45 - 0.15r$, что соответствовало глубине жидкости $H = 2.5488(1 + 0.4694z)$, $H_0 = 2.5488$. Отметим, что глубина жидкости в этом эксперименте изменяется линейно в отличии от первого сосуда.

Вычисленная безразмерная частота волновой моды (1, 1) равна $\sqrt{\lambda_{1,1}} = 2.1078$. Соответствующая размерная частота составляет $\omega_{1,1} = 10.75 \text{ c}^{-1}$. Измеренная в эксперименте (см. табл. 3.2) собственная частота волновой моды (1, 1) $\omega_{1,1} = 10.20 \text{ c}^{-1}$. Различие между данными эксперимента и численными оценками составляет 5.3%.

Таким образом, представленная численно-аналитическая модель неплохо описывает экспериментальные результаты по измерению собственных частот стоячих поверхностных гравитационных волн в том случае, когда возбуждается волна с одной узловой линией, проходящей через центр сосуда – волновая мода (1, 1) – рисунки 3.23 в и 3.27 б. Эта

волна соответствует безразмерной собственной частоте $\sqrt{\lambda_{1,1}}$. Кроме того, для волновой моды (1, 1) достаточно хорошо выполняется требование теории длинных волн. Отметим, что в проведенных экспериментах волны с частотами $\sqrt{\lambda_{0,1}}$, $\sqrt{\lambda_{0,2}}$, $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ и т.д. уже не удовлетворяют длинноволновому приближению ($k_{nm}h < 1$). Поэтому измеренные и рассчитанные собственные частоты волн (0, 1) совпадают гораздо хуже по сравнению со случаем моды (1, 1) – см. табл. 3.2.

При формулировке краевой задачи (3.3.8) был введен безразмерный регуляризирующий параметр a , который в расчетах собственной частоты волновой моды (1, 1) для сосудов с $R_0 = 7$ и 9.8 см принимал значения порядка 10^{-7} . Физически это соответствует колебаниям жидкости в зазоре между двумя концентрическими цилиндрами с внешним R_0 и бесконечно малым внутренним R^* радиусом. Значение $R^* = aR_0$ для использованных в эксперименте сосудов составляли величину порядка 10^{-6} см.

В эксперименте для оценки эффекта внутреннего цилиндра на частоту волновых мод в цилиндре с $R_0 = 9.8$ см в центр донного возвышения помещалась стальная проволочка диаметром $2R^* = 0.1$ см, что соответствовало безразмерному параметру $a = 0.005$. Измеренные собственные частоты равны $\omega_{0,1} = 18.30 \pm 0.41$ с⁻¹ и $\omega_{1,1} = 10.42 \pm 0.63$ с⁻¹ и с учетом погрешности измерений совпали с частотой для кругового цилиндра радиуса $R_0 = 9.8$ см (см. табл. 3.2). Данный экспериментальный факт подтверждает правомерность введения в краевую задачу (3.3.8) безразмерного регуляризирующего параметра a .

3.4. Колебания жидкости в сосуде с треугольным основанием

Задача о стоячих волнах в сосуде с треугольным основанием по постановке близка рассмотрению волн в цилиндрических резервуарах, основание которых представляет собой сектор окружности с малым центральным углом.

В 1960-х годах для уменьшения интенсивных колебаний ракетного топлива в цилиндрических баках с круглым основанием была предложена установка диаметральных перегородок, обеспечивших переход к бакам с основанием в виде секторных цилиндрических баков. Собственная частота

колебаний жидкости в таких резервуарах увеличивается, а динамические нагрузки на конструкцию снижаются. Ряд экспериментов был посвящен оценке частотного и силового факторов; см., например, [20, 21]. Отметим, что резервуары с углом сектора меньше $\pi/4$ в экспериментах не использовались.

В настоящем разделе обсуждаются результаты экспериментов [22] по исследованию гравитационных волн Фарадея в клиновидном сосуде, малый угол при вершине которого составляет $\pi/36$. Сравнение проводится с волнами в прямоугольном сосуде. Отметим, что указанная геометрия ранее использовалась в [23], однако какие-либо количественные оценки не проводились. Рассматриваемые колебания жидкости имеют практическое приложение к явлению сейш в водоемах сложной геометрии [24] и распространению приливных волн в сильно сходящихся руслах [25, 26].

Волновые движения исследовались в режиме основного резонанса Фарадея [22], когда частота вертикальных колебаний сосуда вдвое превышает частоту возбуждаемых волн ($\Omega \sim 2\omega$). При фиксированной амплитуде сосуда $s = 0.7$ см вариации Ω обеспечивали возбуждение соответствующей волновой моды номера n и высоты H .

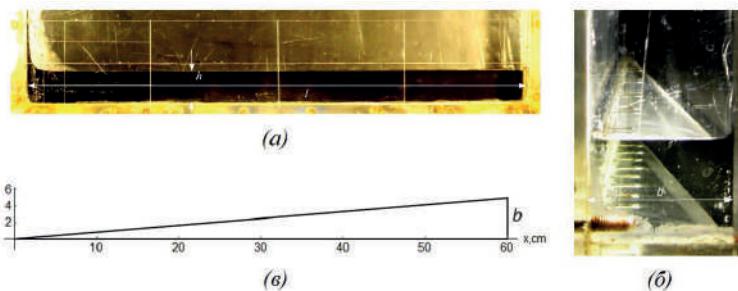


Рис 3.28. Сосуд с треугольным основанием – фронтальное изображение (а), вид с торца (б) и в плане (в).

Исследовались третья и четвертая моды ($n = 3, 4$) гравитационных волн в сосудах с прямоугольным основанием 60×5.2 см и с основанием в форме удлиненного прямоугольного треугольника с катетами $l = 60$ и $b = 5.2$ см и углом при вершине $\alpha = \pi/36 = 5^0$, рис. 3.28. Сосуды заполнялись

водой до глубины $h = 3.8 - 4$ см – рис. 3.28. Отметим значительный капиллярный подъем воды в вершине клина (рис. 3.28 *a*). Данный эффект [27] характерен для жидкости между двумя вертикальными плоскостями, расположенными под малым углом и в описываемых экспериментах не исследовался.

Рассмотрим сначала двумерные стоячие волны в прямоугольном сосуде – рис. 3.29. Из анализа профилей (*a*, *b*) волн максимального развития следует, что пучности волн не меняют своего положения; узлы совершают малые горизонтальные колебания; ординаты вершин и подошв волн постоянны вдоль сосуда. Таким образом, имеем стоячую регулярную нелинейную волну постоянной высоты.

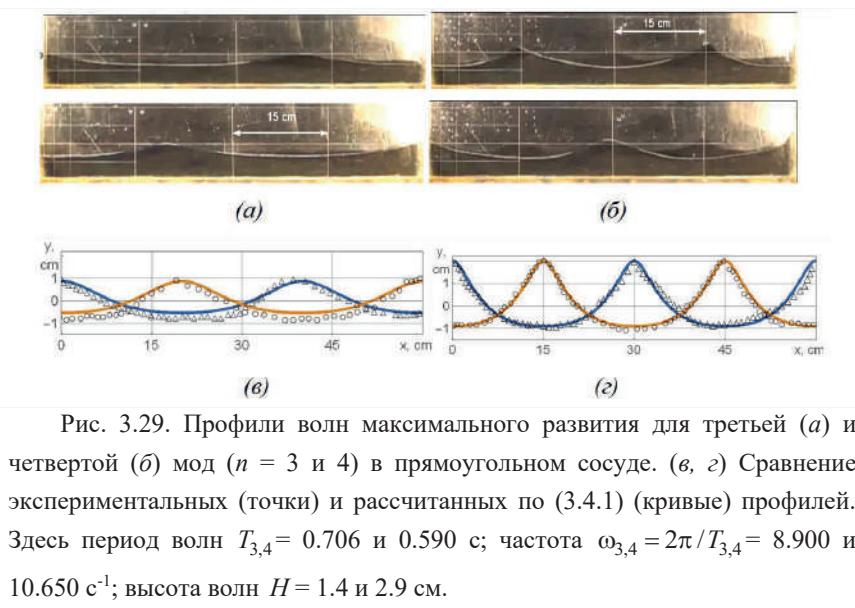


Рис. 3.29. Профили волн максимального развития для третьей (*a*) и четвертой (*b*) мод ($n = 3$ и 4) в прямоугольном сосуде. (*c*, *d*) Сравнение экспериментальных (точки) и рассчитанных по (3.4.1) (кривые) профилей. Здесь период волн $T_{3,4} = 0.706$ и 0.590 с; частота $\omega_{3,4} = 2\pi/T_{3,4} = 8.900$ и 10.650 c^{-1} ; высота волн $H = 1.4$ и 2.9 см.

Используя модель [28] нелинейных поверхностных волн Фарадея в прямоугольном сосуде (см. главу 2), можно построить профиль свободной поверхности ($b = 0$) в переменных Лагранжа (a, b, t)

$$\left\{
\begin{aligned}
x &= a - H \frac{chkh}{2shkh} \sin ka \cos \psi + H^2 k \frac{\sin 2ka}{32sh^2kh} (1 + \cos 2\psi) - \frac{3}{64} H^2 k \frac{ch2kh}{sh^4kh} \sin 2ka \cos 2\psi \\
&\quad + \frac{1}{16} H^2 k \frac{ch2kh}{sh^22kh} \sin 2ka, \\
y &= \frac{H}{2} \cos ka \cos \psi + H^2 k \frac{sh2kh}{32sh^2kh} (1 + \cos 2\psi) + \frac{3}{64} H^2 k \frac{sh2kh}{sh^4kh} \cos 2ka \cos 2\psi \\
&\quad - \frac{1}{16} H^2 k \frac{1}{sh^22kh} \cos 2ka, \\
\psi &= \omega t / 2, \lambda = \pi n / l, k = 2\pi / \lambda, a \in [0, l], b \in [-h, 0]
\end{aligned}
\right. \tag{3.4.1}$$

Согласно рис. 3.29 *в*, *г* имеем полное количественное соответствие данных эксперимента и модели.

На рис. 3.30 показаны профили третьей (*а*) и четвертой (*б*) волновых мод возбуждаемых в клиновидном сосуде. Волны имели периоды $T_{3,4} = 0.645$ и 0.540 с и соответствующие частоты $\omega_{3,4} = 2\pi / T_{3,4} = 9.593$ и 11.635 с^{-1} . Представленные видеокадры полностью отражают особенности волновых движений жидкости в течение одного периода.

Прежде всего, рассматриваемые волны классифицируются как стоячие, поскольку их пучности не перемещаются по горизонтали. Волны – нелинейные, что проявляется в колебаниях узлов стоячей волны, в заострении гребней и уплощении ложбин. Для обеих мод (рис. 3.30) отметим нарушение пространственной симметрии профиля максимального развития при $t = 0$ относительно вертикали, проведенной через вершину волны. Ординаты вершин и подошв волновых мод в этот момент возрастают от правой к левой стенке сосуда, на которой смещение свободной поверхности максимально. Волны – регулярные, поскольку характеризуются временной периодичностью профиля. Частоты $\omega_{3,4} = 9.578$ и 11.635 с^{-1} наблюдаемых волновых мод больше соответствующих значений $\omega_{3,4} = 8.900$ и 10.650 с^{-1} для волн в прямоугольном сосуде.

Обработка волновых профилей рис. 3.30 показала, что размах колебаний свободной поверхности воды на правой стенке сосуда для обеих мод составляет величину $H \approx 1.7$ см. На левой стенке (вершина

клиновидного сосуда) имеем $H \approx 7$ см для третьей моды (рис. 3.30 *a*) и $H \approx 8$ см для четвертой моды (рис. 3.30 *б*). Таким образом, рассматриваемая геометрия сосуда обеспечивает четырехкратное возрастание высоты стоячей гравитационной волны.

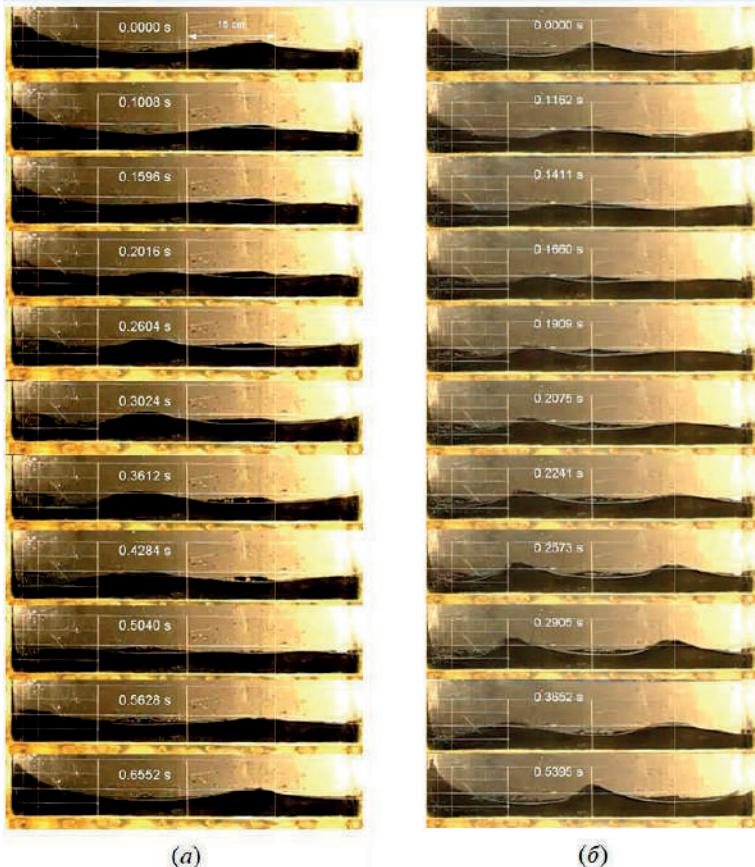


Рис. 3.30. Стоячие гравитационные волны на свободной поверхности воды в клиновидном сосуде: *а*–*б* – третья и четвертая волновые моды $n = 3, 4$ (по результатам видеосъемки 120 к/с). Здесь период волн $T_{3,4} = 0.656$ и 0.540 с; частота $\omega_{3,4} = 2\pi/T_{3,4} = 9.578$ и 11.635 с⁻¹.

В условиях эксперимента отношение глубины жидкости к длине волны составляло величину $h/\lambda \approx 0.1$, что позволяет для интерпретации

результатов использовать приближение длинных волн и рассмотреть задачу о собственных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в протяженном канале переменного прямоугольного сечения.

Согласно разд. 3.2.1 имеем следующую краевую задачу на собственные значения λ_n и функции W_n (см. (3.2.8))

$$\frac{d}{dx} \left(d^*(x^*) \frac{dW_n}{dx^*} \right) + d^*(x^*) \lambda_n W_n = 0, \quad W_n'(0) = W_n'(1) = 0 \quad (3.4.2)$$

Здесь x^* и d^* – горизонтальная координата и ширина сосуда, нормированные на l, b , соответственно. Искомый параметр λ_n связан с частотой ω соотношением $\lambda_n = \omega^2 l^2 / (gh) = (\pi n)^2$.

Для определения собственных значений λ_n и функций $W_n(x)$ задачи (3.4.2) с граничными условиями типа Неймана (второго рода) применим теорию Штурма-Лиувилля и алгоритм ускоренной сходимости [1], апробированный в экспериментах со стоячими волнами в прямоугольном сосуде, имеющем локальные нерегулярности дна и стенок (разд. 3.2).

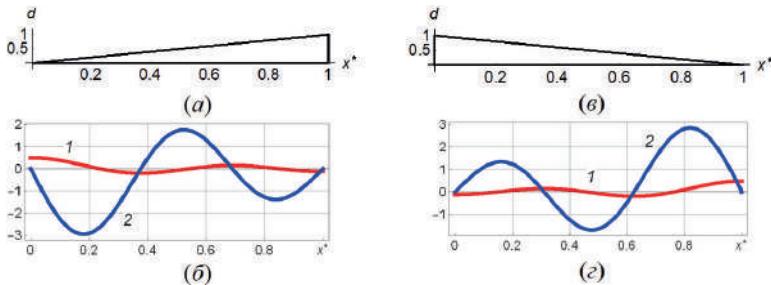


Рис. 3.31. (a, e) Сосуды с треугольным основанием $d^*(x^*) = b_0 / b + x^*$, $d^*(x^*) = 1 - (b - b_0)x^* / b$ и (б, з) собственные функции $W_3(x^*)$ (1) и их производные $W_3'(x^*)$ (2) для третьей волновой моды: (б) – $W(0) = 0.5$, $W(1) = -0.1$; (з) – $W(0) = -0.1$, $W(1) = 0.5$; $b_0 = 0.01$ см, $b = 5.2$ см.

В расчетах для исключения локальной особенности в вершине клинообразного основания использовались функции $d^*(x^*) = b_0 / b + x^*$ и $d^*(x^*) = 1 - (b - b_0)x^* / b$, описывающие ширину сосуда – рис. 3.31 а, в. Отметим, что диапазон значений $b_0 = 0.0001$ – 0.01 см вполне

соответствует точности задания $d \square 0$ в вершине клина, поскольку в условиях эксперимента ширина сосуда в вершине не равна нулю из-за неидеальности склейки стенок сосуда. Необходимость рассмотрения двух зависимостей $d^*(x^*)$ (рис. 3.31 *а* и *б*) обусловлена тем обстоятельством, что для эксперимента более важными являются задание смещения свободной поверхности на широкой торцевой стенке сосуда и численная оценка высоты волны в вершине клина. В случае $d^*(x^*) = b_0 / b + x^*$ задаются параметры волны при $x^* = 0$ (вершина клина), и модель дает оценки $W(1)$ при выполнении условия $W'(1) = 0$ – рис. 3.31 *б*. При $d^*(x^*) = 1 - (b - b_0)x^*/b$ (рис. 3.31 *г*) определяется $W(1)$ при $W'(1) = 0$. Приведенные на (*б*, *г*) графики (2) подтверждают выполнение граничного условия $W'(1) = 0$ для двух функций $d^*(x^*)$, описывающих ширину сосуда. Последнее свидетельствует о возможности получения численных оценок смещения жидкости в вершине клина при известной амплитуде волны на торцевой стенке. С целью сопоставления с экспериментом для рассчитанных таким образом размерных зависимостей $W_n(x)$ можно использовать пространственную инверсию и сдвиг по координате x . Результаты численно-аналитической модели для двух конфигураций основания сосуда (рис. 3.31 *б*, *г*) полностью совпадают при $b_0 = 0.01$ см.

Использованная в настоящей работе численно-аналитическая модель длинных волн позволяет оценить частоты стоячих волн при изменении формы основания сосуда от прямоугольного к треугольному. Пусть ширина сосуда описывается функцией $d(x) = b - (b - b_0)x/l$; введем безразмерную частоту

$$\omega^* = \frac{\lambda_n}{(\pi n)^2} = \frac{\omega^2 l^2}{gh_0 (\pi n)^2},$$

определенную собственным значением λ_n задачи (3.4.2). Величина λ_n зависит от b_0 ; соответствующие рассчитанные зависимости ω^* от b_0/b для третьей и четвертой волновых мод ($n=3, 4$) приведены на рис. 3.32. При $b_0 = b = 5.2$ см имеем сосуд постоянной ширины и $\omega^* = 1$. При уменьшении b_0 от 5.2 см до 0 частота ω^* экспоненциально растет и

достигает максимума при $b_0/b = 0$. Отметим, что для третьей моды $n = 3$ частота возрастает на интервале $b_0/b < 0.5$ (данные 1), в случае $n = 4$ – при $b_0/b < 0.25$ (данные 2). Отметим, что при переходе к клиновидному сосуду частота третьей моды увеличивается на 8%, для четвертой моды – на 6%.

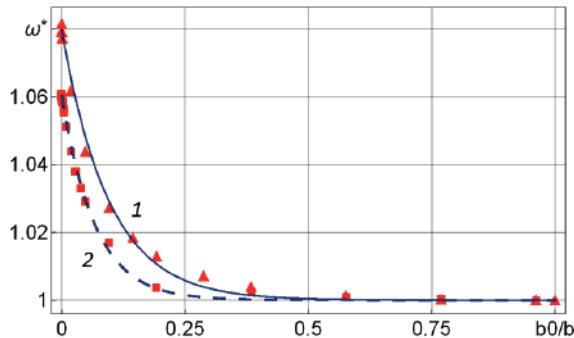


Рис. 3.32. Увеличение частоты стоячих волн при переходе от сосуда с прямоугольным основанием к клиновидному сосуду: 1, 2 – $n=3, 4$. Апроксимирующие расчетные данные 1, 2 – функции: $1 + Ae^{-Bx}$ ($A, B = \text{const}$).

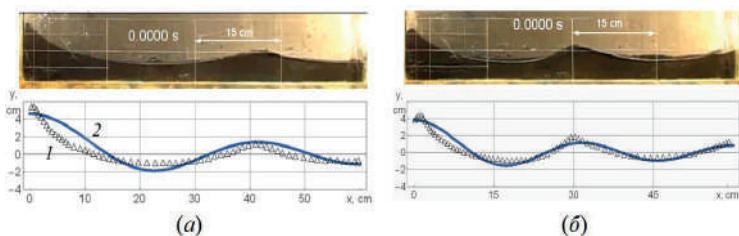


Рис. 3.33. Экспериментальные (1) и рассчитанные (2) волновые профили: (а, б) – $n = 3, 4$.

На рис. 3.33 представлены волновые профили, наблюдавшиеся в эксперименте и рассчитанные в приближении длинных волн методом ускоренной сходимости. Видно неплохое соответствие опытных (1) и расчетных (2) данных. Для обеих мод модель достаточно точно определяет горизонтальные положения и высоты гребней и подошв волн, причем

наивысшие значения гребня волны ($x = 0$, вершина клина) рассчитывались при задании смещения свободной поверхности на торцевой стенке сосуда ($x = 60$ см) – данные 2.

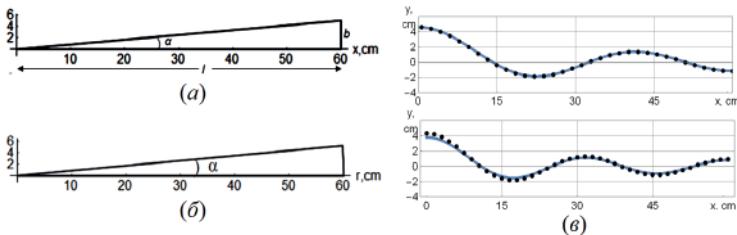


Рис. 3.34. Основание сосуда в виде треугольника (а) и кругового сектора (б) с малым углом $\alpha = \pi / 36$ при вершине. (в) Волновые профили третьей и четвертой мод, рассчитанные с использованием алгоритма ускоренной сходимости (точки) и по (3.4.3) (кривые).

Основание призматического сосуда в виде треугольника с малым углом при вершине можно рассматривать как сектор окружности с центральным углом α – рис. 3.34 а и б. Согласно [29], в полярных координатах (r, θ) потенциал скорости стоячей волны определяется как

$$\Phi = A \operatorname{ch} m(y + h) J_{s\pi/\alpha}(mr) \cos \frac{s\pi}{\alpha} \theta \cos \omega t.$$

Здесь α – центральный угол сектора; $J_{s\pi/\alpha}(mr)$ – функция Бесселя первого рода порядка $s\pi/\alpha$; m – положительные корни уравнения

$$(\operatorname{d} J_{s\pi/\alpha}(mr) / \operatorname{d} r)_{r=l} = 0.$$

В нашем случае $s \equiv 0$ – рассматриваются только радиальные волны, а профиль стоячей волны в сосуде с основанием в форме кругового сектора определяется соотношением

$$\eta(r) = A_0 J_0(m_n r) \cos \omega_n t \quad (3.4.3)$$

где A_0 – смещение свободной поверхности жидкости в точке $r = 0$; m_n – корень трансцендентного уравнения $J'_0(m_n l) = 0$ и $\omega_n^2 = m_n g \operatorname{th} m_n h$.

В условиях эксперимента $l = 60$ см, $\alpha = \pi / 36$ и $h = 4$ см; для третьей и четвертой волновых мод ($n = 3, 4$) получаем

$$m_{3,4} = 0.170, 0.222 \text{ см}^{-1}$$

$$\omega_{3,4} = 9.910, 12.441 \text{ с}^{-1}$$

На рис. 3.34 в представлены профили третьей и четвертой мод, рассчитанные по формуле (3.4.3) (кривые) и в приближении длинных волн методом ускоренной сходимости (точки). Видно, что эти два подхода приводят к абсолютно совпадающим профилям стоячей гравитационной волны. Отметим, что если модель стоячих волн для кругового сектора требует задания смещения свободной поверхности жидкости в центре кругового сектора ($\theta = 0$), то алгоритм ускоренной сходимости позволяет это смещение оценить по смещению свободной поверхности воды на торцевой стенке клина. С другой стороны, модель стоячих волн в сосуде с основанием в виде кругового сектора допускает проведение кинематического анализа волн в линейном приближении, а также при учете более высоких приближений оценку нелинейных эффектов.

Список литературы

1. *Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-precision methods in eigenvalue problems and their applications.* Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.
3. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 303 с.
4. *Defant A.* Physical Oceanography. Vol. 2. Oxford: Pergamon Press, 1961. 598 p.
5. Арсеньева Н.М., Давыдов Л.К., Дубровина Л.Н., Конкина Н.Г. Сейши на озерах СССР. Л.: Изд-во. ЛГУ, 1963. 183 с.
6. *Miles J. W.* Harbor seiching // Ann. Rev. Fluid Mech. 1974. V. 6. P. 17–33.
7. *Оболенский В.Н.* Сейши и их теория // Зап. по гидрографии. 1919. Т. 43. Вып. 2. С. 13–76.
8. *Prigo R.B., Manley T.O., Connell B.S.H.* Linear, one-dimensional models of the surface and internal standing waves for a long and narrow lake // Am. J. Phys. 1996. V. 64. No. 3. P. 288-300.

9. Букреев В.И., Струрова И.В., Чеботников А.В. Сейшевые колебания в прямоугольном канале с резким расширением поперечного сечения // ПМТФ. 2013. № 4. С. 22-31.
10. Акуленко Л.Д., Калиниченко В.А., Нестеров С.В. Сейши в канале с резким изменением рельефа дна // Изв. РАН. МЖГ. 2012. №3. С. 103-111.
11. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н. Волны Фарадея в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями дна // Изв. РАН. МЖГ. 2015. №4. С. 83-91.
12. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н. Волны Фарадея в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями стенок и дна // Изв. РАН. МЖГ. 2017. №2. С. 64-75.
13. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 122–129.
14. Rayleigh L. On waves // Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci. 1876. V. 1. No. 4. P. 257-279.
15. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
16. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. Серия «Математические методы в динамике космических аппаратов», вып. 3. М.: ВЦ АН СССР, 1966, 269 с.
17. Калашник М.В., Кахиани В.О., Ломинадзе Дж.Г., Патараишвили К.И., Свиркунов П.Н., Цакадзе С.Д. Нелинейные изохронные колебания жидкости в параболоиде. Теория и эксперимент // Изв. РАН. МЖГ. 2004. №5. С. 131-142.
18. Нестеров С.В., Калиниченко В.А. Колебания жидкости в круговом цилиндре с возвышением на дне // Изв. РАН. МЖГ. 2024. № 1. С. 91-98.
19. Калиниченко В.А., Кравцов А.В., Родригес-Мижсангес Р., Секерж-Зенькович С.Я., Флорес-Эспиноза Р. Гармоническая неустойчивость поверхности маловязкой жидкости в вертикально колеблющемся сосуде // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 285-292.
20. Abramson H.N., Chu W.H., Kana D.D. Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers// J. Appl.Mech. 1966. V. 33(4). P. 777-784.

21. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968, 532 с.
22. *Калиниченко В.А.* Колебания жидкости в сосуде с треугольным основанием // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 4. С. 52–59.
23. *Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Возбуждение прогрессивно-стоячих волн Фарадея // ДАН. 2011. Т.438. №4. С.475-479.
24. Wilson B. Seiches // Advances in Hydroscience. 1972. V. 8. P. 1-94.
25. Friedrichs C.T., Aubrey D.G. Tidal propagation in strongly convergent channels // J. Geophys. Res. 1994. V. 99(C2). P. 3321–3336.
26. Дроздова Ю.А., Куликовский А.Г. Об описании длинных нелинейных волн в каналах // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 136–145.
27. Higuera F.J., Medina A., Liñán A. Capillary rise of a liquid between two vertical plates making a small angle // Phys. Fluids. 2008. V. 20(10).
28. Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3(45). С. 87-97.
29. Wehausen J.V. Laitone E.V. Surface waves. in Encyclopedia of Physics. Springer Verlag, 1960. V. IX. P. 446–778.

ГЛАВА 4. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАЗРУШАЮЩИХСЯ ВОЛН ФАРАДЕЯ

Обсуждаются способы регуляризации разрушающихся стоячих гравитационных волн в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде. Рассматриваются переходы к высоковязкой жидкости, к двухслойной жидкости, к слою плавающих частиц и к изгибно-гравитационным волнам.

4.1. Вязкая регуляризация – задача Л.Н. Сретенского

Задача о затухании гравитационно-капиллярных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости впервые сформулирована в работах [1, 2] более столетия назад; классические решения для малой и большой вязкости обобщены в [3].

В 1941 г. Л.Н. Сретенский опубликовал результаты исследования стоячих волн на поверхности тяжелой вязкой жидкости [4]. Приведенное в [4] решение дисперсионного уравнения справедливо для жидкости произвольной вязкости и имело целый ряд весьма интересных следствий. Как подчеркивается в [5], «значение этой работы не только в получении ряда интересных результатов физического характера. Еще в XIX веке Г. Ламб обратил внимание на возможность представить поле скоростей в виде суперпозиции потенциального и чисто соленоидального полей. В работе Сретенского эта точка зрения проводится последовательно, показана эффективность такого представления и дано его обоснование».

Разделение поля скоростей жидкости на потенциальную и вихревую части использовался в [6, 7] при решении задач о волнах в вязкой жидкости, причем авторы рассмотрели предельные по вязкости случаи.

Следует особо отметить работы [8, 9], в которых при описании гравитационно-капиллярных волн учитывалась конечная глубина вязкой жидкости. Это приводит к двухпараметрическому дисперсионному уравнению.

В [10] для описания пространственных стоячих волн в вязкой жидкости бесконечной глубины использовались переменные Лагранжа, и приведены асимптотики дисперсионного уравнения.

В данном обзоре как обобщение результатов [4] рассматриваются дисперсионные свойства линейных гравитационных стоячих волн на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины; приводятся данные эксперимента [11-13] качественно подтверждающие основные положения [4].

4.1.1. Дисперсионное уравнение

Ставится задача исследования малых волновых движений тяжелой вязкой жидкости бесконечной глубины при отсутствии каких-либо напряжений на свободной поверхности. Двумерные колебания жидкости описываются в декартовой системе координат (x, y) с началом на невозмущенной поверхности; ось y – вертикальна.

Линеаризованные уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \Delta v - g, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

Здесь ρ, v, g – плотность, кинематическая вязкость и ускорение силы тяжести.

Если движение вязкой жидкости представить в виде

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy \quad (4.2)$$

то из (4.1) следует, что функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа, а ψ – уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - v \Delta \psi = 0 \quad (4.4)$$

В этом случае потенциальная часть φ движения жидкости полностью отделена от вихревой его части ψ .

Пусть малые смещения свободной поверхности задаются функцией

$$y = \eta(x, t)$$

Тогда задача (4.3, 4.4) замыкается граничными условиями на свободной поверхности $y = 0$: кинематическим условием и условиями равенства нулю тангенциального и нормального напряжений

$$\nu = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, -\frac{p}{\rho} + 2\nu \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Учитывая соотношения (4.2), получаем следующие граничные условия задачи (4.3, 4.4)

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \psi + \frac{2\nu}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} \Big|_{y=0} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2\nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (4.6)$$

Для свободной поверхности справедливо следующее выражение

$$\eta = \left\{ \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{2\nu}{g} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\} \Big|_{y=0} \quad (4.7)$$

Таким образом, задача об определении стоячих волн на поверхности безграничной вязкой жидкости приводится к решению граничной задачи (4.3–4.6). Ищем решения в следующем виде

$$\varphi = A e^{ky} \cos kx, \psi = B e^{my} \sin kx \quad (4.8)$$

где k, m – некоторые константы, A, B – неизвестные функции времени.

Поскольку ψ удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.4), то

$$\frac{dB}{dt} = \nu(m^2 - k^2)B$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$B = B_0 e^{-\omega^* t}, \psi = B_0 e^{-\omega^* t + my} \sin kx. \quad (4.9)$$

где $\omega^* = \nu(k^2 - m^2) = b + i\omega$ – комплексная частота колебаний жидкости; B_0 – постоянная интегрирования.

Функцию φ находим при подстановке φ, ψ в граничное условие (4.6)

$$-\omega^* B_0 e^{-\omega^* t} \sin kx = 2\nu[-k^2 B_0 e^{-\omega^* t} \sin kx - k^2 A \sin kx]$$

$$A = -\frac{\omega^* - 2\nu k^2}{2\nu k^2} B_0 e^{-\omega^* t}$$

Итак,

$$\varphi = -\frac{\omega^* - 2vk^2}{2vk^2} B_0 e^{-\omega^* t + ky} \cos kx \quad (4.10)$$

Подставляя (4.9), (4.10) в граничное условие (4.5), после несложных преобразований получим

$$(\omega^* - 2vk^2)^2 + gk = 4v^2 mk^3. \quad (4.11)$$

Если ввести новые переменные (ϑ, ζ) по формулам

$$\vartheta = \frac{vk^2}{\omega_0}; \zeta = -\frac{\omega^* - 2vk^2}{\omega_0}; \omega_0 = (gk)^{1/2} \quad (4.12)$$

то (4.10) принимает вид

$$[1 + \zeta^2]^2 = 16\vartheta^3(\zeta - \vartheta) \quad (4.13)$$

Уравнение (4.13) связывает переменные (ϑ, ζ) , устанавливая зависимость между длиной стоячей волны и ее частотой. Если известна пара значений (ϑ, ζ) , то длина λ стоячей волны и величина ω^* , характеризующая временные изменения волнового процесса, находятся следующим образом

$$\lambda = 2\pi \left(\frac{v^2}{g} \right)^{1/3} \theta^{-2/3}, \quad \omega^* = \left(\frac{g^2}{v} \right)^{1/3} (2\theta - \zeta) \theta^{1/3} \quad (4.14)$$

Отметим, что рассматриваемая задача характеризуется двумя пространственными масштабами – длиной стоячей волны $\lambda = 2\pi/k$ и стоксовым вязким масштабом $\delta_v = \sqrt{v/\omega_0}$. Именно соотношение этих масштабов $\theta = 4\pi^2(\delta_v/\lambda)^2$ определяет различные режимы волнового движения вязкой жидкости.

4.1.2. Решение дисперсионного уравнения

В работе [4] дисперсионное уравнение (4.13) решалось численно методом Греффа (квадрирование корней многочлена). Для $0.06 \leq \vartheta \leq 10$ в [4] приведены таблицы, содержащие значения комплексных корней уравнения (4.13) и соответствующие оценки для частоты и коэффициента затухания стоячих волн. Ниже численное решение (4.13) проводилось с использованием стандартных процедур пакета Mathematica. Отметим высокую точность проведенных в [4] расчетов – сравнение вычисленных величин показало совпадение с точностью до 10^{-3} .

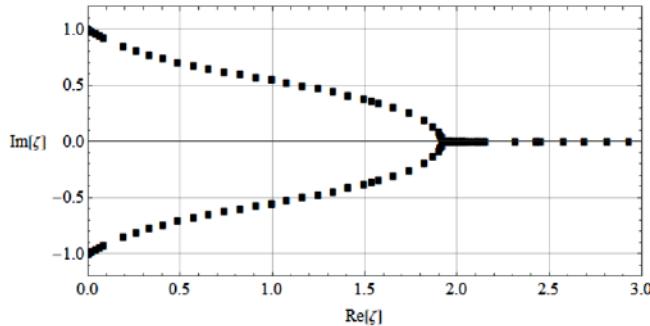


Рис. 4.1. Корни уравнения (2.13) на комплексной ζ –плоскости при $0.0001 \leq \theta \leq 1.7$.

Для каждого конкретного значения θ можно определить корни $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ уравнения (4.13). Из этих четырех корней два корня отбрасывались, поскольку соответствующая им величина m

$$m = \frac{1}{4} \left(\frac{g}{v^2} \right)^{1/3} \frac{1 + \zeta^2}{\theta^{4/3}}$$

имеет отрицательную действительную часть, что противоречит экспоненциальному затуханию завихренности с глубиной.

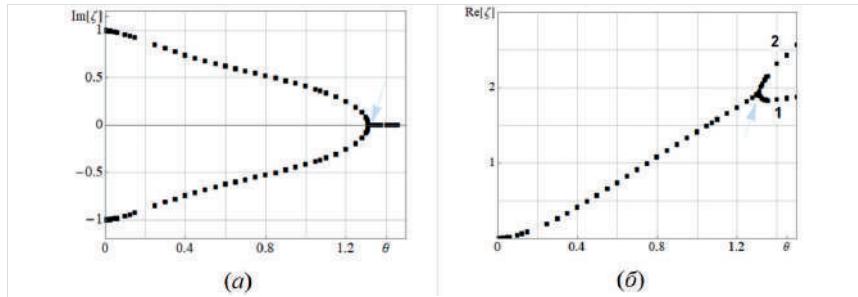


Рис. 4.2. Зависимость комплексного корня ζ дисперсионного уравнения от параметра θ : a, b – $\text{Im} \zeta, \text{Re} \zeta$. Стрелкой отмечено значение $\theta = 1.31$.

Имеющие физический смысл корни уравнения (4.13) при $0.0001 \leq \theta \leq 1.7$ показаны на рис. 4.1. Зависимости $\zeta(\theta)$ представлены на рис. 4.2, на котором стрелками отмечено значение $\theta = 1.31$. Ниже этого значения имеем пару комплексно сопряженных корней, отвечающих

затухающему колебательному режиму; выше $\theta > 1.31$ – движение жидкости носит затухающий апериодический характер.

Проведем анализ данных на рис. 4.2 в соответствии с предельными оценками [3, 8].

В случае длинных волн, т.е. при $9 \ll 1$ правую часть (4.13) можно приравнять нулю, и соответствующие корни равны

$$\zeta = \pm i$$

или с учетом (4.12)

$$\omega^* = \pm i\omega_0 - 2vk^2$$

Знак для корня или частоты может быть выбран любым, поскольку он влияет только на фазу волны. Таким образом, в длинноволновом пределе вязкость жидкости на частоту волны не влияет.

При $9 > 1.31$ имеем два корня ζ_1, ζ_2 , отвечающие апериодическому затуханию – ветви 1, 2 на рис. 4.2 б. Их приближенные значения

$$\zeta_1 = 2\theta - \frac{1}{2\theta}, \zeta_2 = 1.09\theta$$

Соответствующие коэффициенты затухания равны

$$b_1 = \frac{g}{2vk}, \quad b_2 = 0.91vk^2$$

Проведенные в [8] оценки показывают для ζ_1 равные вклады потенциальной ϕ и вихревой ψ частей движения жидкости в апериодическое затухание. В целом движение вязкой жидкости определяется начальной деформацией ее свободной поверхности и медленным возвращением к горизонтальному невозмущенному состоянию.

В случае второго корня ζ_2 быстрое затухание начальных возмущений связано с преобладанием вихревой части движения [8].

Для представления дисперсионных зависимостей $\omega^*(\lambda)$ стоячих волн на поверхности жидкости различной вязкости введем безразмерную комплексную частоту и безразмерную длину волны

$$\Omega^* = \omega^* \left(\frac{v}{g^2} \right)^{1/3} = (2\theta - \zeta)^{1/3}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{g}{v^2} \right)^{1/3} = \theta^{-2/3}$$

В этих переменных дисперсионные кривые представлены на рис. 4.3.

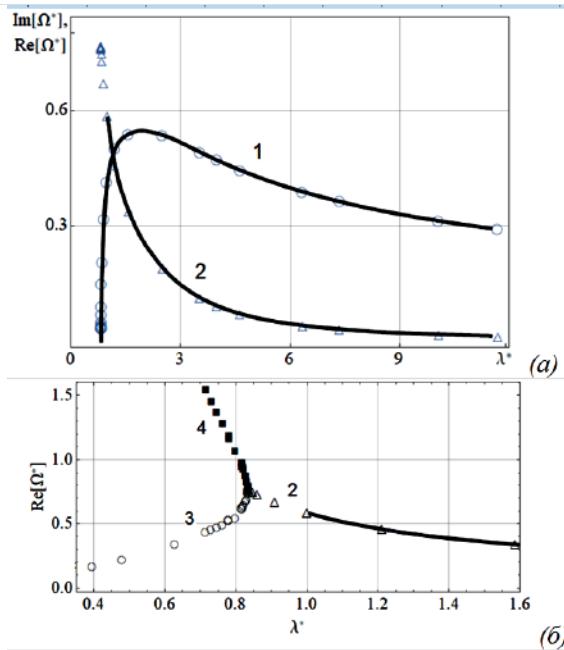


Рис. 4.3. (а) Зависимости безразмерных частоты (1) и коэффициента затухания (2) от длины волны стоячей волны. (б) Коэффициент затухания в окрестности критического значения параметра $\theta = 1.31$ – переход от затухающих колебаний (2) к апериодическому режиму (3, 4).

Кривая (1) на рис. 4.3 а соответствует зависимости частоты $\text{Im}\Omega^*$ стоячей волны от ее длины λ^* . Видно, что частота монотонно растет с уменьшением длины, достигает максимума $\text{Im}\Omega^* = 0.546$ при $\lambda^* = 1.898$ и затем быстро уменьшается до нуля при $\lambda^* = 0.833$. Ниже этого значения периодических движений вязкой жидкости не существует. Таким образом, критическое значение длины волны $\lambda_{cr}^* = 0.833$ устанавливает коротковолновый предел существования гравитационных волн на свободной поверхности жидкости, ниже которого стоячие волны отсутствуют.

Кривые (2) на рис. 4.3 а и б отвечают зависимости коэффициента затухания $\text{Re}\Omega^*$ стоячей волны от ее длины . Для коэффициента затухания характерен монотонный рост, и при $\lambda_{cr}^* = 0.833$ безразмерный

коэффициент затухания составляет величину $\text{Re}\Omega^* = 0.758$. Кривые (3) и (4) на рис. 4.3 б определяют апериодическое затухание – соответствующие корни ζ_1 и ζ_2 дисперсионного уравнения (4.13). С уменьшением $\lambda^* < 0.833$ безразмерный коэффициент затухания $\text{Re}\Omega^*$ или спадает до нуля (кривая 3), или растет до бесконечности (кривая 4).

4.1.3. Применение результатов анализа в эксперименте с волнами Фарадея

В экспериментах [11-13] обнаружено, что увеличение кинематической вязкости жидкости в 50 раз по сравнению с водой кардинально изменяет динамику волнового движения – наблюдается регуляризация стоячих гравитационных волн с полным подавлением процесса их разрушения в виде струйного выброса из гребня и последующего его распада, рис. 4.4.

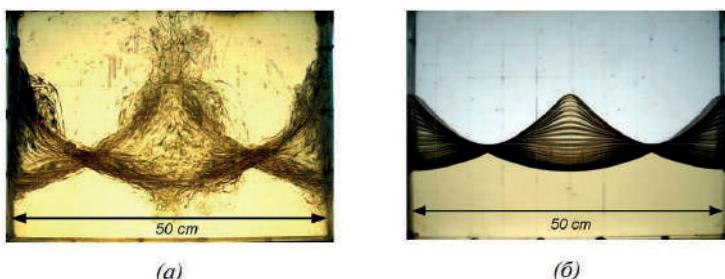


Рис. 4.4. (а) Разрушающаяся волна на свободной поверхности воды ($\nu = 1$ сСт) и (б) регулярная волна высоты $H = 12.6$ см на поверхности водного раствора сахара ($\nu = 85.97$ сСт): частоты волн $\omega = 10.10$ с^{-1} ; скорость съемки 30 к/с; огибающие получены при наложении 60 кадров (три периода волны).

В экспериментах [11–13] по изучению влияния вязкости на интенсивные колебания жидкости использовался режим параметрического возбуждения второй моды ($n = 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности жидкости глубиной $h = 15$ см в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде длиной $L = 50$ см, шириной $W = 4$ см и высотой 50 см. Наблюдаемые двумерные волновые движения могут

рассматриваться как волны на поверхности глубокой воды, поскольку $\omega_0^2 = gk \operatorname{th} kh \square gk$; здесь $\lambda = 50$ см, $k = 2\pi / \lambda$.

Механизм регуляризации разрушающихся волн (рис. 4.4) нельзя объяснить простым увеличением вязкости на два порядка. Действительно, эксперименты показали пятикратное увеличение коэффициента затухания – $b_{\text{exp}} = 0.157$ с⁻¹ для воды и 0.752 с⁻¹ для раствора сахара. Однако показанная на рис. 4.4 волновая картина наблюдалась в стационарном режиме колебаний и воды, и раствора сахара.

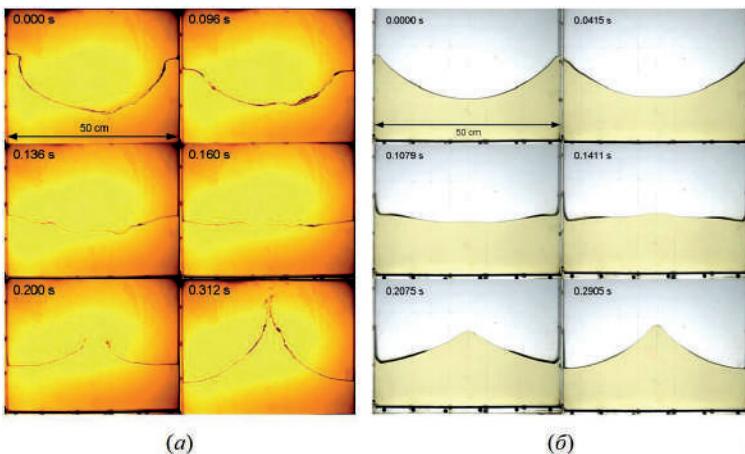


Рис. 4.5. Последовательности видеокадров, иллюстрирующих (а) процесс разрушения гравитационных волн Фарадея на свободной поверхности воды и (б) регулярную волновую моду на поверхности водного раствора сахара ($v = 85.97$ сСт) в течение половины периода волны; момент времени указан в верхнем левом углу кадра.

Рассмотрим влияние вязкости жидкости на динамику нерегулярных и разрушающихся волн – рис. 4.5.

Для воды последовательность кадров, отображающих зарождение, развитие и схлопывание каверны на стадии формирования гребня в центральной части сосуда приведена на рис. 4.5 а. При переходе впадина–гребень центральная часть жидкости перемещается вверх, и в интервале 0.096 – 0.160 с на волновом профиле видны мелкомасштабные возмущения размерами не более 5 см. При $t = 0.200$ с в середине профиля волны

наблюдается сформировавшаяся каверна, последующее схлопывание которой приводит к струйному всплеску с отрывом капель – см. главу 2.

При $\nu = 85.97$ сСт профили волн на поверхности раствора сахара – абсолютно гладкие для всего полупериода: рис. 4.5 б. Видно, что волна нелинейная, но регулярная, ее профиль – без каких-либо мелкомасштабных возмущений и признаков разрушения.

Единственной причиной отличия волновых картин на рис. 4.5 является вязкость рабочей жидкости. Увеличение вязкости колеблющейся жидкости до 85.97 сСт приводит к полному подавлению процесса разрушения и регуляризации стоячей волны: исчезают мелкомасштабные возмущения, приводящие к образованию коллапсирующей каверны. Таким образом, вязкость жидкости является своеобразным фильтром короткомасштабных возмущений.

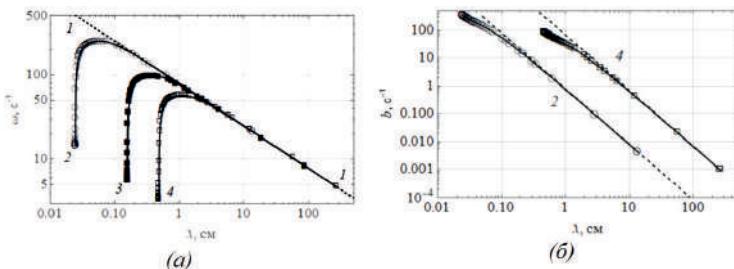


Рис. 4.6. (а, б) Зависимости $\omega(\lambda)$ и $b(\lambda)$: 1 – 4 – $\nu = 0, 1, 16.24$, и 85.97 сСт.

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов используем результаты численного анализа дисперсионного уравнения (4.13) в виде зависимостей $\omega(\lambda)$ и $b(\lambda)$ – рис. 4.6. Частота свободных стоячих гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости ($\nu=0$) определяется соотношением $\omega_0 = (gk)^{1/2}$ и возрастает до бесконечности при уменьшении длины волны – кривая (1) на рис. 4.6 а. Если учесть вязкость колеблющейся жидкости, то частота волны принимает нулевое значение $\omega = 0$ при некоторой критической длине волны λ_{cr} . Для воды (2) эта величина равна $\lambda_{cr} = 0.02$ см. При увеличении вязкости до 16.24 сСт (52% раствор сахара) имеем $\lambda_{cr} = 0.15$ см – данные

(3). Для 63%-раствора сахара (4) критическая длина волны оценивается как $\lambda_{cr} = 0.44$ см.

Следовательно, имеются критические значения длины волны λ_{cr} , устанавливающие коротковолновый предел возбуждения гравитационных волн. При $\lambda < \lambda_{cr}$ вязкость жидкости полностью подавляет всякое волновое движение. Увеличение вязкости приводит к возрастанию этого предела. Этот результат подтверждает данные эксперимента о вязкой регуляризации разрушающихся стоячих волн и позволяет объяснить коротковолновой отсечкой отсутствие мелкомасштабных возмущений на профилях волн вязкой жидкости. Заниженные (по сравнению с экспериментальными) расчетные значения λ_{cr} можно объяснить тем, что в дисперсионном соотношении (4.13) не учтены конечная глубина жидкости, а также вязкие потери на боковых стенках и дне сосуда.

Если учесть поверхностное натяжение жидкостей σ и рассмотреть гравитационно-капиллярные волны, для которых $\omega_0 = (gk + \sigma k^3 / \rho)^{1/2}$, то дисперсионное уравнение (4.13) не изменится, а значения критической длины волны для воды и 63%-раствора сахара $\lambda_{cr} = 4.8 \cdot 10^{-6}$, 0.04 см оказываются существенно меньше соответствующих величин для гравитационных волн.

На рис. 4.6 б для воды (2) и раствора сахара (4) представлены зависимости коэффициента затухания от длины волны, полученные при численном решении (4.13). Для этих жидкостей для второй волновой моды ($\lambda = 50$ см) имеем 0.0003 и 0.0246 с^{-1} соответственно. Пунктирные зависимости на рис. 4.6 б рассчитаны по формуле $b = 2vk^2$ без учета дна и боковых стенок. Именно по этой причине расчетные значения коэффициента затухания существенно меньше экспериментальных.

Таким образом, из (4.13) следует, что именно вязкость жидкости обеспечивает отсечку коротковолновых возмущений, ответственных за разрушение волн.

На рис. 4.7 а в качестве интегральной волновой характеристики приведены резонансные зависимости установившейся высоты волны Фарадея от частоты $H(\Omega)$ колебаний сосуда. Видно, что на поверхности всех исследуемых жидкостей высота волны монотонно возрастает при

уменьшении Ω до некоторого значения частоты, соответствующей срыву колебаний.

Для воды (1) регулярные и нерегулярные/разрушающиеся волны наблюдаются в частотных диапазонах I и II, тогда как волны на поверхности масла и раствора сахара (максимальной вязкости) остаются регулярными во всем частотном диапазоне возбуждения второй волновой моды – данные 2 и 3 на рис. 4.7 а.

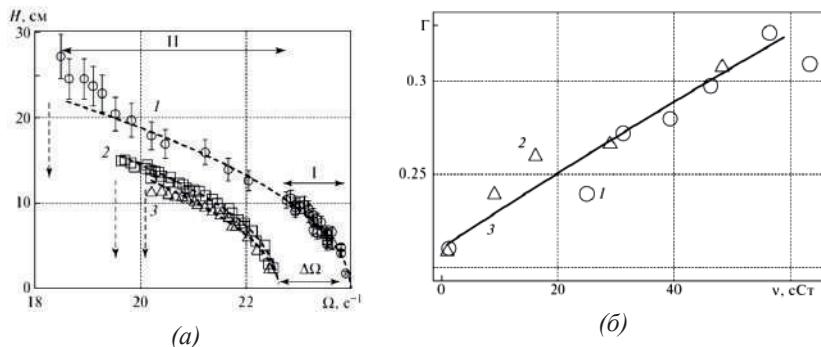


Рис. 4.7. (а) Резонансные зависимости $H(\Omega)$: 1 – вода ($v = 63.34$ сСт); 2 – масло ($v = 63.34$ сСт); 3 – раствор сахара (85.97 сСт); I, II – диапазоны возбуждения регулярных, нерегулярных и разрушающихся волн на воде; пунктирные стрелки – срыв колебаний. (б) Зависимость предельной крутизны $\Gamma = H / \lambda$ регулярной волны от вязкости v жидкости: 1 – смесь масло-керосин; 2 – водный раствор сахара; 3 – аппроксимирующая кривая $\Gamma = 0.21 + 0.002v$

Отметим сдвиг $\Delta\Omega$ резонансных зависимостей для масла (2) и раствора сахара (3) в низкочастотную область, что обусловлено уменьшением собственной частоты ω и сужением резонансных зон за счет увеличения вязкости рабочих жидкостей по сравнению с водой. При уменьшении вязкости растворов масла и сахара соответствующие резонансные зависимости смещаются к кривой 1 для воды – рис. 4.7 а.

Уменьшение вязкости сказывается не только на частотном сдвиге $\Delta\Omega$, но и качественно изменяет характер колебаний жидкости. Для чистого масла ($v = 63.34$ сСт), и его смеси с керосином вязкости 56.42 сСт, а также для раствора сахара максимальной вязкости $v = 85.97$ сСт наблюдаемые волны регулярны для всех частот зависимости $H(\Omega)$, т.е. предельная

крутизна определяется только частотой срыва. При $v = 46.33, 39.52, 31.51$ сСт смеси масло-керосин и $v = 48.30, 28.96$ сСт водного раствора сахара стоячая волна при некоторой Ω становится нерегулярной при сохранении вязкости жидкости. В случае $v = 25.35$ сСт смеси масло-керосин и $v = 16.24$ сСт раствора сахара наблюдаются характерные признаки разрушения волн – струйные выбросы из гребня волны с отрывом капель и значительных фрагментов жидкости.

Таким образом, результаты настоящего эксперимента по возбуждению стоячих волн на свободной поверхности вязкой жидкости позволяют сделать следующий вывод. Если уменьшать частоту Ω колебаний сосуда, следуя вдоль резонансной кривой $H(\Omega)$ (высота волны растет), то при $v > 50$ сСт наблюдаются только регулярные волны. При $v < 20$ сСт жидкость ведет себя аналогично воде, для которой характерны регулярные, нерегулярные и разрушающиеся волны Фарадея. Промежуточный интервал значений вязкости жидкости $20 < v < 50$ сСт обеспечивает возбуждение регулярных и нерегулярных волн без признаков разрушения.

Анализ резонансных зависимостей позволяет также оценить влияние вязкости жидкости на предельную высоту регулярной волны. На рис. 4.7 б приведена экспериментальная зависимость предельной крутизны $\Gamma = H / \lambda$ волны как функция кинематической вязкости v в жидкости. Если для воды $\Gamma = 0.21$, то с увеличением вязкости среды предельная крутизна монотонно растет, достигая значения $\Gamma = 0.326$ при $v = 56.42$ сСт.

4.2. Гравитационные баротропные волны в двухслойной жидкости

Обсуждаются результаты экспериментов [14] по исследованию влияния верхнего слоя вязкой жидкости на процесс разрушения и регуляризацию стоячей гравитационной волны Фарадея на свободной поверхности двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде.

Гравитационные волны в двухслойной жидкости со свободной поверхностью подразделяются на волны первого и второго видов [15] или на баротропные и бароклинные волны [16]. В случае баротропных волн (волны первого вида) свободная поверхность и граница раздела двухслойной системы совершают синфазные колебания. Волновые

движения, при которых свободная поверхность и граница раздела двух жидкостей колеблются в противофазе, относятся к бароклинному режиму колебаний двухслойной жидкости (волны второго вида).

Результаты аналитического и экспериментального анализа условий параметрического возбуждения баротропных и бароклинных капиллярных волн приведены в [17, 18]. Поле скоростей частиц двухслойной жидкости в режиме параметрических бароклинных колебаний исследовалось в [18].

Гравитационные баротропные волны по сравнению с волнами бароклинными исследованы в меньшей степени. Теоретическая оценка коэффициента затухания таких волн в случае бесконечно глубокого нижнего слоя приведена в [20]. Установлено, что наличие верхнего слоя жидкости приводит к увеличению собственной частоты нелинейных волн первого вида [21].

Известно, что тонкий слой масла приводит к подавлению капиллярной ряби на поверхности моря (см., например, [22, 23]). Анализ гравитационно-капиллярных волн в системе пленка – жидкость проведен в работе [24], причем под пленкой понимается монослоем поверхности-активного вещества или масла. Если монослоем рассматривать как бесконечно тонкий слой верхней жидкости в двухслойной системе, то колебания пленки – жидкость происходят в баротропном режиме. Отметим, что в литературе отсутствует единая точка зрения на сам факт влияния и механизм воздействия нефтяных пленок на затухание гравитационных волн частотой менее 60 c^{-1} – см. [23, 25].

Далее в настоящем разделе приведены результаты экспериментального исследования процесса регуляризации разрушающихся стоячих гравитационных волн на свободной поверхности воды слоем более легкой несмешивающейся с водой жидкости. Рассматриваются колебания двухслойной системы в баротропном режиме. Для возбуждения волн используется параметрический резонанс.

4.2.1. Постановка эксперимента

В экспериментах [14] для формирования двухслойной системы использовались следующие несмешивающиеся жидкости: растительное масло – вода и керосин – вода. Возбуждение второй моды ($n = 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности двухслойной жидкости в

прямоугольном сосуде длиной $L = 50$ см и шириной $W = 10$ см осуществлялось посредством параметрического резонанса – рис. 4.8. Установленный на электромеханический вибростенд сосуд совершил вертикальные колебания с амплитудой s и частотой Ω . Двумерные волновые движения двухслойной жидкости постоянной глубины $h = 15$ см исследовались в режиме основного резонанса Фарадея, когда частота колебаний сосуда Ω в два раза превышала частоту ω возбуждаемых поверхностных гравитационных волн.

При фиксированной величине $s = 0.75$ см изменение частоты Ω в диапазоне $18 - 24$ с⁻¹ обеспечивало вариации крутизны $\Gamma = H / \lambda$ стоячей поверхностной волны в интервале 0.004 - 0.66. Здесь $\lambda = 50$ см – длина волны; H – высота волны, определяемая как расстояние между ложбиной волны и ее гребнем. В условиях эксперимента перегрузка $\varepsilon = s\Omega^2 / g$ изменялась от 0.24 до 0.44.

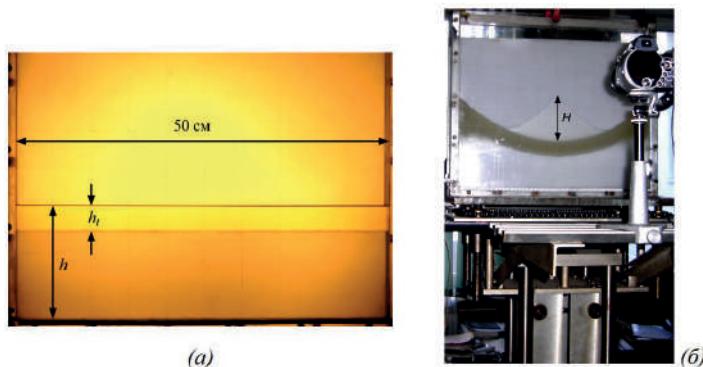


Рис. 4.8. (а) Двухслойная жидкость в прямоугольном сосуде. (б) Параметрическое возбуждение стоячей поверхностной волны (вторая мода): h_1 – толщина слоя масла; $h = 15$ см – неизменная общая глубина несмешивающихся жидкостей); H – высота волны.

Если глубина заполнения сосуда двухслойной жидкостью составляла величину $h = 15$ см и не изменялась в ходе экспериментов, то толщина h_1 верхнего слоя варьировалась от 0.25 до 7.5 см.

К основным физическим характеристикам использованных в экспериментах жидкостей относятся плотность ρ , кинематическая вязкость ν и поверхностное натяжение σ , значения которых приведены в табл. 4.1. Эксперименты проводились при температуре 20–21°C.

Для видеорегистрации волновых движений жидкости использовались фотокамеры DIMAGE Z2 и Canon PowerShot SX50HS со скоростью съемки 30 и 120 кадров/с. Последующая обработка видеозаписей проводилась с помощью программы ImageJ.

Для количественных оценок диссипативных эффектов использовался коэффициент затухания b , который оценивался по описанной в главе 2 методике: после установления на одной из резонансных частот Ω стационарных колебаний жидкости вибростенд выключался, и проводилась видеосъемка процесса затухания второй волновой моды. Величина b определялась как $b = T^{-1} \ln(H_m / H_{m+1})$, где $T = 2\pi / \omega$ – период волны, H_m и H_{m+1} – значения высоты волны, взятые через один период колебаний. В качестве безразмерной характеристики диссипативных свойств двухслойной системы использовался декремент $\delta = bT$.

Таблица 4. 1. Свойства рабочих жидкостей

Жидкость	ρ (г/см ³)	ν (сСт)	σ (дин/см) (в воздухе)	σ (дин/см) (в воде)
Вода	1.00	1	73	–
Масло растительное	0.93	61	40	24
Керосин	0.78	1.3	27	42

В условиях эксперимента исследуемая вторая волновая мода в баротропном режиме колебаний двухслойной системы близка к свободным гравитационным волнам на поверхности однородной жидкости; частота этих волн равна $\omega = (gk \ln kh)^{1/2} = 10.85 \text{ с}^{-1}$, где $g = 981.7 \text{ см/с}^2$ – ускорение свободного падения, $k = 2\pi / \lambda = 0.126 \text{ см}^{-1}$ – волновое число, отвечающее длине гравитационной волны $\lambda = 50 \text{ см}$.

4.2.2. Результаты и обсуждение

В экспериментах наблюдались регулярные и разрушающие волны. Если для регулярных волн профиль периодичен во времени и симметричен относительно вертикальной плоскости, проведенной через пучность

волны, то в случае разрушающихся волн Фарадея со свободной поверхности жидкости срываются отдельные капли – рис. 4.9 *а*. В [11-13] (см. разд. 4.1) показано, что для воды и растительного масла как однородных жидкостей предельная крутизна достигает величины $\Gamma = H / \lambda \sim 0.22$ и 0.30, соответственно. Для керосина как однородной жидкости предельная крутизна равна $\Gamma = H / \lambda \sim 0.22$.

Эксперименты показали, что слой керосина ($h_l = 0.25 - 7.5$ см) практически не меняет характер колебаний двухслойной системы в баротропном режиме – наблюдаемые волны аналогичны волнам на поверхности воды, рис. 4.9 *б*. Для разрушающихся волн на свободной поверхности двухслойной системы керосин – вода характерен срыв отдельных капель или струй. Максимальная крутизна регулярных волн для системы керосин – вода составляла величину $\Gamma = H / \lambda \sim 0.22$. Таким образом, использование керосина в качестве верхней жидкости не влияет на разрушающиеся гравитационные волны.

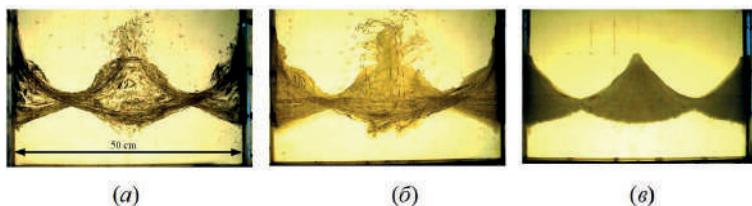


Рис. 4.9. Огибающие свободной поверхности в случае (а) воды ($\Omega = 21.44 \text{ c}^{-1}$), (б) двухслойной жидкости керосин – вода ($\Omega = 21.59 \text{ c}^{-1}$, $h_l = 1$ см) и $H = 14.2$ см,) и (с) двухслойной жидкости масло – вода ($\Omega = 21.96 \text{ c}^{-1}$, $h_l = 1$ см, $H = 16.2$ см,). Огибающие – результат наложения 150-200 видеокадров, что при скорости съемки 30 к/с соответствует десяти волновым периодам.

Размещение слоя растительного масла поверх воды существенно меняет волновую картину – наблюдается регуляризацию разрушающихся волн (рис. 4.9 *в*). Показанная на фотографии волна имеет высоту $H = 16.2$ см, какие-либо признаки разрушения стоячей гравитационной волны отсутствуют.

В экспериментах в качестве интегральных волновых характеристик баротропной моды использовались резонансные зависимости высоты

$H = H(\Omega)$ установившейся волны от частоты Ω вертикальных колебаний сосуда – рис. 4.10.

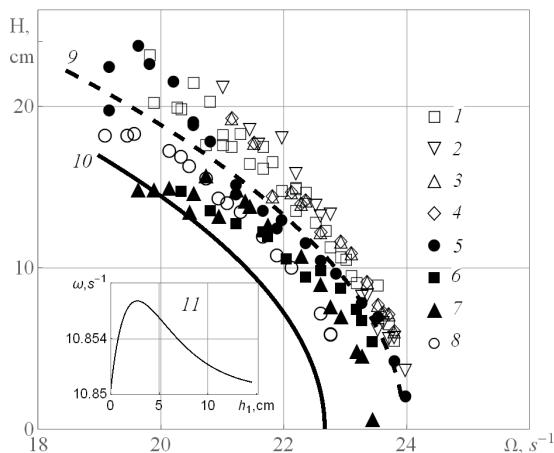


Рис. 4.10. Резонансные зависимости $H(\Omega)$ в случае двухслойной жидкости масло–вода (1–8) и однородных жидкостей (9, 10): 1–8 – $h_1 = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 3.5, 5$ и 7.5 см; 9 – вода; 10 – масло; 11 – зависимость собственной частоты баротропной моды от толщины верхнего слоя [21].

Видно, что частотный диапазон резонансных зависимостей для толщины слоя $h_1 = 0.25 – 3.5$ см растительного масла (данные 1–6) не отличается от воды (9). Резонансная зависимость второй моды на поверхности растительного масла (10) смещена в область низких частот из-за 60–кратного увеличения вязкости масла по сравнению с водой. Увеличение толщины верхнего слоя вязкой жидкости должно сказываться на уменьшении собственной частоты волны и сужении ширины резонансных зон параметрического возбуждения. Однако влияние вязкости проявляется только для $h_1 = 5$ и 7.5 см (данные 7 и 8).

В работе [21] при анализе нелинейных баротропных колебаний двухслойной идеальной жидкости показано, что собственная частота волн на свободной поверхности двухслойной системы сложным образом зависит от высоты волны и толщины верхнего слоя, причем

$\omega(H, h_l) > \omega_0 = (gk \operatorname{th} kh)^{1/2}$. В явном виде выражение для частоты $\omega(H, h_l)$ здесь не приводится из-за своей громоздкости. График же рассчитанной зависимости $\omega(h_l)$ для второй моды баротропной волны высоты $H = 7.0$ см в случае системы масло–вода приведен на рис. 4.10, врезка 11. Видно, что частота сначала растет, достигает максимума при $h_l \approx 3$ см и затем монотонно уменьшается. Этот полученный для идеальных жидкостей результат если не количественно, то качественно объясняет отсутствие низкочастотного сдвига резонансных зависимостей на рис. 4.10. Для толщин $h_l = 5$ и 7.5 см нелинейный эффект увеличения частоты оказывается слабее влияния вязкости верхнего слоя, и на рис. 4.10 наблюдается низкочастотное смещение резонансных зависимостей.

Отметим, что вторая мода на свободной поверхности системы керосин–вода для всех использованных в эксперименте величин h_l имела резонансные зависимости $H(\Omega)$, идентичные случаю воды как однородной жидкости.

Использование масла как высоковязкой жидкости в двухслойной системе значительно увеличивает предельную крутизну и декремент регулярной волны, как показано на рис. 4.11. На графиках приведены зависимости крутизны $\Gamma = H / \lambda$ и декремента δ от безразмерной толщины $h^* = h_l / h$ слоя масла.

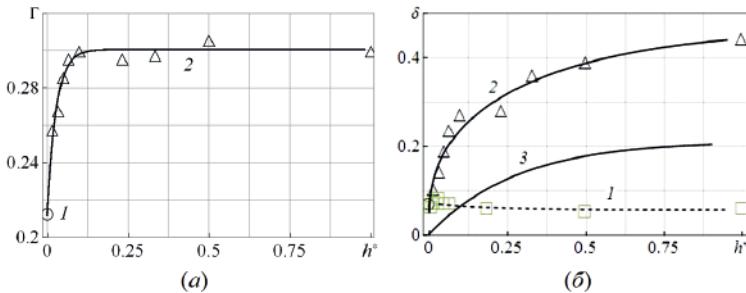


Рис. 4.11. Зависимости предельной крутизны (а) и декремента (б) поверхности волны от толщины $h^* = h_l / h$ верхнего слоя масла при глубине двухслойной жидкости $h = 15$ см: 1 – вода и керосин–вода; 2 – масло–вода; 3 – модель [20], $20 \times \delta$.

Для двухслойной системы растительное масло – вода крутизна Γ регулярной волны возрастает с увеличением толщины $h^* = h_1 / h$ верхнего слоя и достигает значения 0.30, что в 1,5 раза превышает предельную крутизну волны $\Gamma = 0.22$ на поверхности воды (как однородной жидкости) или системы керосина–воды, рис. 4, *a*. Из приведенного графика следует, что при использовании слоя растительного масла толщиной 1 и 1.5 см ($h^* = 0.06$ и 0.12) как верхней жидкости в двухслойной системе регулярная баротропная волна имела крутизну $\Gamma \sim 0.30$. Такое же значение предельной крутизны Γ получено в [11-13] для волны на свободной поверхности высоковязких однородных жидкостей – растительного масла и 63% водном растворе сахара, рис. 4.7 *б*.

Анализ процесса затухания второй волновой моды (рис. 4.11 *б*) показал, что для системы керосин–вода декремент δ практически не зависит от толщины верхнего слоя и для всех h^* составляет величину $\delta \sim 0.06$, соответствующую чистой воде. В случае двухслойной жидкости масло–вода увеличение h^* приводит к монотонному росту декремента баротропной моды, который при $h^* = 0.5$ оценивается величиной $\delta = 0.40$.

Для двухслойной системы теоретическая оценка декремента баротропной моды в случае бесконечно глубокого нижнего слоя и без учета боковых стенок сосуда приведена в работе [20]

$$\delta = 2k^2 T \frac{\rho_2 v_2 + 2(\rho_1^1 v_1^1 - \rho_2 v_2) \operatorname{th} kh_1}{\rho_2 + (2\rho_1 - \rho_2) \operatorname{th} kh_1}$$

где $T = 2\pi / \omega$ – период волны; $\rho_{1,2}, v_{1,2}$ – плотность и кинематическая вязкость жидкостей верхнего и нижнего слоев. Рассчитанные значения δ при изменении h^* от 0 до 0.9 лежат в диапазоне $10^{-3} – 10^{-2}$; на рис. 4.11 *б* соответствующая зависимость 3 построена при 20–кратном увеличении δ . Такие заниженные значения декремента в модели [20] можно объяснить тем, что не учтены конечная глубина нижней жидкости, наличие боковых стенок и дна.

Приведенные на рис. 4.11 данные позволяют сделать вывод о том, что использование растительного масла в качестве верхней жидкости двухслойной системы обеспечивает значительное увеличение предельной крутизны баротропных волн с одновременным ростом их декремента.

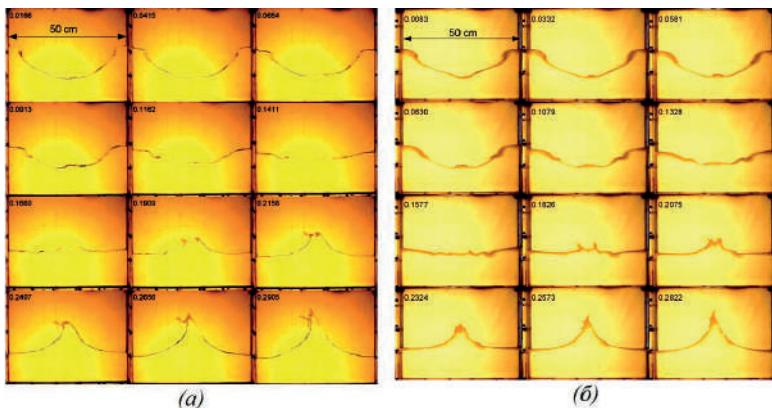


Рис 4.12. Последовательность видеокадров, иллюстрирующих процесс разрушения (a) гравитационной волны Фарадея на свободной поверхности воды и (б) баротропной волны в системе керосин–вода ($h_l = 1$ см) при частоте колебаний сосуда $\Omega = 21.44$ с⁻¹. Скорость видеосъемки 120 к/с; момент времени (с) указан в верхнем левом углу кадра.

Детальный анализ данных видеозаписи позволил в случае воды выявить мелкомасштабные возмущения на профилях волн; их характерный размер не превышал 6 см – рис. 4.12 а. Эти возмущения определяют зарождение, развитие и разрушение каверны с последующим струйным всплеском из гребня волны. Описание механизма разрушения приведено в [26].

Аналогичная картина наблюдается на свободной поверхности двухслойной жидкости керосин–вода – рис. 4.12 б. Видно, что слой керосина толщиной 1 см не препятствует процессу разрушения баротропной волны: прослеживается образование и схлопывание каверны с последующим выбросом и разрушением струи.

В случае системы растительное масло–вода волна, возбуждаемая на той же частоте 21,44 с⁻¹, является регулярной – рис. 4.13. При высоте $H = 16.6$ см волновой профиль плавный, и какие-либо признаки разрушения волны отсутствуют.

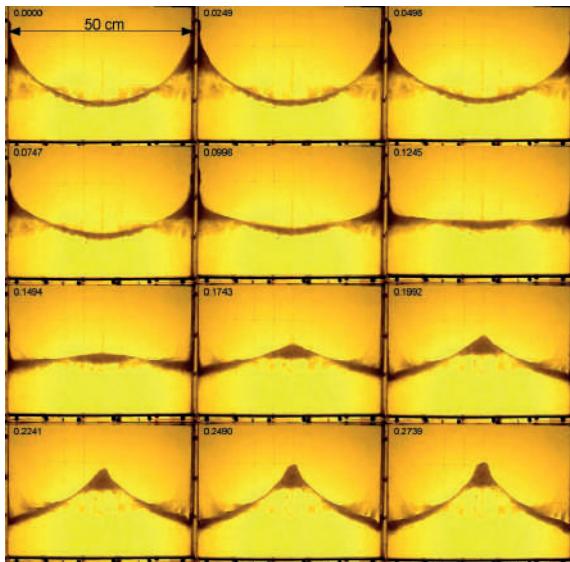


Рис 4.13. Последовательность видеокадров, демонстрирующих регулярную баротропную волну в системе растительное масло–вода ($h_1 = 1$ см) в течение половины периода волны: $\Omega = 21.44 \text{ c}^{-1}$; $H = 16.6 \text{ см}$.

Отличие волновых картин на рисунках 4.12 *б* и 4.13 связано с использованием керосина и растительного масла в качестве верхней жидкости в двухслойной системе. Эти жидкости различаются по плотности, вязкости и межфазному натяжению (с водой) – см. табл. 4.1. Поскольку именно растительное масло обеспечило увеличение предельной крутизны волны, ее диссипацию и, в конечном счете, регуляризацию волнового движения, ниже рассматривается система масло – вода.

Рассмотрим структурные изменения верхнего слоя в системе масло–вода с увеличением высоты волны – рис. 4.14. Для этого используем видеоматериалы процесса установления стационарных колебаний двухслойной жидкости на частоте колебаний сосуда $\Omega = 22.60 \text{ c}^{-1}$. Начальная толщина слоя составляла $h_1 = 1 \text{ см}$.

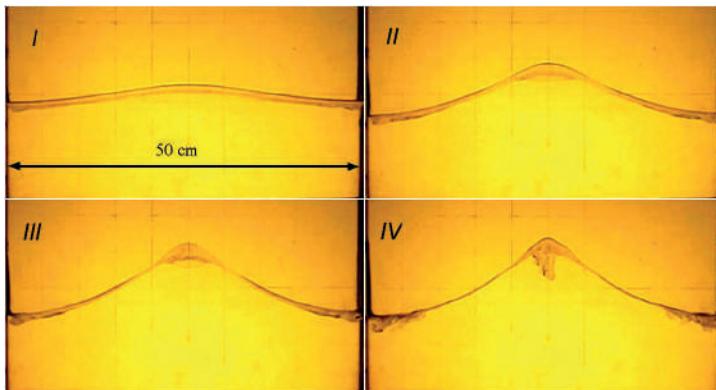


Рис 4.14. Форма верхнего слоя в системе масло–вода ($h_l = 1$ см) в зависимости от высоты волны: I–IV – $H = 2.1, 6.7, 9.4$ и 10.1 см; при частоте колебаний сосуда $\Omega = 22.60$ с^{-1} .

При высоте волны $H = 2,1$ см профиль волны является линейным, его толщина одинакова по всей длине сосуда – рис. 4.14 (I). Увеличение высоты до $H = 6,7$ см приводит к утолщению слоя в гребне и ложбинах при уточнении в узловых областях – (II). При $H = 9,4$ и $10,1$ см наблюдается переток практически всей верхней жидкости в области гребня и ложбины волны – (III, IV).

Используя модель [27] нелинейных поверхностных волн Фарадея, можно в переменных Лагранжа (a, b, t) построить не только профиль свободной поверхности ($b = 0$), но и определить координаты (x, y) частиц однородной жидкости внутри слоя заданной глубины h

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a - H \frac{\operatorname{ch} k(b+h)}{2 \operatorname{sh} kh} \sin ka \cos \psi + H^2 k \frac{\sin 2ka}{32 \operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\psi) \\ \quad - \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2k(b+h)}{\operatorname{sh}^4 kh} \sin 2ka \cos 2\psi + \frac{1}{16} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2k(b+h)}{\operatorname{sh}^2 2kh} \sin 2ka, \\ y = b + H \frac{\operatorname{sh} k(b+h)}{2 \operatorname{sh} kh} \cos ka \cos \psi + H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2k(b+h)}{32 \operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\psi) \\ \quad + \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2k(b+h)}{\operatorname{sh}^4 kh} \cos 2ka \cos 2\psi - \frac{1}{16} H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2k(b+h)}{\operatorname{sh}^2 2kh} \cos 2ka, \\ \psi = \Omega t / 2, k = 2\pi / \lambda, a \in [0, L], b \in [-h, 0] \end{array} \right.$$

Определим b -изолинии как линии одинаковых значений начальной вертикальной координаты b частиц жидкости. Изолинии $b = 0, -0.5$ и -1 см для второй волновой моды максимального развития показаны на рис. 4.15. Первоначально расстояние между этими тремя линиями составляло 0.5 см, причем каждая линия задается 50 точками, расположенными на 1 см друг от друга. Из-за асимметрии профиля волны (нелинейность волны) наблюдается сгущение точек на гребне волны и их разрежение в ложбине. Это приводит к изменению расстояния между b -изолиниями, которое увеличивается в гребнях и уменьшается в ложбинах. Этим можно объяснить изменение толщины верхнего слоя несмешивающейся жидкости в случае баротропных волн, если рассматривать изолинии $b = 0$ и -1 см в качестве границ верхней жидкости двухслойной системы на рис. 4.14.

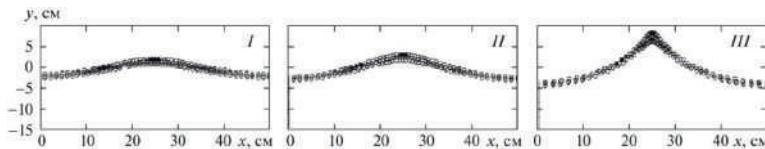


Рис. 4.15. Рассчитанные волновые профили, показывающие деформацию приповерхностного слоя ($b = 0, -0.5$ и -1 см) однородной жидкости при $\psi = \pi$ в зависимости от высоты волны: I–III – $H = 2, 3$ и 12 см; $\Omega = 21.74 \text{ c}^{-1}$.

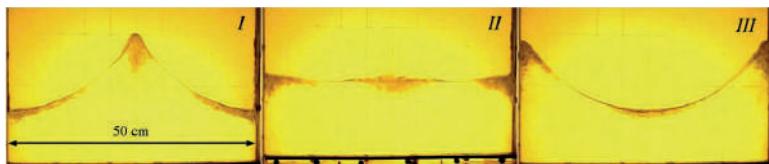


Рис. 4.16. Дисперсные системы в пучностях баротропной волны: I–III – три последовательные фазы волны высоты $H = 13.6$ см; $\Omega = 21.74 \text{ c}^{-1}$; $h_1 = 1$ см.

Если на видеокадрах рис. 4.14 между двумя несмешивающимися жидкостями прослеживается резкая межфазная граница, то для волн большей высоты $H \geq 13$ см происходит диспергирование жидкостей – рис. 4.16. Наблюдаемые в пучностях волны дисперсные структуры могут быть отнесены к обратной эмульсии типа вода в масле, для которой дисперсной

фазой является вода, а непрерывной фазой – масло. Тип эмульсии определялся следующим образом. После проведения серии измерений установка выключалась. Верхний слой жидкости вследствие растекания дисперсных структур (локализованных в пучностях, рис. 4.16) принимал вид, показанный на рис. 4.17.

Показанная на рис. 4.17 *б* дисперсная система относится к обратной эмульсии типа вода в масле. Если начальная толщина слоя составляла величину 1 см, то вследствие эмульгирования капель воды в масле величина h_l возрастила до 1.3 см. Вывод о типе эмульсии (в/м) сделан по следующим трем признакам [27]. Во-первых, образец представленной на рис. 4.17 *б* эмульсии имел более низкую по сравнению с водой электропроводность. Во-вторых, образец эмульсии легко смешивался с маслом, но не с водой. Наконец, образец не окрашивался водорастворимой краской.

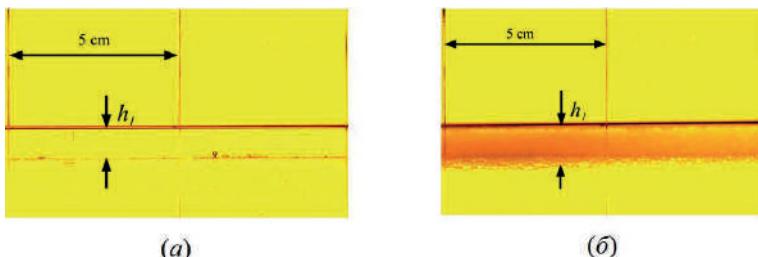


Рис. 4.17. Верхний слой системы масло–вода до и после проведения серии экспериментов: *а*, *б* – $h_l = 1$ и 1.3 см.

В экспериментах использовалась макросъемка с 60-кратным оптическим увеличением, что позволило сделать вывод о полидисперсности обратной эмульсии. Диаметр $2r$ капель воды варьировался от 0.01 до 0.5 см. Отметим, что нижний предел для $2r$ ограничен разрешимостью макросъемки в условиях эксперимента. Как видно на рис. 4.17 *б*, более крупные капли расположены в нижней части слоя. Визуально было установлено, что с течением времени эти капли воды осаждаются и формируют концентрированный слой на границе с подстилающим слоем воды. Нижняя часть этого слоя капель воды разрушается вследствие коалесценции капель между собой и

подстилающей поверхностью воды. Полное осаждение капель воды до восстановления чистого слоя масла продолжалось в течение 2–6 часов и зависело от длительности предшествующего эксперимента, т.е. от времени эмульгирования.

При образовании эмульсии увеличивается поверхность дисперсной фазы, что требует затрат механической энергии, которая концентрируется на поверхности раздела в виде свободной поверхностной энергии – межфазное натяжение, см., напр., [28].

Оценим порядок величины свободной энергии $E_{своб}$, считая обратную эмульсию на рис. 4.17 б монодисперсной с радиусом капель воды $r \approx 0.1$ см. Если при изменении толщины верхнего слоя $\Delta h_l = 0.3$ см объем дисперсной фазы $V=L \cdot W \cdot \Delta h_l = 60 \text{ см}^3$ ($L=50 \text{ см}$, $W=4 \text{ см}$), то из соотношения

$$\frac{S}{V} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r^3 / 3} = \frac{3}{r}$$

для общей межфазной поверхности S получим значение $S = 3V/r = 1800 \text{ см}^2$. При межфазном натяжении $\sigma = 24 \text{ эрг/ см}^2$ свободная энергия порядка $E_{своб} = 72000 \text{ эрг} \sim 10^5 \text{ эрг}$. Эта величина определяет минимальные затраты механической энергии на диспергирование двухслойной жидкости. Источником же энергии является волновое движение жидкости в баротропном режиме. Полная энергия стоячей баротропной волны определяется соотношением [14]

$$E = \frac{1}{16} g \left[\rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) e^{-2kh_l} \right] LWH^2$$

При $H = 13.6 \text{ см}$ и $k = 2\pi/L = 0.126 \text{ см}^{-1}$ имеем $E \sim 10^6 \text{ эрг}$.

Таким образом, процесс эмульгирования в условиях настоящего эксперимента требует значительных энергозатрат, сравнимых с энергией баротропной волны.

Рассмотрим более детально переход от системы двух несмешивающихся жидкостей к эмульсии верхнего слоя. При установлении стационарных колебаний системы масло-вода ($h_l = 1 \text{ см}$) при $\Omega = 21.44 \text{ с}^{-1}$ можно выделить три характерных режима, определяющих структуру верхнего слоя – рис. 4.18 – 4.20.

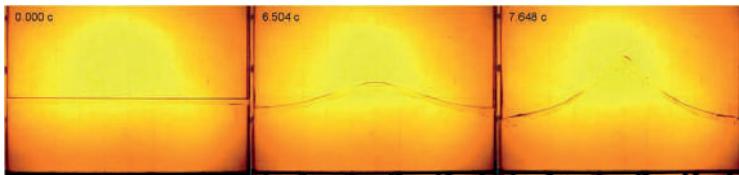


Рис. 4.18. Верхний слой системы масло–вода ($h_l = 1$ см) при установлении стационарных колебаний на частоте колебаний сосуда $\Omega = 21.44$ с⁻¹; моменты времени $t = 0, 6.504$ и 7.648 с соответствуют высоте баротропной волны $H = 0, 5.1$ и 12.5 см.

Во-первых, первоначально горизонтальный слой масла остается однородным по толщине при высоте волны $H = 5.1$ см, а при дальнейшем росте волны ($H = 12.5$ см) утолщается в гребне – рис. 4.18.

С течением времени высота волны возрастает, что приводит к формированию неустойчивой прямой эмульсии масла в воде – рис. 4.19.

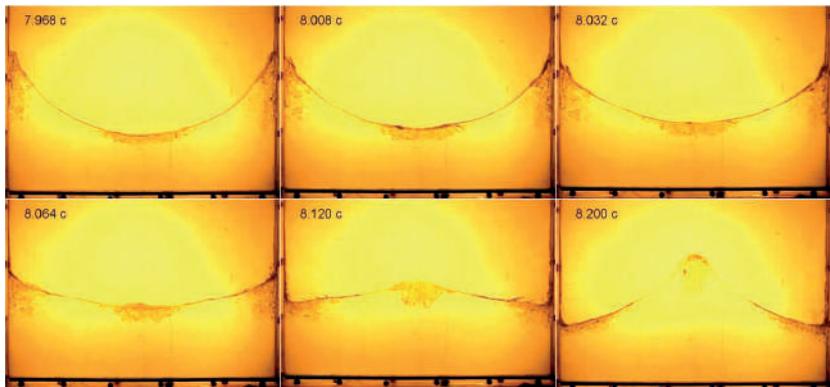


Рис. 4.19. Аналогично рис. 4.18; моменты времени $t = 7.968, 8.008, 8.032, 8.064, 8.120$ и 8.200 с соответствуют высоте баротропной волны $H = 12.8$ см.

Области локализации описываемой прямой эмульсии (масло в воде) определяются пучностями волн и имеют наибольший вертикальный масштаб до $0.5 h$ в момент максимального развития волнового профиля (рис. 4.19).

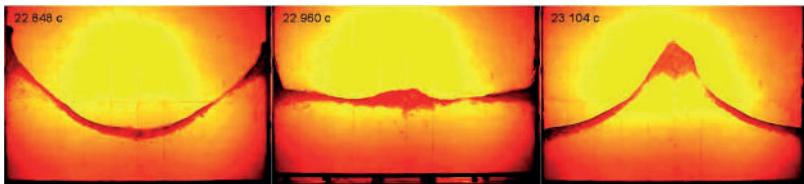


Рис. 4.20. Аналогично рис. 4.18; моменты времени $t = 22.848, 22.960$, и 23.104 с соответствуют трем последовательным фазам; $H = 16.1$ см.

Наконец, на рис. 4.20 представлены видеокадры с обратной эмульсией (вода в масле), переход к которой обусловлен дальнейшей локализацией верхнего слоя (прямая эмульсия масла в воде) в пучностях волны. Согласно [29] при возрастании количества масла в виде отдельных капель возможен переход к обратной эмульсии, т.е. происходит обращение эмульсии. Исследование процесса обращения эмульсий не являлось целью настоящей работы. Однако можно оценить условия отрыва с межфазной границы капель масла, которые являются дисперсной средой в прямой эмульсии и дисперсионной средой в эмульсии обратной.

Диспергированию капель масла в воду на этапе формирования гребня (центральная часть жидкости вместе с межфазной границей движется вверх, рис. 4.19) препятствуют силы плавучести $F_1 = 4\pi r^3 \Delta\rho g / 3$ и межфазного натяжения $F_2 = 2\pi\sigma r$ – см. врезку на рис. 4.21. Здесь $\Delta\rho = (\rho_2 - \rho_1)$.

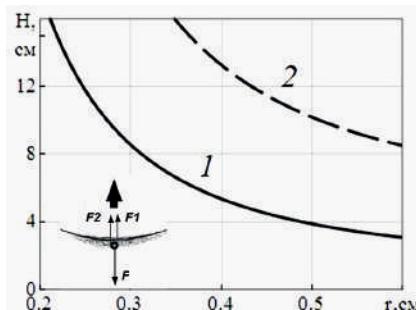


Рис. 4.21. Пороговая высота волны H для формирования капли масла (1) и керосина (2) на межфазной поверхности двухслойной системы; r – радиус капли.

На указанном временном интервале сила инерции, действующая на отдельные капли масла, направлена вниз и обеспечивает отделение и перемещение капли в дисперсионной фазе (вода). Сила инерции определяется движущейся межфазной границей и равна $\Phi = (4\pi r^3 / 3)\rho_1(H/2)\omega^2$. В предположении равенства нулю относительной скорости капли сила вязкого сопротивления не учитывается. Необходимым условием для формирования и отделения капли масла является неравенство $\Phi > F_1 + F_2$. Из уравнения $\Phi - F_1 - F_2 = 0$ находим пороговую высоту баротропной волны, определяющую начало процесса эмульгирования

$$H = \frac{1}{\rho_1\omega^2} \left(\frac{3\sigma}{r^2} + 2\Delta\rho g \right)$$

На рис. 4.21 приведены рассчитанные зависимости $H = H(r)$ для масла (1) и керосина (2), используемых в качестве верхних жидкостей в двухслойной системе; значение физических величин приведены в табл. 4.1. Для системы масло – вода область значений $\{r, H\}$ выше кривой определяет начало эмульгирования. Полученный результат (1) согласуется с данными эксперимента – при высоте волны $H = 13$ см наблюдаемые капли масла в воде имели радиус $r \approx 0.3\text{--}0.4$ см. В случае керосина характеристики двухслойной системы таковы, что кривая (2) располагается существенно выше зависимости (1). Пороговая высота баротропной волны, необходимая для формирования капель керосина в воде, в 2–5 раз превосходит соответствующие значения H для системы масло–вода. В условиях эксперимента эмульгирование керосина в воде не наблюдалось.

Обобщая результаты проведенных исследований 1 см – слоя масла в двухслойной системе на весь диапазон $h_1 = 0.25\text{--}7.5$ см, можно сделать вывод, что регуляризация баротропных волн связана с эмульгированием двухслойной жидкости, т.е. с формированием над слоем воды обратной эмульсии вода – масло. Именно динамическими свойствами эмульсии можно объяснить увеличение крутизны $\Gamma = H/\lambda$ и декремента δ регулярных баротропных волн.

В режиме волновых движений двухслойной системы не представляется возможным измерить вязкость эмульсии или всей системы

в целом. Однако, как показано в [11, 12], полученная в [30] формула для логарифмического декремента стоячих волн на свободной поверхности однородной жидкости неплохо описывает данные эксперимента для воды, растительного масла и водного раствора сахара. Рассматривая двухслойную систему как однородную жидкость некоторой эквивалентной кинематической вязкости v^* , и учитывая потери волновой энергии во всем объеме жидкости, на боковых стенках и дне сосуда имеем

$$\delta = \frac{2\pi}{\omega} \left[2v^* k^2 + \sqrt{\frac{\omega v^*}{2}} \left(\frac{L+W}{LW} + k \frac{L-2h}{L \sinh 2kh} \right) + \sqrt{\frac{\omega v^*}{2}} k \frac{1}{\sinh 2kh} \right]$$

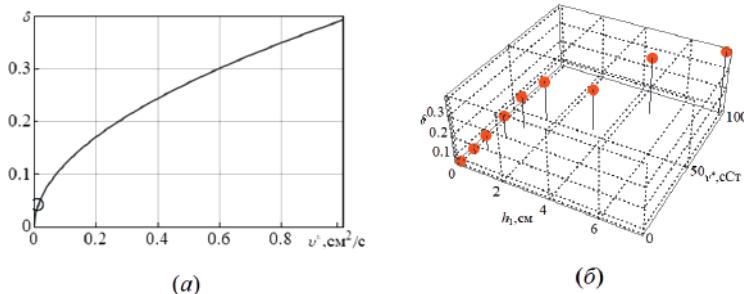


Рис. 4.22. (а) Оценка эквивалентной вязкости v^* двухслойной системы по логарифмическому декременту δ ; точка на графике соответствует рассчитанному декременту для воды при $v^*=0.01$ см²/с. (б) Зависимость $\delta=\delta(h_1, v^*)$.

Из приведенной на рис. 4.22 *а* зависимости $\delta=\delta(v^*)$ можно по экспериментальным значениям декремента оценить эквивалентную вязкость двухслойной системы. Зависимость декремента $\delta=\delta(h_1, v^*)$ от толщины h_1 верхнего слоя масла и рассчитанной эквивалентной вязкости v^* двухслойной системы масло–вода в баротропном режиме колебаний приведена на рис. 4.22 *б*.

Видно, что с увеличением h_1 возрастают как декремент δ , так и эквивалентная вязкость v^* . При $h_1 = 1$ см имеем $\delta = 0.23$ и $v^* = 37.5$ сСт, а при $h_1 = 5$ см – $\delta = 0.36$ и $v^* = 80.0$ сСт. Это свидетельствует об

усилении диссипативных факторов, обусловленном толщиной эмульсионного верхнего слоя.

Поскольку нас интересует причина регуляризации баротропных волн, то продолжая аналогию с однородной вязкой жидкостью, воспользуемся основным выводом [11–13] о том, что вязкость жидкости является своеобразным фильтром короткомасштабных возмущений. В случае двухслойной системы определяемая эмульгированием вязкая диссипация становится доминирующим фактором, вызывая подавление коротковолновых возмущений, являющихся причиной разрушения волн Фарадея.

4.3. Регуляризация разрушающихся волн Фарадея слоем плавающих частиц

В настоящее время имеется ряд исследований [31–33], в которых или упоминался, или частично изучался эффект плавающих частиц на волновое движение жидкости со свободной поверхностью.

В [31] проведен анализ эффективности различных жидкостных гасителей колебаний высотных инженерных конструкций при нестационарных аэродинамических нагрузках. Отмечено 55% снижение отклика высотной башни при добавлении в демпферы нутации 1% (по массе) плавающих частиц полиэтилена. Каких-либо гидродинамических исследований авторами не проводилось.

Исследование [32] по динамике ветровых волн в маргинальной ледовой зоне океана показало интенсивное рассеивание волн в присутствии ледяного сала, шуги или слоя небольших льдин на поверхности океана. Для выявления механизма этого затухания, недавно проведен эксперимент [33], в котором ледяное сало моделировалось слоем плавающих сферических частиц. По результатам этого лабораторного исследования сделан вывод об определяющем диссипативном воздействии слоя частиц на основную моду гравитационной стоячей волны в прямоугольном сосуде. Поскольку волновые движения в [33] создавались при быстром переводе первоначально приподнятого с одного края сосуда в горизонтальное положение, влияние частиц на механизм разрушения стоячей волны не изучалось.

Согласно положениям теории дисперсных систем (напр., [34, 35]) слой плавающих частиц может рассматриваться как слой высоконцентрированной суспензии, частицы которой совершают сдвиговые колебания, определяемые полем скоростей стоячих гравитационных волн в прямоугольном сосуде. Опубликованных результатов исследований колебаний дисперсных систем указанного типа не обнаружено, однако для высоконцентрированных суспензий известны классические эксперименты [36, 37] с течением Куэтта в кольцевых коаксиальных сдвиговых каналах. В качестве дисперсной среды использовались частицы нейтральной плавучести диаметром $d = 0.01\text{--}0.2$ см, объемная концентрация c_v , которых варьировалась от 13 до 60%. В зависимости от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ наблюдались два режима течения. При небольших значениях $\dot{\gamma}$ инерцией частиц можно пренебречь, и реализуется квазистатический режим течения, определяемый кулоновским трением – макровязкий режим течения суспензии. При больших скоростях сдвига наблюдается инерционный режим течения – взаимодействие между частицами обусловлено неупругими соударениями.

В настоящем разделе обсуждается эффект слоя частиц положительной плавучести на процесс разрушения и регуляризацию стоячих поверхностных гравитационных волн Фарадея [38]. В экспериментах слой плавающих частиц помещался на свободную поверхность подсоленной воды, и эта двухслойная система совершала колебания как однородная жидкость – баротропный режим колебаний.

4.3.1. Постановка эксперимента

Влияние слоя плавающих частиц на колебания жидкости исследовалось для второй моды ($n = 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности дисперсной системы – слоя концентрированной суспензии частиц и дисперсионной жидкости – в прямоугольном сосуде длиной $L = 50$ см и шириной $W = 4$ см.

В экспериментах использовались частицы полистирола плотности $\rho_p = 1.04 - 1.06$ г/см³ двух форм. Калиброванные сферические частицы компании BLS имели диаметр $d = 0.6$ см, объем $V_p = 0.11$ см³ и массу $m = 0.12$ г. Также проводились опыты с гранулами полистирола в форме

эллиптического цилиндра высотой 3.36 ± 0.05 мм с большой 1.71 ± 0.20 мм и малой 1.25 ± 0.10 мм полуосами объемом $V_p = 0.02$ см³ и массой гранулы $m = 0.024 \pm 0.003$ г; соответствующий объемно-эквивалентный диаметр $d_V = 0.3$ см. Для обеспечения положительной плавучести частиц в качестве рабочей жидкости использовался водный раствор поваренной соли – плотность $\rho_f = 1.11$ г/см³ и кинематическая вязкость $\nu_f = 1$ сСт. Толщина слоя h_p частиц изменялась от 1 до 3.6 см при неизменной общей глубине $h = 15$ см рассматриваемой двухслойной жидкости, рис. 4.23. Начальное объемное содержание c_v частиц в слое толщиной h_p варьировалось от 37 до 63%. В экспериментах со сферами 30 частиц были окрашены в черный цвет и использовались в качестве маркеров.

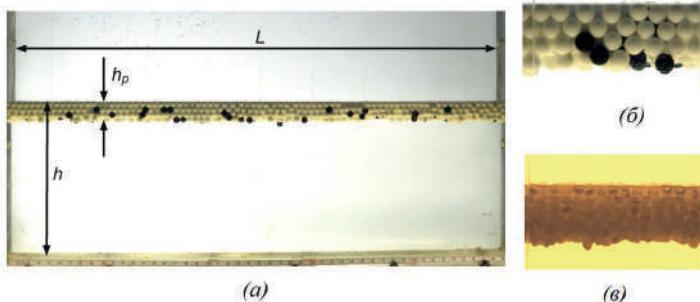


Рис. 4.23. Двухслойная система в прямоугольном сосуде (a) и начальное размещение сферических частиц в верхнем слое ($N = 2000$, $h_p = 1.9$ см) – близкая к гексагональной упаковке монодисперсных сферических частиц; (фрагменты слоя плавающих сфер ($N = 2000$) и гранул ($N = 7500$) полистирола (б, в).

Исследовались двумерные волновые движения двухслойной жидкости в режиме основного резонанса Фарадея, когда частота вертикальных колебаний сосуда Ω в два раза превышала частоту возбуждаемых поверхностных гравитационных волн. Параметрическое возбуждение волн происходило при изменении частоты Ω в диапазоне $20 - 24$ с⁻¹, для которого крутизна $\Gamma = H / \lambda$ стоячей поверхностной волны оценивалась интервалом 0.02 - 0.4. Здесь $\lambda = L = 50$ см – длина волны; H – высота

волны, определяемая как расстояние между ложбиной волны и ее гребнем. В условиях эксперимента перегрузка $\varepsilon = s\Omega^2 / g$ изменялась от 0.3 до 0.45.

Волновые движения жидкости регистрировались посредством фотокамер DIMAGE Z2 и Canon PowerShot SX50HS со скоростью видеосъемки 30 и 120 кадров/с. Обработка видеоматериалов производилась с помощью программы ImageJ.

4.3.2. Регуляризация, предельная крутизна и затухание волн

Для воды [26] и водного раствора соли предельная крутизна регулярной волны достигает величины $\Gamma = H / \lambda \sim 0.22$. Профиль этих волн периодичен во времени и симметричен относительно вертикали, проведенной через пучность волны. Для разрушающихся же волн Фарадея характерен срыв капель со свободной поверхности при полном нарушении периодичности и симметрии профиля – рис. 4.24 *а*.

Однако размещение слоя плавающих сфер поверх соленой воды кардинально меняет волновую картину – наблюдается регуляризация разрушающихся волн (рис. 4.24 *б*). Крутизна показанной на последовательности видеокадров волны составляет $\Gamma \sim 0.34$, что значительно превышает соответствующее значение для солевого раствора ($\Gamma \sim 0.22$). Волновому профилю присущи периодичность и симметрия; какие-либо признаки разрушения отсутствуют.

Дисперсная система на рис. 4.24 *б* соответствует двухслойной жидкости, колеблющейся в баротропном режиме [14]. Мелкомасштабных возмущений свободной поверхности, приводящих к образованию коллапсирующей полости и выбросу струи из растущих гребней, не наблюдается (рис. 4.24 *а* и *б*). Как показано в [14], влияние верхнего слоя вязкой жидкости на процесс регуляризации разрушающихся стоячих гравитационных волн Фарадея на свободной поверхности двухслойной системы связано с образованием эмульсионного слоя, который и обеспечивает дополнительную диссипацию энергии волн. В случае плавающих частиц имеем верхний слой концентрированной супензии над слоем свободной от частиц дисперсионной фазы (соленая вода); для этой системы дополнительная диссипация определяется поведением частиц в супензии.

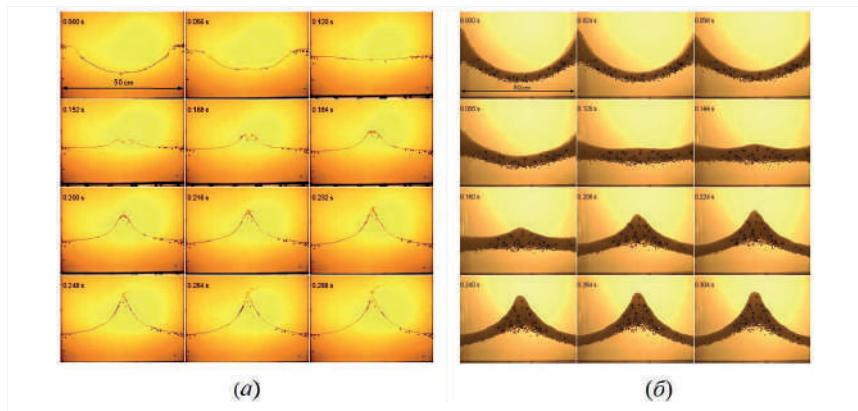


Рис. 4.24. (а) Разрушающаяся волна на свободной поверхности водного раствора соли – последовательность снимков свободной поверхности на стадии перехода от ложбины к гребню волны в центре сосуда ($\Omega = 21.83 \text{ с}^{-1}$). (б) Регулярная волна на свободной поверхности «двуслойной жидкости», образованной слоем плавающих сфер и водным раствором соли ($\Omega = 20.69 \text{ с}^{-1}$; $H = 17.1 \text{ см}$; $N = 4000$; $h_p = 3.6 \text{ см}$); скорость видеосъемки 120 к/с; момент времени указан в верхней левой части кадра.

Рассмотрим влияние слоя плавающих частиц на резонансные зависимости высоты H стационарной волны от частоты Ω вертикальных колебаний сосуда. Из рис. 4.25 *a* следует, что по сравнению с однородными жидкостями (1, 2) высота регулярных волн растет с увеличением толщины слоя суспензии – например, для сфер при $h_p = 3.6 \text{ см}$ высота волны оценивается значением $H \sim 19 \text{ см}$. И это верно для обоих типов частиц – сфер и гранул (3 – 10). Отметим отсутствие сдвига $H(\Omega)$ в низкочастотную область с увеличением толщины слоя частиц, а именно такой сдвиг наблюдался в экспериментах [14] с верхним слоем вязкой жидкости в двухслойной системе вследствие увеличения эквивалентной вязкости системы и соответствующего уменьшения собственной частоты. Кроме того, рассчитанная зависимость (11) хорошо описывает все данные эксперимента (1 – 10).

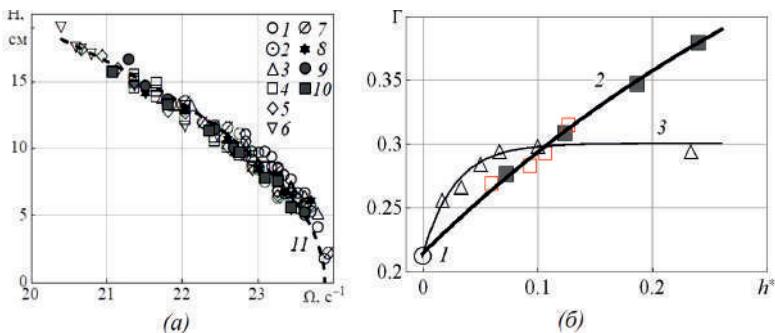


Рис. 4.25. Резонансные зависимости $H(\Omega)$ в случае регулярных волн (a): 1–2 – вода и водный раствор соли (однородные жидкости, $h = 15$ см); 3–6 – слой сфер, $h_p = 1.1, 1.9, 2.8$ и 3.6 см; 7–10 – слой гранул, $h_p = 0.9, 1.4, 1.6$ и 1.9 см; 11 – рассчитанная по модели [26] зависимость $H(\Omega)$; (б) зависимости предельной крутизны поверхностной гравитационной волны от толщины верхнего слоя при общей глубине двухслойной жидкости $h = 15$ см: 1 – вода / солевой раствор; 2 – плавающие частицы (сфера / гранулы); 3 – растительное масло–вода (данные [14]), см. рис. 4.11 а; $h^* = h_1 / h$ для слоя частиц; $h^* = h_1 / h$ для верхнего слоя вязкой жидкости.

Резонансные зависимости $H(\Omega)$ позволяют оценить предельную крутизну Γ регулярных волн в зависимости от толщины слоя частиц – рис. 4.25 б. Данные (1) получены в экспериментах с однородной жидкостью (вода / солевой раствор), для которой $\Gamma \sim 0.22$. В случае плавающих частиц (2) крутизна волны монотонно растет с увеличением толщины слоя и достигает значения $\Gamma \sim 0.38$ при $h^* = h_p / h = 0.24$. Для сравнения на рис. 4.25 б приведена полученная в [14] экспериментальная зависимость (3) крутизны регулярной баротропной волны от толщины h_1 верхнего слоя вязкой жидкости (двухслойная жидкость: растительное масло – вода). Видно, что согласно (3) предельная крутизна ограничена значением $\Gamma \sim 0.3$. Таким образом, использование слоя плавающих частиц представляет эффективный способ увеличения крутизны регулярной гравитационной волны.

Согласно результатам [11–14] диссипация волновой энергии служит определяющим фактором для регуляризации разрушающихся волн Фарадея. Лабораторные эксперименты [33] по демпфированию поверхностных волн плавающими сферическими частицами показали, что волновые движения полностью прекращались за конечное время. Для проверки выводов [33] был проведен детальный анализ процесса затухания второй моды, результаты которого и обсуждаются ниже.

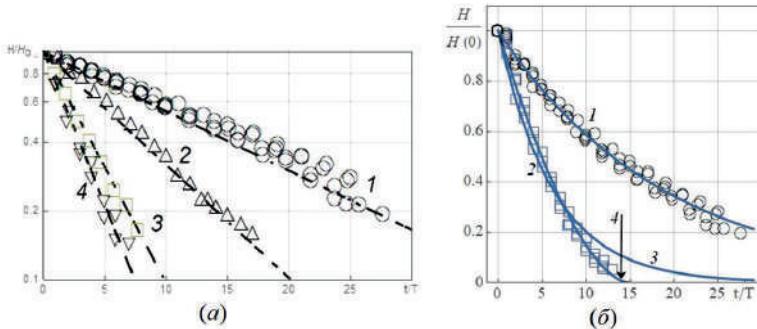


Рис. 4.26. (а) Амплитудные кривые затухающих волн на свободной поверхности однородной и двухслойной жидкостей (а): 1 – вода / солевой раствор; 2–4 – растительное масло – вода при $h_1 = 0.25$, 1 и 5 см (данные [14]). (б) Амплитудные кривые затухающих волн на свободной поверхности однородной жидкости (1) и двухслойной дисперсной системы (2): 1 – вода / солевой раствор, $\delta = 0.06$; 2 – слой сфер, $h_p = 2.8$ см ($N = 3000$); 3 – экспоненциальное затухание, $\exp(-0.166z)$; 4 – неэкспоненциальное затухание, $(1 - z/15)^{1.9}$.

На рис. 4.26 а в полулогарифмическом масштабе приведены данные по затуханию гравитационных волн на свободной поверхности однородной (1) и двухслойной (2 – 4) жидкостей. Данные эксперимента аппроксимируются линейными функциями (пряммыми), что свидетельствует об экспоненциальном затухании с декрементами $\delta = 0.06$ для воды (солевого раствора) и $\delta = 0.11, 0.23, 0.31$ для двухслойной системы растительное масло – вода. Это означает, что амплитудные кривые на рис. 4.26 а описываются функциями вида $y = H / H_0 = \exp(-\delta z)$, являющимися решением следующего линейного уравнения

$$\frac{dy}{dz} = -\delta y$$

где $z = t / T$; T – период волны. Экспоненциальное затухание означает, что $y \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Этот тип затухания (временного или пространственного) положен в основу практически всех теоретических волновых моделей с диссипацией.

Характер затухания изменяется в случае слоя плавающих сфер – рис. 4.26 б. Экспоненциальная функция (3) не описывает весь процесс демпфирования волны при наличии слоя сфер (2). Расхождение между экспериментальными данными (2) и аппроксимирующей функцией (3) начинается при $H / H_0 \leq 0.25$ –0.3. Наилучшая аппроксимация (4) экспериментальных данных (2) обеспечивается степенной функцией вида

$$y = \frac{H}{H_0} = \left(1 - \frac{z}{\tau_0}\right)^n \quad (\tau_0 = 15, n = 1.9)$$

что совпадает с результатами [33]. Таким образом, полное затухание волны в случае слоя плавающих сфер достигается за конечное число колебаний $\tau_0 = 15$.

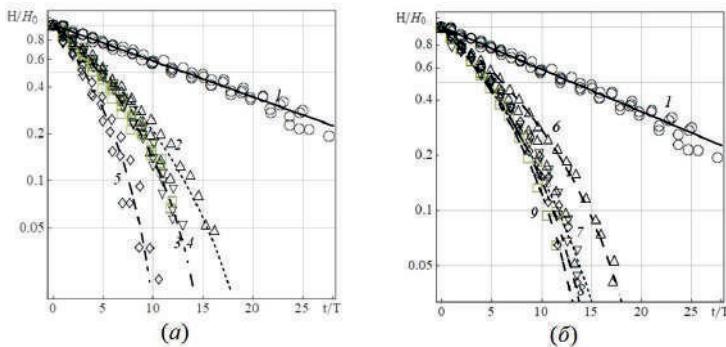


Рис. 4.27. Затухание поверхностных волн Фарадея при наличии слоя плавающих сфер (а) и гранул (б) при изменении толщины h_p слоя суспензии: 1 – вода / солевой раствор ($\delta = 0.06$); 2–5 – сферы, $h_{p0} = 1.1, 1.9, 2.8, 3.6$ см ($N = 1000, 2000, 3000, 4000$); 6–9 – гранулы, $h_p = 0.9, 1.4, 1.6, 1.9$ см ($N = 3000, 6000, 7500, 9000$).

Следует отметить, что при неэкспоненциальном затухании дифференциальное уравнение для безразмерной высоты волны y принимает вид [32, 33]

$$\frac{dy}{dz} = -\alpha y^m$$

где $\alpha = n / \tau_0$, $m = n - 1$.

Обобщенные данные по затуханию стоячих поверхностных гравитационных волн в присутствии слоя плавающих сфер и гранул показаны на рис. 4.27. Видно, что экспериментальные данные для всех используемых толщин хорошо аппроксимируются степенной функцией вида $H / H_0 = (1 - z / \tau_0)^n$.

Отметим, что в экспериментах процесс затухания волн анализировался при начальной высоте $H_0 \approx 8 - 5$ см; следовательно, неэкспоненциальное демпфирование проявляется при значениях $H \leq 2 - 1$ см.

4.3.3. Динамика слоя плавающих частиц

Рассмотрим динамику твердой фазы суспензии на примере сферических частиц, что упрощает проводимые количественные оценки.



Рис. 4.28. Три последовательных фазы волны при наличии слоя плавающих сфер ($N = 2000$, $\Omega = 21.82 \text{ c}^{-1}$; $H = 13.5 \text{ см}$; $h_{p0} = 1.9 \text{ см}$; $L = 50 \text{ см}$); N – положение узла нелинейной волны.

Для исследуемых баротропных волн на свободной поверхности двухслойной дисперсной системы становятся существенными нелинейные эффекты, проявляющиеся в асимметрии волновых профилей и колебаниях узлов – рис. 4.28. Толщина слоя суспензии изменяется вдоль профиля и зависит от времени и горизонтальной координаты – $h_p = h_p(x, t)$. Система координат (x, y) показана на кадре I. Отметим, что основные изменения в слое частиц связаны с пучностью волны.

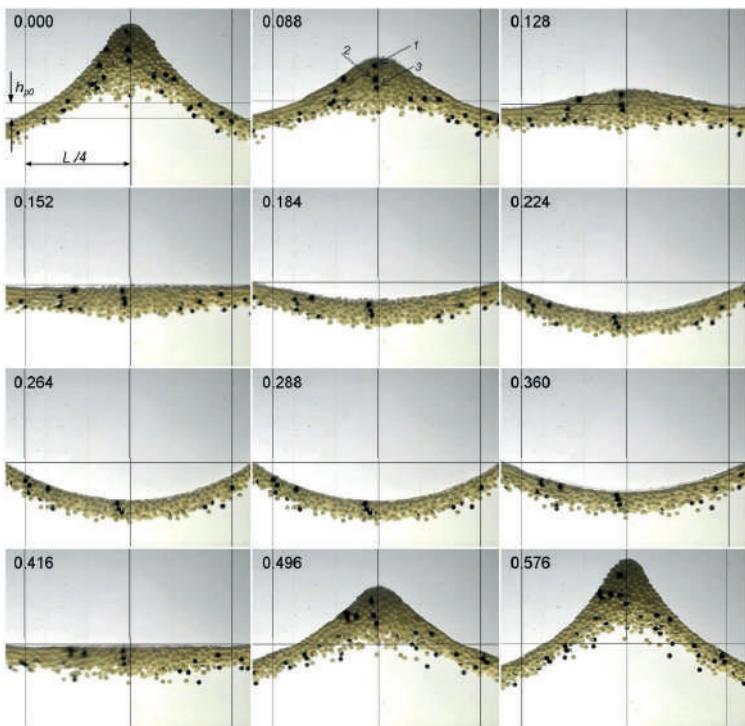


Рис. 4.29. Последовательность видеокадров, демонстрирующих регулярную волну при наличии слоя плавающих сфер в течение волнового периода ($N = 2000$, $\Omega = 21.82 \text{ c}^{-1}$; $H = 13.5 \text{ см}$; $h_{p0} = 1.9 \text{ см}$; $L = 50 \text{ см}$): 1–3 – частицы–маркеры. Вертикальные прямые на кадре соответствуют абсциссе $x = 12.5, 37.5 \text{ см}$ (узлы линейной волны) и $x = 25 \text{ см}$ (пучность волны). Время (с) приведено в левой верхней части кадра.

Воспользуемся материалами видеосъемки и проанализируем поведение частиц–маркеров в течение периода волны $T = 0.586 \text{ с}$ – рис. 4.29. На первом кадре ($t = 0 \text{ с}$) под гребнем волны максимального развития толщина слоя частиц существенно превышает начальное значение $h_{p0} = 1.9 \text{ см}$. При $t = 0.088 \text{ с}$ свободная поверхность движется вниз, и можно выделить три маркера (1 - 3), расстояние между которыми с течением времени уменьшается. Визуально контакт маркеров наблюдается в момент $t = 0.288 \text{ с}$ – ложбина волны, в которой толщина слоя суспензии

минимальная. Далее свободная поверхность смещается вверх, толщина слоя и расстояние между маркерами увеличиваются. На последнем кадре ($t = 0.576$ с) наблюдаем гребень волны с большой толщиной слоя. Отметим, что ни для одной фазы волны невозможно выделить послойное или линейное расположение частиц суспензии (см. рис. 4.23 *a*). Частицы суспензии в рассматриваемом режиме колебаний движутся случайным образом, причем аудиально фиксируются их соударения между собой и со стенками сосуда.

Временная зависимость толщины слоя суспензии под пучностью волны показана на рис. 4.30 *a*. Видно, что по данным эксперимента (*I*) под гребнем волны толщина в четыре раза превосходит первоначальную – $h_p / h_{p0} \sim 4$, при этом временной интервал, на котором $h_p \sim h_{p0}$, достаточно велик. Кривая (*2*) рассчитана с использованием переменных Лагранжа, описывающих нелинейные поверхностные волны Фарадея [27].

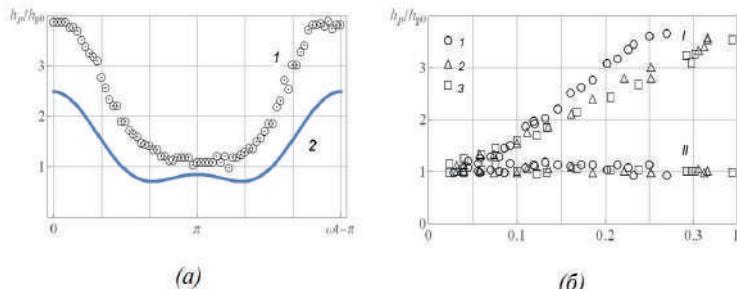


Рис. 4.30. (*a*) Толщина слоя плавающих частиц в течение волнового периода ($N = 2000$, $\Omega = 2\omega = 21.82$ с⁻¹; $H = 13.5$ см; $h_{p0} = 1.9$ см): *I* – эксперимент; *2* – расчет с использованием переменных Лагранжа [27]. (*б*) Зависимость толщины слоя суспензии от крутизны Γ : *I*–3 – $h_{p0} = 1.9, 2.8, 3.6$ см ($N = 2000, 3000, 4000$); *I*, *II* – толщина слоя суспензии под гребнем ($x = 25$ см) и в области узла ($x = 12.5$ см) волны.

Толщина слоя суспензии в значительной степени определяется высотой стоячей гравитационной волны. На рис. 4.30 *б* сравниваются значения h_p под гребнем (*I*) и узлом (*II*) волны при различной ее крутизне Γ . Измерения проводились в точках $x = 12.5$ и 25 см в моменты максимального развития волны. Толщина слоя суспензии под узлом

практически не отличается от начальной $h_p \sim h_{p0}$ и не зависит от высоты волны. При $\Gamma \sim 0.35$ имеем четырехкратное увеличение безразмерной толщины h_p / h_{p0} слоя в области гребня стоячей волны. При уменьшении крутизны различие в значениях h_p и h_{p0} снижается, и при $\Gamma < 0.05$ толщина $h_p(t)$ слоя суспензии в процессе колебаний дисперсной системы не отличается от первоначальной величины h_{p0} по всей длине сосуда. Указанное значение крутизны определяет гравитационные волны, высота которых менее $H < 2.5$ см. Именно в этом диапазоне H проявляется неэкспоненциальное затухание волн – рис. 4.27 *a*, данные 2.

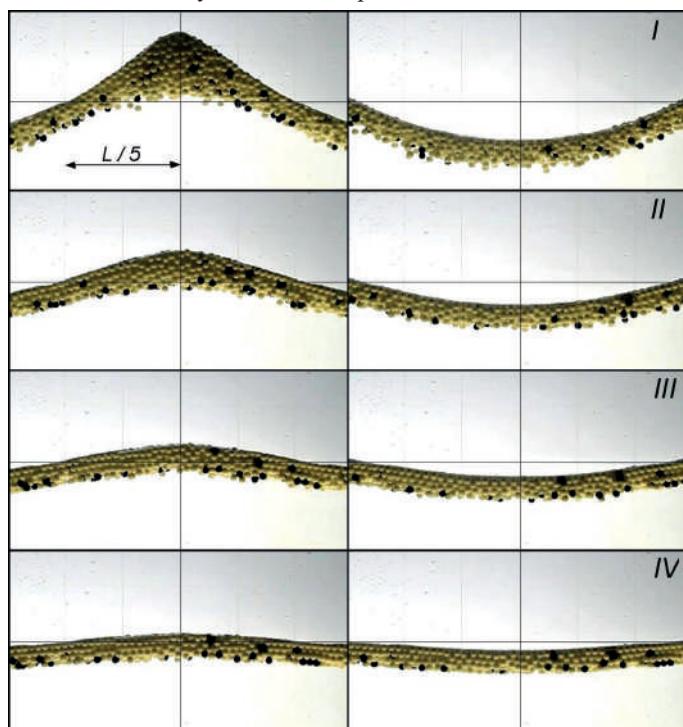


Рис. 4.31. Расположение частиц суспензии в пучностях затухающей волны ($h_{p0} = 1.9$ см, $N = 2000$): *I*–*IV* – $H = 9.2, 4.8, 2.2, 1.4$ см; вертикальная прямая соответствует центру сосуда $x = 25$ см; горизонтальная – невозмущенной свободной поверхности; $L = 50$ см.

Как следует из рис. 4.31, этот же диапазон $H < 2.5$ см определяет баротропный режим колебаний дисперсной системы, при котором частицы суспензии располагаются по линиям, параллельным свободной поверхности – послойное или линейное расположение частиц. Представленная на рисунке серия кадров получена при видеосъемке процесса затухания волны, в стационарном режиме колебаний показанной на рис. 4.29.

На кадрах $I - IV$ рис. 4.31 показаны пучности стоячей волны в центральной части сосуда. При уменьшении высоты волны изменяется расположение частиц суспензии. При $H = 9.2$ см (I) упаковка частиц довольно рыхлая, расстояние между соседними частицами составляет величину порядка их диаметра. Снижение высоты волны до $H = 2.2$ см (III) приводит к линейному расположению частиц при небольшом различии значений h_p в гребне и ложбине. Это отличие полностью исчезает в случае (IV), для которого $H = 1.4$ см – линейное расположение частиц, их плотная упаковка.

Таким образом, можно отметить следующие структурные изменения суспензии сферических частиц, участвующих в баротропных колебаниях двухслойной системы.

При крутизне волны $\Gamma > 0.05$ происходит утолщение слоя суспензии в гребне. Это сопровождается уменьшением плотности случайной упаковки частиц, что создает условия для их контактного взаимодействия друг с другом и стенками сосуда при переходе свободной поверхности от гребня к ложбине. Плотность упаковки частиц в ложбине возрастает и затем снова падает при дальнейшем переходе к гребню. Отметим, что плотность упаковки частиц суспензии оценивается по толщине слоя суспензии. Значительных изменений толщины слоя частиц в узловых зонах волны не наблюдается.

При крутизне волны $\Gamma < 0.05$ какие-либо структурные изменения слоя суспензии сферических частиц отсутствуют. В процессе баротропных колебаний дисперсной системы толщина слоя остается неизменной; упаковка частиц – плотная, близкая к начальной (гексагональной).

Оценим скорость сдвига в поле стоячей волны. В первом приближении потенциал скорости Φ определяется как

$$\Phi(x, y, t) = -H \frac{\omega \operatorname{ch} k(y + h)}{2k \operatorname{sh} kh} \cos kx \sin \omega t (\omega^2 = gk \operatorname{th} kh, k = 2\pi / \lambda)$$

Где H , ω , k , h – высота волны, частота волны, волновое число и глубина жидкости соответственно.

Тогда скорость сдвига

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = H \frac{\omega k \operatorname{sh} k(y + h)}{2k \operatorname{sh} kh} \sin kx \sin \omega t$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0(x, y) \sin \omega t$$

зависит как от пространственных координат, так и от времени.

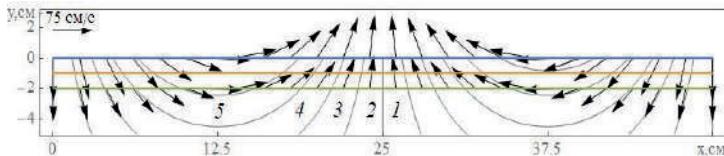


Рис. 4.32. Поле скоростей частиц жидкости и изолинии скорости сдвига $\dot{\gamma}_0(x, y)$ при горизонтальной свободной поверхности для второй волновой моды ($H = 13.5$ см; $\omega = 10.85$ с⁻¹; $g = 981.7$ см/с²; $k = 2\pi / L = 0.126$ см⁻¹): $1-5 - \dot{\gamma}_0 = 0, 1.6, 3.2, 4.8, 6.4$ с⁻¹.

На рис. 4.32 приведены поле скоростей частиц жидкости и изолинии скорости сдвига при прохождении свободной поверхности горизонтального положения, что отвечает максимальным значениям компонент скорости (75 см/с). Рассматриваемая фаза волны соответствует промежуточному положению свободной поверхности при переходе от ложбины к гребню волны и отвечает моменту времени $t = 0.416$ с на рис. 4.29. Как следует из рис. 4.32, изолиния (5) скорости сдвига $\dot{\gamma} = 6.4$ с⁻¹ проходит вблизи узла ($x > 12.5$ см) при $y > -2$ см, причем касательные к ней векторы скорости частиц жидкости направлены к вертикали, проходящей через центр сосуда и определяющей пучность волны. Справа от вертикали имеем симметричные поле скоростей и изолинии скорости сдвига. Можно предположить, что указанная картина сдвигового течения

обуславливает снос частиц суспензии в область под растущим гребнем – кадр $t = 0.496$ с на рис. 4.29.

Проведем сопоставление сделанных выводов с результатами [36, 37] по исследованию сдвигового течения высоконцентрированной суспензии в зазоре между коаксиальными цилиндрами.

В [36] введен безразмерный параметр – число Бэгнолда $Ba = \rho v_f^{-1} \Lambda^{1/2} d^2 \dot{\gamma}$, определяющий соотношение между силой инерции и вязкими напряжениями. Здесь $\rho = \rho_p / \rho_f$ – относительная плотность твердой фазы; d – диаметр частицы; $\dot{\gamma}$, v_f – скорость сдвига и кинематическая вязкость дисперсионной фазы; Λ – отношение диаметра частицы к среднему расстоянию между соседними частицами (линейная концентрация), $\Lambda = [(c_{v\max} / c_v)^{1/3} - 1]^{-1}$ при текущей c_v и предельной $c_{v\max}$ значениях объемной концентрации твердой фазы.

Согласно [36, 37] в случае стационарного сдвига инерционному режиму (контактное взаимодействие частиц) соответствуют значения числа Бэгнолда $Ba > 450$, тогда как для макровязкого режима (кулоновское трение) – $Ba < 40$.

При оценке числа Бэгнолда используем максимальное значение $\dot{\gamma}_0 = 6.4 \text{ c}^{-1}$ при $H = 13.5$ см – рис. 4.32. При расчете линейной концентрации примем $c_v = 60\%$ и $c_{v\max} = 74\%$. Тогда соответствующее число Бэгнолда $Ba \sim 500$ соответствует инерционному режиму течения суспензии. Эта оценка локальная и верна для приузловой области суспензии. В общем случае следует учитывать пространственную неоднородность и нестационарность поля скорости сдвига.

Рассмотрим волну высотой $H = 2.2$ см (кадр III на рис. 4.31), при которой происходит переход к колебаниям слоя суспензии постоянной толщины по всей длине сосуда. В этом случае амплитуда горизонтальной / вертикальной скорости равна 12 см/с, скорость сдвига вблизи узла ($x > 12.5$ см) при $y > -2$ см составляет величину $\dot{\gamma}_0 \sim 1 \text{ c}^{-1}$, и число Бэгнолда $Ba \sim 80$. По классификации [36, 37] полученное значение Ba определяет промежуточный (между инерционным и макровязким) режим течения суспензии.

Сложность описания движения частиц высококонцентрированной суспензии в стоячей баротропной волне связана с нестационарностью и пространственной неоднородностью полей скорости сдвига и объемной концентрации твердой фазы. Это, в свою очередь, не позволяет на данном этапе исследований выделить какой-либо один диссипативный механизм, ответственный за регуляризацию разрушающейся волны. По сравнению с однородной вязкой жидкостью дополнительная диссипация волновой энергии обусловлена протеканием жидкости в узких зазорах между соседними частицами или частицей и стенкой сосуда [34, 35]; эти потери характерны для всех режимов баротропных колебаний дисперсной системы – локально в приузловых областях при большой крутизне волны или вдоль всей поверхности волны малой высоты. Контактное или ударное взаимодействие частиц между собой и стенкой – следующий диссипативный механизм, характерный для волн любой высоты (подтверждается аудиозаписью шумов при затухании волн). Не исключен также эффект дилатансии [35], при котором смещение частиц приводит к их уплотнению, усилиению взаимодействия и увеличению эффективной вязкости.

4.4. Изгибно-гравитационные волны Фарадея

Обсуждаются результаты экспериментов [39, 40] по влиянию плавающей тонкой пластины на процесс разрушения и регуляризацию стоячей гравитационной волны Фарадея на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде. Возбуждаемые при параметрическом резонансе колебания жидкости (гравитационные волны) обуславливают изгибные колебания пластины за счет работы обобщенных гидродинамических сил со стороны гравитационной волны. Стоячие изгибно-гравитационные волны в исследуемой гидроупругой системе (плавающая пластина – вода) определяются толщиной пластины: при малой толщине превалирует гравитационная волна, при большой – волна изгибная.

При решении ряда гидродинамических задач о колебаниях ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью следует учитывать наличие плавающей тонкой упругой пластины больших размеров. К задачам такого типа относятся, напр., сейши под ледовым

покровом [41, 42], плавающая солнечная электростанция в водоемах [43], плавающие пластины для подавления интенсивных колебаний ракетного топлива и транспортируемых жидким углеводородов [44]. Поскольку гравитационной волне в жидкости соответствует волна изгибная в пластине, то для совместных колебаний системы пластина – вода используется термин изгибино-гравитационные волны [45].

Возбуждению, трансформации и затуханию прогрессивных изгибино-гравитационных волн в приложении к маргинальной ледовой зоне посвящена обширная литература. В основном это теоретические работы [32, 45–47] и результаты натурных экспериментов [48]. Лабораторные эксперименты проводились в больших волновых каналах, в качестве плавающей пластины использовалась полиэтиленовая пленка [49] или намороженный лед в виде сплошных пластин, отдельных льдин или ледяного сала [50]. Стоящие изгибино-гравитационные волны исследованы в меньшей степени – это теоретические модели [41–44]. Отметим отсутствие опубликованных результатов лабораторных экспериментов со стоячими изгибино-гравитационными волнами.

4.4.1. Постановка эксперимента

Влияние плавающей пластины на колебания жидкости исследовалось для второй моды ($n = 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде длиной $L = 50$ см и шириной $W = 4$ см.

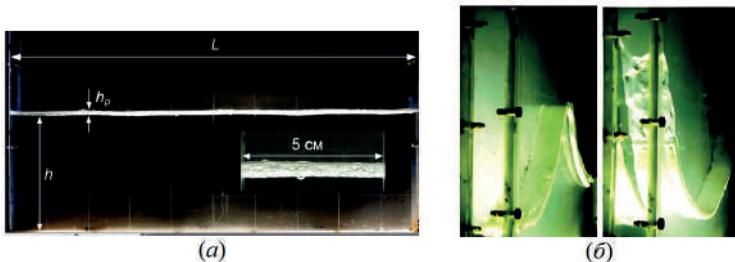


Рис. 4.33. (а) Плавающая пластина из вспененного полиэтилена на поверхности воды в прямоугольном сосуде; $L = 50$ см; $h_p = 0.36$ см; $h = 15$ см. (б) Двумерные гидроупругие колебания системы пластина–вода – вторая волновая мода.

В экспериментах в основном использовались пластины из пенополиэтилена плотностью $\rho_p = 2.5 - 3 \cdot 10^{-2}$ г/см³. Модуль упругости материала согласно технической информации изготовителя составлял величину $E \approx 2.6 \cdot 10^6$ дин/см² (0.26 МПа). Пластины имели длину 49.5 см и ширину 3.5 см; их толщина h_p изменялась от 0.1 до 2 см при неизменной глубине жидкости $h = 15$ см – рис. 4.33.

В одной из серий опытов с изгибо-гравитационными волнами на свободную поверхность воды помещалась пластина из пенополистирола – $\rho_p = 3.5 \cdot 10^{-2}$ г/см³; $E \approx 0.5 - 1.5 \cdot 10^8$ дин/см² (5 – 15 МПа); $h_p = 0.3$ см; длина и ширина пластины – 49.5 и 3.5 см, соответственно.

Цилиндрическая жесткость $D = Eh_p^3 / [12(1 - \nu^2)]$ пластин из пенополиэтилена изменялась от 250 до $2 \cdot 10^6$ дин см ($h_p = 0.1 - 2$ см); в случае пластины из пенополистирола – $D = 3.7 \cdot 10^5$ дин см.

Отметим, что вследствие малой плотности ρ_p пенополиэтилена и пенополистирола по сравнению с плотностью воды ($\rho_w = 1$ г/см³) пластины из указанных материалов имели большую избыточную плавучесть в исследуемой гидроупругой системе, и при статическом равновесии глубина погружения пластины мала ($\square h_p \rho_p / \rho_w$). Для пластины максимальной толщины 2 см эта глубина порядка 0.03 см, и в статическом равновесии системы ею можно пренебречь.

Аналогично [11–14, 38] исследовались двумерные волновые движения в режиме основного резонанса Фарадея, когда частота вертикальных колебаний сосуда Ω в два раза превышала частоту возбуждаемых изгибо-гравитационных волн.

Параметрическое возбуждение волн происходило при изменении частоты Ω в диапазоне $18 - 26$ с⁻¹, для которого крутизна $\Gamma = H / \lambda$ стоячей поверхности волны оценивалась интервалом 0.02 - 0.4. Здесь $\lambda = L = 50$ см – длина волны; H – высота волны, определяемая как расстояние между ложбиной волны и ее гребнем. В условиях эксперимента при амплитуде

вертикальных колебаний сосуда $s = 0.75$ см перегрузка $\varepsilon = s\Omega^2 / g$ изменялась от 0.24 до 0.52.

Проведены две серии экспериментов, для которых глубина воды составляла $h = 15$ и 5 см; при длине второй моды гравитационной волны $\lambda = 50$ см отношение вертикального масштаба задачи к горизонтальному составляло $h / \lambda = 0.3$ и 0.1.

Волновые движения системы пластина – жидкость регистрировались посредством фотокамер DIGITAL IMAGE Z2 и Canon PowerShot SX50HS со скоростью видеосъемки 30 и 120 кадров/с. Обработка видеоматериалов производилась с помощью программы ImageJ. Эксперименты проводились при температуре 20–22°C.

В опытах собственная частота гравитационных и изгибно-гравитационных волн определялась следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась вторая волновая мода. Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась видеосъемка процесса затухания волновых движений воды / гидроупругой системы. Поскольку частота волн существенно превосходит коэффициент затухания, то предполагалось, что процесс затухания волн происходит с собственной частотой. Это позволило по материалам видеосъемки затухающих волн оценить собственную частоту с точностью 5–10%; кроме того, измерялась частота волн, высоты которых не превосходили 3–4 см.

4.4.2. Профили и собственные частоты изгибно-гравитационных волн

Как показали эксперименты, форма профиля наблюдаемых изгибно-гравитационных волн существенным образом зависит от толщины и упругих свойств пластины, а также от высоты возбуждаемой волны.

Толщина h_p пластин из пенополиэтилена изменялась в широком диапазоне от 0.1 до 2 см, причем при $h_p = 2$ см возбуждение волн отсутствовало. Рассмотрим наиболее характерные значения $h_p = 0.1, 0.5$ и 1.8 см и их эффект на изгибно-гравитационные волны.

На рис. 4.34 представлены профили второй моды изгибно-гравитационной волны в случае пластины наименьшей толщины $h_p = 0.1$

см. При частоте колебаний сосуда $\Omega = 22.20 \text{ c}^{-1}$ высота наблюдаемой волны составляла $H = 6.2 \text{ см}$ – рис. 4.34 а. Волна указанной высоты близка к линейной – волна регулярная, профиль практически синусоидальный; колебания узлов стоячей волны малы; мелкомасштабные возмущения отсутствуют. Отметим, что под регулярными понимаются волны, профиль которых периодичен во времени и симметричен относительно вертикали, проходящей через пучность волны. Эффект пластины практически отсутствует, наблюдаемая изгибно-гравитационная волна тождественна стоячей гравитационной волне на свободной поверхности воды.

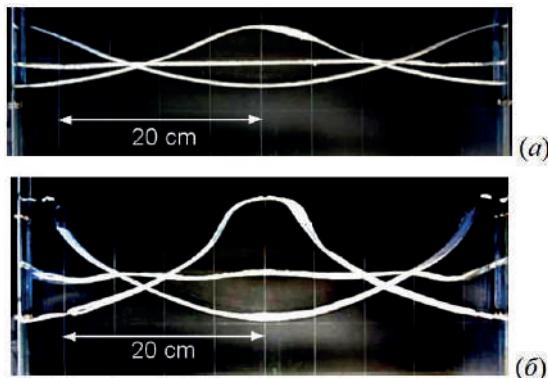


Рис. 4.34. Вторая мода изгибно-гравитационной волны при толщине пластины $h_p = 0.1 \text{ см}$: (а) – $\Omega = 23.44 \text{ c}^{-1}$; $H = 6.2 \text{ см}$; (б) – $\Omega = 22.20 \text{ c}^{-1}$; $H = 12 \text{ см}$. Временной интервал для трех профилей на (а, б) соответствует четверти периода волны.

При частоте сосуда $\Omega = 22.20 \text{ c}^{-1}$ (рис. 4.34 б) гребни волновых профилей сужаются, а подошвы уплощаются, причем высота волны возрастает до величины $H = 12 \text{ см}$. Изгибно-гравитационная волна остается регулярной, хотя становятся существенными колебания узлов, и можно выделить возмущения профиля с масштабом порядка 10 см (в момент прохождения пластины невозмущенного горизонтального уровня). Вследствие больших прогибов пластины и ее нерастяжимости в окрестности торцевых стенок сосуда появляются области свободной от

пластины воды, длины которых максимальны для профилей наибольшего развития. Кроме того, наличие пластины проявляется в отсутствии заострения вершины гребня, наблюдаемого в случае чистой воды. Крутизна этой регулярной изгибно-гравитационной волны составляет величину $\Gamma = H / \lambda \sim 0.24$, являющуюся предельной для данной толщины пластины. Отметим, что для чистой воды [25] предельная крутизна регулярной волны составляла $\Gamma \sim 0.22$.

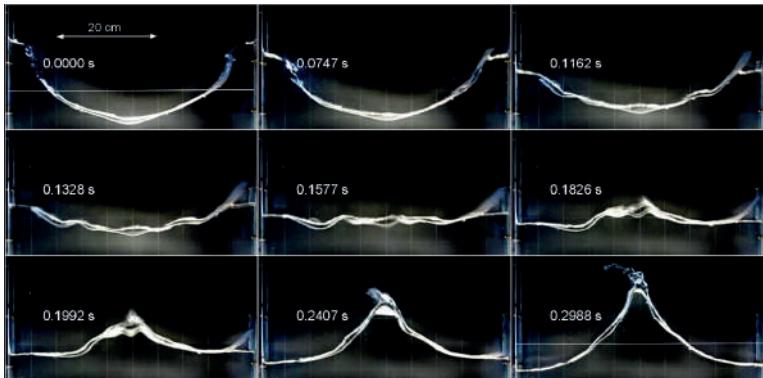


Рис. 4.35. Разрушение изгибно-гравитационной волны при толщине пластины $h_p = 0.1$ см и частоте вертикальных колебаний сосуда $\Omega = 20.81$ с^{-1} ; скорость видеосъемки 120 к/с; момент времени указан в левой части кадра.

Дальнейшее уменьшение частоты сосуда приводит к переходу от регулярных изгибно-гравитационных волн к волнам разрушающимся. При $\Omega = 20.81$ с^{-1} наблюдалась разрушающаяся волна Фарадея, причем плавающая на поверхности воды тонкая пластина никакого регуляризующего эффекта не проявляла – рис. 4.35. Приведенная на рисунке последовательность кадров соответствует половине периода волны и отражает особенности профилей изгибно-гравитационной волны на временном интервале от момента максимальной глубины впадины в центре сосуда до сформировавшегося гребня. Волновые движения воды таковы, что плавающая на ее поверхности пластина не влияет на зарождение ($t = 0.1162 - 0.1577$ с), развитие ($t = 0.1826 - 0.1577$ с) и схлопывание каверны ($t = 0.1992$ с) с последующим струйным выбросом ($t = 0.2407 - 0.2988$ с). Отметим отрыв правого конца пластины на кадрах $t =$

0.0747 – 0.1992 с, а также участки локального подтопления пластины ($t = 0.1162$ – 0.2407 с). Не приводя количественных оценок, можно предположить, что это связано с инерционностью пластины. В заключение можно сделать вывод, что в рассматриваемом режиме колеблющаяся вода не замечает пластины, и разрушение стоячей изгибно-гравитационной волны происходит по сценарию разрушения волн Фарадея на свободной поверхности воды [26].

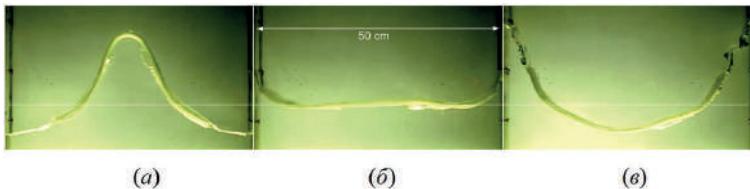


Рис. 4.36. Три последовательные фазы регулярной изгибно-гравитационной волны максимальной крутизны: толщина пластины $h_p = 0.51$ см; частота вертикальных колебаний сосуда $\Omega = 19.70$ с⁻¹; высота волны $H = 19.8$ см.

Увеличение толщины h_p пластины приводит к увеличению предельной крутизны Γ регулярной волны. Максимальная крутизна стоячей гидроупругой волны $\Gamma \sim 0.40$ получена для пластины толщиной $h_p = 0.51$ см – рис. 4.36. Для приведенных волновых профилей характерно отсутствие заострение гребней (а) для гидроупругой системы (центральная часть сосуда) и их наличие на участках чистой воды (в) вблизи торцевых стенок (свойство чисто гравитационных волн). За исключением формы гребня колебания системы пластина – вода определяются волнами гравитационными.

При дальнейшем увеличении толщины пластины начинают преобладать ее упругие свойства, максимальная крутизна волн уменьшается.

На рис. 4.37 показаны профили, соответствующие трем последовательным фазам регулярной гидроупругой волны при толщине пластины $h_p = 1.79$ см. Профили волн максимального развития (а, в) соответствуют изгиблой стоячей волне, какие-либо признаки стоячей

гравитационной волны (асимметрия профиля, заострение гребня и т.п.) отсутствуют. Толщина пластины такова, что мелкомасштабные возмущения при прохождении системы невозмущенного горизонтального уровня не наблюдаются (б). Наличие толстой пластины сказывается и на значении максимальной крутизны регулярной гидроупругой волны, которая $\Gamma \sim 0.20$ оказывается меньше соответствующего значения для волн гравитационных.

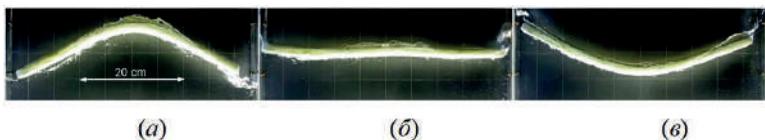


Рис. 4.37. Три последовательные фазы регулярной изгибно-гравитационной волны максимальной крутизны: толщина пластины $h_p = 1.79$ см; частота вертикальных колебаний сосуда $\Omega = 22.60$ с^{-1} ; высота волны $H = 10.2$ см.

При увеличении толщины пластины из пенополиэтилена до значения $h_p = 2$ см возбудить изгибно-гравитационные волны не удалось.

Таким образом, в случае пластин из пенополиэтилена толщиной $0.1 \leq h_p < 2$ см экспериментально реализовано параметрическое возбуждение стоячих стационарных изгибно-гравитационных волн, форма профилей которых определялись параметром h_p . Так, при $h_p \leq 0.5$ см свойства гидроупругой системы пластина – вода определяются в основном волнами гравитационными, тогда как при $h_p > 0.5$ см превалируют волны изгибные.

Проведена серия экспериментов с плавающей на поверхности воды пластиной толщиной $h_p = 0.3$ см из пенополистирола, модуль упругости которого на два порядка больше по сравнению с пенополиэтиленом. Характерные профили наблюдаемых волн приведены на рис. 4.38.

Профили на рис. 4.38 *a* соответствуют линейной изгибно-гравитационной волне малой высоты ($\Gamma \sim 0.05$). Профили на рисунках *(б, в)* показывают, что пластина, несмотря на избыточную плавучесть, в течение всего полупериода волны находится под тонким слоем воды. Из

кадров (б) видно, что на поверхности этого слоя воды присутствуют мелкомасштабные возмущения и каплеподобные образования. Если на рисунках (а, б) пластина в центральной части сосуда изгибаются равномерными дугами, то первый кадр (в) показывает наличие локального срединного перегиба пластины. В теории упругости такое образование определяется как пластический шарнир. Несспособный более воспринимать возрастающую гидродинамическую нагрузку материал пластины в центре сосуда интенсивно течет, и образуется локальная пластическая зона. Большие пластические деформации приводят к разрушению пластины на две части; происходит переход к гравитационным волнам на свободной поверхности воды с плавающими обломками пластины.

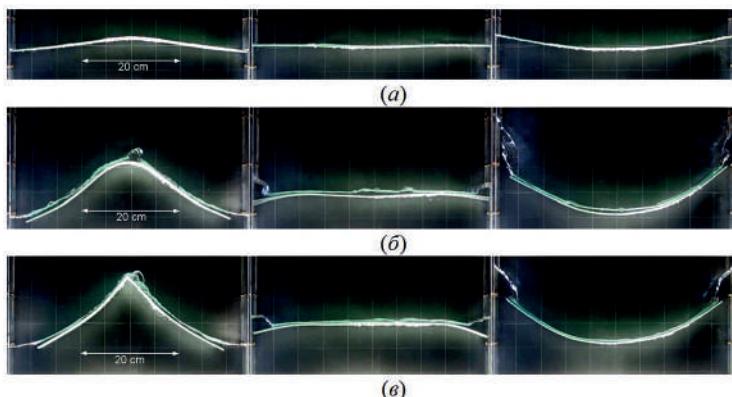


Рис. 4.38. Три последовательные фазы изгибино-гравитационной волны в случае пластины из пенополистирола ($h_p = 0.3$ см): (а) – частота вертикальных колебаний сосуда $\Omega = 24.64$ с^{-1} , высота волны $H = 2.4$ см; (б) – $\Omega = 21.81$ с^{-1} , $H = 11$ см; (в) – $\Omega = 21.66$ с^{-1} .

Для двух значений глубины воды $h = 5$ и 15 см на рис. 4.39 приведены экспериментальные зависимости собственной частоты стоячей изгибино-гравитационной волны от толщины плавающей пластины из пенополиэтилена (1, 2) и пенополистирола (3). Видно, что с ростом h_p частота ω увеличивается, причем нижняя граница диапазона изменения толщины определяется значением $h_p = 0$ (гравитационные волны), а

верхняя граница – критической толщиной $h_p = 1.8$ см, большее которой колебания гидроупругой системы отсутствуют.

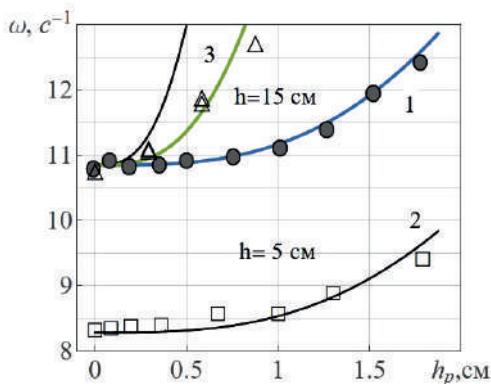


Рис. 4.39. Зависимость собственной частоты изгибо-гравитационных волн от толщины пластины при глубине воды $h = 5$ и 15 см: 1, 2 – пенополиэтилен; 3 – пенополистирол; кривые – расчет по соотношению (4.15).

При $h = 5$ и 15 см для чисто гравитационных волн ($h_p = 0$) измеренные собственные частоты равны $\omega_0 = 8.34$ и 10.78 с⁻¹, соответственно. Оценки частот по формуле $\omega_0 = \sqrt{g k \ln kh}$ дают значения $\omega_0 = 8.29$ и 10.85 с⁻¹. Отметим, что для случая $h = 5$ см (т.е. $h/\lambda = 0.1$) приближение мелкой воды [41, 42] не применимо, поскольку рассчитанная частота $\omega_0 = k\sqrt{gh} = 8.80$ с⁻¹ значительно выше экспериментального значения 8.34 с⁻¹.

При увеличении толщины пластины из пенополиэтилена (данные 1, 2) до значения $h_p \leq 0.51$ см собственная частота изгибо-гравитационных практически совпадает с ω_0 и не превосходит значений 10.91 и 8.45 с⁻¹ соответственно. Таким образом, в случае пластины из пенополиэтилена, толщина h_p которой не превосходит 0.51 см, собственная частота изгибо-гравитационной волны совпадает с частотой волны гравитационной. При дальнейшем увеличении h_p наблюдается быстрый рост частоты ω , которая при $h_p = 1.79$ см составляет $\omega = 9.42$ и 12.42 с⁻¹.

В экспериментах также использовались пластины из пенополистирола, модуль упругости которого почти на два порядка превосходит соответствующую величину для пенополиэтилена. Данные 3 показывают, что уже при $h_p = 0.3$ см частота изгибо-гравитационных волн составляла величину $\omega = 11.09 \text{ c}^{-1}$, а при $h_p = 1.8 \text{ см}$ – $\omega = 12.73 \text{ c}^{-1}$. Какие-либо волновые движения отсутствовали при $h_p > 1.8 \text{ см}$.

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов используем линейную теорию гидроупругости [45–47]. В одномодовом приближении частота ω изгибо-гравитационных волн связана с толщиной пластины h_p следующим образом

$$\omega^2 = \frac{E k^5 h_p^3 + 12g k(1-\nu^2)\rho_w}{12(1-\nu^2)(k h_p \rho_p + \rho_w \operatorname{cth} kh)} \quad (4.15)$$

где для настоящего эксперимента $n = 2$; $L = 50 \text{ см}$; $k = 0.126 \text{ см}^{-1}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; ускорение силы тяжести $g = 981.7 \text{ см/с}^2$; плотность воды $\rho_w = 1 \text{ г/см}^3$; ρ_p, E – плотность и модуль упругости материала пластины. Отметим, что при $h_p = 0$ формула (4.15) определяет частоту ω_0 гравитационных волн.

Кривые на рис. 4.39 соответствуют рассчитанным по (4.15) зависимостям $\omega(h_p)$ частоты волн от толщины пластины. Если в случае пластины из пенополиэтилена для частоты изгибо-гравитационных волн получено неплохое соответствие между расчетными и экспериментальными оценками (1, 2), то для пенополистирола (3) наилучшее соответствие между теорией и экспериментом достигается при наименьшем значении модуля упругости материала $0.5 \cdot 10^8 \text{ дин/см}^2$.

На рис. 4.40 *a, б* для двух глубин жидкости приведены профили волн максимального развития для $h_p = 1 \text{ см}$. Из сравнения их с чисто гравитационными волнами (*в, г*) следует, что для изгибо-гравитационных волн отсутствуют асимметрия профиля и заострение гребня.

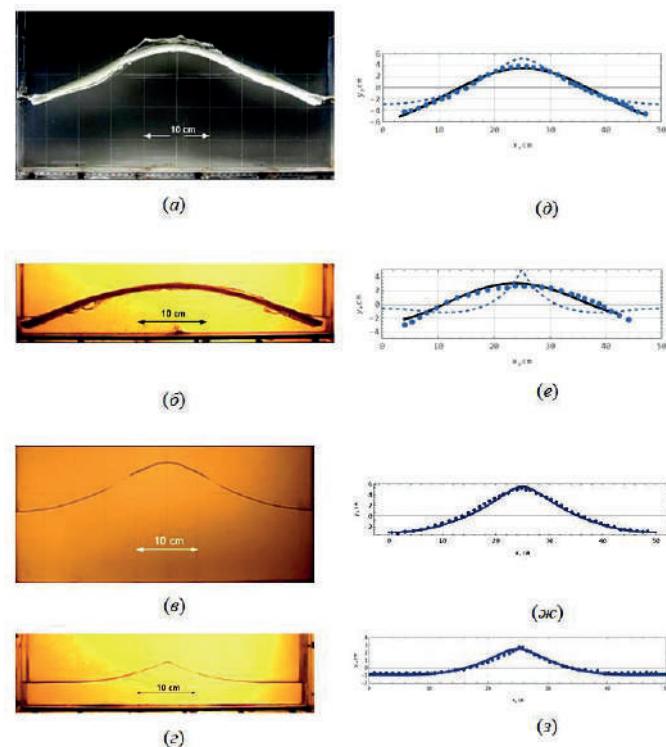


Рис. 4.40. Профили максимального развития (a, б) изгибно-гравитационных волн при толщине пластины $h_p = 1$ см ($h = 5$ и 15 см, $H = 8$ и 5.6 см) и гравитационных волн $h_p = 0$ (в, г) ($h = 5$ и 15 см, $H = 8.6$ и 4 см). (д-з) – экспериментальные (точки) и рассчитанные (сплошные и пунктирные кривые) профили.

Для описания профиля стоячих гравитационных волн используем переменные Лагранжа (a, b, t), тогда во втором приближении [27, 51] координаты (x, y) частиц жидкости на свободной поверхности ($b=0$) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a - H \frac{\operatorname{ch} kh}{2 \operatorname{sh} kh} \sin ka \cos \omega_0 t + H^2 k \frac{\sin 2ka}{32 \operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\omega_0 t) - \\ - \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2kh}{\operatorname{sh}^4 kh} \sin 2ka \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{16} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2kh}{\operatorname{sh}^2 kh} \sin 2ka, \\ y = \frac{H}{2} \cos ka \cos \omega_0 t + H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2kh}{32 \operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\omega_0 t) + \\ + \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2kh}{\operatorname{sh}^4 kh} \cos 2ka \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{16} H^2 k \frac{1}{\operatorname{sh} 2kh} \cos 2ka \end{array} \right. \quad (4.16)$$

На рис. 4.40 з, ж для сравнения приведены рассчитанные по (4.16) (пунктирные кривые) и экспериментальные (точки) профили волн максимального развития, которые практически совпадают.

Применение формул (4.16) для изгибно-гравитационных волн дает отрицательный результат при сопоставлении с данными эксперимента – пунктирные кривые на рис. 4.40 д, е, причем наиболее сильно профили отличаются в случае малой глубины жидкости (е).

С математической точки зрения процедура построения выражений, описывающих профили изгибно-гравитационных волн, включает решение дисперсионного уравнения (4.15) относительно волнового числа k , задания определяющей профиль функции и нахождения входящих в нее констант. В случае конечной глубины жидкости это численное решение. Задача несколько упрощается в длинноволновом приближении [41, 42] – корни дисперсионного уравнения находятся аналитически. Для определения профиля двумерных изгибно-гравитационных волн используется функция

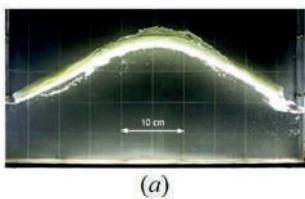
$$y(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + A_3 \operatorname{sh} kx + A_4 \operatorname{ch} kx \quad (4.17)$$

Применим для описания наблюдаемых в эксперименте волн в качестве аппроксимирующей функцию (4.17). Отметим, что в теории упругости выражение (4.17) описывает изгибные колебания балки со свободными концами.

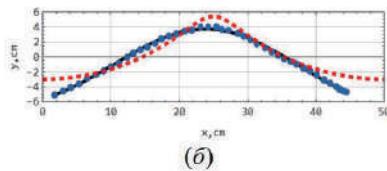
Из рис. 4.40 д, е следует, что наблюдаемые в эксперименте волны можно отнести к волнам изгибным, поскольку описываются (4.17), сплошные кривые. Аналогичный вывод можно сделать и для изгибно-гравитационных волн при толщине пластины $h_p = 1.79$ см – рис. 4.41.

Значения констант $A_1 - A_4$ (см), найденные при аппроксимации данных эксперимента, приведены ниже ($k = 0.126 \text{ см}^{-1}$).

h_p (см)	h (см)	A_1	A_2	A_3	A_4
1.0 (рис. 4.40 δ)	15	-0.09	-3.56	2.48	-2.48
1.0 (рис. 4.40 e)	5	0.46	-2.93	-0.26	0.27
1.8 (рис. 4.41)	15	0.5	-3.87	1.74	-1.75

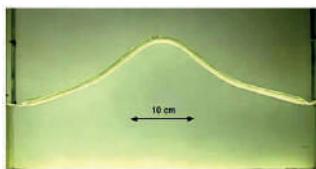


(а)

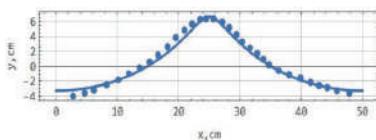


(б)

Рис. 4.41. Наблюдаемый в эксперименте (а) и рассчитанный (б) профиль изгибо-гравитационной волны при толщине пластины $h_p = 1.79$ см ($h = 15$ см, $H = 8.4$ см).



(а)



(б)

Рис. 4.42. Наблюдаемый в эксперименте (а) и рассчитанный (б) профиль гравитационной волны при толщине пластины $h_p = 0.51$ см ($h = 15$ см, $H = 9.9$ см).

Анализ волновых профилей показал, что при толщине пластины не более 0.6 см колебания системы пластина – вода определяются волнами гравитационными. На рис. 4.42 показана изгибо-гравитационная волна при $h_p = 0.51$ см, которая может рассматриваться как волна гравитационная, поскольку ее профиль описывается соотношениями (4.16).

Аналогичный результат получен для колебаний рассматриваемой гидроупругой системы при уменьшении толщины плавающей пластины до минимального значения $h_p = 0.09$ см.

Таким образом, при $h_p \leq 0.5$ см колебаний гидроупругой системы пластина–вода определяются стоячей гравитационной волной (не замечающей наличия пластины), а при увеличении h_p начинают сказываться свойства изгибных колебаний пластины.

4.4.3. Резонансные зависимости, предельная крутизна и затухание изгибио-гравитационных волн

Рассмотрим влияние плавающей пластины на резонансные зависимости высоты H стационарной волны от частоты Ω вертикальных колебаний сосуда. В [11–14, 38] эти зависимости $H(\Omega)$ использовались как интегральные характеристики регулярных гравитационных волн Фарадея.

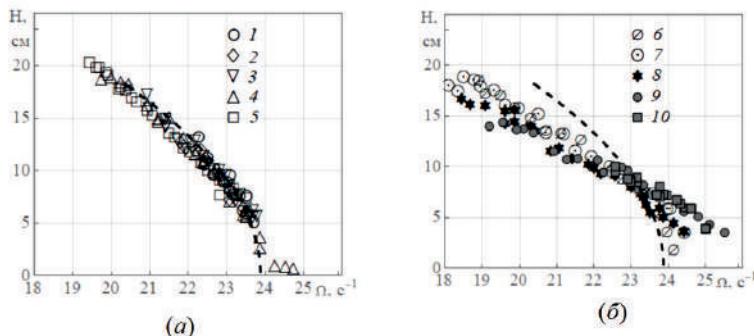


Рис. 4.43. Резонансные зависимости $H(\Omega)$ для регулярных изгибио-гравитационных волн при различной толщине h_p плавающей пластины: (а) 1–5 – $h_p = 0.085, 0.195, 0.255, 0.361, 0.51$ см; (б) 6–10 – $h_p = 0.765, 1.02, 1.275, 1.53, 1.785$ см; пунктирная кривая – рассчитанная $H(\Omega)$ для гравитационных волн Фарадея [27].

Из рис. 4.43 следует, что с ростом h_p зависимости $H(\Omega)$ становятся более пологими и смещаются в область высоких частот. Если сравнить резонансные зависимости изгибио-гравитационных и гравитационных волн, то в случае пластин с $h_p \leq 0.51$ см частотный сдвиг между

зависимостями отсутствует, хотя предельная высота изгибно-гравитационных волн существенно выше по сравнению с волной на свободной поверхности воды – рис. 4.43 *a*, кривые 1–5. Наличие пластин проявляется при $h_p \geq 0.77$ см: высокочастотный сдвиг более пологих резонансных зависимостей – рис. 4.43 *б*, кривые 6–10. Отметим, что при анализе профилей изгибно-гравитационных волн значение $h_p \square 0.5$ –0.6 см определяло переход от гравитационных к изгибным волнам.

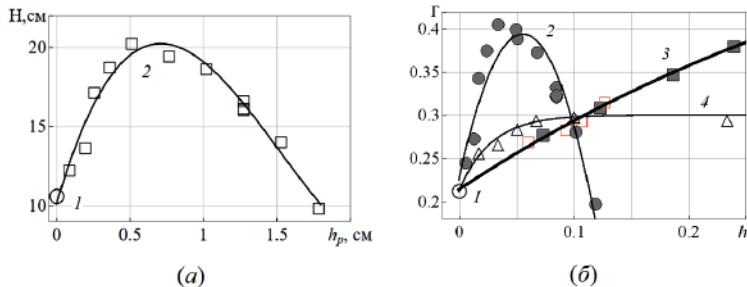


Рис. 4.44. (а) Зависимость измеренной предельной высоты изгибно-гравитационной волны от толщины пластины при глубине воды $h = 15$ см: 1 – гравитационная волна; 2 – гидроупругая система (вода – плавающая пластина из пенополиэтилена). (б) Зависимости предельной крутизны изгибно–гравитационной волны от толщины пластины при глубине воды $h = 15$ см: 1 – вода; 2 – плавающая пластина; 3 – плавающие частицы (сфера / гранулы, данные [38]); 4 – растительное масло–вода (данные [14]); $h^* = h_p / h$ для плавающей пластины и слоя частиц; $h^* = h_l / h$ для верхнего слоя вязкой жидкости

Зависимость предельной высоты H регулярной изгибно-гравитационной волны от толщины h_p пластины приведена на рис. 4.44 *а*. Данные (2) показывают, что размещение пластины на свободной поверхности воды значительно изменяет предельную высоту волны. Отметим, что предельная высота гравитационной волны (1) оценивается как $H \sim 12$ см. При увеличении толщины h_p сначала наблюдается рост H , причем максимальное значение $H \sim 20$ см достигается при $h_p \sim 0.5$ –0.6 см. Дальнейшее увеличение h_p приводит к уменьшению высоты H волны,

которая при $h_p = 1.8$ см составляет всего 9.7 см, т.е. ниже предельной высоты гравитационной волны. Данные (2) аппроксимируются полиномом третьей степени $H = 6.4h_p^3 - 29.2h_p^2 + 31.7h_p + 10.16$. Отметим, отвечающее максимальной высоте волны значение толщины пластины, определяет переход от гравитационных волн к волнам изгибным.

Использование плавающей пластины значительно увеличивает предельную крутизну $\Gamma = H / \lambda$ регулярной изгибо-гравитационной волны, как это показано на рис. 4.44 б. При увеличении толщины пластины сначала наблюдается рост крутизны, и при $h_p = 0.51$ см предельная крутизна равна $\Gamma = H / \lambda \sim 0.4$ – данные (2). Для сравнения на рис. 4.44 б приведены полученные в [14, 38] зависимости крутизны регулярной волны от толщины слоя вязкой жидкости (двухслойная жидкость, баротропные волны) и толщины слоя плавающих частиц. В обоих случаях для крутизны характерен монотонный рост с увеличением толщины верхнего слоя. Дальнейшее увеличение h_p пластины приводит к снижению крутизны, которая при $h_p = 1.79$ см оценивается как $\Gamma \approx 0.2$ (предельная крутизна регулярных гравитационных волн на воде). Данные эксперимента (2) аппроксимируются перевернутой параболой $\Gamma = -53.7h^*^2 + 5.9h^* + 0.22$.

Наличие плавающей пластины сказывается на диссипативных характеристиках рассматриваемой гидроупругой системы (рис. 4.45) – наблюдается неэкспоненциальный (и быстрый по сравнению с гравитационными волнами на воде) характер затухания волновых движений. Аналогичный характер затухания стоячей волны был выявлен в случае слоя плавающих частиц [38].

На рис. 4.45 а экспоненциальная функция (3) не описывает весь процесс затухания волны при наличии пластины (2). Расхождение между экспериментальными данными (2) и аппроксимирующей функцией (3) начинается при $H / H_0 \leq 0.25-0.3$. Наилучшая аппроксимация (4) экспериментальных данных (2) обеспечивается степенной функцией вида

$$y = H / H_0 = \left(1 - \frac{z}{\tau_0}\right)^n \quad (\tau_0 = 12, n = 2.2)$$

что совпадает с результатами исследования [14]. Таким образом, полное затухание волны в случае плавающей пластины достигается за конечное число колебаний $\tau_0=15$.

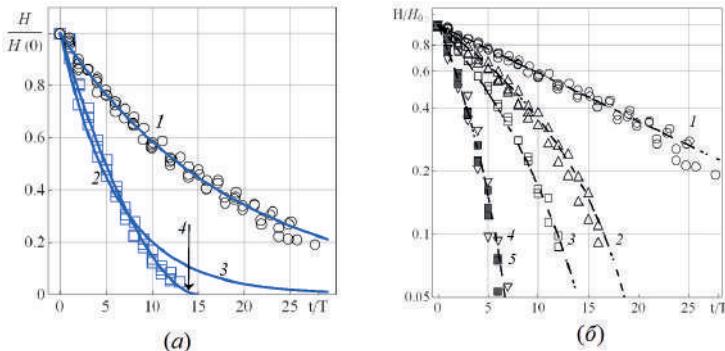


Рис. 4.45. (а) Амплитудные кривые затухающих волн на свободной поверхности воды (1) и гидроупругой системы пластина–вода (2): 1 – вода, экспоненциальное затухание, $\exp(-0.06z)$; 2 – плавающая пластина, $h_p = 1.28$ см; 3 – экспоненциальное затухание, $\exp(-0.342z)$; 4 – неэкспоненциальное затухание, $(1-z/12)^{2.2}$ (б) Затухание изгибно-гравитационных волн Фарадея при изменении толщины h_p плавающей пластины: 1 – вода ($\delta = 0.06$); 2–5 – плавающая пластина, $h_p = 0.255, 0.51, 1.255, 1.53$ см.

Обобщенные данные по затуханию изгибно-гравитационных волн в присутствии плавающей пластины приведены на рис. 4.45 б. Видно, что экспериментальные данные для всех пластин хорошо аппроксимируются степенной функцией вида $H / H_0 = (1-z / \tau_0)^n$ при $\tau_0=12-24$, $n = 2-2.7$.

Список литературы

1. Bassett A.B. A treatise on hydrodynamics. Vol. 2, Art. 519. London: Deighton, Bell and Co. 1888. 362 P. (Reprinted by Dover, New York, N.Y. 1961.)
2. Tait P.G. Note on ripples in a viscous liquid // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1890. V. 17. P. 110–114.

3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
4. *Сретенский Л.Н.* О волнах на поверхности вязкой жидкости // Тр. ЦАГИ. 1941. № 541. С. 1-34.
5. *Моисеев Н.Н.* Некоторые вопросы гидродинамики поверхностных волн // Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. С. 55-78.
6. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. Изд. 2-е, доп. и перераб. М.: ГИФМЛ. 1959. 700 с.
7. *Wehausen J.V. Laitone E.V.* Surface waves. in Encyclopedia of Physics. Springer Verlag, 1960. V. IX. P. 446–778.
8. *LeBlond H.H., Mainardi F.* The viscous damping of capillary-gravity waves // Acta Mechanica. 1987. V. 68. No. 3-4. P. 203 – 222.
9. *Саночкин Ю.В.* Влияние вязкости на свободные поверхностные волны в жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 156-164.
10. *Абрашкин А.А., Бодунова Ю.П.* Пространственные стоячие волны на поверхности вязкой жидкости // Тр. НГТУ им. Р.Е. Алексеева. МЖГ. 2011. № 2(87). С.49-54.
11. *Базилевский А.В., Калиниченко В.А., Рожков А.Н.* Влияние вязкости жидкости на поверхностные волны Фарадея в журнале // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 6. С. 30-42
12. *Базилевский А.В., Калиниченко В.А., Рожков А.Н.* Вязкая регуляризация разрушающихся волн Фарадея // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 107. Вып. 11. С. 716 – 721.
13. *Калиниченко В.А.* Стоячие гравитационные волны на поверхности вязкой жидкости// ПММ. 2022. Т. 86. № 3. С. 370–380.
14. *Калиниченко В.А..* Регуляризация гравитационных баротропных волн в двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2019. №6. С. 1–13.

15. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
16. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. В 2-х томах. Т. 1. М.: Мир, 1986. 399 с.
17. Pototsky A., Bestehorn M. Faraday instability of a two-layer liquid film with a free upper surface // Phys. Rev. Fluids, 2016. V. 1, 023901.
18. Li X., Li X., Liao Sh. Observation of two coupled Faraday waves in a vertically vibrating Hele-Shaw cell with one of them oscillating horizontally // Phys. Fluids, 2018. V. 30. 012108.
19. Калиниченко В.А., Секерж-Зенъкович С.Я., Тимофеев А.С. Экспериментальное исследование поля скоростей параметрически возбуждаемых волн в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 161-166.
20. Harrison W.J. The influence of viscosity on the oscillations of superposed fluids// Proc. London Math. Soc. 1908. Vol. s2-6. No. 1. P. 396–405.
21. Thorpe S.A. On standing internal gravity waves of finite amplitude // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. No. 3. P. 489–528.
22. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1959. 669 с.
23. Alpers W., Huhnerfuss H. The damping of ocean waves by surface films: a new look at an old problem // J. Geophys. Res. 1989. Vol. 94(C). P. 6251–6265.
24. Rajan G.K., Henderson D.M. Linear waves at a surfactant-contaminated interface separating two fluids: Dispersion and dissipation of capillary-gravity waves// Phys. Fluids. 2018. Vol. 30(7).
25. Cox C.S., Zhang X., Duda T F. Suppressing breakers with polar oil films: using an epic sea rescue to model wave energy budgets // Geoph. Res. Lett. 2017. Vol. 44(3). P. 1414–1421.

26. Калиниченко В.А. О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 4. С. 112-122.
27. Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3(45). С. 87-97.
28. Адам Н.К. Физика и химия поверхностей. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. 552 с.
29. Левченко Д.Н., Бергштейн Н.В., Худякова А.Д., Николаева Н.М. Эмульсии нефти с водой и методы их разрушения. М.: Химия, 1967, 200 с.
30. Keulegan G.H. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. Pt. 1. P. 33 – 50.
31. Modi V. J., Akinturk A., Tse W. A family of efficient sloshing liquid dampers for suppression of wind-induced instabilities // J. Vibration and Control. 2003. V. 9. P. 361–386.
32. Squire V.A. A fresh look at how ocean waves and sea ice interact // Phil. Trans. R. Soc. A. 2018. V. 376, 20170342.
33. Sutherland B., Balmforth N.J. Damping of surface waves by floating particles // Phys. Rev. Fluids. 2019. V. 4(1). 014804.
34. Урьев Н.Б., Кучин И.В. Моделирование динамического состояния дисперсных систем // Успехи химии. 2006. Т. 75. № 1. С. 37-63.
35. Малкин А.Я., Куличихин В.Г. Дилатансия и динамическое стеклование концентрированных суспензий: Состояние проблемы // Коллоидный журнал. 2016. Т. 78. № 1. С. 3–10.
36. Bagnold R. A. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 225. P. 49–63.
37. Savage S.B., McKeown S. Shear stresses developed during rapid shear of concentrated suspensions of large spherical particles

- between concentric cylinders // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 127. No. 1. P. 453–472.
38. *Калиниченко В.А.* Подавление интенсивных колебаний жидкости слоем плавающих частиц // *Изв. РАН. МЖГ.* 2020. № 6. С. 85–97.
39. *Калиниченко В.А.* Эксперименты по подавлению интенсивных колебаний жидкости плавающей пластиной // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 6. С. 74–83.
40. *Калиниченко В.А.* Частоты и профили стоячих изгибно-гравитационных волн// *Изв. РАН. МЖГ.* 2023. № 5. С. 103–109.
41. *Стурова И.В.* Влияние ледяного покрова на колебания жидкости в замкнутом бассейне // *Изв. РАН. ФАО.* 2007. Т. 43. № 1. С. 128–135.
42. *Зырянов В.Н.* Сейши подо льдом // *Водные ресурсы.* 2011. Т. 38. № 3. С. 259-271.
43. *Papathanasiou T.K., Belibassakis K.A.* Resonances of enclosed shallow water basins with slender floating elastic bodies// *J. Fluids Struct.* 2018. V. 82. P. 538–558.
44. *Bauer H.F., Eidel W.* Hydroelastic vibrations in a two-dimensional rectangular container filled with frictionless liquid and a partly elastically covered free surface // *J. Fluids Struct.* 2004. V. 19(2). P. 209–220.
45. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967. 215 с.
46. *Robin G.D.Q.* Wave propagation through fields of pack ice // *Philos. Trans. R. Soc. A:*1963. V. 255. No. 1057. P. 313–339.
47. *Букатов А.Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
48. *Meylan M. H., Bennetts L. G., Kohout A. L.* In situ measurements and analysis of ocean waves in the Antarctic marginal ice zone. *Geoph. Res. Lett.* 2014, V. 41(14). P. 5046–5051.

49. *Ofuya A.O., Reynolds A.J.* Laboratory simulation of waves in an ice floe // J. Geophys. Res. 1967. V. 72. No. 14. P. 3567–3583.
50. *Parra S.M., Sree D.K.K., Wang D., Rogers E., Lee J.H., Collins C.O., Adrian Wing-Keung Law A.W.-K., Babanin A.V.* Experimental study on surface wave modifications by different ice covers // Cold Reg. Sci. Technol. 2020. V. 174. 103042.
51. *Секерж-Зенькович Я.И.* К теории стоячих волн конченой амплитуды на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1951. Т. 15. № 1. С. 53-73.

Научное издание

*КАЛИНИЧЕНКО Владимир Анатольевич
НЕСТЕРОВ Сергей Владимирович*

**ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ –
ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ**

Издательство «Перо»

109052, Москва, Нижегородская ул., д. 29–33, стр. 27, ком. 105

Тел.: (495) 973–72–28, 665–34–36

www.pero-print.ru e-mail: info@pero-print.ru

Подписано в печать 30.01.2025. Формат 60x90/16.

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 16,75. Тираж 300 экз. Заказ 093.

Отпечатано в ООО «Издательство «Перо»

В.А. Калиниченко
С.В. Нестеров

ВОЛНЫ ФАРАДЕЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ

ISBN 978-5-00258-374-4



9 785002 583744