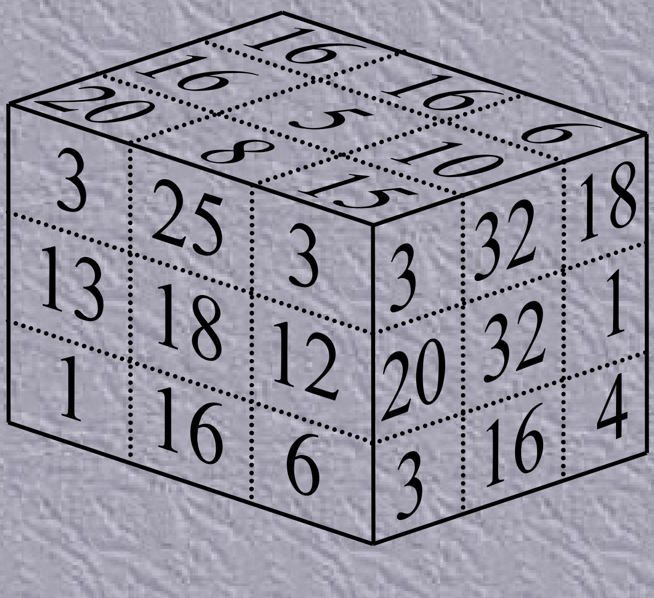
В. Г. Речкалов

Векторная и тензорная алгебра

для будущих физиков и техников



2008

В. Г. Автор

Векторная и тензорная алгебра

для будущих физиков и техников

2008

УДК 512. 642(075.8) + 512.64(075.8)
ББК 512(07)
462

Речкалов В.Г.
Векторная и тензорная алгебра для будущих физиков и техников: учеб. пособие для вузов / В.Г. Речкалов. – Челябинск: ИИУМЦ "Образование", 2008. – 140 с.

УДК 512. 642(075.8) + 512.64(075.8)
ББК 512(07)
462

ISBN 978-5-98314-303-6

Цель пособия – ознакомить начинающих с основами современной теории тензоров, необходимыми для понимания аналитической механики, механики сплошной среды, теоретической физики, теории относительности.

Книга, несомненно, заинтересует также преподавателей, аспирантов и студентов университетов и втузов, преподающих или изучающих теорию тензоров.

В книге имеется большое число упражнений.

ISBN 978-5-98314-303-6

© В. Г. Речкалов, 2008
viktor-rechkalov@mail.ru
© ИИУМЦ «Образование», 2008

Позвольте представиться

Меня с детства интересовало устройство Мира, Вселенной, безграничного Космоса. Этот интерес еще в школе привел меня к работам Эйнштейна по теории гравитации. Там я впервые познакомился со странными "жучками" с огромным количеством лапок-индексов и загадочным названием: "тензоры". В работах Эйнштейна я ничего не понял, но интерес к тензорам остался. Хотя жизнь сложилась так, что было не до них, я собирал книги о тензорах. Я не искал их специально, но если они мне попадались, я их покупал. Со временем у меня скопилось, как мне кажется, все более или менее стоящее на эту тему. С ростом количества книг увеличивался общий объем непонятного, так как каждая книга была непонятна по-своему.

Между тем время шло. Закончив политехнический институт, я успел поработать инженером в автохозяйстве, затем инженером в лаборатории лазерной голографии. В 2004 году мне удалось подготовить и защитить диссертацию по методике преподавания физики. В настоящее время я работаю доцентом на кафедре физики ЮУрГУ.

Теперь у меня больше времени, и мне приходится писать лекции на самые разные темы. Вспомнив увлечение своей юности, я решил попытаться написать лекции и по тензорной алгебре, не очень веря в результат. Однако я ошибся, работа над лекциями оказалась простой и интересной. Все сложилось и трудности отступили.

Если бы я был древним римлянином или, еще лучше, греком, то в этом месте я мог бы сказать что-то напыщенное, вроде:

– Я сделал все что мог, кто может, пусть сделает лучше.

Увы, не довелось. Позвольте, хотя бы выразить скромную надежду, что найдется человек, который прочитает мою книгу с таким же интересом, с каким я ее писал.

Оглавление

Введение

Что это пролог или надпись на колечке?
Вильям Шекспир

Эта книга о тензорах, но не только о них. Еще никому не удавалось написать книгу только о тензорах, потому что "тензор" – это общее название для векторов, линейных операторов и даже для скаляров. В книгах о тензорах, по необходимости, приходится говорить об этом всем и еще, обычно, о матрицах, поскольку тензоры удобно представлять в матричной форме. Поразмыслив над этой проблемой, мы решили, что будем писать просто о векторах, как о самых понятных тензорах, вводя постепенно и естественно, в связи с решаемыми задачами, все необходимые атрибуты тензорной алгебры. И только в конце книги мы приходим к общему определению тензора. И в тот момент, когда мы это определение даем, оказывается, что все, что хотелось бы сказать о тензорах в книге для начинающих, уже сказано раньше.

Тензоры широко применяются в дифференциальной геометрии, теории относительности, механике, электродинамике и других областях науки. В последнее время предпринимаются попытки использовать теорию тензоров в экономических науках. Интерес к теории тензоров возник в связи с работами А. Эйнштейна по общей теории относительности и не угасает уже почти сто лет. Конечно, за такое время было написано достаточно хороших книг по этой теории. Есть книги для самых начинающих, и для продвинутых, и для продолжающих, а глас вопиющего: "ну объясните же в конце концов, что такое тензор, и как его можно представить", – не умолкает.

Наша книга предназначена для тех, кто еще не знает, что такое тензор, но по каким-то причинам хочет это узнать. Мы стремились более объяснять, чем доказывать; постепенно и не спеша, подходить к понятиям и их определениям, нежели с них начинать. Следовательно, эта книга скорее для будущих инженеров и физиков, нежели для математиков.

Объектом внимания физиков и инженеров является природа, а не умозрительные построения, и, поэтому, формализм и строгость в рассуждениях – непременные атрибуты любой книги по математике – не являются для них самоцелью. Они всего лишь средство, которое используется ровно в той степени, в которой это бывает необходимо для правильного понимания природы. Выразив свойства физических или технических объектов при помощи математических понятий, физик и инженер наделяют эти понятия более богатым содержанием, по сравнению с их математическими определениями. В математике это недопустимо, в физике и технике иначе просто не бывает.

Мы стремились сделать эту книгу полезной прежде всего для будущих инженеров и физиков. Насколько нам удалось, судить Вам, Читатель.

25.01.2008 *Автор*

Векторы

Физическая наука изучает строение и свойства неживой природы. Объектами внимания физических теорий являются физические системы, явления или процессы. Количественные характеристики свойств физических объектов называются физическими величинами. Физические величины обладают различным уровнем сложности. Простые физические величины могут быть заданы числовым значением и называются скалярными. Примерами скалярных величин являются температура, масса, объем, площадь, длина, плотность и т.д.

Сложные физические величины не могут быть заданы одним числовым значением. Например, для того, чтобы определить такие величины как сила, скорость, ускорение нам необходимо задать по три числовых значения для каждой величины. Эти величины и аналогичные им мы называем векторными.

Векторные величины весьма разнообразны. Кроме силы, скорости и ускорения, о которых мы уже упомянули, к векторным величинам относятся перемещение, импульс силы, импульс тела, угловая скорость и ускорение, момент силы и момент импульса и многие другие.

Сконцентрировав внимание на наиболее общих свойствах, присущих всем без исключения векторным величинам безотносительно к их физической и геометрической природе, мы приходим к понятию вектора. Теория векторов, как отвлеченных идеальных объектов, является разделом математики.

Скалярные и векторные величины не исчерпывают всего многообразия величин, которые необходимы современной науке. В чем-то родственными векторам, но в общем случае более сложными являются тензорные величины. Примерами тензорных величин являются напряженное состояние в точке, упругость твердого тела, момент инерции, диэлектрическая проницаемость... Для определения таких величин необходимо задать целую таблицу числовых значений. Абстрагируясь от конкретного физического и геометрического содержания таких величин, мы приходим к понятию тензора. Тензор, как и вектор, является математическим понятием и предметом изучения тензорной и векторной алгебры. Понятие тензора настолько крепко связано с идеями векторной алгебры, что, допустив однажды в теорию векторные величины, мы были обречены, в конце концов, прийти к тензорам. Открыв для себя тензоры, мы обнаружили, что все физические величины, так или иначе, являются тензорными, даже самые привычные из них. А мы, постоянно пользуясь ими, даже и не догадывались об этом. Это открытие можно сравнить разве что с открытием господина Журдена из знаменитой комедии Мольера, который был потрясен, когда узнал, что более сорока лет говорит прозой, не подозревая об этом.

Векторная и тензорная алгебры очень тесно связаны. Тензорная алгебра, являясь непосредственным развитием и обобщением векторной, включает ее в себя как важный частный случай. Векторная алгебра, став частью тензорной, серьезно изменила свой облик за счет появления новых выразительных средств. К тому же в ней пришлось изменить некоторые акценты. Поэтому изучение тензорной алгебры логично и удобно начинать с самого начала – с векторов. К тензорам мы придем постепенно, сделав при этом экскурсы в теорию матриц и рассмотрев некоторые содержательные примеры.

.Геометрическое определение вектора

Вектор традиционно определяется как направленный отрезок [1, 9, 12,14]. Например, А.Н. Рублев дает такое определение:

"Вектор представляет собой **геометрический объект**, характеризуемый **длиной и направлением**" [14, с. 88].

Это определение фокусирует внимание на двух, несомненно важных свойствах всех физических векторных величин, – они все характеризуются некоторым количественным значением, которое отождествляется с длиной отрезка, и направлением в пространстве. При своих несомненных достоинствах – простота и наглядность – это определение не отражает в полной мере существа понятия "вектор".

Во-первых, у физических и геометрических объектов можно обнаружить немало свойств, которые характеризуются величиной и направлением, но, тем не менее, не являющихся векторными. Например, положение транспортных средств на карте города можно показать при помощи направленных отрезков, связав их длину с длиной транспортного средства. Такие направленные отрезки будут в целом правильно отражать движение транспортных потоков, но для них нельзя разумным образом ввести традиционные для векторной алгебры алгебраические операции.

Еще один пример. Для того, чтобы однозначно задать величину и направление поворота твердого тела, можно воспользоваться направленным отрезком. Для этого достаточно длину отрезка отождествить с величиной угла поворота и направить его вдоль оси поворота в сторону, откуда вращение видно против часовой стрелки.

Если мы совершаем последовательно несколько поворотов тела относительно различных осей, то каждый такой поворот может быть задан соответствующим направленным отрезком. Если эти направленные отрезки сложить по правилам векторной алгебры, то мы снова получим направленный отрезок. К сожалению, его нельзя интерпретировать как результат последовательных поворотов тела. Операция сложения таких геометрических отрезков не имеет геометрического смысла.

Точно так же как "короля делает свита", алгебраические операции превращают направленный отрезок в вектор. До тех пор, пока мы такие операции не ввели и не изучили их свойства, мы не можем, строго говоря, утверждать, что направленный отрезок является вектором.

Во-вторых, нельзя утверждать также, что вектор является геометрическим объектом. Направленный отрезок, несомненно, является геометрическим объектом, хотя и малоинтересным. Над геометрическими объектами нельзя выполнять алгебраические действия. Нельзя, скажем, сложить трапецию с пирамидой или умножить шар на квадрат. Вводя алгебраические операции над направленными отрезками, мы определяем новый математический объект, который не является больше объектом геометрическим. Направленный отрезок превращается при этом в условное изображение этого нового объекта. Между тем, нельзя недооценивать практическое значение этого образа. Он придает конкретный геометрический смысл алгебраическим преобразованиям. Видимо, правильнее считать, что вектор имеет двойственную природу – он одновременно является и алгебраическим и геометрическим объектом.

Если мы согласны с предыдущими рассуждениями, то мы должны и согласиться с тем, что определение вектора задача непростая, и к ней лучше подойти постепенно и осторожно, начиная издалека, хотя бы с уточнения понятия направленного отрезка.

Определение (1)

Под направленным отрезком будем понимать определенным образом ориентированный в пространстве отрезок, один из концов которого называется началом, а второй его концом.

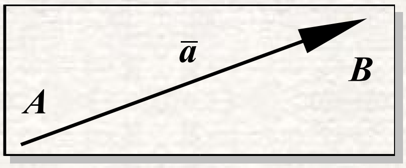


Рис. 1

Обозначение:

направленный отрезок будем обозначать буквой любого алфавита с чертой, например, $\bar{a}$. Если A начальная точка отрезка, а B конечная, то направленный отрезок можно обозначить как $\overline{AB}$.

Определение (2)

Длина направленного отрезка называется его модулем.

Обозначение:

модуль вектора $\bar{a}$ обозначается $|\bar{a}|$ или просто a, а модуль вектора $\overline{AB}$ обозначается $|\overline{AB}|$.

Определение (3)

Два направленных отрезка будем считать равными, если они могут быть совмещены при помощи параллельного переноса и при этом начало одного совпадает с началом другого.

Определение (4)

Если отрезки могут быть совмещены при помощи параллельного переноса, но при этом начало одного совмещается с концом другого, то такие отрезки будем называть противоположными.

Другими словами, одинаковые направленные отрезки имеют одинаковые модули или длины, параллельны между собой и одинаково направлены. При этом они могут занимать различные положения в пространстве.

Определение (5)

Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется нулевым направленным отрезком.

Нулевой направленный отрезок может быть назван отрезком лишь с большой натяжкой. Раз его начало и конец совпадают, то это скорее точка, а не отрезок. Да и направления никакого он не имеет. Однако, для полноты картины он весьма полезен, в чем мы убедимся в дальнейшем. Обозначается нулевой отрезок нулем с чертой – $\bar{0}$. Модуль нулевого отрезка естественно равен нулю – $\bar{0} = 0$.

Алгебраические операции над направленными отрезками

До сих пор мы стремились найти однозначное отображение в научном языке очевидных фактов из жизни направленных отрезков. Любая научная теория начинается с этого.

Любая теория начинается с научных фактов, которые должны быть ясно и однозначно сформулированы. Направленный отрезок – это относительно простой объект, и все что о нем можно было сказать, мы уже сказали. Теперь нам предстоит решить важную задачу – превратить хоть и направленный, но все еще простой, отрезок в вектор. Для этого необходимо ввести над направленными отрезками алгебраические операции.

Правила действий, которые мы собираемся ввести, не являются ни очевидными, ни произвольными. Свое обоснование они имеют в реальных свойствах физических величин, таких как сила, скорость и ускорение.

..Сложение направленных отрезков

Определение (6)

Направленные отрезки складываются по правилу параллелограмма или, что одно и то же, по правилу треугольника. Несколько направленных отрезков можно складывать по правилу многоугольника (рис. 2).

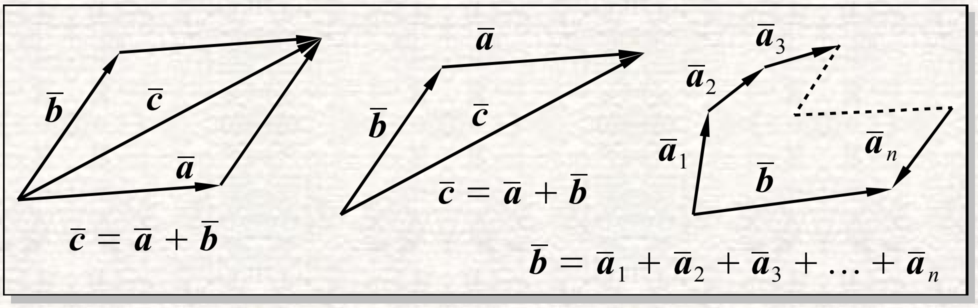


Рис. 2

Свойства операции сложения

1. Перестановочность (коммутативность)

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$

2. Сочетательность (ассоциативность)

$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{b}+(\bar{b}+\bar{c})$

Свойства непосредственно следуют из определения.

..Умножение направленных отрезков на число

Определение (7)

Произведением направленного отрезка $\bar{a}$ на число λ является отрезок $\lambda\bar{a}$, модуль которого равен произведению модуля $\bar{a}$ на модуль λ, а направление совпадает с направлением отрезка $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно $\bar{a}$, если $\lambda<0$. При $\lambda=0$ или $\bar{a}=\bar{0}$ считаем, что $\lambda\bar{a}=\bar{0}$.

Из определения сразу вытекает, что $\bar{a}=1\cdot\bar{a}$.

Обратный или противоположный отрезок мы определили как отрезок равный по модулю, но противоположный данному. Если $\bar{a}=\overline{AB}$, то отрезок противоположный ему будет $\bar{b}=\overline{BA}=(-1)\overline{AB}=(-1)\bar{a}=-\bar{a}$. То есть отрезок противоположный отрезку $\bar{a}$ есть отрезок $-\bar{a}$. А по определению нулевого отрезка мы получаем $\bar{a}+(-\bar{a})=\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}=\bar{0}$ (рис.3).

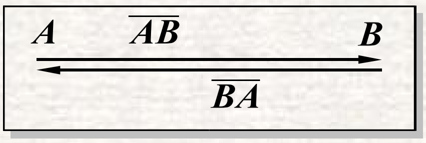


Рис.3

Между прочим, вполне обычные алгебраические свойства. Но в том то вся и прелесть, что для таких необычных объектов, как направленные отрезки, мы получили привычные и давно известные из повседневного опыта обращения с обычными числами алгебраические свойства. Следующие свойства также являются вполне очевидными.

Свойства операции умножения

1. Сочетательность (ассоциативность)
$\lambda_1(\lambda_2\overline{\boldsymbol{a}})=(\lambda_1\lambda_2)\overline{\boldsymbol{a}}$
2. Распределительность (дистрибутивность) относительно чисел
$(\lambda_1+\lambda_2)\overline{\boldsymbol{a}} = \lambda_1\overline{\boldsymbol{a}} + \lambda_2\overline{\boldsymbol{a}}$
3. Распределительность (дистрибутивность) относительно направленных отрезков
$\lambda(\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}) = \lambda\overline{\boldsymbol{a}} + \lambda\overline{\boldsymbol{b}}$

Разобравшись с действиями, которые можно выполнять с направленными отрезками, мы готовы дать определение геометрического вектора.

Определение геометрического вектора (8)

Направленные отрезки, для которых определены операции сложения и умножения на число в соответствии с определениями 6 и 7, называются геометрическими векторами.

Наверное, стул, кресло, табуретку, пуфик и скамейку можно назвать одним общим словом седалище. (Вообще-то, в современном языке смысл этого слова другой, а в древности так называли место для сидения.) Если мы так поступим, то на вопрос – как представить седалище? На что оно похоже? – мы сможем только пожать плечами. Каждый раз, переходя к более общим понятиям, мы теряем в образности представлений. Мы только что определили геометрический вектор. Физика дает нам другие многочисленные примеры векторов: вектор скорости, ускорения, силы, напряженности поля и т.д. Выделив в этих понятиях наиболее важное и общее и отвлекаясь от частного конкретного содержания, мы приходим к общему определению вектора. Но что есть общего между всеми этими примерами конкретных векторов? Все эти векторы имеют размер, направление и для них определены операции сложения и умножения на число. Оказывается, однако, что свойства связанные с размерами векторов, и свойства, вытекающие из их алгебраической природы, являются независимыми. Поэтому, все, что связано с размерами, математики предпочитают изучать отдельно, в так называемых метрических теориях. Алгебраические же свойства векторов становятся при этом предметом изучения теории линейных или векторных пространств. В результате, мы приходим к следующему определению вектора.

Общее определение вектора (9)

Объекты любой природы, для которых определены операции сложения и умножения на число, и, которые в свою очередь обладают следующими свойствами:

1. $\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}} = \overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{a}}$;
2. $(\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}) + \overline{\boldsymbol{c}} = \overline{\boldsymbol{a}} + (\overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{c}})$;
3. $\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{0} = \overline{\boldsymbol{a}}$;
4. $\overline{\boldsymbol{a}} + (-\overline{\boldsymbol{a}}) = \overline{0}$;
5. $1\cdot\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{a}}$;
6. $(\lambda_1\lambda_2)\overline{\boldsymbol{a}} = \lambda_1(\lambda_2\overline{\boldsymbol{a}})$;
7. $\lambda(\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}}) = \lambda\overline{\boldsymbol{a}} + \lambda\overline{\boldsymbol{b}}$;
8. $(\lambda_1+\lambda_2)\overline{\boldsymbol{a}} = \lambda_1\overline{\boldsymbol{a}} + \lambda_2\overline{\boldsymbol{a}}$,

называются векторами.

В свете данного определения, векторами могут считаться многочлены $P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, вектор-строки $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ и вектор-столбцы $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$.

Такая "всеядность" нового определения не может не сказаться на пищеварении и, при неумелом обращении, может грозить расстройством желудка. В дальнейшем мы будем оставаться в рамках геометрической теории векторов, однако, связь между векторами и матрицами, которую устанавливает общее определение, мы не будем упускать из вида.

.Проекции вектора

Слово "проекция" происходит от латинского "*projectio*" – бросание вперед. Идея этого понятия возникла, видимо, при наблюдении теней, которые отбрасывают освещенные предметы (рис. 4).

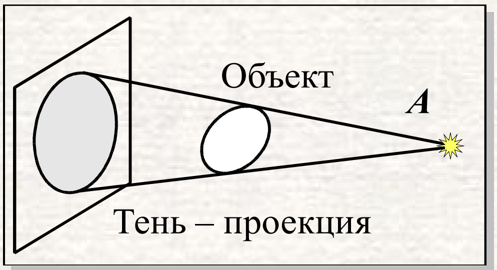


Рис. 4

Способ проекции, изображенный на рис. 4 называется центральной проекцией. Если источник света ***A*** отнести достаточно далеко, то мы получим параллельную проекцию. Параллельная проекция обладает рядом полезных качеств, в силу чего находит широкое применение в инженерной практике. Мы тоже в дальнейшем будем говорить только о параллельной проекции, опуская ее полное название.

..Параллельное проектирование вектора в плоскости

Рассмотрим для начала наиболее простой, но тем не менее важный для понимания, частный случай – проектирование объектов целиком расположенных в плоскости на прямую, также расположенную в этой же плоскости. Направление проектирования зададим при помощи вектора $\bar{e}$.

На рис. 5 показаны проекции точки ***A***, отрезка ***BC*** и вектора $\bar{a}$ на прямую ***L***.

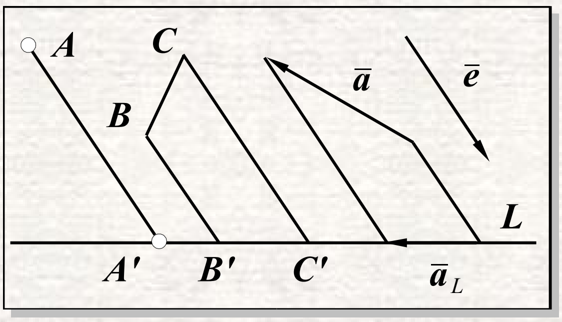


Рис. 5

Из рисунка видно, что проекцией точки $\boldsymbol{A}$ на прямую $\boldsymbol{L}$ является точка $\boldsymbol{A}'$, проекцией отрезка $\boldsymbol{BC}$ является отрезок $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$, а проекцией вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ является вектор $\bar{\boldsymbol{a}}_L$.
Параллельную проекцию вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ на прямую $\boldsymbol{L}$ по направлению $\bar{\boldsymbol{e}}$ будем обозначать $\overline{\Pi p}^{\bar{e}}{}_L \bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{a}}_L$.
Теперь дадим необходимые определения.

Определение проекции точки (10)

Пусть точка $\boldsymbol{A}$, прямая $\boldsymbol{L}$, и вектор $\bar{\boldsymbol{e}}$ лежат в одной плоскости. Проекцией точки $\boldsymbol{A}$ на прямую $\boldsymbol{L}$ в направлении вектора $\bar{\boldsymbol{e}}$ в этом случае будем называть точку $\boldsymbol{A}'$, которая является результатом пересечения прямой $\boldsymbol{L}$ и прямой, проведенной через точку $\boldsymbol{A}$ в направлении вектора $\bar{\boldsymbol{e}}$.

Определение проекции вектора на прямую (11)

Пусть вектор $\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{AB}}$, прямая $\boldsymbol{L}$, и вектор $\bar{\boldsymbol{e}}$ лежат в одной плоскости. Проекцией вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ на прямую $\boldsymbol{L}$ в направлении вектора $\bar{\boldsymbol{e}}$ в этом случае будем называть вектор $\bar{\boldsymbol{a}}_L = \overline{\Pi p}^{\bar{e}}{}_L \bar{\boldsymbol{a}}$, равный вектору $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'$. Точки $\boldsymbol{A}'$ и $\boldsymbol{B}'$ при этом являются проекциями начала и конца вектора $\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{AB}$ на прямую $\boldsymbol{L}$.

Для векторов, лежащих на одной прямой, возможны лишь два направления: либо в одну, либо в другую сторону – третьего не дано. В этом случае само понятие вектора становится излишним, и можно вполне обойтись лишь алгебраическим значением – числом со знаком. Правда, для этого на прямой необходимо сначала задать одно из направлений в качестве положительного.

Определение направленной оси (12)

Прямая, с заданным на ней положительным направлением, называется направленной осью или просто осью.

Определение алгебраического значения проекции вектора на направленную ось (13)

Алгебраическим значением проекции вектора на направленную ось называется модуль проекции вектора на эту ось, взятый со знаком "+", если направление проекции вектора совпадает с положительным направлением оси, и со знаком "–", в противном случае.

Обозначать алгебраическое значение проекции вектора на ось будем точно так же, как проекцию вектора на прямую, только без "векторной" черты сверху, например: $\bar{\boldsymbol{a}}_L = \Pi p^{\bar{e}}{}_L \bar{\boldsymbol{a}}$.
Проекция вектора на ось – это вектор. Алгебраическое значение проекции вектора на ось – это число. Последнее название является исключительно громоздким, но пользуясь тем, что из контекста обычно всегда ясно, о чем идет речь – о числе или о векторе – и то и другое будем, в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, называть просто проекцией вектора.

Теорема о проекции суммы векторов на ось

Проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций.

В данном случае из контекста теоремы неясно, о какого типа проекциях идет речь. Но к счастью, данная теорема справедлива и для векторной проекции и для алгебраической. А вот доказательства для этих случаев будут различные. Для начала докажем теорему для векторных проекций. Рассмотрим для определенности сумму четырех векторов (рис. 6).

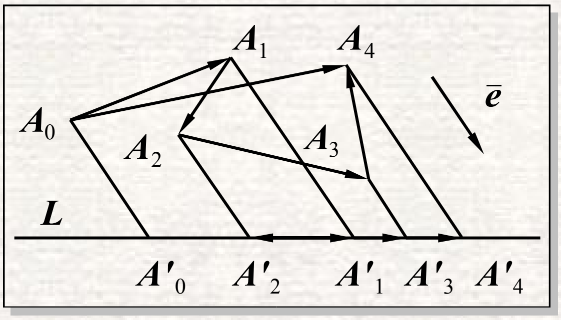


Рис. 6

Из рис. 6 видно, что:

$$\overline{A_0A_4} = \overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4},$$
$$\overline{A'_0A'_4} = \overline{A'_0A'_1} + \overline{A'_1A'_2} + \overline{A'_2A'_3} + \overline{A'_3A'_4},$$

в соответствии с правилами сложения векторов.

С другой стороны:

$$\overline{A'_0A'_4} = \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_0A_4};$$
$$\overline{A'_0A'_1} = \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_0A_1};$$
$$\overline{A'_1A'_2} = \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_1A_2};$$
$$\overline{A'_2A'_3} = \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_2A_3};$$
$$\overline{A'_3A'_4} = \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_3A_4}.$$

Следовательно,

$$\overline{A'_0A'_4} = \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_0A_4} = \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\left(\overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4}\right) =$$
$$= \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_0A_1} + \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_1A_2} + \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_2A_3} + \overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\overline{A_3A_4}.$$

Тот же самый результат может быть получен для любого количества векторов, что дает нам право записать теорему в общем виде:

$$\overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\sum_{i=1}^{i=n}\bar{\boldsymbol a}_i = \sum_{i=1}^{i=n}\overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\bar{\boldsymbol a}_i.$$

Теперь мы можем доказать теорему об алгебраических значениях проекций. Пусть $\bar{\boldsymbol L}^0$ – единичный вектор, совпадающий с направлением оси $\bar{\boldsymbol L}$. Такой вектор обычно называется ортом-вектором. Тогда векторную проекцию произвольного вектора $\bar{\boldsymbol a}_i$ на ось $\bar{\boldsymbol L}$ можно записать как: $\overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\bar{\boldsymbol a}_i = s_i\left|\overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\bar{\boldsymbol a}_i\right|\bar{\boldsymbol L}^0$, где s означает знак.

Поскольку $\overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\sum_{i=1}^{i=n}\bar{\boldsymbol a}_i = \sum_{i=1}^{i=n}\overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\bar{\boldsymbol a}_i$, то

$\overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\sum_{i=1}^{i=n}\bar{\boldsymbol a}_i = s\left|\overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\sum_{i=1}^{i=n}\bar{\boldsymbol a}_i\right|\bar{\boldsymbol L}^0 = \left(\sum_{i=1}^{i=n}s_i\left|\overline{Пр}^{\bar e}_{\bar L}\,\bar{\boldsymbol a}_i\right|\right)\bar{\boldsymbol L}^0$. Но модуль проекции вектора на ось, взятый с соответствующим знаком, – это и есть по определению алгебраическая величина проекции вектора на ось. Следовательно, $Пр^{\bar e}_{\bar L}\sum_{i=1}^{i=n}\bar{\boldsymbol a}_i = \sum_{i=1}^{i=n}Пр^{\bar e}_{\bar L}\,\bar{\boldsymbol a}_i$.

Запишем теперь обе формулировки доказанной нами теоремы в символической форме:

$$\overline{Пр}^{\bar{e}}_{\bar{L}} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{\boldsymbol{a}}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{Пр}^{\bar{e}}_{\bar{L}} \bar{\boldsymbol{a}}_i \,; \tag{1}$$

$$Пр^{\bar{e}}_{\bar{L}} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{\boldsymbol{a}}_i = \sum_{i=1}^{i=n} Пр^{\bar{e}}_{\bar{L}} \bar{\boldsymbol{a}}_i \,. \tag{2}$$

Как видим, и в символической записи эти две теоремы очень похожи, но разница, тем не менее, есть. В первом случае справа и слева от знака равенства стоят векторы, а во втором – числа.

Вообще то, эта теорема относится к той категории теорем, в которых *то, что требуется доказать, гораздо более очевидно, чем само доказательство*. Так или иначе, теорема полезная, и в дальнейшем она нам еще пригодится.

..Параллельное проектирование вектора в пространстве

Проекция точки на плоскость

Проецирование точки на плоскость производится способом аналогичным проецированию точки на прямую в плоскости. Проекцией $\boldsymbol{A'}$ точки $\boldsymbol{A}$ на плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ в направлении вектора $\bar{\boldsymbol{e}}$ называется точка пересечения плоскости и прямой, проведенной через эту точку в направлении проецирования (рис. 7, а).

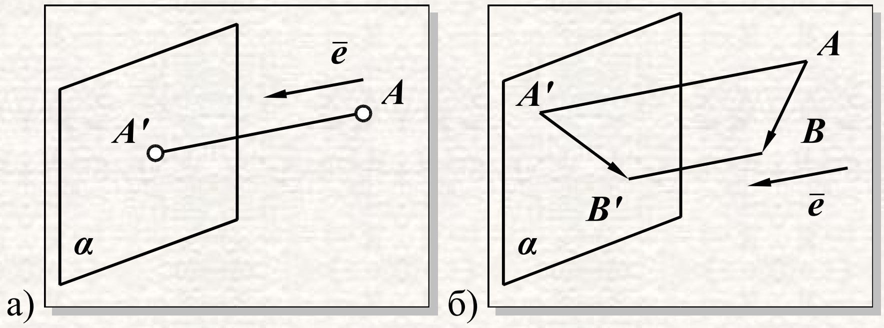


Рис. 7

Проекция вектора на плоскость

Проекцией вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$ на плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ называется вектор $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$ (рис. 7, б), где точки $\boldsymbol{A'}$ и $\boldsymbol{B'}$ являются проекциями точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно.

Проекция вектора на прямую

Спроектировать вектор на прямую в пространстве аналогично тому, как это можно сделать на плоскости, нельзя.

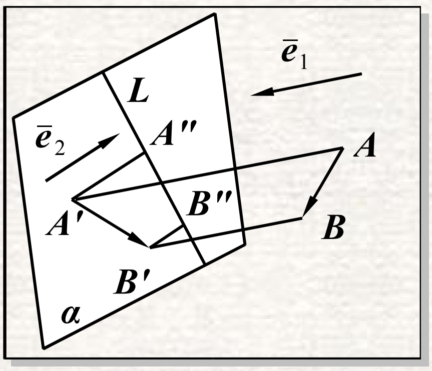


Рис. 8

Для начала спроектируем вектор $\overline{\boldsymbol{AB}}$ по направлению $\overline{\boldsymbol{e}}_1$ на некоторую плоскость, проходящую через прямую $\boldsymbol{L}$. На рис. 8 эта плоскость обозначена $\boldsymbol{\alpha}$. Затем, полученную таким образом проекцию $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$, спроектируем по направлению $\overline{\boldsymbol{e}}_2$ (вектор $\overline{\boldsymbol{e}}_2$ лежит в плоскости $\boldsymbol{\alpha}$) на прямую $\boldsymbol{L}$. В результате получим вектор $\overline{\boldsymbol{A''B''}}$, который и принимают за проекцию вектора на прямую. Из построения очевидно, что проекция вектора не зависит от положения проецируемого вектора в пространстве. Проще говоря: равные векторы имеют и равные проекции. Если бы это было не так, мы не имели права говорить о проекции вектора вообще.

Вектор $\overline{\boldsymbol{A''B''}}$ (проекция вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$ на ось $\boldsymbol{L}$) можно получить и более простым способом. В самом деле, точка $\boldsymbol{A''}$ является точкой пересечения плоскости, проходящей через точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A'}$ и $\boldsymbol{A''}$ и прямой $\boldsymbol{L}$. Плоскость же, проходящая через эти точки параллельна векторам $\overline{\boldsymbol{e}}_1$ и $\overline{\boldsymbol{e}}_2$. Назовем плоскость параллельную направлениям проецирования $\overline{\boldsymbol{e}}_1$ и $\overline{\boldsymbol{e}}_2$ проецирующей плоскостью.

Следовательно, можно дать следующее определение проекции вектора на прямую в пространстве.

Определение (14)

> Проекцией вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$ на прямую $\boldsymbol{L}$ по направлению проецирующей плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ называется вектор, $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$. Точки $\boldsymbol{A'}$ и $\boldsymbol{B'}$ при этом являются точками пересечения прямой $\boldsymbol{L}$ и плоскостей, проведенных через точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ параллельно проецирующей плоскости.

Обозначение

> Для обозначения проекции вектора на прямую будем использовать следующее обозначение: $\overline{Пр}^{\alpha}{}_{L}\,\overline{\boldsymbol{a}}$ или $\overline{Пр}^{e_1,e_2}_{L}\,\overline{\boldsymbol{a}}$.

Проекция вектора на прямую – величина векторная. Совершенно аналогично тому, что мы имели на плоскости, и для пространственного случая мы можем ввести понятие алгебраического значения проекции вектора на направленную ось. Для обозначения алгебраического значения проекции мы будем (так же как и в "плоском" случае) использовать то же самое обозначение, только без "векторной" черты сверху: $Пр^{\alpha}{}_{\overline{L}}\,\overline{\boldsymbol{a}}$ или $Пр^{e_1,e_2}_{\overline{L}}\,\overline{\boldsymbol{a}}$. И, что очень приятно, теорема (1), которую мы доказали для "плоского" случая, справедлива и для обеих проекций в пространстве:

$$1.\ \overline{Пр}^{\alpha}{}_{\overline{L}}\sum_{i=1}^{i=n}\overline{\boldsymbol{a}}_i=\sum_{i=1}^{i=n}\overline{Пр}^{\alpha}{}_{\overline{L}}\,\overline{\boldsymbol{a}}_i; \qquad (1^*)$$

$$2.\ Пр^{\alpha}{}_{L}\sum_{i=1}^{i=n}\overline{\boldsymbol{a}}_i=\sum_{i=1}^{i=n}Пр^{\alpha}{}_{L}\,\overline{\boldsymbol{a}}_i. \qquad (2^*)$$

Доказательство полностью аналогично тому, что мы привели для случая на плоскости.

..Ортогональная проекция вектора в пространстве

Ортогональная проекция есть частный случай параллельной проекции и, поэтому для нее справедливы те общие результаты, которые мы уже получили. В то же время ортогональная проекция обладает рядом геометрических свойств, которые выгодно отличают ее от других видов проекции. Физика также имеет свой собственный интерес к этому виду проекции. Например, работа силового поля зависит именно от ортогональной проекции силы на направление перемещения. Можно, видимо, утверждать, что ортогональная проекция и, связанная с ней, ортогональная система координат, о которой мы будем говорить в дальнейшем, выделена самой природой.

Ортогональная проекция вектора на плоскость

Ортогональную проекцию мы получим, если вектор, задающий направление проектирования, ортогонален плоскости, на которую производится проектирование. Поскольку при ортогональном проектировании направление проектирования задается однозначно самой плоскостью, то в условном обозначении его можно опустить: $\overline{Пр}_{\alpha}\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{Пр}_{\alpha}^{\bar{e}\perp\alpha}\overline{\boldsymbol{a}}$.

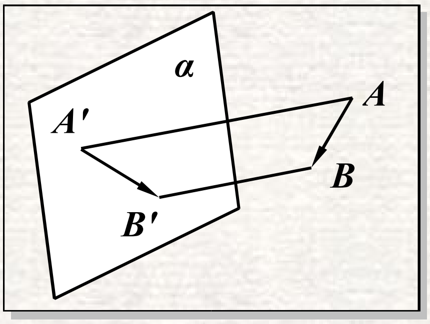


Рис. 9

Для получения ортогональной проекции вектора на плоскость достаточно из начала и конца вектора опустить на эту плоскость перпендикуляры. Основания этих перпендикуляров и определяют проекцию вектора на плоскость (рис. 9): $\overline{Пр}_{\alpha}\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{Пр}_{\alpha}^{\bar{e}\perp\alpha}\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{A'B'}}$.

Ортогональная проекция вектора на прямую и направленную ось
Для построения ортогональной проекции вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$ на прямую L или ось $\overline{\boldsymbol{L}}$ необходимо использовать проектирующую плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ ортогональную прямой, либо просто опустить на прямую L перпендикуляры (h_1, h_2) из начала и конца вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$ (рис 10).

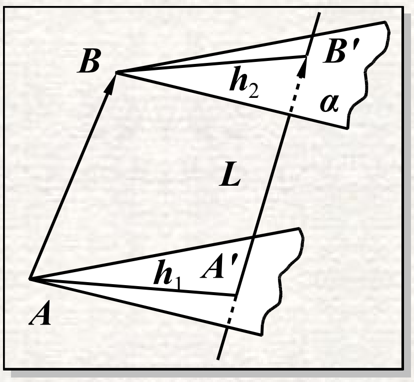


Рис. 10

В условных обозначениях это запишется так:
$\overline{Пр}_{L}\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{Пр}_{L}^{\alpha\perp L}\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{A'B'}}$; и для алгебраической величины ортогональной проекции вектора на направленную ось – $\overline{Пр}_{L}\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{Пр}_{L}^{\alpha\perp L}\overline{\boldsymbol{AB}} = s\left|\overline{\boldsymbol{A'B'}}\right|$, где s – знак плюс или минус.
Теперь придется сказать несколько слов об употреблении термина "проекция". Мы уже ввели несколько понятий, каждое из которых претендует на это название: проекция век-

тора на плоскость, "векторная" проекция вектора на прямую, алгебраическое значение проекции вектора на направленную ось, ортогональная проекция вектора на плоскость, "векторная" ортогональная проекция вектора на прямую и алгебраическое значение ортогональной проекции вектора на направленную ось. Наиболее длинным и неудобным по названию и одновременно наиболее часто используемым является последнее понятие. В силу этого название "проекция" в векторной алгебре закрепилось именно за алгебраическим значением ортогональной проекции вектора на направленную ось. В дальнейшем мы также не будем отступать от этой традиции, тем более что из контекста обычно всегда ясно, о чем идет речь.

Итак, проекцией вектора на направленную ось будем называть алгебраическое значение его ортогональной проекции на эту ось.

Мы не будем считать это определением проекции вектора на направленную ось, а лишь удобным соглашением о названии.

Свойства ортогональной проекции вектора на направленную ось.

1. Проекция суммы векторов равна сумме их проекций.

Для двух векторов:

$$Пр_{\overline{L}}\left(\overline{\boldsymbol{a}}+\overline{\boldsymbol{b}}\right) = Пр_{\overline{L}}\overline{\boldsymbol{a}}+Пр_{\overline{L}}\overline{\boldsymbol{b}}\ ;$$

и для любого их количества

$$Пр_{\overline{L}}\sum_{i=1}^{i=n}\overline{\boldsymbol{a}}_i = \sum_{i=1}^{i=n}Пр_{\overline{L}}\overline{\boldsymbol{a}}_i\ .$$

2. Проекция произведения вектора $\overline{\boldsymbol{a}}$ на действительное число λ равна произведению числа λ на проекцию вектора $\overline{\boldsymbol{a}}$.

$$Пр_{\overline{L}}\,\lambda\overline{\boldsymbol{a}} = \lambda\,Пр_{\overline{L}}\,\overline{\boldsymbol{a}}\ .$$

Если первые два свойства справедливы для всех типов проекций, и мы их сформулировали более для порядка, то следующее свойство является "визитной карточкой" ортогональной проекции.

3. Проекция вектора $\overline{\boldsymbol{a}}$ на направленную ось $\overline{\boldsymbol{L}}$ равна произведению его модуля на $\cos\varphi$, где угол φ – угол между вектором $\overline{\boldsymbol{a}}$ и направленной осью $\overline{\boldsymbol{L}}$ (рис. 11). Дадим этому свойству доказательство.

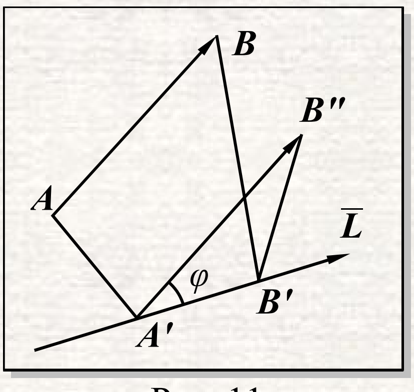


Рис. 11

Доказательство

Спроектируем точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (конечно, ортогонально) на прямую $\overline{\boldsymbol{L}}$. Вектор $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$ есть проекция вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$: $\overline{\boldsymbol{A'B'}} = \overline{Пр_{\overline{L}}\,\boldsymbol{AB}}$. Перенесем вектор $\overline{\boldsymbol{AB}}$ параллельно самому себе так, чтобы точка $\boldsymbol{A}$ совпала с точкой $\boldsymbol{A'}$. Минимальный угол между векторами

$\overline{\boldsymbol{A'B''}}$ и $\overline{\boldsymbol{L}}$ принимается за угол принимается за угол φ между вектором и осью. Поскольку равные векторы имеют и равные проекции, то проекции векторов $\overline{\boldsymbol{AB}}$ и $\overline{\boldsymbol{A'B''}}$ одинаковы и равны $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$. Алгебраическая величина проекции вектора $\overline{\boldsymbol{A'B''}}$, или просто проекция, в соответствии с соглашением о названиях, равна $Пр_{\overline{L}}\overline{\boldsymbol{A'B''}} = s\left|\overline{\boldsymbol{A'B'}}\right|$, где s означает знак "плюс" или "минус". А модуль вектора $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$, в свою очередь, равен произведению модуля вектора $\overline{\boldsymbol{A'B''}}$ на $\cos\varphi$:
$Пр_{\overline{L}}\overline{\boldsymbol{A'B''}} = s\left|\overline{\boldsymbol{A'B'}}\right| = \left|\overline{\boldsymbol{A'B''}}\right|\cos\varphi$.

Учитывая, что
$\left|\overline{\boldsymbol{AB}}\right| = \left|\overline{\boldsymbol{A'B''}}\right|$ и
$Пр_{\overline{L}}\overline{\boldsymbol{AB}} = Пр_{\overline{L}}\overline{\boldsymbol{A'B''}}$, получаем окончательно $Пр_{\overline{L}}\overline{\boldsymbol{a}} = \left|\overline{\boldsymbol{a}}\right|\cos\varphi$.

.Метод координат

Метод, который мы начинаем изучать в этой главе, определяет наиболее сильную сторону векторной алгебры. Вот, что об этом говорит Петр Константинович Рашевский:
"... большую и часто ведущую роль в геометрии играет координатный метод. Здесь геометрические образы изучаются не непосредственно геометрически, а методами алгебры (аналитическая геометрия), а затем и анализа (дифференциальная геометрия). Огромная сила этого метода основана на то, что он применяет к геометрии сильный, хорошо развитый вычислительный аппарат алгебры и анализа. В результате удается ставить и решать вопросы, лишь малая часть которых укладывается в сравнительно узкие рамки прямых геометрических методов" [13, с. 103].

..Коллинеарные векторы

Определение (15)

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны.

Если бы мы всегда имели дело с геометрическими векторами, то новое слово "коллинеарные" было бы излишним. Понятие о параллельных объектах слишком сильно связано с нашими геометрическими представлениями. Однако в математике слово "вектор" имеет более широкое значение, и применяется для таких векторов, про которые мы не можем сказать, что они параллельны.
Поскольку векторы, которые могут быть совмещены при помощи параллельного переноса, считаются равными, можно коллинеарные векторы рассматривать как лежащие на одной прямой.
Любые два вектора, лежащие на одной прямой, могут различаться длинами и могут иметь либо одинаковые, либо противоположные направления. Поэтому для любых двух коллинеарных векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ справедливо соотношение: $\bar{\boldsymbol{a}} = \alpha \bar{\boldsymbol{b}}$, где α – действительное число.

Определение (16)

Если один из векторов, не равный нулю, мы примем за меру и обозначим его $\boldsymbol{e}_1$, то все остальные векторы могут быть представлены в единообразной форме $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1 \boldsymbol{e}_1$. Вектор $\boldsymbol{e}_1$ называется при этом базисным вектором, а a^1 – координатой вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ относительно данного базиса. Векторы базиса можно писать без "векторной" черты сверху. Нетрудно видеть, что $a^1 = s\dfrac{|\bar{\boldsymbol{a}}|}{|\boldsymbol{e}_1|}$. Можно также написать, что $a^1 = \dfrac{Пр_e \bar{\boldsymbol{a}}}{|\boldsymbol{e}_1|}$.

Конечно, для коллинеарных векторов все эти определения и обозначения являются излишними, и мы ввели их для того, чтобы использовать в более сложных и интересных случаях.

..Компланарные векторы

Определение (17)

Векторы называются компланарными, если они параллельны некоторой плоскости.

Поскольку свободные векторы можно переносить параллельно самим себе в пространстве, то можно считать, что все компланарные векторы лежат в одной плоскости.

Определение (18)

Любой вектор, параллельный прямой, можно выразить через базисный вектор на этой прямой $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1 \boldsymbol{e}_1$, но если вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ на этой прямой не лежит, то этого сделать уже нельзя. Однако, если мы выберем на плоскости два базисных вектора $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, то любой другой вектор уже может быть выражен в виде линейной комбинации базисных векторов $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2$. При этом векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ называются базисом, а числа a^1 и a^2 координатами вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ в этом базисе.

В самом деле, спроектируем вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ на прямую, совпадающую с вектором $\boldsymbol{e}_1$, по направлению вектора $\boldsymbol{e}_2$ и на прямую, совпадающую с вектором $\boldsymbol{e}_2$, по направлению вектора $\boldsymbol{e}_1$ (рис. 12).

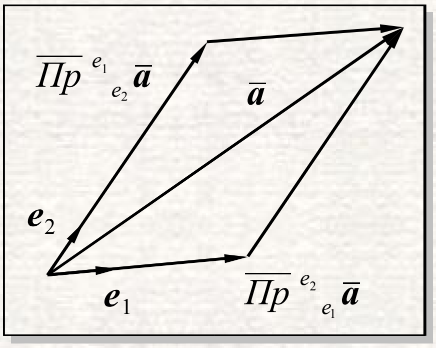


Рис. 12

Очевидно, что $\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{Пр}^{e_2}_{e_1}\bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}^{e_1}_{e_2}\bar{\boldsymbol{a}}$. Поскольку каждую проекцию в свою очередь можно выразить через базисный вектор, то $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2$. Где,

$$a^1 = \frac{\overline{Пр}^{e_2}_{e_1}\bar{\boldsymbol{a}}}{|\boldsymbol{e}_1|}, \quad a^2 = \frac{\overline{Пр}^{e_1}_{e_2}\bar{\boldsymbol{a}}}{|\boldsymbol{e}_2|}. \qquad (3)$$

..Векторы в трехмерном геометрическом пространстве

Два вектора всегда являются компланарными так же, как три точки всегда лежат в одной плоскости. Но три вектора уже могут не быть компланарными, и тогда любой из них не может быть выражен через два других. Но, если мы выберем в пространстве три некомпланарных базисных вектора, то любой четвертый уже может быть выражен через них в виде линейной комбинации.

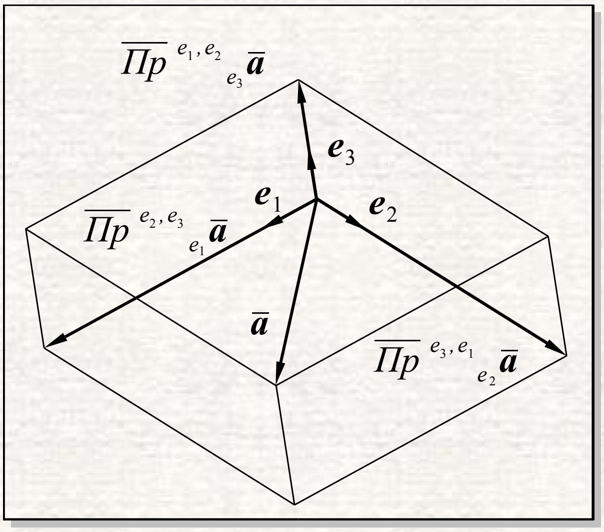


Рис. 13

Поступая аналогично тому, как мы это сделали для "плоского" случая, спроектируем вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ на базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ при помощи проектирующих плоскостей ($\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), ($\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1$) и ($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$) (рис. 13). Выразив каждую из проекций через соответствующий вектор базиса, получим:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{Пр}^{\,e_2,e_3}_{\;e_1}\bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}^{\,e_3,e_1}_{\;e_2}\bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}^{\,e_1,e_2}_{\;e_3}\bar{\boldsymbol{a}} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3 .$$

То же самое в сокращенной записи:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{i=3} a^i\boldsymbol{e}_i .$$

Соглашение Эйнштейна об обозначениях

Поскольку в векторной алгебре подобного рода суммы встречаются часто, то по предложению А. Эйнштейна принято знак суммы опускать. С учетом соглашения А. Эйнштейна, последнее равенство можно переписать в более компактном виде: $\bar{\boldsymbol{a}} = a^i\boldsymbol{e}_i$.

Вот и все, надо только не забывать, что последняя запись является всего лишь сокращением предыдущей. Символ i в последнем выражении можно заменить любым другим, и от этого ничего не изменится, поэтому его называют немым символом. Немой символ пробегает все возможные значения. В нашем случае – это 1, 2, 3. Интересно, что последнее выражение в сокращенной записи А. Эйнштейна выглядит совершенно одинаково для всех трех случаев, которые мы рассмотрели, если учесть, что для векторов на плоскости i принимает значения 1 и 2, а для векторов на прямой единственное значение – 1.

Уточним понятие базиса. Прежде всего, базисные векторы – это такие векторы, через которые могут быть однозначно выражены остальные. Но таких векторов много, и, когда мы говорим о векторах базиса, предполагается, что какие-то векторы для этой цели мы уже выбрали. В трехмерном пространстве мы можем выбрать в качестве базиса любые три некомпланарных вектора.

..Линейная зависимость векторов и размерность пространства

Определение (19)

Векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3, \ldots \bar{\boldsymbol{a}}_n$ называются линейно зависимыми, если можно подобрать не все равные нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, такие что выполняется равенство: $\alpha_1\bar{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha_2\bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3\bar{\boldsymbol{a}}_3 + \ldots \alpha_n\bar{\boldsymbol{a}}_n = \bar{\boldsymbol{0}}$.

С другой стороны, если таких чисел не существует, то векторы называются линейно независимыми.

Теперь мы можем доказать следующие утверждения:

1. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

В самом деле, пусть векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ линейно зависимы. Тогда $\alpha_1 \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\boldsymbol{0}}$, и среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ есть не равные нулю. Пусть, для определенности, не равно нулю первое число $\alpha_1 \neq 0$. В этом случае мы имеем право записать: $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{\boldsymbol{a}}_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\bar{\boldsymbol{a}}_3 = \beta_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \beta_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3$. Но это означает, что векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ лежат в одной плоскости, если, конечно, их перенести к одному началу. Следовательно, векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ компланарны.

С другой стороны, если векторы $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ компланарны, то можно считать, что они лежат в одной плоскости. Здесь возможны варианты, которые мы рассмотрим по отдельности.

Вариант 1.

Один из векторов $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ является нулевым вектором. Пусть, для определенности, это будет первый вектор. В этом случае мы можем записать: $1 \cdot \bar{\boldsymbol{0}} + 0 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_2 + 0 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\boldsymbol{0}}$.

Вариант 2.

Среди векторов $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ нет нулевых векторов, но есть коллинеарные. Пусть, для определенности, коллинеарными являются первые два вектора. Но в этом случае, первый вектор может быть выражен через второй: $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = \alpha \bar{\boldsymbol{a}}_2$, и, следовательно, $1 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_1 - \alpha \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_2 + 0 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\boldsymbol{0}}$.

Вариант 3.

Среди векторов $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \bar{\boldsymbol{a}}_3$ нет нулевых векторов, и все векторы не являются попарно коллинеарными. В этом случае все векторы могут быть перенесены в одну плоскость, и любой из них может быть разложен по остальным как по векторам базиса. Следовательно, $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3$, и мы снова получаем, что: $1 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_1 - \alpha_2 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_2 - \alpha_3 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\boldsymbol{0}}$.

2. Любые четыре вектора в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Здесь также возможны два варианта.

Вариант 1.

Какие либо три вектора являются компланарными. Пусть, для определенности, этими векторами будут первые три. В этом случае мы можем подобрать не все равные нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, что $\alpha_1 \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \bar{\boldsymbol{0}}$. Но тогда $\alpha_1 \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 + 0 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_4 = \bar{\boldsymbol{0}}$

Вариант 2.

Любые три вектора не являются компланарными. В этом случае любой из четырех векторов может быть разложен по остальным трем как по базису $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 + \alpha_4 \bar{\boldsymbol{a}}_4$, и мы можем записать, что $1 \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_1 - \alpha_2 \bar{\boldsymbol{a}}_2 - \alpha_3 \bar{\boldsymbol{a}}_3 - \alpha_4 \bar{\boldsymbol{a}}_4 = \bar{\boldsymbol{0}}$.

Следовательно, в обоих возможных случаях четыре вектора являются линейно зависимыми.

Резюмирую все эти результаты, можно сказать, что в трехмерном пространстве мы всегда можем выбрать три линейно независимых вектора. В то же время, любые четыре вектора являются линейно зависимыми.

Мы также показали, что в плоскости любые три вектора являются линейно зависимыми, в то же время в плоскости всегда можно найти два линейно независимых вектора, так как для этого достаточно, чтобы они не были коллинеарны.
Это дает нам основание дать следующее определение размерности пространства векторов.

Определение размерности пространства (20)

Наибольшее число линейно независимых векторов пространства называется его размерностью.

Размерность пространства совпадает с числом базисных векторов этого пространства. Поскольку любой вектор может быть разложен по векторам базиса, мы можем дать следующее определение координат вектора в произвольном базисе.

Определение координат вектора (21)

Коэффициенты $a^1, a^2, a^3, \dots a^n$ в разложении вектора $\bar{\boldsymbol{a}} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3 + \dots + a^n\boldsymbol{e}_n$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \dots \boldsymbol{e}_n$ называются координатами вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ в этом базисе.

Определения, приведенные в этом разделе, хороши тем, что они легко обобщаются на пространства любых размерностей. Но зачем это нужно? Ведь мы прекрасно знаем, что наше привычное и уютное пространство трехмерно. Можно еще говорить о двумерном пространстве векторов на плоскости или об одномерном – на прямой. Но поскольку больше трех не бывает, стоит ли городить весь этот огород?
Что представляет собой, к примеру, четырехмерное пространство? На этот вопрос любой физик-теоретик скажет, что наше пространство только приближенно можно считать трехмерным. Пространство не существует вне времени, а вместе со временем оно образует четырехмерное пространство-время. В более "продвинутых" теориях уже невозможно обойтись без одиннадцати-мерных пространств. Но даже если все эти теоретические абстракции душа не принимает, и мы ни за что не хотим покидать привычного трехмерного пространства, нам все равно не уйти от представления о многомерных пространствах. Ну, хорошо, наше пространство трехмерно, но почему оно трехмерно? Уже сама постановка этого вопроса предполагает необходимость говорить и размышлять о пространствах с большим числом измерений.
Есть и более прагматические причины для интереса к многомерным пространствам. Например, вектор-столбцы и вектор-строки – типичные объекты матричной алгебры – являются векторами в смысле нашего общего определения вектора (8).
Пусть, скажем,

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{e}}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

С этими формальными векторами мы можем обращаться, как с обычными векторами, например, разложить вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{bmatrix} = a^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2 + a^3 \boldsymbol{e}_3 + a^4 \boldsymbol{e}_4 = a^i \boldsymbol{e}_i \,.$$

Такого рода формальные структуры с необходимостью возникают в различных областях знания и очень приятно, что не нужно каждый раз строить заново всю теорию.

.Декартова система координат

Базис, состоящий из произвольной тройки некомпланарных векторов, принято называть произвольной косоугольной системой координат. Такая система неудобна для практических вычислений и не очень естественна. На практике никто не измеряет длину в метрах, ширину в дюймах, а высоту в лаптях. Если мы и пользуемся произвольной косоугольной системой координат, то эта мера вынужденная. Например, даже если мы свяжем с упругим телом какую-либо удобную для нас систему координат, то в процессе деформации упругого тела эта система, мягко говоря, покоробится. Есть проблемы, при изучении которых, мы принципиально не можем воспользоваться какой-либо специальной системой координат.

В тех случаях, когда обстоятельства позволяют, и задача этого требует, удобнее использовать некую специальную систему координат. Таких систем изобретено достаточно много: цилиндрическая, сферическая, полярная, эллиптическая и т.д. Очень часто оказывается удобна так называемая декартовая система координат.

Декартовой называется система, базисные векторы которой взаимно ортогональны, по модулю равны единице и образуют правую тройку. Обозначаются базисные векторы латинскими буквами, которые называются, в соответствии с традицией, по-французски: ***i*** – и, ***j*** – жи, ***k*** – ка (рис. 14).

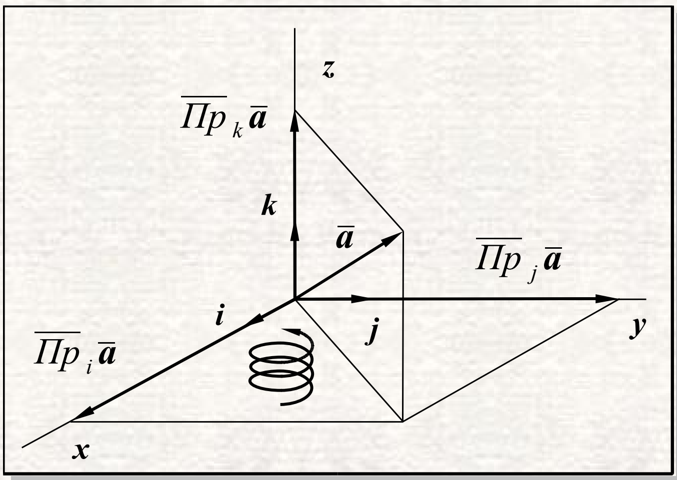


Рис. 14

Правил, позволяющих отличить правую тройку векторов от левой, имеется несколько. Из них наиболее часто используются четыре:

1. Правило левой руки.

Если кисть левой руки направить по направлению первого вектора и расположить ее так, чтобы второй вектор был направлен в ладонь, и если при этом большой палец левой руки будет направлен так же как третий вектор, то векторы образуют правую тройку векторов.
2. Правило правого винта.
Если первый вектор поворачивать по кратчайшему расстоянию в сторону второго, то третий вектор правой тройки векторов должен быть направлен в ту же сторону, в которую при таком вращении будет заворачиваться правый винт. Это правило на рис. 14 проиллюстрировано изображением спирали.
Остальные два правила не имеют названия.
3. Три вектора образуют правую тройку векторов, если при наблюдении из конца третьего вектора вращение первого по кратчайшему расстоянию в сторону второго происходит против часовой стрелки.
4. Если мы находимся внутри трехгранного угла, образованного тройкой векторов, и если при этом поворот от первого вектора ко второму, а затем к третьему должны выполнить против часовой стрелки, то векторы образуют правую тройку векторов.
Можно предложить и еще одно правило:
5. Векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ в указанном порядке образуют правую тройку векторов, если, будучи выстроенными в том же порядке друг за другом, они образуют правую спираль (рис. 15).

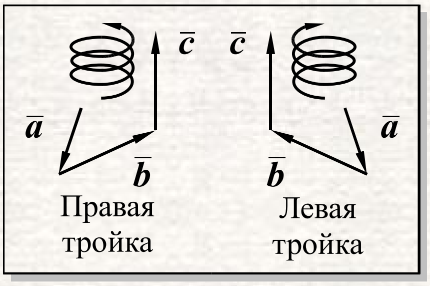


Рис. 15

Наличие большого количества правил говорит о том, что все они не очень удобны, и для того, чтобы научиться отличать правую тройку векторов от левой, требуется определенная тренировка.
Вектор $\boldsymbol{i}$ (и) обычно совмещают с осью x, вектор $\boldsymbol{j}$ (жи) – с осью y, а вектор $\boldsymbol{k}$ (ка) – с осью z.
Поскольку базисные векторы декартовой системы координат взаимно ортогональны, то координаты произвольного вектора в такой системе совпадают с его ортогональными проекциями.
Пример обозначения координат произвольного вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ (рис. 14).
$\bar{\boldsymbol{a}}_x = \overline{Пр}_i \bar{\boldsymbol{a}}$, $a_x = Пр_i \bar{\boldsymbol{a}}$;
$\bar{\boldsymbol{a}}_y = \overline{Пр}_j \bar{\boldsymbol{a}}$, $a_y = Пр_j \bar{\boldsymbol{a}}$;
$\bar{\boldsymbol{a}}_z = \overline{Пр}_k \bar{\boldsymbol{a}}$, $a_z = Пр_k \bar{\boldsymbol{a}}$.
Следовательно, в декартовой системе координат произвольный вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ может быть представлен в виде:
$\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{Пр}_i \bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}_j \bar{\boldsymbol{a}} + \overline{Пр}_k \bar{\boldsymbol{a}} = a_x i + a_y j + a_z k$.
Модуль вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$, как видно из рис. 14, вычисляется как корень квадратный из суммы квадратов его координат: $|\bar{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
Если обозначить углы между вектором $\bar{\boldsymbol{a}}$ и векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ соответственно φ_x, φ_x и φ_z

, то разложение вектора по векторам базиса запишется так: $\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{i}|\bar{\boldsymbol{a}}|\cos\varphi_x + \boldsymbol{j}|\bar{\boldsymbol{a}}|\cos\varphi_y + \boldsymbol{k}|\bar{\boldsymbol{a}}|\cos\varphi_z$ или $\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|(\boldsymbol{i}\cos\varphi_x + \boldsymbol{j}\cos\varphi_y + \boldsymbol{k}\cos\varphi_z)$.

Вектор, совпадающий по направлению с вектором $\bar{\boldsymbol{a}}$ и имеющий единичную длину, называется направляющим вектором, или ортом-вектором, или просто ортом. Орт-вектор обозначается обычно с ноликом в правом верхнем углу: $\bar{\boldsymbol{a}}^0$ – орт-вектор вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$.

Так как

$\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|(\boldsymbol{i}\cos\varphi_x + \boldsymbol{j}\cos\varphi_y + \boldsymbol{k}\cos\varphi_z)$ и $\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\bar{\boldsymbol{a}}^0$, то

$\bar{\boldsymbol{a}}^0 = (\boldsymbol{i}\cos\varphi_x + \boldsymbol{j}\cos\varphi_y + \boldsymbol{k}\cos\varphi_z)$.

Косинусы в последнем выражении, которые являются координатами орта-вектора, называются направляющими косинусами.

Вектор, проведенный из начала координат в некоторую точку *M*, называется радиусом-вектором этой точки. Координаты точки (M_x, M_y и M_z) и координаты ее радиуса-вектора совпадают: $\bar{r}(M) = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}$.

Если нам заданы в пространстве две точки $A\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ и $B\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$, то координаты вектора можно вычислить, воспользовавшись тем, что

$\overline{\boldsymbol{AB}} = \bar{\boldsymbol{r}}(B) - \bar{\boldsymbol{r}}(A)$ (рис. 16).

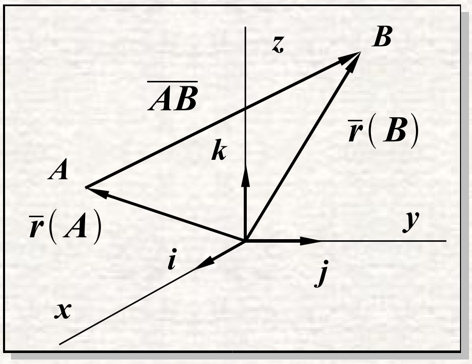


Рис. 16

Выразив координаты радиусов-векторов через координаты точек, мы получим:

$\overline{\boldsymbol{AB}} = \bar{\boldsymbol{r}}(B) - \bar{\boldsymbol{r}}(A) = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} - a_x\boldsymbol{i} - a_y\boldsymbol{j} - a_z\boldsymbol{k} =$

$= (b_x - a_x)\boldsymbol{i} + (b_y - a_y)\boldsymbol{j} + (b_z - a_z)\boldsymbol{k}$.

Следовательно, координаты вектора, проведенного из точки в ***A*** точку ***B***, равны разности соответствующих координат этих точек.

.. Различные формы записи векторов

Принято различать координатную и векторную формы записи векторов. До сих пор мы пользовались только векторной формой записи. Но если мы выберем и зафиксируем в пространстве некоторую систему координат, то для задания любого вектора нам будет достаточно задать его координаты. Координаты, то есть три числа, взятые в определенном порядке, однозначно определяют вектор в выбранной системе координат. Поэтому можно записать: $\bar{\boldsymbol{a}} = \{a^1, a^2, a^3\}$. Слева в этом равенстве стоит вектор, следовательно, под таблицей чисел, стоящей справа, необходимо понимать вектор с соответствующими координатами. Такая форма записи часто используется в векторной алгебре и называется координатной.

Таблицу $\{a^1, a^2, a^3\}$ можно записать по-разному, например так, как это принято в матричной алгебре: $\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$.

Если под этими таблицами также понимать вектор с соответствующими координатами, то все эти таблицы представляют один и тот же вектор. Значит, мы имеем право записать:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \{a^1, a^2, a^3\} = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}.$$

Если рассматривать это равенство, как векторное, то его следует признать правильным. Однако, с точки зрения матричной алгебры, таблицы $\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$ представляют собой различные матрицы, и между ними не может быть поставлен знак равенства. Можно было бы проигнорировать эту проблему, поскольку матричная алгебра является самостоятельной наукой и, если не смешивать матричную и векторную алгебры, то недоразумений не возникает. Кроме того, никто не заставляет использовать матричный формат записи координат векторов. Общепринятой является форма записи координат векторов в фигурных скобках, которая не используется в теории матриц. Выходит, что, если ограничиться только общепринятой формой, то проблем не возникает. Но дело все в том, что матричная и векторная алгебры близки и по духу, и по решаемым проблемам. Когда дело доходит до реальных вычислений с векторами, полезно использовать матричные методы и обозначения. Короче говоря, матричную и векторную алгебры полезно максимально интегрировать. Для того, чтобы при этом возникало меньше проблем, мы слегка модернизируем обозначения:

1. Обозначение точек $A\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix}$, или $A\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$.

Точки будем обозначать большими буквами латинского алфавита. То, что обведено зеленоватым цветом, является необязательной частью обозначения. К необязательной части обозначения относится матрица с координатами точки.

Примеры: A, $A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. Обозначение векторов

$$\bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix},\ \overline{\boldsymbol{AB}}\begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix},\ \overline{\boldsymbol{AB}}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}.$$

Примеры: $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\overline{\boldsymbol{AB}}\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix}$.

Кроме того, чтобы легче было переходить от векторов к матрицам и наоборот, введем знак "соответствия" " $\doteq$ " – знак "равно" с точкой наверху. Этим знаком мы будем объединять одинаковые по смыслу векторные и матричные выражения, например,

$$\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}} = \{4{,}5{,}6\} - \{1{,}2{,}3\} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} - \bar{\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{c}}\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}.$$

Прочитать это выражение можно так: "Разнице векторов слева соответствует разность матриц справа".

Мы не будем давать точного определения для введенного нами знака "соответствия", рассматривая его в качестве "осторожного" знака равенства. Он должен напоминать, что хотя выражения, объединенные им, в известной степени, равны по смыслу, следует соблюдать осторожность при формальных преобразованиях.

..Линейные операции над векторами в координатной форме

Линейные операции над векторами можно выполнять как в векторной, так и в координатной формах, например:

1. Сложение векторов.

Векторная форма.

$$\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} + b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} =$$
$$= (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k}.$$

Координатная форма.

$$\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix} + \bar{\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{c}}\begin{bmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\\a_z+b_z\end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\\a_z+b_z\end{bmatrix}.$$

2. Умножение вектора на число.

Векторная форма.

$$\lambda\bar{\boldsymbol{a}} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k}.$$

Координатная форма.

$$\lambda\bar{\boldsymbol{a}} = \lambda\bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}\lambda a_x\\\lambda a_y\\\lambda a_z\end{bmatrix} \doteq \lambda\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda a_x\\\lambda a_y\\\lambda a_z\end{bmatrix}.$$

..Скалярное умножение векторов

Впервые слово "скаляр" ввел в математику Виет, но современное значение ему придал Гамильтон (1843 г.), назвав скалярной величину отличную от векторной. Скалярная величина – это величина, которая может, в отличие от векторной, быть задана одним числовым значением. Проще говоря, скаляр – это число. По смыслу названия, при скалярном умножении векторов должно получаться число.

Определение скалярного произведения векторов (22)

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное умножение обычно обозначается точкой:
$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}|\cos\varphi$.
Введение такой странной, на первый взгляд, операции находит как физическое, так и геометрическое оправдание.
Если $\bar{\boldsymbol{F}}$ – постоянная сила, которая действует на точку, а $\bar{\Delta}$ – вектор перемещения этой точки, то работа A, которая совершается силой на этом перемещении, может быть вычислена как скалярное произведение силы на перемещение: $A = \bar{\boldsymbol{F}}\cdot\bar{\Delta}$.
С геометрическими приложениями скалярного умножения мы познакомимся в дальнейшем.
Вспомнив, что $Пр_{\bar{a}}\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{b}}|\cos\varphi$ и $Пр_{\bar{b}}\bar{\boldsymbol{a}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cos\varphi$, мы можем записать: $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\,Пр_{\bar{a}}\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{b}}|\,Пр_{\bar{b}}\bar{\boldsymbol{a}}$.

Свойства скалярного умножения

1. Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы взаимно ортогональны.

Пусть векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ не равны нулю. Тогда из равенства нулю скалярного произведения $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}|\cos\varphi = 0$ следует, что $\cos\varphi = 0$, а это и означает, что $\bar{\boldsymbol{a}}\perp\bar{\boldsymbol{b}}$.
Если же хотя бы один из векторов нулевой, то $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = 0$. С другой стороны, для нулевого вектора понятие направления не имеет смысла. Но раз смысла нет, то любое соглашение не погрешит против правды. Мы можем принять, что нулевой вектор параллелен любому другому, если захотим, или, что он ортогонален к любому направлению, что мы и сделаем. Но если нулевой вектор ортогонален к любому другому, в том числе и нулевому же, то и этот случай не является исключением.

2. Скалярное умножение векторов коммутативно (перестановочно).
$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}$ – это сразу следует из определения.

3. Скалярное умножение ассоциативно по отношению к числовому множителю.
$\lambda(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}) = (\lambda\bar{\boldsymbol{b}})\cdot\bar{\boldsymbol{a}}$

так же непосредственно следует из определения.

4. Скалярное умножение дистрибутивно (распределительно) относительно сложения векторов.
$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{c}}) = \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}}$.

Данное свойство, несмотря на привычный вид, не является очевидным.

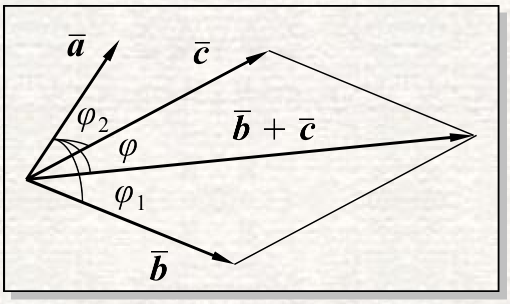


Рис. 17

В самом деле (рис. 17), $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}})=|\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}}|\cos\varphi$,
а $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}}=|\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}|\cos\varphi_1+|\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{c}}|\cos\varphi_2$. Глядя на рис. 17, трудно предположить, что эти два выражения равны, однако это так.

Доказательство

Для доказательства мы используем свойства проекций.

$$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}})=|\bar{\boldsymbol{a}}|\,Пр_{\bar{a}}(\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{c}})=|\bar{\boldsymbol{a}}|(Пр_{\bar{a}}\bar{\boldsymbol{b}}+Пр_{\bar{a}}\bar{\boldsymbol{c}})=$$
$$=|\bar{\boldsymbol{a}}|\,Пр_{\bar{a}}\bar{\boldsymbol{b}}+|\bar{\boldsymbol{a}}|\,Пр_{\bar{a}}\bar{\boldsymbol{c}}=\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}}\,.$$

Можно это свойство доказать и непосредственно вычисляя соответствующие длины и углы, но этот путь значительно дольше.

Скалярное умножение в декартовых координатах

Общее выражение для скалярного произведения в произвольных координатах значительно сложнее, и мы займемся им позже.
Для начала найдем результат скалярного умножения базисных векторов декартовой системы координат.

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|\cdot|\boldsymbol{i}|\cos 0=1$ и аналогично $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{i}|\cdot|\boldsymbol{j}|\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ и аналогично $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

•	***i***	***j***	***k***
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Полученные результаты можно свести в таблицу скалярного умножения базисных векторов.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение:

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат: $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$.

Доказательство

В самом деле,
$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$. Воспользовавшись свойствами скалярного умножения и таблицей умножения для векторов базиса, мы получаем: $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$.

..Некоторые примеры использования скалярного умножения

Длина или модуль вектора в координатной форме

Пусть $\bar{\boldsymbol{a}}$ произвольный вектор. Скалярное произведение этого вектора самого на себя равно:

$$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$

С другой стороны, $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}=\bar{\boldsymbol{a}}^2=|\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{a}}|\cos 0=|\bar{\boldsymbol{a}}|^2$, следовательно,
$|\bar{\boldsymbol{a}}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$ и $|\bar{\boldsymbol{a}}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Расстояние между двумя точками

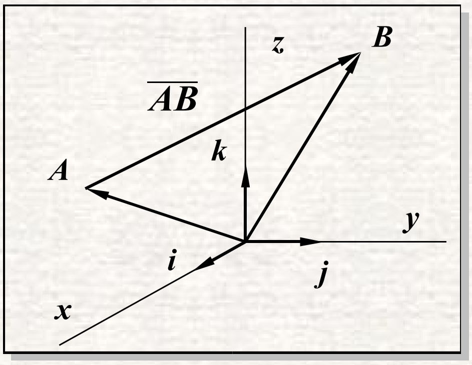


Рис. 18

Пусть нам даны две точки $A\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ и $B\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$, и требуется определить расстояние l между ними. Проведем из начала координат в эти точки радиусы-векторы $\bar{\boldsymbol{r}}(A)$ и $\bar{\boldsymbol{r}}(B)$, тогда $\overline{\boldsymbol{AB}} = \bar{\boldsymbol{r}}(B) - \bar{\boldsymbol{r}}(A)$. Модуль или длина вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$ как раз и будет равна этому расстоянию. Следовательно,

$$l = |\overline{\boldsymbol{AB}}| = \left| \bar{\boldsymbol{r}}\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} - \bar{\boldsymbol{r}}\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \right| = \left| \bar{\boldsymbol{r}}\begin{bmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{bmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}\,.$$

Если расстояние между двумя точками мы обозначим l_{AB}, полученное выражение перепишется в виде:

$$l_{AB} = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}\,.$$

В качестве следующих примеров рассмотрим доказательство двух теорем элементарной геометрии. Этим мы убьем двух зайцев: во-первых, вспомним элементарную геометрию, во-вторых, получим удовольствие от эффективности метода.

Теорема

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

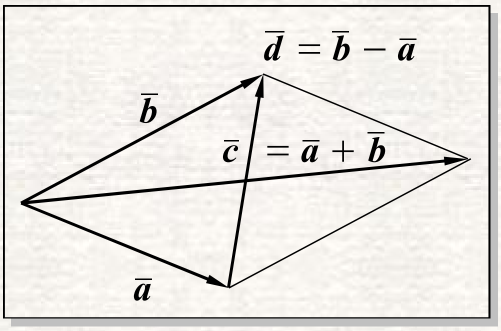


Рис. 19

Совместим векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ со сторонами параллелограмма (рис. 19), тогда сумма и разность этих векторов совпадут с его диагоналями.

$|\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}}|^2=(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})^2=(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})=\bar{\boldsymbol{a}}^2+\bar{\boldsymbol{b}}^2+2\,\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}$ и соответственно

$|\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}}|^2=(\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}})^2=(\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}})\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}})=\bar{\boldsymbol{a}}^2+\bar{\boldsymbol{b}}^2-2\,\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}$.

Сложив эти выражения, мы получим:

$|\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}}|^2+|\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}}|^2=2\,\bar{\boldsymbol{a}}^2+2\,\bar{\boldsymbol{b}}^2=2|\bar{\boldsymbol{a}}|^2+2|\bar{\boldsymbol{b}}|^2$.

Мы видим, что левая часть равенства – это сумма квадратов диагоналей. Правая же часть, как и следовало ожидать – сумма квадратов сторон.

Теорема

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон за вычетом удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

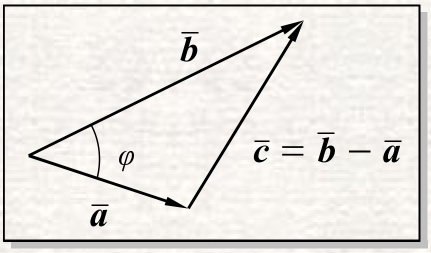


Рис. 20

Совместим векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ со сторонами треугольника (рис. 20), тогда вектор $\bar{\boldsymbol{b}}-\bar{\boldsymbol{a}}$ совпадет с третьей его стороной.

$|\bar{\boldsymbol{b}}-\bar{\boldsymbol{a}}|^2=(\bar{\boldsymbol{b}}-\bar{\boldsymbol{a}})^2=(\bar{\boldsymbol{b}}-\bar{\boldsymbol{a}})\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}-\bar{\boldsymbol{a}})=\bar{\boldsymbol{a}}^2+\bar{\boldsymbol{b}}^2-2\,\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}}$

И окончательно: $|\bar{\boldsymbol{b}}-\bar{\boldsymbol{a}}|^2=a^2+b^2-2\,a\,b\cos\varphi$.

Напомним, что a и b означают модули соответствующих векторов.

.Измерение площадей и объемов

..Площадь параллелограмма, построенного на векторах

Задачи на измерение длин отрезков, расстояний между точками, площадей поверхностей и объемов тел относятся к важному классу проблем, которые принято называть метрическими. В предыдущем разделе мы познакомились с тем, как использовать векторную алгебру для вычисления длин отрезков и расстояний между точками. Теперь мы собираемся найти способы вычисления площадей и объемов. Векторная алгебра позволяет ставить и решать подобные задачи только для достаточно простых случаев. Для вычисления площадей произвольных поверхностей и объемов произвольных тел требуются методы анализа. Но методы анализа в свою очередь существенным образом опираются на те результаты, которые дает векторная алгебра.

Для решения поставленной задачи, мы избрали достаточно долгий и непростой путь, подсказанный Гильбертом Стренгом [19], связанный с многочисленными геометрическими преобразованиями и кропотливыми алгебраическими вычислениями. Мы избрали этот путь несмотря на то, что существуют другие подходы, которые быстрее приводят к цели потому, что он показался нам прямым и естественным. Прямой путь в науке не всегда оказывается самым простым. Люди искушенные знают об этом и предпочитают пути окольные, но если не попытаться пройти прямиком, то можно так и остаться в неведении относительно некоторых тонкостей теории.

На избранном нами пути естественным образом появляются такие понятия как ориентация пространства, определитель, векторное и смешанное произведения. Особенно наглядно, как под микроскопом, проявляется геометрический смысл определителя и его свойств. Традиционно понятие определителя вводится в теории систем линейных уравнений, но именно для решения таких систем определитель почти бесполезен. Геометрический же смысл определителя существенен для векторной и тензорной алгебры.

А теперь запасемся терпением и начнем с самых простых и понятных случаев.

1. Векторы ориентированы вдоль координатных осей декартовой системы координат.

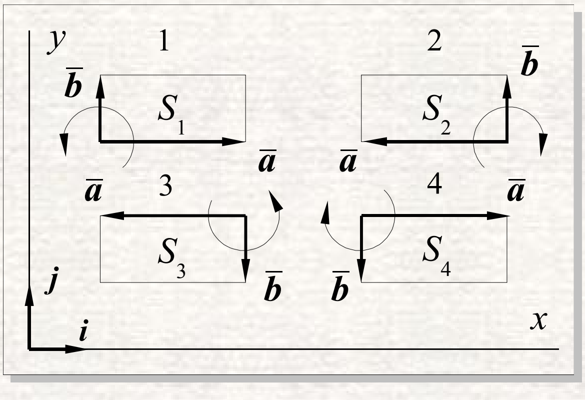


Рис. 21

Пусть вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ направлен по оси x, а вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ вдоль оси y. На рис. 21 показаны четыре различных варианта расположения векторов по отношению к осям координат.

Векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ в координатной форме:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix} a_x \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix} s(a_x)\cdot a \\ 0 \end{bmatrix} \doteq s(a_x)\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = s(a_x)a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$
$$\bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix} 0 \\ b_y \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix} 0 \\ s(b_y)\cdot b \end{bmatrix} \doteq s(b_y)\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = s(b_y)b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Где a и b означают модуль соответствующего вектора, а $s(a_x)$ – знак координаты вектора.

Поскольку векторы ортогональны, то параллелограммы, построенные на них, являются прямоугольниками. Их площади равны просто произведению их сторон. Выразим эти произведения через координаты векторов для всех четырех случаев.

1. $S_1 = a\cdot b = a_x b_y$;
2. $S_2 = a\cdot b = (-a_x)b_y = -a_x b_y$;
3. $S_3 = a\cdot b = (-a_x)(-b_y) = a_x b_y$;
4. $S_4 = a\cdot b = a_x(-b_y) = -a_x b_y$.

Все четыре формулы для вычисления площади одинаковы за исключением знака. Можно было бы просто закрыть на это глаза и записать, что $S = a\cdot b = |a_x b_y|$ во всех случаях. Однако более продуктивной оказывается другая возможность: придать знаку какой-то смысл. Посмотрим внимательно на рис. 21. В тех случаях, когда $S = a_x b_y$, поворот вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ к вектору $\bar{\boldsymbol{b}}$ осуществляется по часовой стрелке. В тех же случаях, когда мы вынуждены использовать в формуле знак минус, поворот вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ к вектору $\bar{\boldsymbol{b}}$ осуществляется против часовой стрелки. Это наблюдение позволяет связать знак в выражениях для площади с ориентацией плоскости.

Определение (23)

Будем считать, что векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$, взятые в указанном порядке задают ориентацию в плоскости, совпадающую с направлением поворота вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ к вектору $\bar{\boldsymbol{b}}$ по кратчайшему пути.

Площадь прямоугольника, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$, со знаком плюс или минус будем считать ориентированной площадью, при этом знак будем связывать с ориентацией, задаваемой векторами. Для ориентированной площади мы можем записать единую формулу для всех рассмотренных четырех случаев: $\bar{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}) = a_x b_y$. Знак "векторной" черты над буквой S вводится для того, чтобы отличить обычную площадь, которая всегда положительна, от ориентированной.

При этом, очевидно, что те же самые векторы, взятые в другом порядке, определяют противоположную ориентацию, поэтому, $\bar{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}) = -\bar{S}(\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{a}})$. Просто площадь будем попрежнему обозначать буквой S и, следовательно, $\bar{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}) = |\bar{S}(\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{a}})|$.

Теперь, когда казалось бы ценой расширения понятия площади, мы получили общее выражение, внимательный читатель скажет, что мы рассмотрели не все возможности. Действительно, кроме четырех вариантов расположения векторов, представленных на рис. 21, имеются еще четыре (рис. 22).

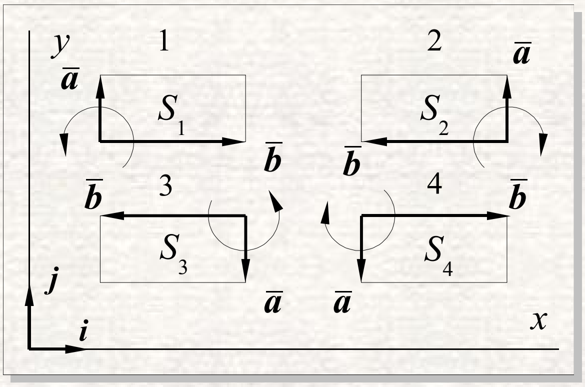


Рис. 22

Запишем снова векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ в координатной форме:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}0\\ a_y\end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}0\\ s(a_y)\cdot a\end{bmatrix} \doteq s(a_y)\begin{bmatrix}0\\ a\end{bmatrix} = s(a_y)a\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{b}}\begin{bmatrix}b_x\\ 0\end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{a}}\begin{bmatrix}s(b_x)\cdot b\\ 0\end{bmatrix} \doteq s(b_x)\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix} = s(b_x)b\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Выразим площади через координаты векторов.

1. $S_1 = a\cdot b = a_y b_x$;
2. $S_2 = a\cdot b = (-a_y)b_x = -a_y b_x$;
3. $S_3 = a\cdot b = (-a_y)(-b_x) = a_y b_x$;
4. $S_4 = a\cdot b = a_y(-b_x) = -a_y b_x$.

Знаки в новых выражениях не поменялись, но, к сожалению, поменялась ориентация по отношению к предыдущим четырем случаям. Поэтому для ориентированной площади мы вынуждены записать: $\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = -a_y b_x$. Хотя надежда на гениальную простоту и не оправдалась, но, тем не менее, мы все-таки можем записать общее выражение для всех четырех случаев.

$$\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix} = \det\begin{bmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{bmatrix} = \Delta(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = |\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}|.$$

То есть, ориентированная площадь прямоугольника, построенного на векторах, как на сторонах, равна определителю, составленному из координат векторов, как из столбцов.

Мы полагаем, что с теорией определителей читатель знаком, поэтому, мы не останавливаемся подробно на этом понятии. Тем не менее, мы даем соответствующие определения, для того чтобы изменить акценты и показать, что к этому понятию можно прийти из чисто геометрических соображений.

Итак, $\begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix}$, $\det\begin{bmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{bmatrix}$, $\Delta(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}})$, $|\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}|$ – различные формы обозначения для одного и того же понятия – определителя, составленного из координат векторов, как из столбцов. Равенство $\begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x$ может быть принято за его определение для двухмерного случая.

Теперь мы можем считать, что для всех частных случаев расположения векторов относительно декартовой системы координат у нас есть общее выражение для ориентированной площади.

2. Вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ не параллелен оси x; вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ является произвольным вектором.
Для того чтобы свести этот случай к уже известным, рассмотрим некоторые геометрические преобразования параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ (рис. 23).

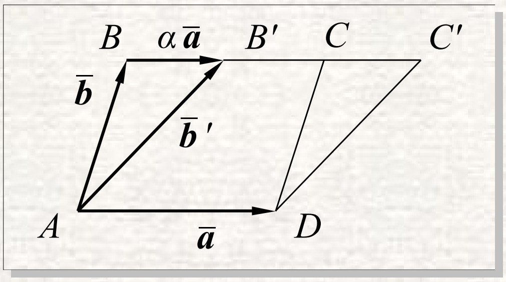


Рис. 23

Преобразуем вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ в вектор $\bar{\boldsymbol{b}}' = \bar{\boldsymbol{b}} + \lambda\bar{\boldsymbol{a}}$ и перейдем от параллелограмма $ABCD$ к параллелограмму $AB'C'D$. α – произвольное действительное число. Очевидно, что площади и ориентации обоих параллелограммов одинаковы. Следовательно, для ориентированных площадей можно записать: $\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}) = \overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}') = \overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}} + \alpha\bar{\boldsymbol{a}})$. Аналогично можно записать, что $\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}) = \overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}}',\bar{\boldsymbol{b}}) = \overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}} + \beta\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{b}})$. Такие преобразования пар векторов будем называть линейными преобразованиями. Линейные преобразования векторов не изменяют ориентированной площади параллелограммов, построенных на них.
Пусть теперь нам даны два произвольных вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$, про которые нам известно, что вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ не параллелен оси x (рис. 24).

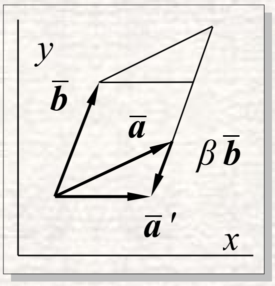


Рис. 24

Преобразуем вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ в вектор $\bar{\boldsymbol{a}}' = \bar{\boldsymbol{a}} + \beta\bar{\boldsymbol{b}}$ таким образом, чтобы вектор $\bar{\boldsymbol{a}}'$ оказался параллельным оси x. Это можно сделать, соответствующим образом подобрав коэффициент β, так как вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ не параллелен оси x. При этом $\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}) = \overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}}',\bar{\boldsymbol{b}})$. Найдем координаты вектора $\bar{\boldsymbol{a}}'$.

Поскольку $\bar{\boldsymbol{a}} \doteq \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{b}} \doteq \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{a}}' \doteq \begin{bmatrix} a'_x \\ a_y \end{bmatrix}$, то мы приходим к системе линейных уравнений:

$\bar{\boldsymbol{a}}' \doteq \begin{bmatrix} a'_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$, решая которую, получаем:

1. $\beta = -\dfrac{a_y}{b_y}$ и $a'_x = a_x - \dfrac{a_y}{b_y} b_x = \dfrac{a_x b_y - a_y b_x}{b_y}$.

Следовательно, $a'_x \doteq \dfrac{a_x b_y - a_y b_x}{b_y}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Продолжим наши преобразования и перейдем от вектора $\bar{\boldsymbol{b}}$ к вектору $\bar{\boldsymbol{b}}' = \bar{\boldsymbol{b}} + \alpha\bar{\boldsymbol{a}}'$, параллельному оси y (рис. 25).

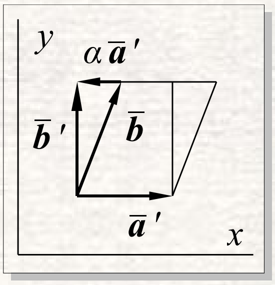


Рис. 25

Найдем координаты вектора $\bar{\boldsymbol b}'$.

Поскольку $a'_x \doteq \dfrac{a_x b_y - a_y b_x}{b_y}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol b} \doteq \begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol b}' \doteq \begin{bmatrix}0\\b'_y\end{bmatrix}$, то мы приходим к системе линейных уравнений:

$$\bar{\boldsymbol b}' = \bar{\boldsymbol b} + \alpha\bar{\boldsymbol a}' \doteq \begin{bmatrix}0\\b'_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix} + \alpha\frac{a_x b_y - a_y b_x}{b_y}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

В данном случае α можно не искать – и без того очевидно, что $b'_y = b_y$. Следовательно,

$$\bar{\boldsymbol b}' \doteq \begin{bmatrix}0\\b_y\end{bmatrix}.$$

По построению, ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol a}$ и $\bar{\boldsymbol b}$, равна ориентированной площади прямоугольника, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol a}'$ и $\bar{\boldsymbol b}$. Но для прямоугольника мы результат уже знаем:

$$\overline{S}(\bar{\boldsymbol a},\bar{\boldsymbol b}) = \overline{S}(\bar{\boldsymbol a}',\bar{\boldsymbol b}') = a'_x b'_y = \frac{a_x b_y - a_y b_x}{b_y} b_y = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix}a_x & b_x\\a_y & b_y\end{vmatrix}.$$

Следовательно, и для общего случая справедлива формула:

$$\overline{S}(\bar{\boldsymbol a},\bar{\boldsymbol b}) = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix}a_x & b_x\\a_y & b_y\end{vmatrix} = \Delta(\bar{\boldsymbol a},\bar{\boldsymbol b}) = |\bar{\boldsymbol a},\bar{\boldsymbol b}|\,.$$

Осталось проверить еще одну возможность, а именно:

3. Вектор $\bar{\boldsymbol b}$ параллелен оси *x*, а вектор $\bar{\boldsymbol a}$ является вектором общего положения.

Если вектор $\bar{\boldsymbol b}$ параллелен оси *x*, то мы не можем с помощью преобразования $\bar{\boldsymbol a}' = \bar{\boldsymbol a} + \beta\bar{\boldsymbol b}$ получить вектор, параллельный этой оси. Используем другую возможность, показанную на рис. 26.

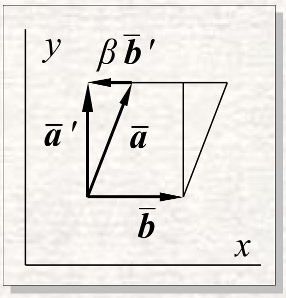


Рис. 26

Преобразуем вектор $\bar{\boldsymbol a}$ в вектор $\bar{\boldsymbol a}' = \bar{\boldsymbol a} + \beta\bar{\boldsymbol b}$, параллельный оси *y*. И без вычислений ясно, что $\bar{\boldsymbol a}' \doteq \begin{bmatrix}0\\a_y\end{bmatrix}$. Ориентированная площадь для векторов $\bar{\boldsymbol a}'$ и $\bar{\boldsymbol b}$ равна:

$$\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})=\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}}',\bar{\boldsymbol{b}})=-a_y b_x=\begin{vmatrix}0 & b_x\\ a_y & 0\end{vmatrix}=\Delta(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})=|\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}|\ .$$

Теперь можно считать, что формула:

$$\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})=a_x b_y-a_y b_x=\begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix}=\Delta(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})=|\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}|$$

справедлива для всех возможных случаев.

Осталось сделать еще одно замечание. Представим, что один из базисных векторов системы координат поменял направление на противоположное. В этом случае соответствующие координаты векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ изменят свой знак, и, следовательно, изменится знак определителя. Но ведь ориентация, которую задают векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$, при этом останется прежней! Все дело в том, что знак определителя в формуле для ориентированной площади говорит об относительной ориентации по отношению к той ориентации, которую задают в плоскости базисные векторы. Если векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ задают такую же ориентацию, что и векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, то определитель положителен, а если противоположную, то отрицателен. Поскольку у нас нет никаких оснований для выделения одной из двух возможных ориентаций в плоскости, то и ориентированную площадь удобно рассматривать только по отношению к базисной ориентации.

..Свойства определителя второго порядка

Мы уже упоминали, что предполагаем знакомство читателя с теорией определителей и теорией матриц. И если мы и собираемся остановиться на свойствах определителей второго порядка, то только для того, чтобы акцентировать внимание на их геометрическом смысле.

Прежде всего, обратимся снова к основной формуле $\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})=a_x b_y-a_y b_x$ и дадим для нее чисто геометрический вывод.

Пусть $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ – два произвольных вектора (рис. 26). Построим на них параллелограмм *OABC*.

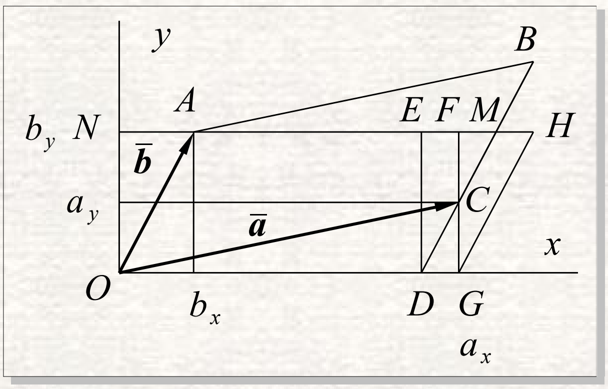


Рис. 27

Сторону параллелограмма *BC* продолжим до пересечения с осью *x* в точке *D*. Очевидно, что площади параллелограммов *OABC* и *OAMD* совпадают. Также очевидно, что площадь параллелограмма *OAMD* совпадает с площадью прямоугольника *ONED*. Площадь же прямоугольника *ONED*, в свою очередь, равна площади прямоугольника *ONFG*, за вычетом площади прямоугольника *EFGD*. Следовательно, $S_{OABC}=S_{ONFG}-S_{EFGD}$. Но

$S_{ONFG} = a_x b_y$. Осталось найти площадь прямоугольника *EFGD*. Высота этого прямоугольника равна b_y, а ширина – *DG*, которая, в свою очередь, равна *MH*. Для того, чтобы найти длину отрезка *MH*, рассмотрим треугольники *GFH* и *CFM*. Эти треугольники подобные, и, следовательно, $\dfrac{GC}{GF} = \dfrac{MH}{FH}$ или $\dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{DG}{b_x}$ и $DG = \dfrac{a_y b_x}{b_y}$. Теперь можно найти площадь прямоугольника *EFGD*: $S_{EFGD} = \dfrac{a_y b_x}{b_y} b_y = a_y b_x$. Откуда и следует искомая формула:

$$S_{OABC} = S_{ONFG} - S_{EFGD} = a_x b_y - a_y b_x .$$

Все свойства определителя второго порядка непосредственно вытекают из этой формулы, которая может рассматриваться в качестве его определения, – приведем ее еще раз:

$$\overline{S}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \Delta(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = |\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}| .$$

1. При умножении элементов любого столбца определителя на число α, его величина умножается на это же число.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_x & b_x \\ \alpha a_y & b_y \end{vmatrix} = (\alpha a_x) b_y - (\alpha a_y) b_x = \alpha (a_x b_y - a_y b_x) = \alpha \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} .$$

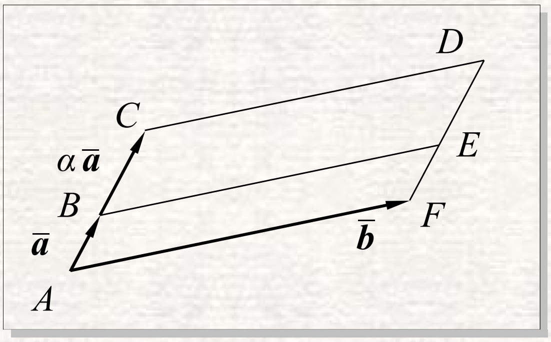


Рис. 28

Геометрически это означает, что если мы увеличим одну из сторон параллелограмма в α раз, то и площадь его увеличится во столько же раз (рис. 27).

2. Если один из столбцов определителя $|\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}|$ может быть представлен в виде суммы столбцов $|\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}| = |\bar{\boldsymbol{a}}' + \bar{\boldsymbol{a}}'', \bar{\boldsymbol{b}}|$, то определитель $|\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}|$ равен сумме определителей $|\bar{\boldsymbol{a}}', \bar{\boldsymbol{b}}|$ и $|\bar{\boldsymbol{a}}'', \bar{\boldsymbol{b}}|$:

$$|\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}| = |\bar{\boldsymbol{a}}' + \bar{\boldsymbol{a}}'', \bar{\boldsymbol{b}}| = |\bar{\boldsymbol{a}}', \bar{\boldsymbol{b}}| + |\bar{\boldsymbol{a}}'', \bar{\boldsymbol{b}}| .$$

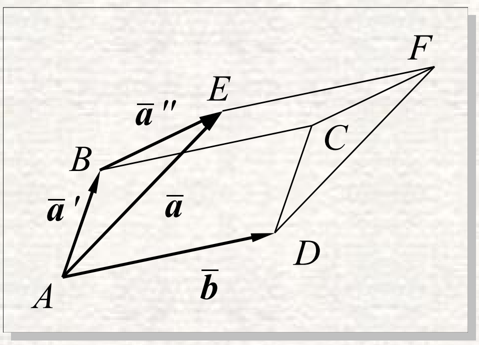


Рис. 29

Геометрическая иллюстрация этого свойства представлена на рис. 29. Площадь параллелограмма *AEFD* равна сумме площадей параллелограммов *ABCD* и *BEFC*.

3. При перестановке строк определитель изменяет знак на противоположный.
$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_x & a_x \\ b_y & a_y \end{vmatrix}$, конечно, ведь при этом изменяется ориентация, задаваемая векторами $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$.

4. Если один из столбцов определителя равен нулю, то и определитель равен нулю. Это свойство очевидно.

5. Если к одному из столбцов определителя прибавить другой, умноженный на произвольное число, то величина определителя не изменится: $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x + \alpha a_x \\ a_y & b_y + \alpha a_y \end{vmatrix}$. Это свойство мы уже неоднократно использовали. Формальное доказательство может быть получено на основе определения.

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x + \alpha a_x \\ a_y & b_y + \alpha a_y \end{vmatrix} = a_x(b_y + \alpha a_y) - a_y(b_x + \alpha a_x) =$$

$$= a_x b_y - a_y b_x + a_x \alpha a_y - a_y \alpha a_x = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}.$$

6. Определитель с одинаковыми строками равен нулю.
Геометрический смысл этого свойства очевиден: "площадь" параллелограмма, построенного на двух параллельных векторах, равна нулю.

7. Определитель с пропорциональными строками равен нулю. Следует из свойства 6 и 1.

8. Определитель единичной матрицы равен единице.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

9. Определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_x & 0 \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a_x b_y.$$

10. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x - \dfrac{b_x}{a_x} a_x \\ 0 & b_y - \dfrac{b_x}{a_x} 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & 0 \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y.$$

Можно показать то же самое проще: $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - 0 \cdot b_x = a_x b_y$.

11. Если в определителе строки поменять местами со столбцами, то определитель не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Это мало примечательный в геометрическом отношении факт, имеющий важное алгебраическое следствие: координаты векторов можно вставлять в определитель, как в качестве столбцов, так и в качестве строк. Свойства определителя симметричны по отношению к столбцам и строкам – все, что сказано в отношении столбцов, в равной мере относится и к строкам.

..Задачи на применение определителей

Задачи, которые мы собираемся решить, являются полезными теоремами элементарной геометрии.

1. Доказать, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

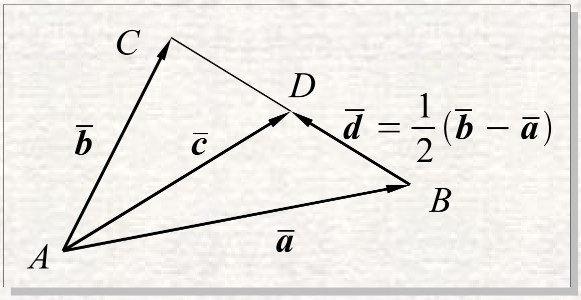


Рис. 30

Доказательство.

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{b}} - \bar{\boldsymbol{a}}) + \bar{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{a}});$$

$$S_{ABD} = |\bar{S}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{c}})| = \begin{vmatrix} a_x & \frac{1}{2}a_x + \frac{1}{2}b_x \\ a_y & \frac{1}{2}a_y + \frac{1}{2}b_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix};$$

$$S_{ADC} = |\bar{S}(\bar{\boldsymbol{c}}, \bar{\boldsymbol{b}})| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}a_x + \frac{1}{2}b_x & b_x \\ \frac{1}{2}a_y + \frac{1}{2}b_y & b_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix},$$

и, следовательно, $S_{ABD} = S_{ADC}$.

2. Теорема о площадях треугольников, имеющих равные углы.

Если угол одного треугольника равен углу другого, то площади их относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

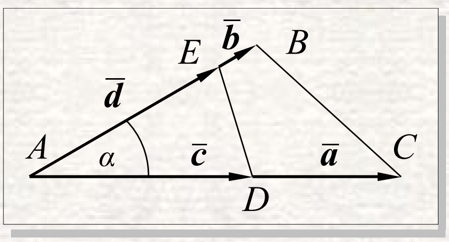


Рис. 31

Пусть треугольники ABC и AED имеют равные углы. Совместим стороны, заключающие эти углы (рис. 30). Проведем векторы
$\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{AC}}$, $\bar{\boldsymbol{b}} = \overline{\boldsymbol{AB}}$, $\bar{\boldsymbol{c}} = \overline{\boldsymbol{AD}}$, $\bar{\boldsymbol{d}} = \overline{\boldsymbol{AE}}$. Так как векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ лежат на одной прямой, то $\bar{\boldsymbol{c}} = \dfrac{c}{a}\bar{\boldsymbol{a}}$, где $c = |\bar{\boldsymbol{c}}|$ и $a = |\bar{\boldsymbol{a}}|$. Аналогично $\bar{\boldsymbol{d}} = \dfrac{d}{b}\bar{\boldsymbol{b}}$.

$$\bar{S}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}, \quad \bar{S}(\bar{\boldsymbol{c}}, \bar{\boldsymbol{d}}) = \begin{vmatrix} \dfrac{c}{a} a_x & \dfrac{d}{b} b_x \\ \dfrac{c}{a} a_y & \dfrac{d}{b} b_y \end{vmatrix} = \frac{c}{a}\frac{d}{b}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \frac{cd}{ab}\bar{S}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}).$$

Следовательно, $\dfrac{\bar{S}(\bar{\boldsymbol{c}}, \bar{\boldsymbol{d}})}{\bar{S}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}})} = \dfrac{cd}{ab} \Rightarrow \dfrac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \dfrac{|AE||AD|}{|AB||AC|}$.

3. Теорема о биссектрисе.
Биссектриса делит противоположную сторону треугольника на части в отношении, равном отношению сторон, прилежащих к этим частям.

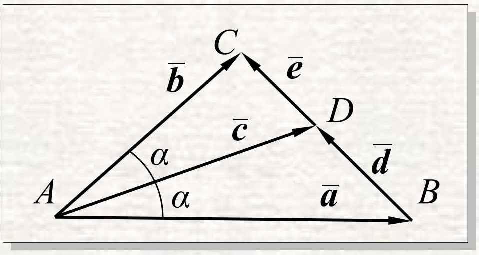


Рис. 32

Применяя теорему об отношении площадей треугольников, имеющих равные углы, сразу получаем: $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \dfrac{ac}{cb} = \dfrac{a}{b}$.

Далее: $\bar{\boldsymbol{c}} = \bar{\boldsymbol{a}} + \dfrac{d}{d+e}(\bar{\boldsymbol{b}} - \bar{\boldsymbol{a}}) =$

$$= \bar{\boldsymbol{a}} + \frac{d}{d+e}\bar{\boldsymbol{b}} - \frac{d}{d+e}\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{e}{d+e}\bar{\boldsymbol{a}} + \frac{d}{d+e}\bar{\boldsymbol{b}}.$$

Далее: $S_{ABD} = \begin{vmatrix} a_x & \dfrac{e}{d+e}a_x + \dfrac{d}{d+e}b_x \\ a_y & \dfrac{e}{d+e}a_y + \dfrac{d}{d+e}b_y \end{vmatrix} = \dfrac{d}{d+e}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$;

$$S_{ADC} = \begin{vmatrix} \dfrac{e}{d+e}a_x + \dfrac{d}{d+e}b_x & b_x \\ \dfrac{e}{d+e}a_x + \dfrac{d}{d+e}b_y & b_y \end{vmatrix} = \frac{e}{d+e}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix},$$

и, следовательно, $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \dfrac{d}{e}$.

Сопоставляя последнее отношение с первым, получаем:
$\dfrac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \dfrac{d}{e} = \dfrac{a}{b}$, что и требовалось доказать.

Этой традиционной фразой мы и закончим разговор о площадях и определителях второго порядка. Хотя, если честно, то нам гораздо более хотелось, если не доказать, то показать полезность применения определителей при решении чисто геометрических задач.

Настало время переходить к пространству с тремя измерениями.

..Объем параллелепипеда, построенного на векторах

Вы когда-нибудь чистили лесную клубнику? Ягоды мелкие с одного боку красные, а с другого зеленоватые. От каждой ягоды нужно отщипнуть листочки. Работа нудная и утомительная. Постепенно руки становятся липкими и тяжелыми, листочки к ним пристают, что раздражает. Спина начинает ныть от длительного сидения. Но вот наконец-то ягоды заканчиваются и ты почти счастлив... В этот момент родители ставят на стол еще одну корзину, и все внутри обрывается. Ты, конечно же знал о ней, но в глубине души надеялся, что как-нибудь обойдется. Нет не обошлось, никуда не денешься, работу надо выполнять до конца.

Мы тоже выполним нашу работу до конца, хотя так и подмывает сказать, что в трехмерном случае все аналогично, и записать окончательные результаты. Мы бы так и поступили, если бы промежуточные результаты нас не интересовали, но они нас интересуют. Достаточно сказать, что впервые при выводе формулы для объема в центре нашего внимания появится понятие об ориентации пространства. А это понятие стоит того, чтобы остановиться на нем подробнее. Тем не менее мы постараемся всячески облегчить нашу работу, опуская многочисленные утомительные подробности, используя сходство с задачей о площадях.

Для начала рассмотрим наиболее простые частные случаи, когда векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ расположены вдоль координатных осей (рис. 33).

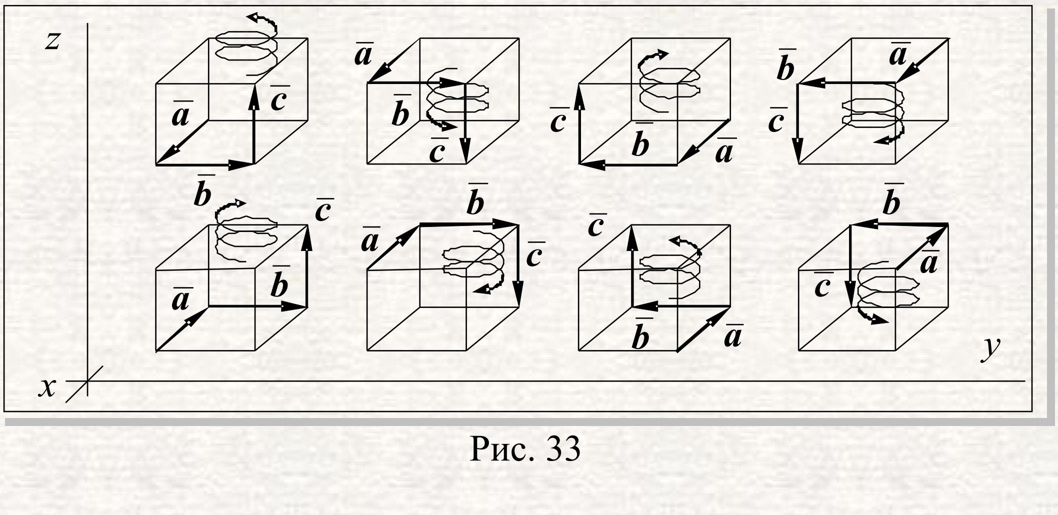


Рис. 33

Во всех этих случаях объем параллелепипеда, построенного на векторах, может быть вычислен по формуле: $V = \pm a_x b_y c_z$. Причем произведение $a_x b_y c_z$ должно быть взято со знаком плюс в тех случаях, когда векторы образуют правую тройку векторов; и со знаком минус, когда – левую. Это наблюдение позволяет, подобно тому, как мы это сделали для площади, ввести понятие ориентированного объема.

Определение (24)

Ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах, образующих правую тройку, будем считать положительным, а объем, построенный на векторах, образующих левую тройку – отрицательным.

Обозначение

Ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$, будем обозначать $\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}})$, в отличие от "обычного" объема $V(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}) = \left|\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}})\right|$.

Мы пока еще не рассмотрели все возможные варианты расположения векторов. Мы не рассмотрели случаев расположения вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ вдоль осей y и z. То же самое можно сказать и об остальных векторах. Всего таких случаев может быть 48. Ясно, что мы этого делать не будем, хотя это и меньше, чем триста спартанцев. Вместо этого мы сразу перейдем к произвольному расположению векторов, получим общее выражение для ориентированного объема и проверим, на всякий случай, какой-нибудь частный вариант. Имея в своем распоряжении общую формулу, читатель может, при желании, проверить остальные варианты. В дальнейшем, когда мы познакомимся с теорией линейных преобразований, мы получим элегантный инструмент, который позволит решить все эти проблемы сразу.

Наши дальнейшие рассуждения будут опираться на простой геометрический факт:

ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА НЕ ИЗМЕНИТСЯ, ЕСЛИ ЛЮБУЮ ЕГО ГРАНЬ ПРОИЗВОЛЬНО ПЕРЕМЕСТИТЬ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНО САМОЙ СЕБЕ.

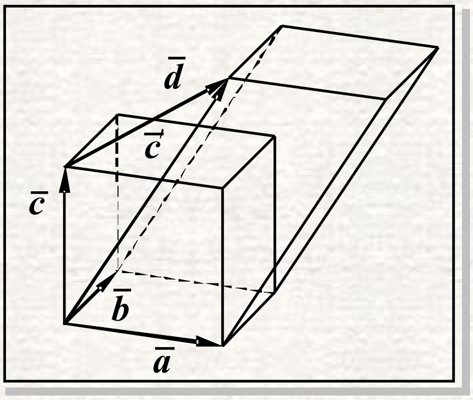


Рис. 34

Допустим, что мы переместили верхнюю грань параллелепипеда так, как это показано на рис. 31. Тогда вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ преобразуется в вектор $\bar{\boldsymbol{c}}' = \bar{\boldsymbol{c}} + \bar{\boldsymbol{d}}$. Вектор $\bar{\boldsymbol{d}}$ целиком лежит в плоскости верхней грани, следовательно, он параллелен нижней грани, в которой лежат векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$. Но в этом случае он может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов: $\bar{\boldsymbol{d}} = \lambda_1 \bar{\boldsymbol{a}} + \lambda_2 \bar{\boldsymbol{b}}$. Следовательно, при данной трансформации параллелепипеда, вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ преобразуется в вектор $\bar{\boldsymbol{c}}' = \bar{\boldsymbol{c}} + \lambda_1 \bar{\boldsymbol{a}} + \lambda_2 \bar{\boldsymbol{b}}$. Подобные преобразования параллелепипеда и соответствующие им преобразования тройки векторов, на которых он построен, будем называть элементарными или линейными преобразованиями. Для нас важно, что при любых линейных преобразованиях параллелепипеда и векторов, на которых он построен, объем параллелепипеда все время остается неизменным. Более того, линейные операции не изменяют и ориентацию, определяемую этой тройкой векторов. Следовательно, $\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}) = \overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}')$.

Теперь после всех этих замечаний перейдем непосредственно к нашей задаче.

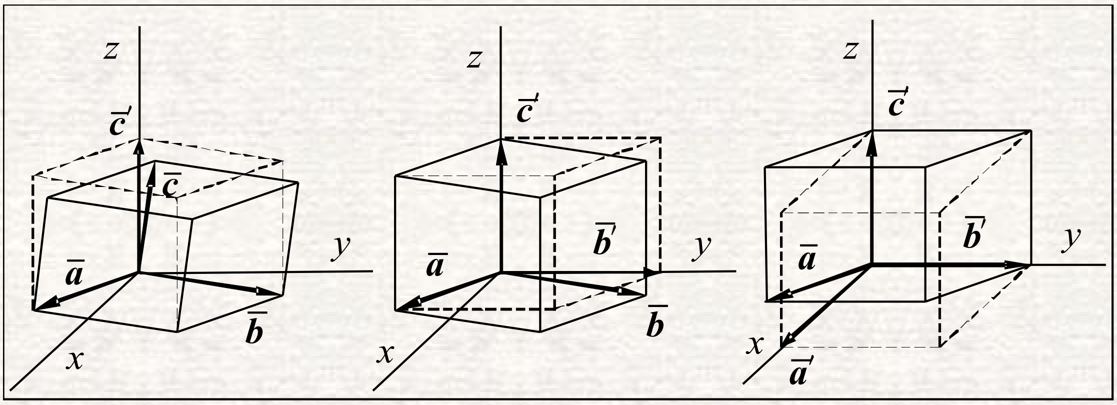


Рис. 35

Пусть $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ – некоторые некомпланарные векторы общего положения. Отложим их от начала координат. На рис. 35 сплошными линиями показан параллелепипед, построенный на этих векторах.

Теперь выполним следующие элементарные преобразования параллелепипеда, не приводящие к изменению объема и ориентации.

1. Переместим верхнюю грань параллелепипеда в своей плоскости параллельно самой себе таким образом, чтобы его ребро, совпадающее с вектором $\bar{\boldsymbol{c}}$, совпало с осью z. Если верхняя грань не параллельна оси z, то такое преобразование возможно. Вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ при этом перейдет в вектор $\bar{\boldsymbol{c}}\,' = \bar{\boldsymbol{c}} + \lambda_1 \bar{\boldsymbol{a}} + \lambda_2 \bar{\boldsymbol{b}}$. Найдем его координаты.

$$\bar{\boldsymbol{c}} \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}.$$

Полученное равенство эквивалентно системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 0 = c_x + \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x \\ 0 = c_y + \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y \\ c'_z = c_z + \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z \end{cases},$$

решая которую, получаем:

$$c'_z = \frac{a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x - a_y b_x c_z - a_x b_y c_z}{a_x b_y - a_y b_x}$$

, обозначив для краткости числитель стоящей в правой части дроби Δ, мы можем записать, что $\bar{\boldsymbol{c}}\,' \doteq \dfrac{\Delta}{a_x b_y - a_y b_x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

где

$$\Delta = a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x .$$

Полученное выражение, как мы уже отметили, не имеет смысла, когда верхняя грань параллелепипеда параллельна оси z. В самом деле, знаменатель дроби, стоящей в правой части, по смыслу равен ориентированной площади параллелограмма, построенного на проекциях векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$: $a_x b_y - a_y b_x = \bar{S}(\bar{\boldsymbol{a}}_{xy}, \bar{\boldsymbol{b}}_{xy})$ (рис. 36).

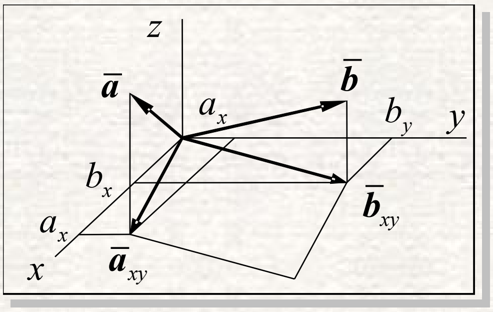


Рис. 36

Если векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ лежат в плоскости, параллельной оси z, то параллелограмм вырождается в прямую линию и его площадь, естественно, равна нулю. Отметим для себя этот частный случай, но не будем на нем задерживаться.

Продолжим преобразования в соответствии с рис. 35 (средний рисунок). В получившемся после первого преобразования параллелепипеде переместим правую грань таким образом, чтобы вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ преобразовался в вектор $\bar{\boldsymbol{b}}\,'$, параллельный оси y. Естественно, что такое преобразование возможно только в том случае, когда правая грань не параллельна оси y. Найдем координаты этого вектора.

$$\bar{\boldsymbol{b}}\,' = \bar{\boldsymbol{b}} + \lambda_1 \bar{\boldsymbol{a}} + \lambda_2 \bar{\boldsymbol{c}}\,' \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ b'_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \lambda_2 c' \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначив $\lambda_2 c' = \mu$, перепишем матричное равенство в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 0 = b_x + \lambda a_x \\ b'_y = b_y + \lambda a_y \\ 0 = b_z + \lambda a_z + \mu \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$b'_y = \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x} \quad \text{и} \quad \bar{\boldsymbol{b}}\,' \doteq \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если мы не рассматриваем случай, когда перемещаемая грань параллелепипеда параллельна оси y, то a_x не может равняться нулю и решение имеет смысл.

Теперь выполним последнее преобразование: переместим переднюю грань образовавшегося после первых двух преобразований параллелепипеда таким образом, чтобы его ребро, совпадающее с вектором $\bar{\boldsymbol{a}}$, совпало бы с осью x (рис. 35, справа). Это преобразование всегда возможно, если возможны первые два. Вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ при этом переходит в вектор

$$\bar{\boldsymbol{a}}\,' = \bar{\boldsymbol{a}} + \lambda_1 \bar{\boldsymbol{b}}\,' + \lambda_2 \bar{\boldsymbol{c}}\,' \doteq \begin{bmatrix} a'_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ b'_y \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 c' \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Даже не решая этого уравнения, можно сказать, что $a'_x = a_x$ и, следовательно:

$$\bar{\boldsymbol{a}}\,' \doteq a_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результате преобразований мы получили параллелепипед, построенный на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}\,'$, $\bar{\boldsymbol{b}}\,'$ и $\bar{\boldsymbol{c}}\,'$, объем которого равен объему первоначального параллелепипеда общего положения. Расположение же векторов $\bar{\boldsymbol{a}}'$, $\bar{\boldsymbol{b}}'$ и $\bar{\boldsymbol{c}}'$, по отношению к осям координат соответствует случаям, которые показаны на рис. 32. Это позволяет нам записать общее выражение для ориентированного объема:

$\overline{\boldsymbol{V}}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}) = \overline{\boldsymbol{V}}(\bar{\boldsymbol{a}}',\bar{\boldsymbol{b}}',\bar{\boldsymbol{c}}') = a'_x b'_y c'_z = a_x \dfrac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x} \cdot \dfrac{\Delta}{a_x b_y - a_y b_x} = \Delta$ или, что то же самое,

$$\overline{\boldsymbol{V}}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}) = a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x .$$

Данная формула получена нами для произвольного расположения векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$, за исключением тех некоторых случаев, которые мы отметили при ее выводе.

Можно ли подтвердить правильность формулы, если мы не можем провести первое преобразование по причине параллельности верхней грани параллелограмма оси z? Никакая грань не может быть параллельна сразу всем осям координат. Пусть она не параллельна оси x. Тогда мы можем переместить эту грань таким образом, чтобы ребро параллелепипеда, совпадающее с вектором $\bar{\boldsymbol{c}}'$, совместилось с этой осью. Словом, мы всегда можем выполнить преобразования, аналогичные тем, которые мы провели. Разница только в том, что векторы $\bar{\boldsymbol{a}}'$, $\bar{\boldsymbol{b}}'$ и $\bar{\boldsymbol{c}}'$ в результате будут лежать не на тех осях. Пусть, например,

$\bar{\boldsymbol{a}} \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{b}} \doteq \begin{bmatrix} b_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\bar{\boldsymbol{c}} \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_z \end{bmatrix}$, тогда

$\overline{\boldsymbol{V}}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}) = 0\cdot 0\cdot c_z + a_y\cdot 0\cdot c_x + 0\cdot b_x\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot 0 - a_y\cdot b_x\cdot c_z - 0\cdot 0\cdot 0$ или короче – $\overline{\boldsymbol{V}}(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}) = -a_x b_y c_z$. Но векторы $\bar{\boldsymbol{a}}'$, $\bar{\boldsymbol{b}}'$ и $\bar{\boldsymbol{c}}'$ образуют в этом случае левую тройку векторов, и, следовательно, формула верна. Конечно, это не исчерпывает всех возможных вариантов, но, как мы сказали уже об этом раньше, полное доказательство полученной формулы мы отложим до лучших времен.

..Определитель третьего порядка и его свойства

Определение (25)

Выражение
$\Delta = a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x$ называется определителем третьего порядка.

В общем случае понятие определителя вводится для квадратной матрицы в курсе линейной алгебры. Воспользовавшись принятыми в этой науке обозначениями, мы можем записать:

$$\Delta \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} =$$
$$= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x .$$

Для обозначения определителя, составленного из координат векторов, мы будем также использовать краткое обозначение $|\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}|$.

Запишем формулу для вычисления объема с учетом этих обозначений.

$$\overline{\boldsymbol{V}}(\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{c}}) = |\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{c}}| = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

На свойстве определителей мы подробно останавливались, когда говорили об определителях второго порядка. Все свойства, о которых мы тогда говорили, остаются в силе и для определителей третьего порядка. Тогда мы их насчитали одиннадцать. Но есть еще одно свойство, о котором мы не могли сказать раньше – двенадцатое.

Двенадцатое свойство определителя.
Для того, чтобы получить это свойство, преобразуем выражение

$$\Delta = a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x =$$
$$= a_x(b_y c_z - b_z c_y) - a_y(b_x c_z - b_z c_x) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

Следовательно:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = a_x(b_y c_z - b_z c_y) - a_y(b_x c_z - b_z c_x) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

Поскольку выражения в скобках являются определителями второго порядка, мы имеем право записать:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = a_x\begin{vmatrix} b_y & c_y \\ b_z & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_z & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix}.$$

Полученное выражение называется разложением определителя по первому столбцу. Аналогичное выражение может быть получено и для строки. Правило разложения определителя по столбцу является последним свойством, которое мы отметим. Данное свойство позволяет свести проблему вычисления определителя третьего порядка к проблеме вычисления определителя второго порядка. Вообще-то вычисление определителя второго и третьего порядка не вызывает особых трудностей. Здесь можно вспомнить два правила, которые придумал страсбургский профессор Фредерик Саррюс: правило треугольников и правило приписывания столбцов. Значение данного свойства в том, что оно позволяет вычислять, а при желании, и формально ввести в его помощью определители более высоких порядков. Например, определитель четвертого порядка может быть введен так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$
$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Мы еще раз выражаем надежду, что читатель знаком с теорией определителей по курсу линейной алгебры, потому что мы не можем больше останавливаться на этом предмете.

Осталось сделать замечание, аналогичное тому, что мы сделали, когда речь шла об ориентированной площади. Если мы поменяем местами любые два базисных вектора или изменим направление одного из них на противоположное, то и знак определителя
$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$ изменится.

Следовательно, изменится знак ориентированного объема, поскольку $\boldsymbol{\overline{V}}(\boldsymbol{\overline{a}},\boldsymbol{\overline{b}},\boldsymbol{\overline{c}}) = |\boldsymbol{\overline{a}},\boldsymbol{\overline{b}},\boldsymbol{\overline{c}}|$. Выходит, формула для вычисления объема дает его значение по отношению к базисной системе векторов – в левом базисе, в частности, объем параллелепипеда построенного на правой тройке векторов будет отрицательным.

..Векторное произведение векторов

Мы уже знаем несколько операций, которые можно выполнять с векторами: векторы можно складывать, умножать на число, умножать друг на друга скалярно.
Каждое новое понятие в любой науке возникает в силу необходимости отразить некоторый новый элемент наших знаний. Создание новых элементов языка – это процесс творческий. Если бы это было не так, на Земле не было бы столько национальных языков. И на всех существующих языках легко и свободно может быть выражена вся та информация, которая на сегодняшний день является достоянием всего *Человечества*. Однако иногда бывает, что какое-то открытие, новое явление или просто принципиально новую идею невозможно объяснить – не хватает слов. Если открытие, явление или идея действительно важны, то через какое-то время язык с этими проблемами обязательно справляется. Если нам есть, что сказать, то необходимые для этого языковые возможности обязательно появятся. Но никому не приходит в голову побеспокоиться об этом заранее. Никогда не ставилась цель изобрести язык, на котором можно было бы не только правильно и непротиворечиво отразить все то, что мы знаем, но и то, что мы когда-либо сможем узнать. Мало того, что это невозможно, но это еще и неудобно. Языком, который обременен всеми будущими проблемами, которые к тому же могут и не возникнуть, никто не захочет пользоваться. Он обречен на забвение.
Абсолютно все то же самое можно сказать и о научном языке, который является расширением языка естественного. Любая новая информация обязательно находит средства для своего выражения на языке той или иной науки. Не является исключением и язык математики. С одной стороны, он является результатом творчества многих ученых. С другой стороны, каждое новое понятие в математике, обязательно связано с необходимостью правильно отобразить наше сегодняшнее понимание природы и ее законов.
Математика – это наука о наиболее общих, а следовательно, и наиболее абстрактных, законах природы, и именно для выражения этих законов и конструируется ее язык. Другими словами, сначала – новые знания и новые идеи, и только потом – новый язык. При изучении же математики мы вынуждены почти всегда идти в обратном направлении: сначала – определения новых понятий, затем – теоремы и их следствия, и только после этого – приложения (и то, только если на это остается время). В результате, иногда складывается неверное представление о том, что математика развивается совершенно независимо от всего остального естествознания. Можно даже услышать мнение, будто бы *"математика является блестящим примером чистого разума, удачно расширяющегося самопроизвольно, без применения опыта"*.

Мы не собираемся вступать здесь в полемику по этому вопросу. Проблема эта бесконечная. Мы хотим только выразить нашу точку зрения, которая заключается в том, что все, что мы можем сказать на любом языке, так или иначе связано с природой, и если кто-то сможет сказать что-то сверх того, то вряд ли он сам поймет, что он такое сказал. И раз мы до сих пор понимаем, о чем мы говорим, следовательно, мы говорим о природе или, по крайней мере, о языке, на котором можно что-либо полезное о ней сказать.

До сих пор у нас не было повода для разговора об отношении математики к опыту. В дальнейшем же мы не намерены больше к этому возвращаться, поскольку это непростой самостоятельный вопрос. То, что мы решили сказать хотя бы несколько слов об этом сейчас, связано с векторным умножением. Векторное умножение – это первое понятие векторной алгебры, необходимость введения которого трудно осознать, не выходя за рамки математической теории. Это понятие своими корнями уходит в естествознание и, прежде всего, в механику. У нас же нет возможности об этом говорить. Мы вынуждены ввести это понятие каким-то другим способом, который ничего общего не имеет с действительными причинами его возникновения. Конечно, мы постараемся, чтобы это понятие не возникло, как кролик из шляпы фокусника. Но, как это ни парадоксально, для лучшего понимания математики необходимо изучать ее историю и, конечно, естествознание, хотя это отдельная тема и, соответственно, другие книги.

Итак, векторное умножение. Еще одно. Мы уже знаем два вида умножения, которые можно выполнять с векторами.

Можно вектор умножить на число, и при этом мы снова получим вектор. При скалярном умножении перемножаются два вектора, а в результате мы получаем число. Векторное умножение – это чисто векторная операция: перемножаются два вектора, и в результате снова получается вектор.

Операция векторного умножения в скрытой или, как говорят, в латентной форме уже содержится в понятии ориентированного объема. Покажем, как ее можно извлечь оттуда на свет божий.

Начнем с формулы для ориентированного объема, которую мы получили в предыдущем разделе.

$$\overline{\boldsymbol{V}}(\overline{\boldsymbol{c}},\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}}) = |\overline{\boldsymbol{c}},\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}}| = \begin{vmatrix} c_x & a_x & b_x \\ c_y & a_y & b_y \\ c_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x+0+0 & a_x & b_x \\ 0+c_y+0 & a_y & b_y \\ 0+0+c_z & a_z & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= c_x\begin{vmatrix} 1 & a_x & b_x \\ 0 & a_y & b_y \\ 0 & a_z & b_z \end{vmatrix} + c_y\begin{vmatrix} 0 & a_x & b_x \\ 1 & a_y & b_y \\ 0 & a_z & b_z \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} 0 & a_x & b_x \\ 0 & a_y & b_y \\ 1 & a_z & b_z \end{vmatrix} =$$

Формально используя правило скалярного умножения векторов в декартовой системе координат, мы можем продолжить:

$$= (c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k})\cdot\left(\begin{vmatrix} 1 & a_x & b_x \\ 0 & a_y & b_y \\ 0 & a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} 0 & a_x & b_x \\ 1 & a_y & b_y \\ 0 & a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 0 & a_x & b_x \\ 0 & a_y & b_y \\ 1 & a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right) =$$

$$= \overline{\boldsymbol{c}}\cdot\left(\begin{vmatrix} 1 & a_x & b_x \\ 0 & a_y & b_y \\ 0 & a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} 0 & a_x & b_x \\ 1 & a_y & b_y \\ 0 & a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 0 & a_x & b_x \\ 0 & a_y & b_y \\ 1 & a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right)$$

Следовательно:

$$\overline{\boldsymbol{V}}(\overline{\boldsymbol{c}},\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}}) = |\overline{\boldsymbol{c}},\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}}| = \overline{\boldsymbol{c}}\cdot\left(\begin{vmatrix}1 & a_x & b_x\\ 0 & a_y & b_y\\ 0 & a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix}0 & a_x & b_x\\ 1 & a_y & b_y\\ 0 & a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix}0 & a_x & b_x\\ 0 & a_y & b_y\\ 1 & a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right).$$

Мы получили, что с формальной точки зрения ориентированный объем $\overline{\boldsymbol{V}}(\overline{\boldsymbol{c}},\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}})$ равен скалярному произведению вектора $\overline{\boldsymbol{c}}$ на некоторый вектор, который в свою очередь определяется векторами $\overline{\boldsymbol{a}}$ и $\overline{\boldsymbol{b}}$. Этот формальный вектор и называется векторным произведением векторов $\overline{\boldsymbol{a}}$ и $\overline{\boldsymbol{b}}$ и обозначается $\overline{\boldsymbol{a}}\times\overline{\boldsymbol{b}}$.
Следовательно, векторным произведением векторов $\overline{\boldsymbol{a}}$ и $\overline{\boldsymbol{b}}$ называется вектор

$$\overline{\boldsymbol{a}}\times\overline{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix}1 & a_x & b_x\\ 0 & a_y & b_y\\ 0 & a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix}0 & a_x & b_x\\ 1 & a_y & b_y\\ 0 & a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix}0 & a_x & b_x\\ 0 & a_y & b_y\\ 1 & a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

Вот он уже и появился, хотя и не в той форме, в которой он традиционно записывается – поэтому продолжим преобразования.
Раскладывая каждый из определителей по первому столбцу, мы можем упростить выражение:

$$\overline{\boldsymbol{a}}\times\overline{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix}a_y & b_y\\ a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

В таком виде оно выглядит менее громоздко, зато труднее запоминается. Можно еще упростить выражение, если заметить, что формально оно представляет собой результат разложения определителя третьего порядка по первому столбцу.

$$\overline{\boldsymbol{a}}\times\overline{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix}a_y & b_y\\ a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & a_x & b_x\\ \boldsymbol{j} & a_y & b_y\\ \boldsymbol{k} & a_z & b_z\end{vmatrix},$$ следовательно, совсем коротко можно записать:

$$\overline{\boldsymbol{a}}\times\overline{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & a_x & b_x\\ \boldsymbol{j} & a_y & b_y\\ \boldsymbol{k} & a_z & b_z\end{vmatrix}.$$

Алгебраическое определение векторного умножения в декартовой системе координат

Определение (26)

Выражение

$$\overline{\boldsymbol{a}}\times\overline{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix}a_y & b_y\\ a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

и его краткая форма $\overline{\boldsymbol{a}}\times\overline{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & a_x & b_x\\ \boldsymbol{j} & a_y & b_y\\ \boldsymbol{k} & a_z & b_z\end{vmatrix}$

могут быть приняты за определение для векторного умножения в декартовой системе координат.

В дальнейшем мы получим выражение для векторного умножения в произвольных косоугольных координатах. Но даже если придерживаться только ортонормированных систем, можно заметить особенность данного вектора. Если мы поменяем местами два любых вектора базиса, скажем $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, векторное произведение изменит направление на противоположное.

В самом деле,

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})_{\{j\,i\,k\}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{j} & a_y & b_y\\ \boldsymbol{i} & a_x & b_x\\ \boldsymbol{k} & a_z & b_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & a_x & b_x\\ \boldsymbol{j} & a_y & b_y\\ \boldsymbol{k} & a_z & b_z\end{vmatrix}=-(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})_{\{i\,j\,k\}}\text{, где}$$

$(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})_{\{i\,j\,k\}}$ – векторное произведение в базисе $\{\boldsymbol{ijk}\}$, а

$(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})_{\{j\,i\,k\}}$ – векторное произведение в базисе $\{\boldsymbol{jik}\}$.

То есть $(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})_{\{j\,i\,k\}}=-(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})_{\{i\,j\,k\}}$.

Но если придерживаться только правых декартовых систем координат, то векторное произведение $\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}$ определяется однозначно.

С использованием векторного умножения формула для ориентированного объема приобретает следующий вид:

$$\bar{\boldsymbol{V}}(\bar{\boldsymbol{c}},\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})=|\bar{\boldsymbol{c}},\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}|=\begin{vmatrix}c_x & a_x & b_x\\ c_y & a_y & b_y\\ c_z & a_z & b_z\end{vmatrix}=\bar{\boldsymbol{c}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}).$$

Выражение $\bar{\boldsymbol{c}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})$ в векторной алгебре называется смешанным умножением векторов, и оно, следовательно, равно:

$$\bar{\boldsymbol{c}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})=\begin{vmatrix}c_x & a_x & b_x\\ c_y & a_y & b_y\\ c_z & a_z & b_z\end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение равно ориентированному объему. Отсюда вытекают и все его свойства.

Свойства смешанного умножения векторов

1. Знаки скалярного и векторного умножения можно менять местами

$$\bar{\boldsymbol{c}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})=\begin{vmatrix}c_x & a_x & b_x\\ c_y & a_y & b_y\\ c_z & a_z & b_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c_x & b_x & a_x\\ c_y & b_y & a_y\\ c_z & b_z & a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x & c_x & a_x\\ b_y & c_y & a_y\\ b_z & c_z & a_z\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{\boldsymbol{b}}\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{a}})=(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{a}})\cdot\bar{\boldsymbol{b}}.$$

2. При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение изменяет знак на противоположный.
3. Смешанное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.
4. Если смешанное произведение векторов больше нуля, то векторы образуют правую тройку векторов.

Для смешанного произведения часто вводится специальное обозначение, например, $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}})=\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}}$ [10, с. 110] или $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}})=(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}})$ [12, с. 65]. Однако, нам кажется, что более удачным обозначением, если оно вообще необходимо, является следующее: $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}) = |\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}|$. По крайней мере, оно вполне логично вытекает из связи смешанного произведения, ориентированного объема и его выражения через определитель.

Поскольку со смешанным произведением все более или менее ясно, вернемся к векторному умножению.

До сих пор мы придерживались геометрической теории векторов. Геометрический вектор для нас был первичным понятием. Вводя в векторном пространстве тот или иной базис, мы могли выразить вектор через его координаты. Этот шаг часто является удобным, но до сих пор никогда не был обязательным. Принятое нами определение непосредственно исходит из координатного представления векторов. Здесь возникает важный вопрос: является ли наше определение инвариантным по отношению к произвольному выбору координатной системы? А что если мы в качестве базисных выберем другие векторы; получим ли мы в результате векторного умножения тот же самый вектор? На эти вопросы мы сразу даем отрицательный ответ. Наше определение справедливо только для декартовых систем координат. Для любых других систем оно не годится. Для того чтобы прийти к более универсальному определению, выясним геометрический смысл, содержащийся в том, которое у нас есть.

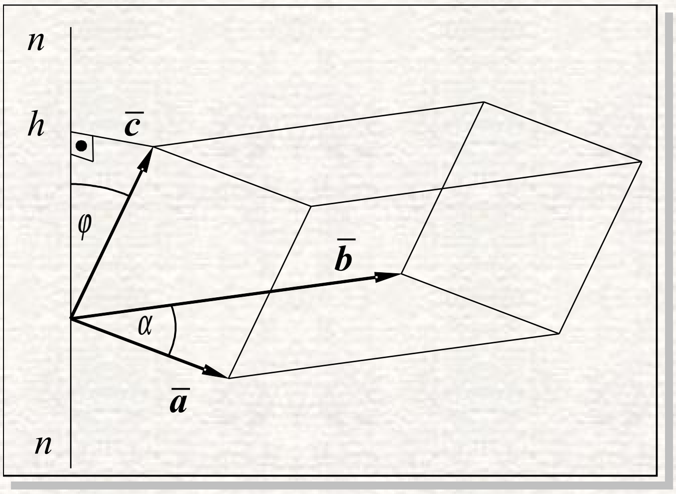


Рис. 37

Во-первых, из того, что

$$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}) = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot\left(\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right) =$$

$$= a_x\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_x & c_x \\ a_y & a_y & c_y \\ a_z & a_z & c_z \end{vmatrix} = 0$$

и, аналогично: $\bar{\boldsymbol{b}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}) = 0$ – откуда следует, что векторное произведение $\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}$ ортогонально к вектору $\bar{\boldsymbol{a}}$ и к вектору $\bar{\boldsymbol{b}}$. Следовательно, оно ортогонально плоскости параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 37).

Во-вторых, $|\bar{\boldsymbol{c}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})| = |\bar{\boldsymbol{c}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}|\cdot|\cos\varphi| = h|\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}|$,

где h – высота параллелепипеда.

С другой стороны:

$|\bar{\boldsymbol{c}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})| = V(\bar{\boldsymbol{c}},\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}}) = hS(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})$,

где $S(\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}})$, как обычно, – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$. Следовательно, модуль векторного произведения $\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. А сам вектор направлен вдоль прямой n–n, перпендику-

лярной плоскости параллелограмма. Но мы пока еще не знаем, в какую сторону вдоль этой прямой он направлен.
Если векторы $\bar{\boldsymbol{c}}$, $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ образуют правую тройку, то
$\bar{\boldsymbol{c}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}) = |\bar{c}|\cdot|\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}|\cdot\cos\varphi = \overline{V}(\bar{\boldsymbol{c}}, \bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}})>0$.
А если векторы $\bar{\boldsymbol{c}}$, $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ образуют левую тройку, то
$\bar{\boldsymbol{c}}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}) = |\bar{c}|\cdot|\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}|\cdot\cos\varphi = \overline{V}(\bar{\boldsymbol{c}}, \bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}})<0$.
Но это возможно только, если векторы $\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}$, $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ образуют правую тройку.
Теперь мы готовы дать геометрическое определение векторного умножения.

Геометрическое определение векторного произведения (27)

> Вектор $\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}$ называется векторным произведением векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$, если:
> 1. Он ортогонален к обоим этим векторам.
> 2. Его модуль равен площади параллелограмма построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$.
> 3. Векторы $\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}$, $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ образуют правую тройку векторов.

Расшифровывая данное определение, мы можем выразить площадь параллелограмма через его стороны и угол (рис. 37). В этом случае пункт два определения будет звучать так:
2(а). Модуль векторного произведения равен произведению модулей векторов на синус угла между ними $|\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}| = |\bar{\boldsymbol{a}}|\cdot|\bar{\boldsymbol{b}}|\sin\alpha$.

Данное определение является чисто геометрическим и не зависит от произвола в выборе систем координат. Но и у него есть слабое место. В самом деле, что означает понятие "правая тройка векторов" на языке математики? Правую тройку от левой мы можем отличить только благодаря тому, что по неизвестной на сегодняшний день причине правшей на Земле больше, чем левшей. Не существует математических средств для того, чтобы одну из систем координат идентифицировать, как правую. Не существует таких средств и в классической физике. Такие средства появляются только в технике, поскольку правши наточили больше правых винтов, чем левши левых.
Поэтому для векторного произведения имеется альтернативное определение.

Альтернативное определение векторного умножения (28)

> Вектор $\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}$ называется векторным произведением векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ в некотором базисе, если:
> 1. Он ортогонален к обоим этим векторам.
> 2. Его модуль равен площади параллелограмма построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$.
> 3. Векторы $\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}$, $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ образуют тройку векторов того же самого типа (правую или левую), что и векторы базиса.

До тех пор пока мы в качестве базиса выбираем только правые тройки векторов, оба определения приводят к одному и тому же результату. Но стоит только перейти к левому базису, и вектор, построенный в соответствии с альтернативным определением, поменяет направление на противоположное. Такие векторы называются относительными, псевдовекторами или аксиальными векторами, в отличие от обычных (полярных) векторов. Единственное преимущество такого определения – полная эквивалентность его алгебраическому определению, что удобно при выполнении алгебраических преобразований в координатной форме. Можно не заботиться о том левая или правая тройка векторов выбрана в качестве базиса – алгебраическое выражение для векторного произведения от этого не зависит. Единственное беспокойство вызывает вопрос: существует ли такая гео-

метрическая и физическая реальность, для описания которой могут быть использованы псевдовекторы? Очень даже существует. Например, для задания свойств вращательного движения можно использовать вектор. Для этого его достаточно совместить с осью вращения и величину скорости связать в его модулем. А вот каким образом связать два возможных направления его вдоль оси с двумя возможными направлениями вращения вокруг этой оси – это все равно. А раз все равно, то вполне можно использовать для этих целей аксиальные векторы. По крайней мере, они правильно отражают то свойство подобных процессов, что направление вектора вдоль выбранной оси не имеет физического или геометрического смысла и выбирается по соглашению.
В математике примерно одинаково часто используются оба определения. Мы будем в дальнейшем придерживаться второго.

Свойства векторного умножения

Все свойства проще всего выводятся из первого его алгебраического определения.
1. Векторное произведение векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ коллинеарны.
В самом деле, если
$\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}=\begin{vmatrix}a_y & b_y\\ a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_z & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=0$, то и все определители равны нулю, и, следовательно, столбцы пропорциональны:
$$\begin{cases}a_y=k_1b_y\\ a_z=k_1b_z\end{cases};\ \begin{cases}a_x=k_2b_x\\ a_z=k_2b_z\end{cases};\ \begin{cases}a_x=k_3b_x\\ a_y=k_3b_y\end{cases}.$$
Отсюда следует, что
$\begin{cases}a_x=k\,b_x\\ a_y=k\,b_y\\ a_z=k\,b_z\end{cases}$, что и означает коллинеарность векторов.
Обратное утверждение автоматически следует из пропорциональности координат коллинеарных векторов.
2. При изменении порядка сомножителей векторное произведение изменяет знак на противоположный. В отношении этого свойства говорят, что векторное произведение антикоммутативно.
$$\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}=-\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{a}}\,.$$
3. Векторное умножение ассоциативно относительно числового множителя.
$\lambda(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})=(\lambda\bar{\boldsymbol{a}})\times\bar{\boldsymbol{b}}=\bar{\boldsymbol{a}}\times(\lambda\bar{\boldsymbol{b}})$, где λ произвольное действительное число.
4. Векторное умножение дистрибутивно относительно сложения векторов.
$$(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})\times\bar{\boldsymbol{c}}=\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{c}}+\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}\,.$$
Докажем последнее свойство.
$$(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})\times\bar{\boldsymbol{c}}=\begin{vmatrix}a_y+b_y & c_y\\ a_z+b_z & c_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x+b_x & c_x\\ a_z+b_z & c_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x+b_x & c_x\\ a_y+b_y & c_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$
Из свойств определителей сразу вытекает, что
$$(\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}})\times\bar{\boldsymbol{c}}=\begin{vmatrix}a_y & c_y\\ a_z & c_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & c_x\\ a_z & c_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & c_x\\ a_y & c_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}+$$
$$+\begin{vmatrix}b_y & c_y\\ b_z & c_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}b_x & c_x\\ b_z & c_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}b_x & c_x\\ b_y & c_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{c}}+\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}\,.$$

..Векторное умножение векторов базиса декартовой системы координат

При выполнении алгебраических операций полезно иметь таблицу умножения для базисных векторов декартовой системы координат, аналогичную той, которую мы в свое время получили для скалярного умножения.

Из свойств векторного умножения сразу следует, что

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0$, далее $|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{i}|\cdot|\boldsymbol{j}|\sin 90^\circ = 1$,

и, аналогично,

$|\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}| = 1$, $|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}| = 1$.

Разберемся с направлениями векторов.

Вектор $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ ортогонален к каждому из векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, следовательно, он направлен по оси z. Поскольку он должен составлять с этими векторами правую тройку, он должен быть направлен в положительном направлении оси z. Отсюда следует, что

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, и, аналогично,

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$;

$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$.

Составим таблицу умножения, учитывая при этом, что при изменении порядка сомножителей, знак произведения изменяется на противоположный.

×	*i*	*j*	*k*
i	*0*	*k*	*-j*
j	*-k*	*0*	*i*
k	*j*	*-i*	*0*

Для запоминания таблицы умножения удобно пользоваться правилом циклической подстановки или "правилом треугольника" (рис. 38).

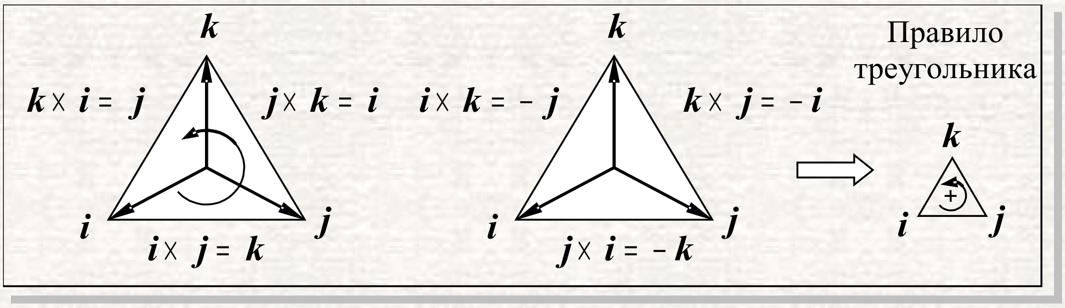


Рис. 38

Обход треугольника, в вершинах которого изображены векторы базиса, можно производить, начиная с любой вершины. При этом, если обход совершается против часовой стрелки, то произведение вектора, с которого начинается обход, на вектор следующий за ним, равно третьему вектору. Если же обход совершается по часовой стрелке, то результирующий вектор следует умножить на -1.

Умножим два вектора друг на друга, используя правила перемножения базисных векторов. Для этого разложим векторы по векторам базиса и используем свойства векторного умножения.

$$\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) =$$
$$= a_x b_x \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + a_x b_y \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + a_x b_z \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} +$$
$$+ a_y b_x \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + a_y b_y \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + a_y b_z \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} +$$
$$+ a_z b_x \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + a_z b_y \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + a_z b_z \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} =$$

$$= 0 + a_x b_y \boldsymbol{k} - a_x b_z \boldsymbol{j} - a_y b_x \boldsymbol{k} + 0 + a_y b_z \boldsymbol{i} + a_z b_x \boldsymbol{j} - a_z b_y \boldsymbol{i} + 0 =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

Результат вполне ожидаемый и, тем более приятный. Достоинство алгебры в том, что она работает подобно хорошо отлаженному механизму, который достаточно только слегка подтолкнуть, а дальше он все сделает сам.

На подступах к тензорам

.Преобразования координат

Теорию векторов мы начали с геометрического определения вектора. После этого мы ввели понятие координат вектора. При этом мы убедились, что координатная форма часто оказывается чрезвычайно удобной для конкретных вычислений с векторами. Нами получены правила для скалярного и векторного умножения векторов в координатной форме. Найдены формулы, выражающие площадь параллелограмма и объем параллелепипеда через координаты векторов. Координатная форма является настолько удобной, что даже само определение вектора часто дается через его координатное представление. В этом случае вектор определяется как некий физический или геометрический объект, который может быть задан при помощи своих координат, связанных с определенной координатной системой. Между тем до настоящего момента только линейные операции с векторами мы могли выполнять в произвольных координатах. Все остальные правила, позволяющие выполнять действия с векторами в координатной форме, получены только для специальных ортонормированных координатных систем. В дальнейшем мы избавимся от этого ограничения, но прежде нам придется изучить законы преобразования координат векторов при смене координатных систем.

Допустим, что у нас имеется две координатные системы. Одну из этих систем, неважно какую именно, будем называть первой или старой координатной системой. Вторую, только для того, чтобы отличить от первой, будем называть второй или новой. Векторы базиса первой координатной системы будем обозначать $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$. Соответственно, векторы второй системы будем обозначать $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$ – со штрихами над индексами. Базисные векторы первой системы мы можем выразить через векторы базиса второй, и наоборот.

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{1'} = e^{1}{}_{1'}\boldsymbol{e}_1 + e^{2}{}_{1'}\boldsymbol{e}_2 + e^{3}{}_{1'}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_{2'} = e^{1}{}_{2'}\boldsymbol{e}_1 + e^{2}{}_{2'}\boldsymbol{e}_2 + e^{3}{}_{2'}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_{3'} = e^{1}{}_{3'}\boldsymbol{e}_1 + e^{2}{}_{3'}\boldsymbol{e}_2 + e^{3}{}_{3'}\boldsymbol{e}_3 \end{cases}; \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_{1} = e^{1'}{}_{1}\boldsymbol{e}_{1'} + e^{2'}{}_{1}\boldsymbol{e}_{2'} + e^{3'}{}_{1}\boldsymbol{e}_{3'} \\ \boldsymbol{e}_{2} = e^{1'}{}_{2}\boldsymbol{e}_{1'} + e^{2'}{}_{2}\boldsymbol{e}_{2'} + e^{3'}{}_{2}\boldsymbol{e}_{3'} \\ \boldsymbol{e}_{3} = e^{1'}{}_{3}\boldsymbol{e}_{1'} + e^{2'}{}_{3}\boldsymbol{e}_{2'} + e^{3'}{}_{3}\boldsymbol{e}_{3'} \end{cases}.$$

Символами $e^{i}{}_{i'}$ обозначены соответствующие координаты i'- ого (нового) вектора в старой системе координат, а символами $e^{i'}{}_{i}$ координаты i - ого (старого) вектора в новой системе координат (рис. 39).

Рис. 39

В соответствии с соглашением А. Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам данные системы можно записать короче:
$\boldsymbol{e}_{i'} = e^{i}{}_{i'}\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_i = e^{i'}{}_{i}\boldsymbol{e}_{i'}$.
Имея две координатные системы, мы произвольный вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ можем разложить по каждой из них:
$\bar{\boldsymbol{a}} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^2\boldsymbol{e}_2 = a^i\boldsymbol{e}_i$; $\bar{\boldsymbol{a}} = a^{1'}\boldsymbol{e}_{1'} + a^{2'}\boldsymbol{e}_{2'} + a^{3'}\boldsymbol{e}_{3'} = a^{i'}\boldsymbol{e}_{i'}$.
Выразим в первом равенстве векторы старого через векторы нового базиса.

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{a}} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^2\boldsymbol{e}_2 = \\
&= a^1(e^{1'}{}_1\boldsymbol{e}_{1'} + e^{2'}{}_1\boldsymbol{e}_{2'} + e^{3'}{}_1\boldsymbol{e}_{3'}) + \\
&+ a^2(e^{1'}{}_2\boldsymbol{e}_{1'} + e^{2'}{}_2\boldsymbol{e}_{2'} + e^{3'}{}_2\boldsymbol{e}_{3'}) + \\
&+ a^3(e^{1'}{}_3\boldsymbol{e}_{1'} + e^{2'}{}_3\boldsymbol{e}_{2'} + e^{3'}{}_3\boldsymbol{e}_{3'}) = \\
&= (e^{1'}{}_1a^1 + e^{1'}{}_2a^2 + e^{1'}{}_3a^3)e_{1'} + \\
&+ (e^{2'}{}_1a^1 + e^{2'}{}_2a^2 + e^{2'}{}_3a^3)e_{2'} + \\
&+ (e^{3'}{}_1a^1 + e^{3'}{}_2a^2 + e^{3'}{}_3a^3)e_{3'} = \\
&= e^{1'}{}_ia^i\boldsymbol{e}_{1'} + e^{2'}{}_ia^i\boldsymbol{e}_{2'} + e^{3'}{}_ia^i\boldsymbol{e}_{3'} = e^{i'}{}_ia^i\boldsymbol{e}_{i'}
\end{aligned}$$

Приведем подобные

Используем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам

Выражения в скобках, стоящие перед базисными векторами, представляют собой координаты вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ в новой системе координат, выраженные через координаты того же вектора в старой системе координат.

$$\begin{cases}
\boldsymbol{a}^{1'} = e^{1'}{}_1a^1 + e^{1'}{}_2a^2 + e^{1'}{}_3a^3 \\
\boldsymbol{a}^{2'} = e^{2'}{}_1a^1 + e^{2'}{}_2a^2 + e^{2'}{}_3a^3 \\
\boldsymbol{a}^{3'} = e^{3'}{}_1a^1 + e^{3'}{}_2a^2 + e^{3'}{}_3a^3
\end{cases}$$

Совершенно аналогично получаются выражения координат вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ в старом базисе через его же координаты в новом.

$$\begin{cases}
\boldsymbol{a}^{1} = e^{1}{}_{1'}a^{1'} + e^{1}{}_{2'}a^{2'} + e^{1}{}_{3'}a^{3'} \\
\boldsymbol{a}^{2} = e^{2}{}_{1'}a^{1'} + e^{2}{}_{2'}a^{2'} + e^{2}{}_{3'}a^{3'} \\
\boldsymbol{a}^{3} = e^{3}{}_{1'}a^{1'} + e^{3}{}_{2'}a^{2'} + e^{3}{}_{3'}a^{3'}
\end{cases}$$

Полученные равенства удобнее записывать в матричной форме.

$$\begin{bmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{1'}{}_1 & e^{1'}{}_2 & e^{1'}{}_3 \\ e^{2'}{}_1 & e^{2'}{}_2 & e^{2'}{}_3 \\ e^{3'}{}_1 & e^{3'}{}_2 & e^{3'}{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{1}{}_{1'} & e^{1}{}_{2'} & e^{1}{}_{3'} \\ e^{2}{}_{1'} & e^{2}{}_{2'} & e^{2}{}_{3'} \\ e^{3}{}_{1'} & e^{3}{}_{2'} & e^{3}{}_{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{bmatrix}.$$

Формулы, связывающие значения координат вектора в различных координатных системах, называют прямым и обратным преобразованием координат вектора. При этом, не имеет значения, которое преобразование является прямым, а которое обратным. Важно, что эти преобразования являются взаимно обратными по отношению друг к другу. Используя два последних матричных равенства, мы можем записать:

$$\begin{bmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{1'}{}_1 & e^{1'}{}_2 & e^{1'}{}_3 \\ e^{2'}{}_1 & e^{2'}{}_2 & e^{2'}{}_3 \\ e^{3'}{}_1 & e^{3'}{}_2 & e^{3'}{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{1'}{}_1 & e^{1'}{}_2 & e^{1'}{}_3 \\ e^{2'}{}_1 & e^{2'}{}_2 & e^{2'}{}_3 \\ e^{3'}{}_1 & e^{3'}{}_2 & e^{3'}{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & e^1{}_{3'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & e^2{}_{3'} \\ e^3{}_{1'} & e^3{}_{2'} & e^3{}_{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{bmatrix}.$$

Откуда следует, что

$$\begin{bmatrix} e^{1'}{}_1 & e^{1'}{}_2 & e^{1'}{}_3 \\ e^{2'}{}_1 & e^{2'}{}_2 & e^{2'}{}_3 \\ e^{3'}{}_1 & e^{3'}{}_2 & e^{3'}{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & e^1{}_{3'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & e^2{}_{3'} \\ e^3{}_{1'} & e^3{}_{2'} & e^3{}_{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$, где E, как

обычно, означает единичную матрицу. То есть, прямому и обратному преобразованию соответствуют взаимно обратные матрицы.

Несмотря на то, что матричная запись является намного компактнее полностью развернутой, но и она во многих теоретических преобразованиях излишне громоздка. Наиболее компактной является форма записи с использованием соглашения о суммировании – в дальнейшем мы ее будем называть индексной формой. Запишем последнее равенство в индексной форме: $e^{i'}{}_i e^i{}_{j'} = \delta^{i'}{}_{j'}$. Значок, стоящий в правой части, называется "дельтой Кронекера". Дельта Кронекера определяется следующим образом:

$$\delta^i{}_k = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k \\ 0, \text{ если } i \neq k \end{cases}.$$

В дальнейшем мы часто будем показывать, как выглядят те или иные выражения в различных формах записи, поскольку, хотя индексная форма и короче, а векторная нагляднее, матричная удобнее, когда дело доходит непосредственно до вычислений. Каждая из форм записи имеет свои неоспоримые преимущества и, так или иначе, используется в векторной алгебре.

Иногда одни и те же преобразования мы будем выполнять параллельно с использованием различных форм записи. Мы надеемся, что это поможет оценить достоинства каждой из них.

Итак, суммируем введенные нами обозначения и основные результаты.

Матрица преобразования координат в подробной и символической записи.

$$\left[\underset{e_1}{\begin{bmatrix} e^{1'}{}_1 \\ e^{2'}{}_1 \\ e^{3'}{}_1 \end{bmatrix}} \underset{e_2}{\begin{bmatrix} e^{1'}{}_2 \\ e^{2'}{}_2 \\ e^{3'}{}_2 \end{bmatrix}} \underset{e_3}{\begin{bmatrix} e^{1'}{}_3 \\ e^{2'}{}_3 \\ e^{3'}{}_3 \end{bmatrix}} \right] = \left[e^{\cdot'}{}_{\cdot} \right]; \quad \left[\underset{e_{1'}}{\begin{bmatrix} e^1{}_{1'} \\ e^2{}_{1'} \\ e^3{}_{1'} \end{bmatrix}} \underset{e_{2'}}{\begin{bmatrix} e^1{}_{2'} \\ e^2{}_{2'} \\ e^3{}_{2'} \end{bmatrix}} \underset{e_{3'}}{\begin{bmatrix} e^1{}_{3'} \\ e^2{}_{3'} \\ e^3{}_{3'} \end{bmatrix}} \right] = \left[e^{\cdot}{}_{\cdot'} \right].$$

Каждый из столбцов составлен из координат соответствующих базисных векторов одной из систем координат (новой или старой) в другой системе координат.

Произвольный вектор в различных системах координат.

$$\bar{\boldsymbol{a}} \doteq \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \left[a^{\bullet}\right] \doteq \begin{bmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{bmatrix} = \left[a^{\bullet'}\right].$$

Матрицы прямого и обратного преобразования координат являются взаимно обратными.

$$\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet'}\right] = \left[a^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet}\right] = E \doteq e^{i}{}_{i'}e^{i'}{}_{k} = \delta^{i}{}_{k}.$$

Формулы преобразования координат вектора при переходе от старой системы координат к новой и обратно.

$$\left[a^{\bullet'}\right] = \left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet}\right] \doteq a^{i'} = e^{i'}{}_{i}a^{i} \text{ и } \left[a^{\bullet}\right] = \left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[a^{\bullet'}\right] \doteq a^{i} = e^{i}{}_{i'}a^{i'}$$

В некотором смысле матрицы $\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]$ и $\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]$ являются матрицами тождественного преобразования: они преобразуют вектор, заданный своими координатами в одной координатной системе, в тот же самый вектор, но через координаты в другой координатной системе. Поэтому, неслучайно матрицы $\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]$, $\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]$ и матрицу тождественного преобразования E мы обозначаем одной и той же буквой латинского алфавита.

Пример на определение матрицы преобразования координат.

Пусть ΔABC – произвольный треугольник (рис. 40). Точка O – точка пересечения медиан AD и CE. В качестве первоначальной или "старой" системы координат выберем векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, совпадающих со сторонами AB и AC треугольника. Пусть векторы базиса новой системы координат $\boldsymbol{e}_{1'}$ и $\boldsymbol{e}_{2'}$ совпадают с отрезками медиан OB и OD соответственно. Попробуем найти матрицу преобразования координат, прямую и обратную.

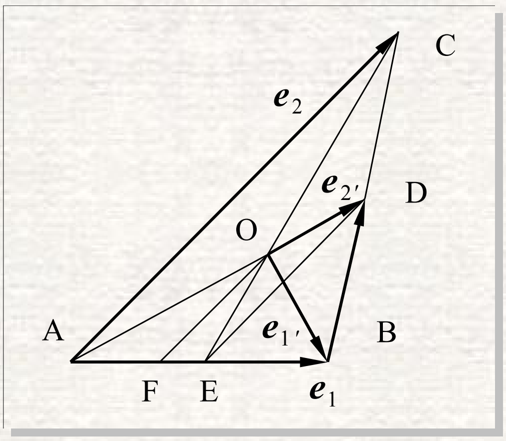


Рис. 40

Для этого нам потребуется разложить векторы нового базиса по векторам старого. Параллельная проекция вектора $\boldsymbol{e}_{2'}$ на вектор $\boldsymbol{e}_1$ по направлению вектора $\boldsymbol{e}_2$ совпадает с отрезком FE. Так как по условию CE медиана, то отрезок AE равен половине $\left|\boldsymbol{e}_1\right|$, а так как в точке пересечения медианы делятся в отношении 1:3, то отрезок FE равен 1/3 от этой половины: $e^{1}{}_{2'} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Аналогично $e^{2}{}_{2'} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Параллельная проекция вектора $\boldsymbol{e}_{1'}$ на вектор $\boldsymbol{e}_1$ совпадает с отрезком FB, что составляет $\frac{2}{3}$ от длины вектора $\boldsymbol{e}_1$, поэтому, $e^1{}_{1'} = \frac{2}{3}$. Проекция вектора $\boldsymbol{e}_{1'}$ на вектор $\boldsymbol{e}_2$ по направлению параллельному $\boldsymbol{e}_1$ составляет $\frac{2}{3}$ от половины длины вектора $\boldsymbol{e}_2$ и противоположна к $\boldsymbol{e}_2$ по направлению. Все это дает возможность записать для координат векторов нового базиса следующие выражения:

$$e^1{}_{1'} = \frac{2}{3}\,;\ e^2{}_{1'} = -\frac{2}{3}\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\,;$$

$$e^1{}_{2'} = \frac{1}{6}\,;\ e^2{}_{2'} = \frac{1}{6}\,.$$

Полученные координаты позволяют выразить новые векторы через старые в векторной

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2 \text{ и } \boldsymbol{e}_{2'} = \frac{1}{6}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{6}\boldsymbol{e}_2\,;$$

и координатной

$$\boldsymbol{e}_{1'} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{e}_{2'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

формах.

Теперь мы можем записать матрицу преобразования координат:

$$\left[a^{\bullet}{}_{\bullet'}\right] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Полученную матрицу можно использовать для вычисления координат векторов в старой системе координат по известным координатам в новой системе. Например, вектор $\overline{\boldsymbol{BD}}$ в новой системе имеет координаты:

$$\overline{\boldsymbol{BD}} \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, в старой мы получим:

$$\overline{\boldsymbol{BD}} \doteq \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \doteq \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1)\,.$$

Для нахождения обратного преобразования нам необходимо найти обратную матрицу.

$$\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet}\right] = \left[a^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{3}\right)}\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Опять же легко проверить, что, умножая на матрицу координат вектора $\overline{\boldsymbol{BD}}$ в старой системе, мы получим координаты того же вектора в новой системе:

$$\overline{\boldsymbol{BD}} \doteq \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Пример на определение матрицы преобразования координат для случая, когда одна из систем координат является декартовой.

Этот случай является менее общим, но он обладает большим практическим значением, так как на практике в качестве одной из координатных систем мы чаще всего выбираем декартову систему координат.

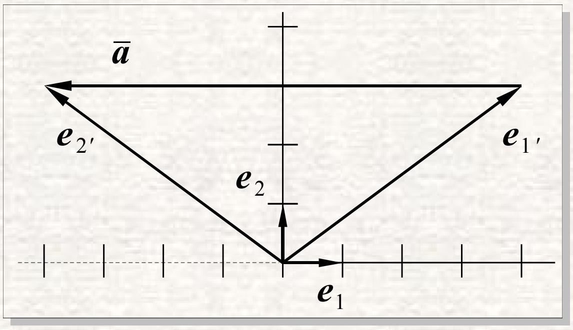


Рис. 41

Пусть в качестве основной системы координат выбрана декартова система с базисными векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{e}_{1'}$ и $\boldsymbol{e}_{2'}$ – базисные векторы новой системы координат, координаты которых относительно старой системы координат нам известны (рис. 41):

$$\boldsymbol{e}_{1'} \doteq \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_{2'} \doteq \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Из координат этих векторов легко составить матрицу преобразования координат:

$$\left[a^{\bullet}{}_{\bullet'}\right] = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Декартова система координат особенная и для того, чтобы подчеркнуть это, мы в обозначении матрицы преобразования от произвольной системы к декартовой будем точку заменять на звездочку:

$$\left[a^{\bullet}{}_{\bullet'}\right] \Rightarrow \left[\text{для декартовой}\right] \Rightarrow \left[a^{*}{}_{\bullet'}\right] = \begin{bmatrix} e^{x}{}_{1'} & e^{x}{}_{2'} \\ e^{y}{}_{1'} & e^{y}{}_{2'} \end{bmatrix}.$$

Соответственно, обратную к ней будем обозначать так:

$$\left[a^{*}{}_{\bullet'}\right] = \left[a^{\bullet'}{}_{*}\right] = \begin{bmatrix} e^{1'}{}_{x} & e^{1'}{}_{y} \\ e^{2'}{}_{x} & e^{2'}{}_{y} \end{bmatrix}.$$

В новой системе координат вектор $\overline{\boldsymbol{a}}$ имеет координаты $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Следовательно,

$$\overline{\boldsymbol{a}} \doteq \left[e^{*}{}_{\bullet'}\right]\left[a^{\bullet'}\right] = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

.Скалярное умножение векторов в произвольных косоугольных координатах

Пусть нам даны два вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$, которые заданы своими координатами в произвольной косоугольной системе координат $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$:

$$\bar{\boldsymbol{a}} \doteq \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix};\ \bar{\boldsymbol{b}} \doteq \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}.$$

Как вычислить скалярное произведение этих векторов? Чему равно $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = ?$

Если бы речь шла о декартовой системе координат, то все было бы просто: $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$. Однако для произвольной системы координат это равенство не выполняется. Тем не менее мы можем им воспользоваться. Для этого нам всего лишь необходимо перейти от произвольной системы координат к декартовой.

$$\bar{\boldsymbol{a}} \doteq \begin{bmatrix} a^x \\ a^y \\ a^z \end{bmatrix} = \left[e^{*}{}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} \doteq \begin{bmatrix} b^x \\ b^y \\ b^z \end{bmatrix} = \left[e^{*}{}_{\bullet}\right]\left[b^{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}.$$

Теперь мы можем записать:

$$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = a^x b^x + a^y b^y + a^z b^z = \begin{bmatrix} a^x & a^y & a^z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^x \\ b^y \\ b^z \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet}\right]\right)^T\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]\left[b^{\bullet}\right] = \left[a^{\bullet}\right]^T\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]^T\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]\left[b^{\bullet}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^y{}_1 & e^z{}_1 \\ e^x{}_2 & e^y{}_2 & e^z{}_2 \\ e^x{}_3 & e^y{}_3 & e^z{}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}.$$

Введем обозначение:

$$\begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^y{}_1 & e^z{}_1 \\ e^x{}_2 & e^y{}_2 & e^z{}_2 \\ e^x{}_3 & e^y{}_3 & e^z{}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \left[g_{\bullet\bullet}\right].$$

Матрицу $\left[g_{\bullet\bullet}\right]$ будем называть таблицей или матрицей координат метрического тензора.

Очевидно, что $g_{ik} = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k$, или

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Перепишем теперь формулу для скалярного умножения с учетом введенных обозначений:

$$\bar{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} = \left[a^{\bullet}\right]^T \left[g_{\bullet\bullet}\right] \left[b^{\bullet}\right]$$, и в индексной форме:

$$\bar{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\boldsymbol{b}} = g_{ik} a^i b^k .$$

Данная формула для скалярного произведения является общей. Она справедлива для произвольной косоугольной системы координат. В декартовой же системе матрица координат метрического тензора совпадает с единичной матрицей.
В самом деле, для декартовой системы
$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$, следовательно, $g_{ik} = \delta_{ik}$ и
$\bar{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\boldsymbol{b}} = g_{ik} a^i b^k = a^i b^i = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

.Метрический тензор

Метрический тензор представляет собой набор коэффициентов g_{ik}, привязанный к определенной системе координат. Если мы переходим к другой системе, то в общем случае будем иметь и другие коэффициенты метрического тензора, которые принято называть координатами. Координаты метрического тензора зависят от выбранной координатной системы и непосредственно выражаются через ее базисные векторы. Тем не менее метрический тензор, также как и вектор, отражает вполне определенную геометрическую реальность, поскольку его координаты в различных координатных системах связаны известным законом преобразования.
Найдем закон преобразования координат метрического тензора.
$g_{i'k'} = \boldsymbol{e}_{i'} \cdot \boldsymbol{e}_{k'} = e^i{}_{i'} \boldsymbol{e}_i \cdot e^k{}_{k'} \boldsymbol{e}_k = e^i{}_{i'} e^k{}_{k'} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = e^i{}_{i'} e^k{}_{k'} g_{ik}$, следовательно,
$g_{i'k'} = e^i{}_{i'} e^k{}_{k'} g_{ik} \doteq \left[g_{\bullet'\bullet'}\right] = \left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^T \left[g_{\bullet\bullet}\right] \left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]$ и есть искомый закон преобразования координат метрического тензора в индексной и в матричной формах. Мы обвели этот закон рамочкой, поскольку в тензорной алгебре он играет принципиальную роль, а нам он встретился впервые. В дальнейшем мы сможем убедиться, что этот закон проявляется при изучении самых разнообразных объектов. Для начала следует обратить внимание на принципиальное сходство его с законом преобразования координат вектора:

Закон преобразования координат вектора	Закон преобразования координат метрического тензора
$a^{i'} = e^{i'}{}_i a^i \doteq \left[a^{\bullet'}\right] = \left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet}\right]$	$g_{i'k'} = e^i{}_{i'} e^k{}_{k'} g_{ik} \doteq \left[g_{\bullet'\bullet'}\right] = \left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^T \left[g_{\bullet\bullet}\right] \left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]$

Свойства метрического тензора.
1. Матрица координат метрического тензора симметрична.
Это свойство непосредственно следует из определения. В самом деле:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$, но $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_i$ и, следовательно, $g_{ik} = g_{ki}$.

2. Матрица метрического тензора определяет линейные размеры базисных векторов и углы между ними.

$|\boldsymbol{e}_i|^2 = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k = g_{ii}$ и $|\boldsymbol{e}_i| = \sqrt{\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i} = \sqrt{g_{ii}}$.

$$\cos(\measuredangle\, \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_k) = \frac{\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i}{|\boldsymbol{e}_i|\,|\boldsymbol{e}_k|} = \frac{g_{ik}}{|g_{ii}||g_{kk}|}.$$

В этих формулах не используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Метрический тензор аккумулирует в себе информацию о метрических свойствах пространства. Он необходим для вычисления длин векторов, углов между ними, расстояний между точками, площадей фигур и объемов тел. Иногда даже говорят, что метрический тензор определяет метрику пространства, хотя, если мы имеем дело с классической евклидовой геометрией, метрика всегда предполагается заданной. Необходимо только определиться с масштабами длин и углов. Но если мы имеем дело с некоторым абстрактным векторным пространством, понимая под векторами нечто отличное от направленных отрезков, мы можем столкнуться со случаями, когда расстояние между точками пространства определяется по другим правилам. Возможны также случаи, когда расстояние вообще нельзя никак определить. Векторные пространства, в которых правила для определения расстояниями между его точками не определены или не имеют смысла, называются аффинными, а свойства таких пространств изучает аффинная геометрия. Так вот, аффинную геометрию можно наделить метрическими свойствами и можно это сделать различными способами. Выбор способа и конкретного правила зависит от того, какую реальность мы хотим таким образом смоделировать. Одним из таких способов и является задание координат метрического тензора. В этом случае метрический тензор будет определять метрику пространства.

3. Матрица метрического тензора в ортонормированном базисе совпадает с единичной.

$$g_{11} = \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1; \qquad g_{12} = g_{21} = \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0;$$
$$g_{22} = \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1; \qquad g_{13} = g_{31} = \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0;$$
$$g_{33} = \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1; \qquad g_{23} = g_{32} = \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0.$$

4. Закон преобразования координат метрического тензора

$$g_{i'k'} = e^i_{\ i'} e^k_{\ k'} g_{ik} \doteq [g_{\cdot'\cdot'}] = [e^{\cdot}_{\ \cdot'}]^T [g_{\cdot\cdot}][e^{\cdot}_{\ \cdot'}].$$

5. Определитель матрицы метрического тензора на плоскости равен квадрату площади базисного параллелограмма.

Докажем это.

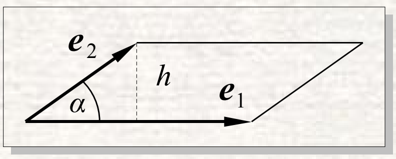


Рис. 42

Обозначим площадь базисного параллелограмма S_e, тогда $S_e = |\boldsymbol{e}_1| h$.

Но $h = |\boldsymbol{e}_1|\sin\alpha$. А $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{g_{12}}{g_{11}g_{22}}\right)^2}$. Следовательно,

$$S_e = |\boldsymbol{e}_1|h = |\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\sin\alpha = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\sqrt{1-\left(\frac{g_{12}}{g_{11}g_{22}}\right)^2} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}}\,.$$

Учитывая, что $g_{12} = g_{21}$, получаем: $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = S_e^2$.

6. Определитель матрицы метрического тензора в трехмерном пространстве равен квадрату объема базисного параллелепипеда.

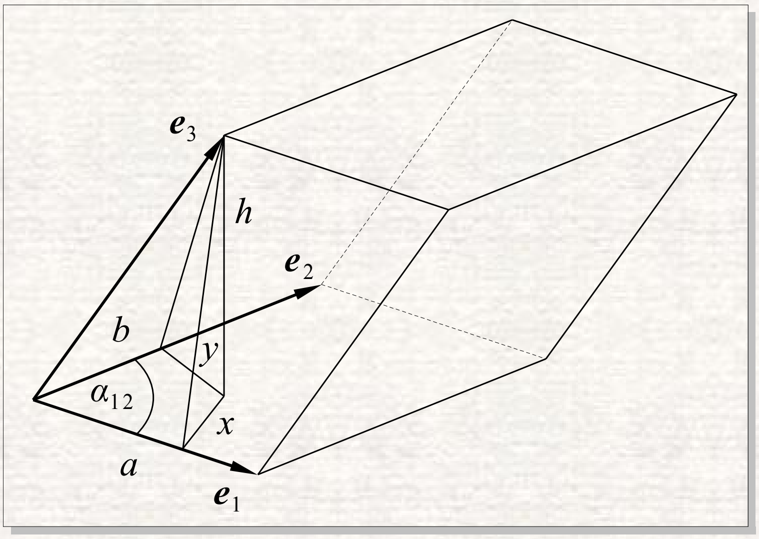


Рис. 43

Построим параллелепипед на векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ (рис. 43). Из конца вектора $\boldsymbol{e}_3$ опустим перпендикуляр h на основание: параллелограмм, построенный на векторах $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Объем параллелепипеда V_e равен $V_e = S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)h$, где $S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ – площадь основания.

$S(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = |\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\sin\alpha_{12} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\sin\alpha_{12}$.

Для того чтобы вычислить объем, нам осталось найти высоту параллелепипеда h. Из точки пересечения высоты h и плоскости основания опустим перпендикуляры x и y на боковые ребра параллелепипеда. Перпендикуляры отсекут на ребрах при этом отрезки a и b. Длины отрезков мы можем найти как

$a = |\boldsymbol{e}_3|\cos\alpha_{13} = \sqrt{g_{33}}\cos\alpha_{13}$, $b = |\boldsymbol{e}_3|\cos\alpha_{23} = \sqrt{g_{33}}\cos\alpha_{23}$.

Из уравнения $a^2 + x^2 + h^2 = |\boldsymbol{e}_3|^2$ мы смогли бы найти h, если бы знали x.

Для того чтобы найти x, обратимся к рис. 44, на котором изображен вид сверху на плоскость основания параллелепипеда.

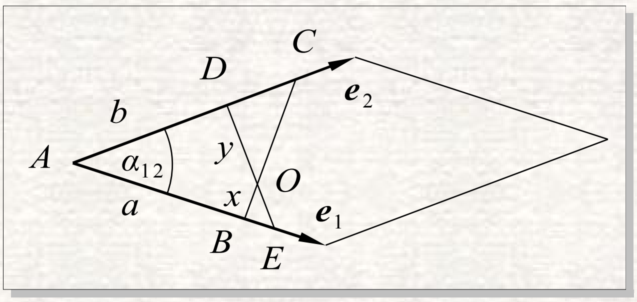


Рис. 44

Точка O является основанием высоты h, которая на рисунке не показана. x и y – перпендикуляры, опущенные на стороны параллелограмма, следовательно, треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$ прямоугольные. Вертикальные углы $\measuredangle DOC$ и $\measuredangle BOE$ равны углу $\measuredangle DAB = \alpha_{12}$.

Катет BC прямоугольного треугольника $\triangle ABC$ с одной стороны равен

$BC = a\operatorname{tg}\alpha_{12}$, с другой стороны, тот же катет равен $BC = x + \dfrac{y}{\cos\alpha_{12}}$.

Приравнивая эти выражения и умножая на $\cos\alpha_{12}$, получаем первое уравнение:

$x\cos\alpha_{12} + y = a\operatorname{tg}\alpha_{12}\cos\alpha_{12} = a\sin\alpha_{12}$.

Рассматривая второй прямоугольный треугольник ADE, мы приходим ко второму уравнению: $x + y\cos\alpha_{12} = b\sin\alpha_{12}$.

Заменяя a и b соответствующими выражениями, мы приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x + y\cos\alpha_{12} = \sqrt{g_{33}}\cos\alpha_{23}\sin\alpha_{12} \\ x\cos\alpha_{12} + y = \sqrt{g_{33}}\cos\alpha_{13}\sin\alpha_{12} \end{cases},$$

решая которую, находим x; y нам не нужен.

$$x = \sqrt{g_{33}}\,\frac{\cos\alpha_{23} - \cos\alpha_{13}\cos\alpha_{12}}{\sin\alpha_{12}}.$$

Подставляя x в уравнение $a^2 + x^2 + h^2 = |\boldsymbol{e}_3|^2$, получаем:

$$g_{33}\cos^2\alpha_{13} + g_{33}\frac{(\cos\alpha_{23} - \cos\alpha_{13}\cos\alpha_{12})^2}{\sin^2\alpha_{12}} + h^2 = g_{33}.$$

Решая уравнение относительно h^2, получаем:

$$h^2 = \frac{g_{33}}{\sin^2\alpha_{12}}(\sin^2\alpha_{12} - \cos^2\alpha_{23} - \cos^2\alpha_{13} + 2\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{23}\cos\alpha_{13}).$$

Подставим полученное выражение в формулу для объема и произведем необходимые преобразования

$$\begin{aligned} V_e^2 &= g_{11}g_{22}\sin^2\alpha_{12}h^2 = \\ &= g_{11}g_{22}g_{33}(\sin^2\alpha_{12} - \cos^2\alpha_{23} - \cos^2\alpha_{13} + 2\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{23}\cos\alpha_{13}) = \\ &= g_{11}g_{22}g_{33}(1 - \cos^2\alpha_{12} - \cos^2\alpha_{23} - \cos^2\alpha_{13} + 2\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{23}\cos\alpha_{13}) = \\ &= g_{11}g_{22}g_{33}\left(1 - \frac{g^2{}_{12}}{g_{11}g_{22}} - \frac{g^2{}_{23}}{g_{22}g_{33}} - \frac{g^2{}_{13}}{g_{11}g_{33}} + 2\frac{g_{12}g_{23}g_{13}}{g_{11}g_{22}g_{33}}\right) = \\ &= g_{11}g_{22}g_{33} + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2g_{33} - g_{23}^2g_{11} - g_{13}^2g_{22}. \end{aligned}$$

Вот и все, осталось только узнать в полученном результате выражение для определителя. Развернем определитель метрического тензора, учитывая симметрию его элементов.

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{vmatrix} = \\ &= g_{11}g_{22}g_{33} + g_{13}g_{12}g_{23} + g_{12}g_{23}g_{13} - g_{13}g_{22}g_{13} - g_{12}g_{12}g_{33} - g_{11}g_{23}g_{23} = \\ &= g_{11}g_{22}g_{33} + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2g_{33} - g_{23}^2g_{11} - g_{13}^2g_{22}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем констатировать, что определитель матрицы метрического тензора равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на векторах базиса:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = |g_{\bullet\bullet}| V_e^2 .$$

Определитель метрического тензора часто возникает в уравнениях, поэтому для него используется специальное обозначение: $\det[g_{\bullet\bullet}] = \Delta[g_{\bullet\bullet}] = |g_{\bullet\bullet}| = g_{\bullet\bullet} = g$.

Приведенное нами доказательство является чисто геометрическим. Оно не зависит от случайностей произвольного выбора координатных систем, оно использует только испытанные и вызывающие доверие приемы элементарной геометрии и в этом его достоинство. Однако, как и многие другие прямые геометрические доказательства, оно трудоемко и требует терпения и аккуратности. Развивая алгебраические идеи теории векторов, мы готовы дать другое, менее мучительное доказательство шестого свойства метрического тензора.

Воспользуемся законом преобразования координат метрического тензора. Пусть нам известны координаты метрического тензора в некоторой системе координат:

$$[g_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}.$$

Перейдем к некоторой ортонормированной системе и найдем координаты метрического тензора в ней, воспользовавшись для этого законом преобразования координат.

$[g_{**}] = [e^{\bullet}{}_{*}]^T [g_{\bullet\bullet}][e^{\bullet}{}_{*}]$, где звездочкой обозначен, как всегда, индекс, соответствующий названиям базисных векторов декартовой системы координат, а $[g_{**}]$ – матрица метрического тензора в декартовой системе. Но в декартовой системе координат матрица метрического тензора совпадет с единичной матрицей, следовательно: $[e^{\bullet}{}_{*}]^T [g_{\bullet\bullet}][e^{\bullet}{}_{*}] = E$.

Умножив полученное уравнение справа и слева на матрицы $[e^{\bullet}{}_{*}]^{-T}$ и $[e^{\bullet}{}_{*}]^{-1}$, получим:

$[g_{\bullet\bullet}] = [e^{\bullet}{}_{*}]^{-T} E [e^{\bullet}{}_{*}]^{-1} = [e^{\bullet}{}_{*}]^{-T} [e^{\bullet}{}_{*}]^{-1}$.

Теперь вспомнив, что $[e^{\bullet}{}_{*}]^{-1} = [e^{*}{}_{\bullet}]$,

выразим $[g_{\bullet\bullet}] = [e^{*}{}_{\bullet}]^{-T} [e^{*}{}_{\bullet}]^{-1}$.

Чтобы яснее было видно, что получилось, выпишем матрицы подробно:

$$[g_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^y{}_1 & e^z{}_1 \\ e^x{}_2 & e^y{}_2 & e^z{}_2 \\ e^x{}_3 & e^y{}_3 & e^z{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица $[e^{*}{}_{\bullet}]$ составлена из координат векторов базиса в ортонормированной системе координат. Следовательно, ее определитель равен ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$. А так как определитель произведения матриц равен произведению определителей, и определитель матрицы не изменяется от ее транспонирования, то:

$\det[g_{\bullet\bullet}] = \Delta[g_{\bullet\bullet}] = |g_{\bullet\bullet}| = g_{\bullet\bullet} = g = sV_e sV_e = V_e^2$, где s означает, как всегда, знак ориентированного объема.

Продемонстрируем еще одну идею доказательства.
Воспользуемся на этот раз определением

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся некоторой ортонормированной системой координат. Выражая скалярные произведения через координаты векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ в ортонормированной системе, получим:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^x & e_1^y & e_1^z \\ e_2^x & e_2^y & e_2^z \\ e_3^x & e_3^y & e_3^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^x & e_2^x & e_3^x \\ e_1^y & e_2^y & e_3^y \\ e_1^z & e_2^z & e_3^z \end{bmatrix}.$$

Ну а дальше, все как в предыдущем доказательстве.
7. Матрица метрического тензора симметричная и положительно определенная.
О том, что матрица симметричная мы уже говорили в первом нашем свойстве. Но между первым свойством и седьмым мы говорили об очень многих разных вещах, так что не грех будет и повториться. Что касается положительной определенности (напомним, что положительно определенной матрицей называется матрица, определитель которой больше нуля), то из шестого свойства сразу следует $g = V_e^2 > 0$.
На этом, пожалуй, можно и закончить разговор о метрическом тензоре.

.Взаимный координатный базис

Вернемся к задаче вычисления скалярного произведения в произвольной косоугольной системе координат $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$. Мы знаем, что для двух произвольных векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} &= (a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3)\cdot(b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 + b^3\boldsymbol{e}_3) = \\ &= a^1b^1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + a^1b^2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 + a^1b^3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 + \\ &+ a^2b^1\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 + a^2b^2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 + a^2b^3\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 + \\ &+ a^3b^1\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 + a^3b^2\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 + a^3b^3\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 = \\ &= a^1b^1g_{11} + a^1b^2g_{12} + a^1b^3g_{13} + \\ &+ a^2b^1g_{21} + a^2b^2g_{22} + a^2b^3g_{23} + \\ &+ a^3b^1g_{31} + a^3b^2g_{32} + a^3b^3g_{33} = a^ib^kg_{ik}, \end{aligned}$$

и в общем случае ни один из коэффициентов g_{ik} не равен нулю. В развернутом виде выражение достаточно далеко от той идеальной простоты, которую мы имели в декартовой системе координат. Частично положение можно исправить, если для выражения векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ использовать различные базисы. Действительно, если помимо базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ использовать некоторый базис $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$ (верхнее положение индексов мы использовали для того, чтобы отличить этот базис от основного) и при этом потребовать, чтобы $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^k = \delta_i^{\ k} = \delta^k_{\ i} = \delta_i^k$ (порядок индексов в символах Кронекера не имеет значения), то $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} = (a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3)\cdot(b_1\boldsymbol{e}^1 + b_2\boldsymbol{e}^2 + b_3\boldsymbol{e}^3) = a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3 = a^ib_i$, где b_i означает координату вектора $\bar{\boldsymbol{b}}$ во вспомогательном базисе $\boldsymbol{e}^k$.

Заручившись поддержкой вспомогательной системы координат, которую принято называть взаимной, мы получаем максимально простое выражение для скалярного умножения. Сама же взаимная система координат полностью определяется основной системой и условиями $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^k = \delta_i^k$, которые словами можно выразить так:

1. Каждый базисный вектор взаимной системы ортогонален ко всем разноименным с ним базисным векторам основной системы.
2. Длина базисного вектора взаимной системы выбирается таким образом, чтобы скалярное произведение его на одноименный вектор основной системы равнялось единице.

Сами векторы взаимного базиса удобнее всего вычислить через их координаты. Координаты можно вычислить либо в основном базисе, либо в некотором вспомогательном. Мы используем обе эти возможности. Для начала покажем, как можно вычислить координаты векторов взаимного базиса во вспомогательной декартовой системе координат. Воспользуемся тем, что

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^k = \delta_i{}^k = \delta_i^k \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}^2 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}^3 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}^2 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}^3 \\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}^2 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $\boldsymbol{e}^*{}_i$ и $\boldsymbol{e}^{*i}$ – координаты векторов основного и взаимного базисов в декартовой системе координат, тогда

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}^2 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}^3 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}^2 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}^3 \\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}^1 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}^2 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^y{}_1 & e^z{}_1 \\ e^x{}_2 & e^y{}_2 & e^z{}_2 \\ e^x{}_3 & e^y{}_3 & e^z{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x1} & e^{x2} & e^{x3} \\ e^{y1} & e^{y2} & e^{y3} \\ e^{z1} & e^{z2} & e^{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножив правую и левую часть уравнения на матрицу

$\begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^y{}_1 & e^z{}_1 \\ e^x{}_2 & e^y{}_2 & e^z{}_2 \\ e^x{}_3 & e^y{}_3 & e^z{}_3 \end{bmatrix}^{-1}$, получим

$\begin{bmatrix} e^{x1} & e^{x2} & e^{x3} \\ e^{y1} & e^{y2} & e^{y3} \\ e^{z1} & e^{z2} & e^{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^y{}_1 & e^z{}_1 \\ e^x{}_2 & e^y{}_2 & e^z{}_2 \\ e^x{}_3 & e^y{}_3 & e^z{}_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{bmatrix}^{-T}$, или в краткой записи $\left[e^{*\bullet}\right] = \left[e^*{}_\bullet\right]^{-T}$.

То есть матрица координат взаимного базиса равна обратной и транспонированной матрице координат основного базиса в некоторой декартовой системе координат.

Рассмотрим простой в вычислительном отношении пример на нахождение взаимного базиса для системы координат на плоскости.

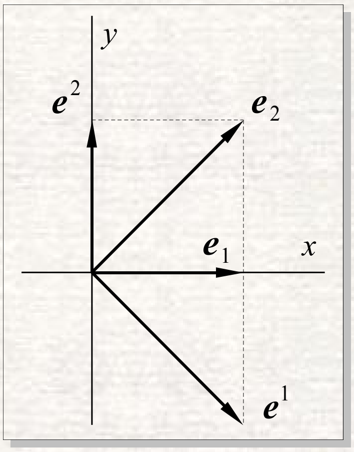


Рис. 45

Пусть векторы основного базиса $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ (рис. 45) заданы своими координатами в декартовой системе координат:

$$\boldsymbol{e}_1 \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } \boldsymbol{e}_2 \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\left[e^*_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \left[e^*_{\bullet}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \ \left[e^*_{\bullet}\right]^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{e}^1 \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ и } \boldsymbol{e}^2 \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Нахождение взаимного базиса в пространстве усложняется только за счет процедуры вычисления обратной матрицы, других принципиальных отличий нет.

Теперь воспользуемся другой более общей возможностью и выразим векторы взаимного базиса через векторы основного: $\boldsymbol{e}^i = e^{ki}\boldsymbol{e}_k$. Умножим скалярно данное уравнение на вектор $\boldsymbol{e}^n$:

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^n = e^{ki}\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^n = e^{ki}\delta^n{}_k = e^{ni}.$$

В свое время для скалярного произведения векторов основного базиса мы ввели обозначение $g_{ik} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k$. Логично тот же принцип использовать и для обозначения скалярного произведения векторов взаимного базиса: $\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^k = g^{ik} = g^{ki}$. Следовательно, $\boldsymbol{e}^i = g^{ik}\boldsymbol{e}_k$.

Теперь равенство $\boldsymbol{e}^i = g^{ki}\boldsymbol{e}_k$ умножим слева и справа на вектор $\boldsymbol{e}_n$: $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_n = g^{ki}\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_n \Rightarrow \delta^i{}_n = g^{ki}g_{kn}$. Из чего можно заключить, что матрица, составленная из коэффициентов $g^{k'i'}$, является обратной по отношению к матрице метрического тензора, то есть $\left[g^{\bullet\bullet}\right] = \left[g_{\bullet\bullet}\right]^{-1}$. Отсюда также следует, что $\det\left[g^{\bullet\bullet}\right] = \left|g^{\bullet\bullet}\right| = \dfrac{1}{\left|g_{\bullet\bullet}\right|} = \dfrac{1}{g_{\bullet\bullet}} = \dfrac{1}{g}$ в принятых нами ранее обозначениях. Коэффициенты матриц $\left[g_{\bullet\bullet}\right]$ и $\left[g^{\bullet\bullet}\right]$ принято рассматривать как координаты одного и того же метрического тензора только в разных координатных системах – основной и взаимной.

Вернемся к нахождению векторов взаимного базиса.

Пусть $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ – векторы основного базиса, причем $\left|\boldsymbol{e}_1\right| = \left|\boldsymbol{e}_2\right| = 1$, угол между ними $\alpha = 60°$ (рис. 46).

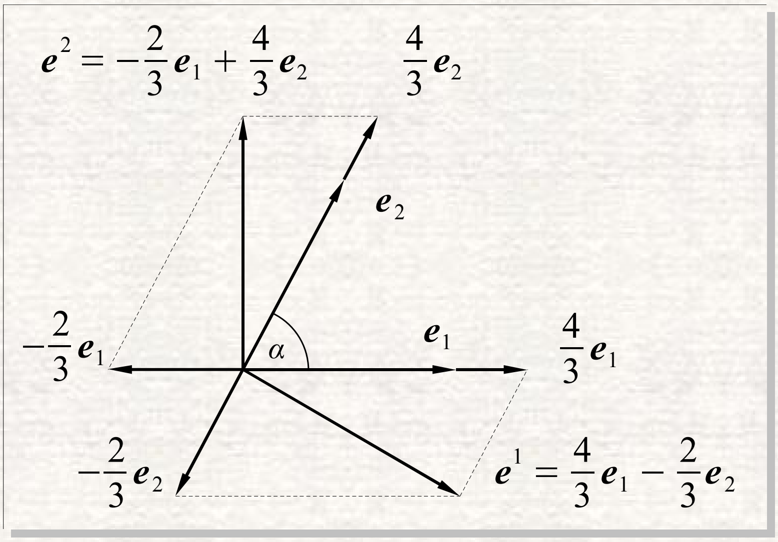


Рис. 46

Найдем координаты метрического тензора в основном и во взаимном базисах.

$$[g_{\cdot\cdot}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix};$$

$$[g^{\cdot\cdot}] = [g_{\cdot\cdot}]^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

И, воспользовавшись уравнением $\boldsymbol{e}^i = g^{ki}\boldsymbol{e}_k$, находим векторы взаимного базиса

$$\boldsymbol{e}^i = g^{ik}\boldsymbol{e}_k \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\boldsymbol{e}_1 & -\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2 \\ -\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1 & \frac{4}{3}\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем:

$\boldsymbol{e}^1 = \frac{4}{3}\boldsymbol{e}_1 - \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}^2 = -\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{4}{3}\boldsymbol{e}_2$.

.Ковариантные и контравариантные координаты вектора

Основная и взаимная системы координат связаны друг с другом соотношениями $\boldsymbol{e}^i = g^{ki}\boldsymbol{e}_k$. Выбирая основную систему, мы автоматически определяем и взаимную систему координат. Мы знаем, что при переходе к новым координатам, векторы базисов новой и старой систем координат связаны соотношением

$$\boldsymbol{e}_{i'} = e^i_{\ i'}\boldsymbol{e}_i \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{1'} \\ \boldsymbol{e}_{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^1_{\ 1'} & e^2_{\ 1'} \\ e^1_{\ 2'} & e^2_{\ 2'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix},$$

которое принято называть ковариантным преобразованием. Соответственно и векторы основного базиса, и индексы, которыми они пронумерованы, называются ковариантными.

Координаты вектора в основной системе координат изменяются в соответствии с другим законом:

$$a^{i'} = e^{i}{}_{i'} a^{i} \doteq \begin{bmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{1'}{}_{1} & e^{1'}{}_{2} \\ e^{2'}{}_{1} & e^{2'}{}_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{1} \\ a^{2} \end{bmatrix},$$

который называется контравариантным. Матрица, определяющая контравариантное преобразование, является обратной и транспонированной по отношению к матрице ковариантного преобразования:

$$\begin{bmatrix} e^{1'}{}_{1} & e^{1'}{}_{2} \\ e^{2'}{}_{1} & e^{2'}{}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{1}{}_{1'} & e^{2}{}_{1'} \\ e^{1}{}_{2'} & e^{2}{}_{2'} \end{bmatrix}^{-T}.$$

С этим и связан выбор названий – ковариантный и контравариантный. Соответственно и координаты вектора в основной системе координат, и индексы, которыми они пронумерованы, называются контравариантными. Ковариантные индексы принято писать внизу, а контравариантные – вверху. Мы с самого начала старались придерживаться этого правила, хотя до настоящего момента нам было сложно объяснить причину необычного для индекса верхнего положения.

Мы пока еще не пытались выяснить законы преобразования векторов взаимного базиса и координат векторов в этом базисе, но если принятые нами обозначения не являются случайными, то векторы взаимного базиса $\boldsymbol{e}^{i}$ должны быть контравариантными, а координаты a_{i} – ковариантными. Проверим это предположение. Для начала найдем закон преобразования контравариантных координат метрического тензора. Все операции будем выполнять в индексной форме с дословным переводом на язык матриц. Начнем с того, что матрицы $\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]$ и $\left[g_{\bullet'\bullet'}\right]$ координат метрического тензора являются взаимно обратными, следовательно, $\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[g_{\bullet'\bullet'}\right] = E$ и $g^{i'k'} g_{k'n'} = \delta^{i'}{}_{n'}$.

$$g^{i'k'} g_{k'n'} = \delta^{i'}{}_{n'} = g^{i'k'} e^{k}{}_{k'} g_{kn} e^{n}{}_{n'};$$

$$\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[g_{\bullet'\bullet'}\right] = E = \left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right].$$

Здесь мы использовали известный закон преобразования ковариантных координат метрического тензора.

$$\delta^{i'}{}_{n'} e^{n'}{}_{m} = g^{i'k'} e^{k}{}_{k'} g_{kn} e^{n}{}_{n'} e^{n'}{}_{m};$$

Умножаем на $e^{n'}{}_{m}$ и суммируем по всем возможным значениям индекса n'. Такая операция называется сверткой по индексу n'. В матричном виде операции свертки соответствует умножение на матрицу $\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]$.

$$E\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right] = \left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right].$$

Матрицы $\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]$ и $\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]$ взаимно обратные, поэтому $\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right] = E$ и $e^{n}{}_{n'} e^{n'}{}_{m} = \delta^{n}{}_{m}$.

$$e^{i'}{}_{m} = g^{i'k'} e^{k}{}_{k'} g_{kn} \delta^{n}{}_{m} = g^{i'k'} e^{k}{}_{k'} g_{km}.$$

При свертке g_{kn} с символом Кронекера $\delta^{n}{}_{m}$ общий текущий индекс n в g_{kn} заменяется на второй символ m.

$$\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]=\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}\left[g_{\bullet\bullet}\right]E=\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}\left[g_{\bullet\bullet}\right].$$

Свертываем правую и левую части равенства с g^{mp}.

$$e^{i'}{}_{m}g^{mp}=g^{i'k'}e^{k}{}_{k'}g_{km}g^{mp}=g^{i'k'}e^{k}{}_{k'}\delta^{p}{}_{k}=g^{i'k'}e^{p}{}_{k'};$$

$$\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]=\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]=\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}E=\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}.$$

Свертываем с $e^{q'}{}_{p}$.

$$e^{i'}{}_{m}g^{mp}e^{q'}{}_{p}=g^{i'k'}e^{p}{}_{k'}e^{q'}{}_{p}=g^{i'k'}\delta^{q'}{}_{k'}=g^{i'q'};$$

$$\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]^{T}=\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]^{T}=\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]E=\left[g^{\bullet'\bullet'}\right].$$

В этом выводе мы постарались продемонстрировать некоторые часто используемые приемы работы с индексами. Матричный перевод мы привели только в порядке пояснения, поскольку действия с матрицами более привычны. В данном случае преобразования в индексной форме не очень эффективны, поскольку мы вынуждены несколько раз последовательно выполнять операцию свертки. Выполняя те же преобразования только в матричной форме, мы быстрее приходим к результату. Покажем это на сей раз без комментариев.

$$\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[g_{\bullet'\bullet'}\right]=E=\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right];$$

$$\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]=\left(\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\right)^{-1}=\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{-1}\left[g_{\bullet\bullet}\right]^{-1}\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{-T}$$

А так как $\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{-1}=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]$, а $\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{-T}=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]^{T}$, то

$\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]^{T}$, вот и все.

Приведем для сравнения оба закона вместе.

$\left[g_{\bullet'\bullet'}\right]=\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right];$ $\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]^{T}.$	$\left[g_{\bullet\bullet}\right]=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]^{T}\left[g_{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right];$ $\left[g^{\bullet\bullet}\right]=\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[g^{\bullet'\bullet'}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^{T}.$

Теперь перейдем к законам преобразования для векторов взаимного базиса и ковариантных координат вектора.

$$\boldsymbol{e}^{i'}=g^{i'k'}\boldsymbol{e}_{k'}=e^{i'}{}_{i}g^{ik}e^{k'}{}_{k}e^{m}{}_{k'}\boldsymbol{e}_{m}=$$

$=e^{i'}{}_{i}g^{ik}\delta^{m}{}_{k}\boldsymbol{e}_{m}=e^{i'}{}_{i}g^{im}\boldsymbol{e}_{m}=e^{i'}{}_{i}\boldsymbol{e}^{i}$, следовательно $\boldsymbol{e}^{i'}=e^{i'}{}_{i}\boldsymbol{e}^{i}$.

А что мы можем сказать про ковариантные координаты вектора, то есть про координаты вектора во взаимном базисе? До сих пор мы говорили только про сам базис, и еще ни разу не представилась возможность поговорить о координатах. Начнем с того, что мы знаем, то есть с контравариантных координат.

Пусть $\bar{\boldsymbol{a}} = a^i \boldsymbol{e}_i$ произвольный вектор. Воспользуемся тем, что $\boldsymbol{e}_i = g_{ik} \boldsymbol{e}^k$. Следовательно, $\bar{\boldsymbol{a}} = a^i \boldsymbol{e}_i = a^i g_{ik} \boldsymbol{e}^k = a_k \boldsymbol{e}^k$. Откуда получаем, что $a_k = g_{ki} a^i$. Аналогично можно получить, что $a^i = g^{ik} a_k$. Сведем полученные результаты в таблицу.

$\boldsymbol{e}_i = g_{ik} \boldsymbol{e}^k$ $\boldsymbol{e}^i = g^{ik} \boldsymbol{e}_k$	$[\boldsymbol{e}_\bullet] = [g_{\bullet\bullet}][\boldsymbol{e}^\bullet]$ $[\boldsymbol{e}^\bullet] = [g^{\bullet\bullet}][\boldsymbol{e}_\bullet]$	$a_k = g_{ki} a^i$ $a^i = g^{ik} a_k$	$[a_\bullet] = [g_{\bullet\bullet}][a^\bullet]$ $[a^\bullet] = [g^{\bullet\bullet}][a_\bullet]$

Операции, которые мы свели в таблицу, принято называть операциями поднятия и опускания индексов. Часто используют более образное название – "жонглирование индексами". Операции по жонглированию индексами выполняются при помощи метрического тензора и позволяют легко переходить от ковариантных координат к контравариантным, и наоборот.

Перейдем к законам преобразования ковариантных координат вектора при изменении системы координат.

Пусть $\bar{\boldsymbol{a}} = a_i \boldsymbol{e}^i$ произвольный вектор, заданный своими ковариантными координатами в старой системе координат. Запишем тот же самый вектор в новой системе координат: $\bar{\boldsymbol{a}} = a_{i'} \boldsymbol{e}^{i'} = a_{i'} e^{i'}{}_i \boldsymbol{e}^i = a_i \boldsymbol{e}^i$. Следовательно, $a_i = e^{i'}{}_i a_{i'}$.

Сведем законы преобразования для векторов базиса и координат векторов в одну таблицу.

$\boldsymbol{e}_{i'} = e^i{}_{i'} \boldsymbol{e}_i$	$[\boldsymbol{e}_{\bullet'}] = [e^\bullet{}_{\bullet'}]^T [\boldsymbol{e}_\bullet]$	$a_{i'} = e^i{}_{i'} a_i$	$[a_{\bullet'}] = [e^\bullet{}_{\bullet'}]^T [a_\bullet]$
$\boldsymbol{e}^{i'} = e^{i'}{}_i \boldsymbol{e}^i$	$[\boldsymbol{e}^{\bullet'}] = [e^{\bullet'}{}_\bullet]^T [\boldsymbol{e}^\bullet]$	$a^{i'} = e^{i'}{}_i a^i$	$[a^{\bullet'}] = [e^{\bullet'}{}_\bullet]^T [a^\bullet]$
$\boldsymbol{e}_i = e^{i'}{}_i \boldsymbol{e}_{i'}$	$[\boldsymbol{e}_\bullet] = [e^{\bullet'}{}_\bullet]^T [\boldsymbol{e}_{\bullet'}]$	$a_i = e^{i'}{}_i a_{i'}$	$[a_\bullet] = [e^{\bullet'}{}_\bullet]^T [a_{\bullet'}]$
$\boldsymbol{e}^i = e^i{}_{i'} \boldsymbol{e}^{i'}$	$[\boldsymbol{e}^\bullet] = [e^\bullet{}_{\bullet'}]^T [\boldsymbol{e}^{\bullet'}]$	$a^i = e^i{}_{i'} a^{i'}$	$[a^\bullet] = [e^\bullet{}_{\bullet'}]^T [a^{\bullet'}]$

Приведенная таблица дает полное представление о ковариантных и контравариантных преобразованиях. Только не следует думать, что все это необходимо запомнить. Принятая система обозначений сама напомнит, как правильно записать то или иное преобразование.

Кстати, поскольку в декартовой системе координат $g_{ik} = \delta_{ik}$, то и $g^{ik} = \delta^{ik}$. Следовательно, $\boldsymbol{e}^i = g^{ki} \boldsymbol{e}_k = \delta^{ki} \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i$. Другими словами, в декартовой системе координат можно не делать различия между верхними и нижними индексами.

.Площадь и объем в косоугольных координатах

Мы получили в свое время выражения для вычисления площади и объема по координатам векторов в декартовой системе координат, но до настоящего момента мы не пытались вычислять площади и объемы в произвольных косоугольных координатных системах. Сейчас у нас есть все необходимое для решения этой задачи.

Пусть произвольные векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ заданы своими координатами в произвольной косоугольной системе координат $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$. Перейдем к произвольной ортонормированной координатной системе с векторами базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$. Поскольку правило суммирования, которое мы собираемся использовать, несовместимо с традиционными обозначениями ортов декартовой системы координат, мы введем свои обозначения:

базисные векторы:

$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_x$; $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_y$; $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_z$;

произвольный базисный вектор декартовой системы координат: $\boldsymbol{e}_*$;

координаты, соответственно: a^x, a^y, a^z и

произвольная координата в декартовой системе: a^*.

Запишем уравнения преобразования координат, используя принятые обозначения:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{a}} = a^i \boldsymbol{e}_i = a^i e^*{}_i \boldsymbol{e}_* = a^i e^x{}_i \boldsymbol{e}_x + a^i e^y{}_i \boldsymbol{e}_y + a^i e^z{}_i \boldsymbol{e}_z \\ \bar{\boldsymbol{b}} = b^i \boldsymbol{e}_i = b^i e^*{}_i \boldsymbol{e}_* = b^i e^x{}_i \boldsymbol{e}_x + b^i e^y{}_i \boldsymbol{e}_y + b^i e^z{}_i \boldsymbol{e}_z \\ \bar{\boldsymbol{c}} = c^i \boldsymbol{e}_i = c^i e^*{}_i \boldsymbol{e}_* = c^i e^x{}_i \boldsymbol{e}_x + c^i e^y{}_i \boldsymbol{e}_y + c^i e^z{}_i \boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

Имея декартовые координаты векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$, мы сразу же можем найти объем параллелепипеда, построенного на них:

$$\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = \begin{vmatrix} a^i e^x{}_i & b^i e^x{}_i & c^i e^x{}_i \\ a^i e^y{}_i & b^i e^y{}_i & c^i e^y{}_i \\ a^i e^z{}_i & b^i e^z{}_i & c^i e^z{}_i \end{vmatrix}$$

Нетрудно заметить, что данный определитель равен определителю произведения матриц:

$$\begin{vmatrix} a^i e^x{}_i & b^i e^x{}_i & c^i e^x{}_i \\ a^i e^y{}_i & b^i e^y{}_i & c^i e^y{}_i \\ a^i e^z{}_i & b^i e^z{}_i & c^i e^z{}_i \end{vmatrix} = \left| \begin{bmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix} \right|$$

А поскольку определитель произведения матриц равен произведению их определителей, то

$$\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = \begin{vmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что первый определитель составлен из координат векторов базиса косоугольной системы, а второй из координат векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$. Причем координаты векторов базиса даны в декартовой системе координат, а координаты векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ – в косоугольной системе.

До сих пор в наших рассуждениях мы не беспокоились по поводу знака ориентированного объема, который может получиться как положительным так и отрицательным, в зависимости от взаимной ориентации векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ и случайно выбранной ортонормированной системы. Теперь, когда общее выражение для объема получено, поговорим об этом.

Если векторы базиса декартовой системы координат и векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ образуют одинаковую ориентацию (левую или правую), то $\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) > 0$. При этом имеются две возможности:

1. Векторы базисов ортонормированной и косоугольной систем образуют одинаковую ориентацию. В этом случае

$$\begin{vmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ и, следовательно, } \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} > 0 .$$

2. Векторы базисов ортонормированной и косоугольной систем образуют противоположную ориентацию. В этом случае

$$\begin{vmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{vmatrix} < 0 \text{ и, следовательно, } \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} < 0 .$$

Если же векторы базиса декартовой системы и векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ образуют противоположную ориентацию, то $\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) < 0$. При этом также имеются две возможности:

1. Векторы базисов ортонормированной и косоугольной систем образуют одинаковую ориентацию. В этом случае

$$\begin{vmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ и, следовательно, } \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} < 0 .$$

2. Векторы базисов ортонормированной и косоугольной систем образуют противоположную ориентацию. В этом случае

$$\begin{vmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{vmatrix} < 0 \text{ и, следовательно, } \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} > 0 .$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} > 0$, если векторы косоугольного базиса и векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ образуют одинаковую ориентацию и

$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} < 0$, если наоборот, векторы косоугольного базиса и векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ образуют противоположную ориентацию.

В свое время мы отметили это свойство определителя, составленного из декартовых координат векторов. Теперь мы доказали его для общего случая. Мы уже отмечали, что при определении ориентированного объема есть две возможности. Первая – выбрать одну из ортонормированных систем за эталонную и назвать ее правой системой. Знак ориентированного объема при этом связывается с раз и навсегда выбранной эталонной правой системой координат. Вторая возможность заключается в том, что знак ориентированного объема связывается с текущей системой координат. Никакой выделенной системы координат при этом не требуется. В этом случае ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ считается положительным, если векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ образуют ту же самую ориентацию, что и векторы базиса текущей системы координат. Принципиальной разницы в этих подходах нет, и оба они являются востребованными.

Мы изберем вторую возможность, но для этого нам придется подправить полученную формулу для объема.

$$\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = \left|\begin{vmatrix} e^x{}_1 & e^x{}_2 & e^x{}_3 \\ e^y{}_1 & e^y{}_2 & e^y{}_3 \\ e^z{}_1 & e^z{}_2 & e^z{}_3 \end{vmatrix}\right| \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

Мы заключили первый определитель в вертикальные рамки, что означает модуль от определителя. Теперь знак ориентированного объема зависит только от знака второго определителя, который и задает относительную от текущей системы координат ориентацию. Запишем последнее выражение в условной сокращенной форме:

$$\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = \left|\left|e^*{}_\bullet\right|\right| \left|a^\bullet, b^\bullet, c^\bullet\right| = \frac{\left|e^*{}_\bullet\right|}{\left|\left|e^*{}_\bullet\right|\right|} \left|e^*{}_\bullet\right| \left|a^\bullet, b^\bullet, c^\bullet\right| .$$

$\left|a^\bullet, b^\bullet, c^\bullet\right|$ – означает определитель, составленный из координат векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ как из столбцов.

Продолжим анализ полученного выражения.

Определитель $\left|e^*{}_\bullet\right|$, составленный из координат базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ в декартовой системе координат, равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Мы уже доказали, что объем базисного параллелепипеда может быть выражен через метрический тензор следующим образом: $V_e = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}$. Следовательно, $\left|\left|e^*{}_\bullet\right|\right| = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}$. Это позволяет еще немного усовершенствовать нашу формулу для ориентированного объема:

$$\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = \sqrt{g_{\bullet\bullet}} \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} .$$

Данная формула хороша тем, что в ней исчезает всякое упоминание о произвольной и вспомогательной по сути декартовой системе координат. Она была нам полезна при выводе, но в окончательное выражение не вошла. "Мавр сделал свое дело, мавр может уходить".

Поставим теперь задачу найти связь между выражениями для ориентированного объема в двух произвольных косоугольных системах координат. Начнем с выражения для объема в базисе $\boldsymbol{e}_{i'}$.

$$\bar{V}_{e'}(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}})=\sqrt{g_{\cdot'\cdot'}}\begin{vmatrix}a^{1'} & b^{1'} & c^{1'}\\ a^{2'} & b^{2'} & c^{2'}\\ a^{3'} & b^{3'} & c^{3'}\end{vmatrix}=\sqrt{g_{\cdot'\cdot'}}\begin{vmatrix}e^{1'}{}_i a^i & e^{1'}{}_i b^i & e^{1'}{}_i c^i\\ e^{2'}{}_i a^i & e^{2'}{}_i b^i & e^{2'}{}_i c^i\\ e^{3'}{}_i a^i & e^{3'}{}_i b^i & e^{3'}{}_i c^i\end{vmatrix}=$$

$$=\sqrt{g_{\cdot'\cdot'}}\begin{vmatrix}e^{1'}{}_1 & e^{1'}{}_2 & e^{1'}{}_3\\ e^{2'}{}_1 & e^{2'}{}_2 & e^{2'}{}_3\\ e^{3'}{}_1 & e^{3'}{}_2 & e^{3'}{}_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a^1 & b^1 & c^1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}.$$

Прежде чем продолжать преобразования дальше, вспомним, что $[g_{\cdot'\cdot'}]=[e^{\cdot}{}_{\cdot'}]^T[g_{\cdot\cdot}][e^{\cdot}{}_{\cdot'}]$, и, следовательно, $|g_{\cdot'\cdot'}|=|e^{\cdot}{}_{\cdot'}|^2|g_{\cdot\cdot}|$. А поскольку всегда $|g_{\cdot\cdot}|>0$ и $|g_{\cdot'\cdot'}|>0$, то $\sqrt{g_{\cdot'\cdot'}}=\big||e^{\cdot}{}_{\cdot'}|\big|\sqrt{g_{\cdot\cdot}}$. Аналогично можно доказать, что $\sqrt{g_{\cdot\cdot}}=\big||e^{\cdot'}{}_{\cdot}|\big|\sqrt{g_{\cdot'\cdot'}}$.

Если теперь вспомнить, что $g_{\cdot\cdot}=\dfrac{1}{g^{\cdot\cdot}}$, то можно получить более удобные для запоминания варианты этих формул:

$$\sqrt{g^{\cdot\cdot}}\,\sqrt{g_{\cdot'\cdot'}}=\big||e^{\cdot}{}_{\cdot'}|\big| \quad \text{и} \quad \sqrt{g^{\cdot'\cdot'}}\,\sqrt{g_{\cdot\cdot}}=\big||e^{\cdot'}{}_{\cdot}|\big|.$$

Но это к слову, а сейчас нам нужна формула $\sqrt{g_{\cdot'\cdot'}}=\big||e^{\cdot}{}_{\cdot'}|\big|\sqrt{g_{\cdot\cdot}}$, используя которую, мы продолжим наши преобразования.

$$\bar{V}_{e'}(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}})=\big||e^{\cdot}{}_{\cdot'}|\big|\sqrt{g_{\cdot\cdot}}\begin{vmatrix}e^{1'}{}_1 & e^{1'}{}_2 & e^{1'}{}_3\\ e^{2'}{}_1 & e^{2'}{}_2 & e^{2'}{}_3\\ e^{3'}{}_1 & e^{3'}{}_2 & e^{3'}{}_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a^1 & b^1 & c^1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{|e^{\cdot}{}_{\cdot'}|}{\big||e^{\cdot}{}_{\cdot'}|\big|}|e^{\cdot}{}_{\cdot'}||e^{\cdot'}{}_{\cdot}|\sqrt{g_{\cdot\cdot}}\,|\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}|=\frac{|e^{\cdot}{}_{\cdot'}|}{\big||e^{\cdot}{}_{\cdot'}|\big|}\bar{V}_e(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}}).$$

Мы воспользовались тем, что $|e^{\cdot}{}_{\cdot'}||e^{\cdot'}{}_{\cdot}|=1$, а $\bar{V}_{e'}(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}})=\sqrt{g_{\cdot\cdot}}\,|\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}|$.

Определитель $|e^{\cdot}{}_{\cdot'}|$ составлен из координат векторов $\boldsymbol{e}_{i'}$ в базисе $\boldsymbol{e}_i$, следовательно, он больше нуля, если ориентации двух базисов совпадают и меньше нуля в противном случае. Окончательно мы можем записать

$$\bar{V}_{e'}(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}})=\frac{|e^{\cdot}{}_{\cdot'}|}{\big||e^{\cdot}{}_{\cdot'}|\big|}\bar{V}_e(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}})=\pm\bar{V}_e(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}}).$$

Ориентированные объемы в различных базисах совпадают с точностью до знака, причем знаки совпадают, если базисы ориентированы одинаково. Такие величины, которые совпадают почти всегда, но изменяют свой знак при переходе от левой системы координат к правой и наоборот называются относительными инвариантами. Следовательно, ориентированный объем – это относительный инвариант.

Все, что мы сказали про ориентированный объем, справедливо и для ориентированной площади, поэтому соответствующую формулу мы дадим без вывода:

$$\bar{S}_{e'}(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}})=\frac{|e^{\cdot}{}_{\cdot'}|}{\big||e^{\cdot}{}_{\cdot'}|\big|}\bar{S}_e(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}})=\pm\bar{S}_e(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}})$$

..Индексная форма записи для выражений с определителями

Формула для ориентированного объема, которую мы получили ранее

$$-\ \overline{V}_e(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\,|\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}| = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}\ -$$

хороша во всех отношениях, за исключением одного: мы не знаем, как ее записать в индексной форме. Между тем, индексная форма записи, по ряду причин, которые мы обсуждать пока не готовы, является в тензорной алгебре основной. В этой своеобразной тензорной письменности имеются, конечно, известные возможности для записи подобных выражений. Эти возможности вытекают из самой природы определителя, хотя и не лежат непосредственно на поверхности, и нам придется затратить немало усилий, чтобы их извлечь.

Перейдем к преобразованиям.

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^1 b^1 c^1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a^2 b^3 c^1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a^3 b^1 c^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\ a^3 b^2 c^1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a^2 b^1 c^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a^1 b^3 c^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Данное выражение получено при помощи правила треугольников и может быть проверено непосредственным вычислением всех определителей. Характерной особенностью данного выражения является то, что каждое слагаемое содержит в качестве одного из сомножителей определитель, составленный из столбцов единичной матрицы, переставленных всеми возможными способами. Непосредственным подсчетом можно проверить, что каждый из определителей равен либо плюс, либо минус единице.

Аналогичное, но более полное выражение, содержащее все варианты определителей с переставленными столбцами единичной матрицы в том числе и с повторениями, можно получить, раскладывая каждый из столбцов определителя на сумму столбцов специального вида, ведя преобразования таким образом, чтобы, в конце концов, в каждом определителе все столбцы содержали бы только по одному элементу.

Покажем, как это можно сделать.

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1+0 & b^1 & c^1 \\ 0+a^2 & b^2 & c^2 \\ 0+a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ 0 & b^2 & c^2 \\ 0 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \text{Это первый шаг.}$$

Далее раскладываем аналогичным образом каждое из слагаемых.

$$= \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ 0 & b^2 & c^2 \\ 0 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & b^1+0 & c^1 \\ 0 & 0+b^2 & c^2 \\ 0 & 0+b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b^1+0 & c^1 \\ a^2 & 0+b^2 & c^2 \\ a^3 & 0+b^3 & c^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ 0 & 0 & c^2 \\ 0 & 0 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1 & 0 & c^1 \\ 0 & b^2 & c^2 \\ 0 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b^1 & c^1 \\ a^2 & 0 & c^2 \\ a^3 & 0 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \ldots$$

Продолжаем таким образом до тех пор, пока в каждом столбце не останется по одному элементу. После этого поделим каждый столбец на оставшийся элемент и одновременно умножим на него определитель. В результате мы получим сумму аналогичную той, что мы записали выше, но содержащую большее количество слагаемых. Правда, все они за исключением шести будут равны нулю. Мы не будем приводить эти преобразования, а запишем сразу окончательный результат. Но прежде чем это сделать, введем специальные обозначения для определителей, составленных из столбцов единичной матрицы, которые входят в каждое слагаемое.

Отталкиваясь от общепринятого обозначения для единичной матрицы

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

для матрицы, построенной из *i*-ого, *j*-ого и *k*-ого ее столбцов, введем следующее обозначение – $\left[E_{i\,j\,k}\right]$. Например,

$$\left[E_{213}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы $\left[E_{i\,j\,k}\right]$ будем обозначать просто E_{ijk}. Например,

$$E_{213} = \left\|\left[E_{213}\right]\right\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Каждый такой определитель равен или нулю, или единице, или минус единице:

$$\begin{cases} E_{123} = E_{231} = E_{312} = 1 \\ E_{321} = E_{213} = E_{132} = -1 \end{cases}$$

Остальные определители равны нулю.

Всего таких определителей с различными сочетаниями индексов 27, и они образуют трехмерный массив чисел, большая часть которых равна нулю. Эти числа могут быть записаны в виде одной таблицы:

$$\left[E_{\ldots}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{111} & E_{121} & E_{131} \\ E_{211} & E_{221} & E_{231} \\ E_{311} & E_{321} & E_{331} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{112} & E_{122} & E_{132} \\ E_{212} & E_{222} & E_{232} \\ E_{312} & E_{322} & E_{332} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{113} & E_{123} & E_{133} \\ E_{213} & E_{223} & E_{233} \\ E_{313} & E_{323} & E_{333} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

К сожалению это только таблица, а не матрица, поскольку не существуют правила действий с трех и более индексными матрицами. Следовательно матричная алгебра в действиях с такими таблицами нам не поможет. Основным языком для записи выражений с такими массивами является индексная форма. Тем не менее, мы будем иногда в целях наглядности пользоваться такими таблицами, поскольку индексная запись при всех ее до-

стоинствах скрывает общую картину событий происходящих при операциях с массивами (в основном масштабы этих событий).
Используя введенные обозначения, мы можем наконец-то записать выражение для определителя, составленного из координат векторов, в развернутой форме:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= E_{111}a^1b^1c^1 + E_{112}a^1b^1c^2 + E_{113}a^1b^1c^3 + E_{121}a^1b^2c^1 + E_{122}a^1b^2c^2 + E_{123}a^1b^2c^3 + \\
&+ E_{131}a^1b^3c^1 + E_{132}a^1b^3c^2 + E_{133}a^1b^3c^3 + E_{211}a^2b^1c^1 + E_{212}a^2b^1c^2 + E_{213}a^2b^1c^3 + \\
&+ E_{221}a^2b^2c^1 + E_{222}a^2b^2c^2 + E_{223}a^2b^2c^3 + E_{231}a^2b^3c^1 + E_{232}a^2b^3c^2 + E_{233}a^2b^3c^3 + \\
&+ E_{311}a^3b^1c^1 + E_{312}a^3b^1c^2 + E_{313}a^3b^1c^3 + E_{321}a^3b^2c^1 + E_{322}a^3b^2c^2 + E_{323}a^3b^2c^3 + \\
&+ E_{331}a^3b^3c^1 + E_{332}a^3b^3c^2 + E_{333}a^3b^3c^3 ,
\end{aligned}$$

и в краткой форме:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{k=1}^{k=3} E_{ijk}a^ib^jc^k .$$

Аналогично можно записать выражение для определителя произвольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{k=1}^{k=3} E_{ijk}a^i{}_1a^j{}_2a^k{}_3 .$$

С использованием же правила суммирования оба эти равенства приобретают еще более краткое начертание:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = E_{ijk}a^ib^jc^k ; \quad \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix} = E_{ijk}a^i{}_1a^j{}_2a^k{}_3 .$$

Мы начали этот раздел с формулы для объема. Заканчивая его, мы снова обращаемся к ней, но уже с учетом новых возможностей.

Теперь это будет так:

$$\overline{V}_e(\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{c}}) = \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\,|\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}}| = \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\,E_{ijk}a^ib^jc^k .$$

..Символы Веблена

Символы, которые мы ввели в предыдущем разделе, называются символами Веблена.
Традиционно символы Веблена вводятся формально, например так:

$E_{ijk} = 1$, для значений индексов $i = 1, j = 2$ и $k = 3$ и для значений, которые получаются в результате их циклической перестановки: $123 \Longrightarrow 231$, $231 \Longrightarrow 312$;

$E_{ijk} = -1$, для значений индексов $i = 3, j = 2$ и $k = 1$ и для значений, которые получаются в результате их циклической перестановки: $321 \Longrightarrow 213$, $213 \Longrightarrow 132$.

$E_{ijk} = 0$, если среди значений индексов имеются одинаковые числа.

В соответствии с нашим определением, символ E_{ijk} является определителем, составленным из столбцов единичной матрицы $E_{ijk} = \left| \left[E_{ijk} \right] \right|$.

Определитель $E_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ является определителем единичной матрицы с естественным порядком столбцов. При перестановке двух его любых столбцов между собой он изменит знак на противоположный. Если мы затем еще раз поменяем местами два любые его столбца, то знак снова изменится. Следовательно, определитель матрицы с четным количеством перестановок столбцов будет равен единице, а с нечетным количеством перестановок – минус единице. Выполняя последовательно перестановки и не забывая каждый раз при этом изменять знак, мы получим все ненулевые значения величин E_{ijk}: $E_{123} = 1, E_{132} = -1, E_{312} = 1, E_{321} = -1, E_{231} = 1, E_{213} = -1$.

Естественно, что символы с одинаковыми значениями индексов равны нулю, как определители с одинаковыми столбцами.

Мы видим, что оба определения приводят к одинаковому результату. Тем не менее, неформальное определение, которого мы и дальше будем придерживаться, позволяет использовать известные свойства определителей, что часто бывает полезно.

..Свойства символов Веблена

Массив всех возможных значений символов Веблена состоит из 27 элементов. К тому же используется он при выполнении операций с другими массивами. Основная проблема, которая возникает в таких случаях, – это непомерная громоздкость реальных вычислений. Часто даже простые операции очень трудно довести до конца без ошибок, возникающих при бесконечном переписывании однообразных символов. Совершенно естественным при таких обстоятельствах является стремление иметь больше разнообразных возможностей для выполнения преобразований в самом общем виде и краткой форме.

Возвращаясь к символам Веблена, заметим, что у нас до сих пор нет удобного выражения для определителя, составленного из произвольных столбцов единичной матрицы. Мы без труда можем записать любой конкретный символ Веблена с заданными числовыми значениями индексов, например:

$E_{312} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, но как записать определитель, соответствующий символу E_{ijk}?

И в этом вопросе поможет уже известный нам символ Кронекера.

Символ Кронекера используется в векторной алгебре в качестве индексного аналога единичной матрицы. $\delta^i{}_k$ равен элементу единичной матрицы, стоящему на пересечении *i*-ой строки и *k*-ого столбца. Поэтому единичную матрицу можно записать с помощью символов Кронекера следующим образом:

$$E=\begin{bmatrix}\delta^1{}_1 & \delta^1{}_2 & \delta^1{}_3\\ \delta^2{}_1 & \delta^2{}_2 & \delta^2{}_3\\ \delta^3{}_1 & \delta^3{}_2 & \delta^3{}_3\end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрицу $\left[E_{213}\right]$ и матрицу $\left[E_{ijk}\right]$ общего вида мы можем записать следующим образом:

$$\left[E_{213}\right]=\begin{bmatrix}\delta^1{}_2 & \delta^1{}_1 & \delta^1{}_3\\ \delta^2{}_2 & \delta^2{}_1 & \delta^2{}_3\\ \delta^3{}_2 & \delta^3{}_1 & \delta^3{}_3\end{bmatrix},\ \left[E_{ijk}\right]=\begin{bmatrix}\delta^1{}_i & \delta^1{}_j & \delta^1{}_k\\ \delta^2{}_i & \delta^2{}_j & \delta^2{}_k\\ \delta^3{}_i & \delta^3{}_j & \delta^3{}_k\end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом может быть выражен и определитель E_{ijk}:

$$E_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta^1{}_i & \delta^1{}_j & \delta^1{}_k\\ \delta^2{}_i & \delta^2{}_j & \delta^2{}_k\\ \delta^3{}_i & \delta^3{}_j & \delta^3{}_k\end{vmatrix}.$$

Подставляя конкретные значения символов Кронекера, мы можем вычислить значения символов Веблена. Тут важно только то, что мы это сделать можем, и результат будет правильным, но конечно, мы этого делать не собираемся, поскольку значения символов Веблена мы и без того знаем. А вот при выполнении общих преобразований с произвольными символами такая возможность нам не помешает. Посмотрим на конкретных примерах, как это может нам помочь.

1. Умножение произвольной матрицы на матрицу $\left[E_{ijk}\right]$.

$$\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[E_{ijk}\right]=\begin{bmatrix}a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3\\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3\\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta^1{}_i & \delta^1{}_j & \delta^1{}_k\\ \delta^2{}_i & \delta^2{}_j & \delta^2{}_k\\ \delta^3{}_i & \delta^3{}_j & \delta^3{}_k\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a^1{}_m\delta^m{}_i & a^1{}_m\delta^m{}_j & a^1{}_m\delta^m{}_k\\ a^2{}_m\delta^m{}_i & a^2{}_m\delta^m{}_j & a^2{}_m\delta^m{}_k\\ a^3{}_m\delta^m{}_i & a^3{}_m\delta^m{}_j & a^3{}_m\delta^m{}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^1{}_i & a^1{}_j & a^1{}_k\\ a^2{}_i & a^2{}_j & a^2{}_k\\ a^3{}_i & a^3{}_j & a^3{}_k\end{bmatrix}.$$

Мы воспользовались тем, что $a^i{}_k\delta^k{}_m=a^i{}_1\delta^1{}_m+a^i{}_2\delta^2{}_m+a^i{}_3\delta^3{}_m$. Из трех слагаемых не будет равен нулю только один, а именно тот, для которого $k = m$. Следовательно, $a^i{}_k\delta^k{}_m=a^i{}_m$. Формально свертывание любого вектора с символом Кронекера приводит к замене индекса: $a_k\delta^k{}_m=a_m$, $b^m\delta^k{}_m=b^k$.

Правило простое, но требует внимательности.

Необходимо запомнить, что $b^1\delta^k{}_1 \neq b^k$ – в этом случае нельзя поставить знак равенства. Здесь нет суммирования, это не свертка, это простое умножение одной из координат вектора на символ $\delta^k{}_1$. Произведению $b^1\delta^k{}_1$ соответствуют целых три числа:

$$b^1\delta^k{}_1 \doteq \begin{bmatrix} b^1\delta^1{}_1 \\ b^1\delta^2{}_1 \\ b^1\delta^3{}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Возвращаясь к умножению матриц, отметим, что умножение произвольной матрицы $\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right]$ на матрицу $\left[E_{ijk}\right]$ справа приводит к подстановке в ней столбцов. Первый ее столбец заменяется на ее же i-ый столбец, второй столбец заменяется на j-ый и третий, соответственно на k-ый.

Для того, чтобы отобразить это правило наглядно, введем следующее обозначение:

Порядок строк

$$\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right] = \left[a^{123}{}_{123}\right] = \left[a^{123}_{123}\right] = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{bmatrix}$$

Порядок столбцов

– матрица с естественным порядком строк и столбцов.

$$\left[a^{213}_{123}\right] = \begin{bmatrix} a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{bmatrix}$$ – в матрице переставлены первые две строки.

$$\left[a^{123}_{132}\right] = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_3 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_3 & a^2{}_2 \\ a^3{}_1 & a^3{}_3 & a^3{}_2 \end{bmatrix}$$ – переставлены вторые два столбца.

И наконец,

$$\left[a^{ijk}_{mnp}\right] = \begin{bmatrix} a^i{}_m & a^i{}_n & a^i{}_p \\ a^j{}_m & a^j{}_n & a^j{}_p \\ a^k{}_m & a^k{}_n & a^k{}_p \end{bmatrix}$$ – матрица с произвольным образом переставленными строками и столбцами.

С учетом принятых обозначений запишем: $\left[a^{123}_{123}\right]\left[E_{ijk}\right] = \left[a^{123}_{ijk}\right]$.

Аналогично можно показать, что $\left[E_{ijk}\right]^T\left[a^{123}_{123}\right] = \left[a^{ijk}_{123}\right]$.

2. Докажем формулу $E_{ijk}\,a^i_m a^j_n a^k_p = \left|a^{\bullet}_{\bullet}\right| E_{mnp} = a\,E_{mnp}$, где для краткости определитель с естественным порядком строк и столбцов обозначен просто $a \equiv \left|a^{\bullet}_{\bullet}\right|$.

Прежде всего заметим, что смысл выражения весьма прозрачен несмотря на кажущуюся сложность. Мы знаем, что $E_{ijk}a^i{}_1a^j{}_2a^k{}_3 \equiv a$. Соответственно $E_{ijk}a^i_m a^j_n a^k_p$ есть определитель, в котором первый столбец заменен столбцом *m*, второй – столбцом *n*, а третий – *k*. Если среди чисел *m*, *n* и *p* есть одинаковые, то определитель и E_{mnp} равны нулю. Если же среди этих чисел нет одинаковых, то определитель $E_{ijk}a^i_m a^j_n a^k_p$ по модулю равен $|a|$: $|E_{ijk}a^i_m a^j_n a^k_p| = |a|$. Это утверждение вытекает из того, что при перестановке столбцов изменяется только знак определителя.

Чтобы доказать, что формула справедлива всегда в том числе и с учетом знака, начнем с очевидного тождества $|a^{123}_{123}| = a$. Умножим правую часть равенства на определитель единичной матрицы

$|a^{123}_{123}| = a|E|$.

Теперь выполним одну и ту же подстановку столбцов в обоих определителях:

$\|a^{123}_{123}\|[E_{mnp}]\| = a|E[E_{mnp}]\|$, но $\|a^{123}_{123}\|[E_{mnp}]\| = |a^{123}_{mnp}|$, а $|E[E_{mnp}]\| = E_{mnp}$.

Откуда сразу следует, что $E_{ijk}a^i_m a^j_n a^k_p = |a^{\bullet}_{\bullet}|E_{mnp} = a\,E_{mnp}$.

3. Докажем теорему об определителях.

> Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

Это свойство определителей доказывается в линейной алгебре, систематического изложения которой мы не даем. Более того, данной теоремой мы уже не один раз пользовались. Единственная цель, с которой мы приводим этот вывод – продемонстрировать эффективность данного математического языка при решении некоторых задач.

Пусть $[a^{\bullet}_{\bullet}]$ и $[b^{\bullet}_{\bullet}]$ – две произвольные квадратные матрицы одинакового порядка, и пусть $[c^{\bullet}_{\bullet}]$ – матрица их произведения $[c^{\bullet}_{\bullet}] = [a^{\bullet}_{\bullet}][b^{\bullet}_{\bullet}] \doteq c^i{}_j = a^i{}_k b^k{}_j$.

Тогда $c = E_{ijk}c^i{}_m c^j{}_n c^k{}_p$. Развернем это равенство:

$c = E_{ijk}a^i{}_{p_1}b^{p_1}{}_1 a^j{}_{p_2}b^{p_2}{}_2 a^k{}_{p_3}b^{p_3}{}_3$.

Теперь воспользуемся тем, что $E_{ijk}a^i_{p_1}a^j_{p_2}a^k_{p_3} = a\,E_{p_1p_2p_3}$.

$c = E_{ijk}a^i{}_{p_1}b^{p_1}{}_1 a^j{}_{p_2}b^{p_2}{}_2 a^k{}_{p_3}b^{p_3}{}_3 = a\,E_{p_1p_2p_3}b^{p_1}{}_1 b^{p_2}{}_2 b^{p_3}{}_3$, но $E_{p_1p_2p_3}b^{p_1}{}_1 b^{p_2}{}_2 b^{p_3}{}_3 = b$.

И мы получаем уже известный результат: $c = ab$.

Желающие могут сравнить данное доказательство с доказательством, которое можно найти в любом учебнике по линейной алгебре, например, [19, с. 88].

4. Умножение двух символов Веблена.

Умножим E^{ijk} на E_{mnp}. До сих пор индексы в символах Веблена мы всегда писали снизу. Для векторов положение индексов имеет глубокий смысл, но для символов Веблена, впрочем так же как и для символов Кронекера, положение индексов не имеет никакого значения. Мы их пишем либо снизу, либо сверху руководствуясь только соображениями удобства.

$$E^{ijk}E_{mnp}=\begin{vmatrix}\delta^1{}_i & \delta^1{}_j & \delta^1{}_k\\ \delta^2{}_i & \delta^2{}_j & \delta^2{}_k\\ \delta^3{}_i & \delta^3{}_j & \delta^3{}_k\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta^1{}_m & \delta^1{}_n & \delta^1{}_p\\ \delta^2{}_m & \delta^2{}_n & \delta^2{}_p\\ \delta^3{}_m & \delta^3{}_n & \delta^3{}_p\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\delta^i{}_1 & \delta^i{}_2 & \delta^i{}_3\\ \delta^j{}_1 & \delta^j{}_2 & \delta^j{}_3\\ \delta^k{}_1 & \delta^k{}_2 & \delta^k{}_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta^1{}_m & \delta^1{}_n & \delta^1{}_p\\ \delta^2{}_m & \delta^2{}_n & \delta^2{}_p\\ \delta^3{}_m & \delta^3{}_n & \delta^3{}_p\end{vmatrix}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\delta^i{}_j=\delta^j{}_i$ и $\left\|\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\right\|=\left\|\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\right\|$.
Теперь воспользуемся теоремой об определителе произведения матриц.

$$\begin{vmatrix}\delta^i{}_1 & \delta^i{}_2 & \delta^i{}_3\\ \delta^j{}_1 & \delta^j{}_2 & \delta^j{}_3\\ \delta^k{}_1 & \delta^k{}_2 & \delta^k{}_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta^1{}_m & \delta^1{}_n & \delta^1{}_p\\ \delta^2{}_m & \delta^2{}_n & \delta^2{}_p\\ \delta^3{}_m & \delta^3{}_n & \delta^3{}_p\end{vmatrix}=\left\|\begin{bmatrix}\delta^i{}_\alpha\delta^\alpha{}_m & \delta^i{}_\alpha\delta^\alpha{}_n & \delta^i{}_\alpha\delta^\alpha{}_p\\ \delta^j{}_\alpha\delta^\alpha{}_m & \delta^j{}_\alpha\delta^\alpha{}_n & \delta^j{}_\alpha\delta^\alpha{}_p\\ \delta^k{}_\alpha\delta^\alpha{}_m & \delta^k{}_\alpha\delta^\alpha{}_n & \delta^k{}_\alpha\delta^\alpha{}_p\end{bmatrix}\right\|;$$

Использовав свойства символов Кронекера, упростим последний определитель:

$$\left\|\begin{bmatrix}\delta^i{}_\alpha\delta^\alpha{}_m & \delta^i{}_\alpha\delta^\alpha{}_n & \delta^i{}_\alpha\delta^\alpha{}_p\\ \delta^j{}_\alpha\delta^\alpha{}_m & \delta^j{}_\alpha\delta^\alpha{}_n & \delta^j{}_\alpha\delta^\alpha{}_p\\ \delta^k{}_\alpha\delta^\alpha{}_m & \delta^k{}_\alpha\delta^\alpha{}_n & \delta^k{}_\alpha\delta^\alpha{}_p\end{bmatrix}\right\|=\begin{vmatrix}\delta^i{}_m & \delta^i{}_n & \delta^i{}_p\\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n & \delta^j{}_p\\ \delta^k{}_m & \delta^k{}_n & \delta^k{}_p\end{vmatrix}.$$

Полученное выражение определяет возможные значения элементов шестимерного массива 3^6 чисел, и все это удовольствие – в одном выражении. Для записи произведения $E^{ijk}E_{mnp}$ вводится специальный символ δ^{ijk}_{mnp}, который называется обобщенным символом Кронекера. В обобщенных символах Кронекера нельзя поднимать и опускать индексы, поэтому не имеет значения порядок верхних индексов по отношению к нижним и наоборот. Обобщенные символы Кронекера определяются разными способами, и не будет ошибки, если мы определим их так:

$$\delta^{ijk}_{mnp}=\begin{vmatrix}\delta^i{}_m & \delta^i{}_n & \delta^i{}_p\\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n & \delta^j{}_p\\ \delta^k{}_m & \delta^k{}_n & \delta^k{}_p\end{vmatrix}.$$

Использование обобщенных символов Кронекера позволяет записать результат умножения символов Веблена в более компактной форме: $E^{ijk}E_{mnp}=\delta^{ijk}_{mnp}$. Обобщенный символ Кронекера может иметь меньшее количество верхних или нижних индексов, чем размер определителя (при одинаковом количестве верхних и нижних). В этом случае его следует понимать, как определитель, составленный из элементов единичной матрицы, стоящих на пересечении строк с номерами, совпадающими с верхними индексами, и столбцов с номерами, совпадающими со значениями нижних индексов. Например, на рис. 46* показано как получается обобщенный символ Кронекера δ^{31}_{23}.

$$E = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{vmatrix} \qquad \delta^{31}_{23} = \begin{vmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{vmatrix}$$

Рис. 46*

Матрицу, соответствующую обобщенному символу Кронекера, т.е. единичную матрицу с переставленными строками и столбцами, будем обозначать соответственно:

$$\left[\delta^{ijk}_{mnp}\right] = \begin{bmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n & \delta^i{}_p \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n & \delta^j{}_p \\ \delta^k{}_m & \delta^k{}_n & \delta^k{}_p \end{bmatrix}, \text{ следовательно, } \delta^{ijk}_{mnp} = \left\|\left[\delta^{ijk}_{mnp}\right]\right\|$$

Свойства обобщенного символа Кронекера легко выводятся из его определения, и мы на них не будем останавливаться.

5. Свертка символов Веблена по одному индексу.
Свернем символы Веблена E^{ijk} и E_{mnp} по последним индексам k и p.

$$E^{ijk}E_{mnk} = E^{ij1}E_{mn1} + E^{ij2}E_{mn2} + E^{ij3}E_{mn3} = \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n & \delta^i{}_k \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n & \delta^j{}_k \\ \delta^k{}_m & \delta^k{}_n & \delta^k{}_k \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по последнему столбцу

$$\begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n & \delta^i{}_k \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n & \delta^j{}_k \\ \delta^k{}_m & \delta^k{}_n & \delta^k{}_k \end{vmatrix} = \delta^i{}_k \begin{vmatrix} \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \\ \delta^k{}_m & \delta^k{}_n \end{vmatrix} - \delta^j{}_k \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^k{}_m & \delta^k{}_n \end{vmatrix} + \delta^k{}_k \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \\ \delta^i{}_k\delta^k{}_m & \delta^i{}_k\delta^k{}_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^j{}_k\delta^k{}_m & \delta^j{}_k\delta^k{}_n \end{vmatrix} + \delta^k{}_k \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \\ \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \end{vmatrix} + \delta^k{}_k \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \\ \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \end{vmatrix}$$

Мы воспользовались тем, что $\delta^k{}_k = \delta^1{}_1 + \delta^2{}_2 + \delta^3{}_3 = 3$.

Следовательно, нам удалось доказать, что

$$E^{ijk}E_{mnk} = \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \end{vmatrix} = \delta^i{}_m\delta^j{}_n - \delta^i{}_n\delta^j{}_m \text{ или, что то же самое, } E^{ijk}E_{mnk} = \delta^{ij}_{mn}.$$

6. Свертка символов Веблена по двум индексам.

Для того, чтобы найти свертку по двум индексам $E^{ink}E_{mnk}$, воспользуемся предыдущим результатом: $E^{ijk}E_{mnk} = \delta^i{}_m\delta^j{}_n - \delta^i{}_n\delta^j{}_m$. Полученный результат продолжаем сворачивать дальше, но теперь по индексам *j* и *n*.
$E^{ink}E_{mnk} = \delta^i{}_m\delta^n{}_n - \delta^i{}_n\delta^n{}_m = 3\delta^i{}_m - \delta^i{}_m = 2\delta^i{}_m$, следовательно, $E^{ink}E_{mnk} = 2\delta^i{}_m$.

7. Свертка символов Веблена по всем индексам.

Воспользуемся тем же самым методом и свернем предыдущий результат еще раз
$E^{mnk}E_{mnk} = 2\delta^m{}_m = 6$.

Пример.
Доказать равенство $E^{ijk}E_{mnp}a^m{}_i a^n{}_j a^p{}_k = 6a$.

Так как $E_{mnp}a^m{}_i a^n{}_j a^p{}_k = a\,E_{ijk}$, то $E^{ijk}E_{mnp}a^m{}_i a^n{}_j a^p{}_k = E^{ijk}E_{ijk}a = 6a$.

Прежде чем закончить этот раздел, мы хотим вернуться к обобщенным символам Кронекера. Мы почти ничего о них не говорили, и у нас до сих пор не нашлось для них добрых слов. Чтобы хоть как-то загладить этот пробел, покажем, как с их помощью можно получить общее выражение для алгебраических дополнений.
Обозначим $A^\alpha{}_i$ алгебраическое дополнение для элемента $a^i{}_\alpha$ матрицы $\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right]$.
Из курса линейной алгебры нам известно, что

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{bmatrix} = \Delta\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Запишем то же самое в индексной форме: $a^i{}_\alpha A^\alpha{}_m = \Delta\delta^i{}_m$.
Далее воспользуемся выражением
$E^{\alpha np}a^i_\alpha a^j_n a^k_p = \left|a^{\bullet}_{\bullet}\right| E^{ijk} = \Delta E^{ijk}$, в котором свернем правую и левую части с символом Веблена E_{mjk}.
$E_{mjk}E^{\alpha np}a^i_\alpha a^j_n a^k_p = \Delta E_{mjk}E^{ijk} = 2\Delta\delta^i{}_m$

Преобразуем это выражение.

$$a^i{}_\alpha\delta^{\alpha np}_{mjk}a^j{}_n a^k{}_p = 2\Delta\delta^i{}_m$$

Теперь поделим правую и левую части равенства на 2.

$a^i{}_\alpha\dfrac{1}{2}\delta^{\alpha np}_{mjk}a^j{}_n a^k{}_p = \Delta\delta^i{}_m$. Сравнивая полученное выражение с $a^i{}_\alpha A^\alpha{}_m = \Delta\delta^i{}_m$, делаем вывод, что $A^\alpha{}_m = \dfrac{1}{2}\delta^{\alpha np}_{mjk}a^j{}_n a^k{}_p$. Произведя замену индексов для более удобного восприятия, окончательно получаем, что алгебраическое дополнение $A^m{}_i$ элемента $a^i{}_m$ матрицы $\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]$ равно

$$A^m{}_i = \frac{1}{2}\delta^{mnp}_{ijk}\, a^j{}_n a^k{}_p\,.$$

На этом знакомство с символами Веблена закончим и перейдем к следующей важной теме.

..Тензор Леви-Чивиты

Определение

> Тензором Леви-Чивиты называется трехмерный массив чисел ε_{ijk}, которые определяются, как $\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{ijk}$, где E_{ijk} – символы Веблена. Элементы массива ε_{ijk} при этом называются координатами тензора Леви-Чивиты.

Разница между введенным таким образом математическим объектом и известными нам уже символами Веблена кажется несущественной, но, тем не менее, она принципиальная. В самом деле, символы Веблена никак не связаны с системами координат и для них вопрос о преобразовании при переходе к другим координатным системам вообще не стоит. В связи с этим не важно где писать индексы: вверху или внизу. Координаты тензора Леви-Чивиты связаны с координатной системой через метрический тензор $g_{\bullet\bullet}$.
Давайте посмотрим, что мы можем сказать о законе преобразования координат тензора Леви-Чивиты.
Допустим, что у нас имеется два яблока... я хотел сказать – две системы координат ***e*** и ***e'***. Лучше бы у нас было два яблока, впрочем будем довольствоваться тем, что есть. Итак, у нас есть две системы и мы можем записать выражения для координат в них обеих: $\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{ijk}$ и $\varepsilon_{i'j'k'} = \sqrt{g_{\bullet'\bullet'}}\, E_{i'j'k'}$. Найдем связь между этими координатами, используя зависимость между метрическими тензорами, точнее между их определителями $\sqrt{g_{\bullet'\bullet'}} = \left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|\sqrt{g_{\bullet\bullet}}$.

Пусть $\varepsilon_{i'j'k'} = \sqrt{g_{\bullet'\bullet'}}\, E_{i'j'k'}$, тогда

$$\varepsilon_{i'j'k'} = \sqrt{g_{\bullet'\bullet'}}\, E_{i'j'k'} = \left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|\sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{i'j'k'} = \frac{\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|}\sqrt{g_{\bullet\bullet}}\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right| E_{i'j'k'}\,.$$

Но $\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right| E_{i'j'k'} = E_{mnp}\, e^m{}_{i'}\, e^n{}_{j'}\, e^p{}_{k'}$, следовательно,

$\varepsilon_{i'j'k'} = \dfrac{\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|}\sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{mnp}\, e^m{}_{i'}\, e^n{}_{j'}\, e^p{}_{k'}$ или, как принято записывать, и, что конечно же, то же самое: $\varepsilon_{i'j'k'} = \dfrac{\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|}\sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{ijk}\, e^i{}_{i'}\, e^j{}_{j'}\, e^k{}_{k'} = \dfrac{\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|}\varepsilon_{ijk}\, e^i{}_{i'}\, e^j{}_{j'}\, e^k{}_{k'}\,.$

Мы получили зависимость между координатами тензора Леви-Чивиты в старом и новом базисах:

$$\varepsilon_{i'j'k'} = \frac{\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|}\varepsilon_{ijk}\, e^{i}{}_{i'} e^{j}{}_{j'} e^{k}{}_{k'}\,.$$

Соответственно может быть найдена и обратная зависимость:

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{\left|e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right|}{\left|\left|e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right|\right|}\varepsilon_{i'j'k'}\, e^{i'}{}_{i} e^{j'}{}_{j} e^{k'}{}_{k}\,.$$

Отношение $\dfrac{\left|e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right|}{\left|\left|e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right|\right|}$ обозначим, как мы это уже делали раньше, буквой s. Из этого определения автоматически вытекает, что $s = 1$, если ориентации (правая или левая) старого и нового базисов совпадают, и $s = -1$, если ориентации противоположны, тогда

$\varepsilon_{ijk} = s\,\varepsilon_{i'j'k'} e^{i'}{}_{i} e^{j'}{}_{j} e^{k'}{}_{k}$ и $\varepsilon_{i'j'k'} = s\,\varepsilon_{ijk} e^{i}{}_{i'} e^{j}{}_{j'} e^{k}{}_{k'}$.

Если отнестись к закону преобразования координат как к формальному преобразованию индексов, то можно отметить полное совпадение с преобразованием ковариантных индексов вектора, за исключением, конечно, знака. Но если использовать только, например, правые координатные системы, то никаких отличий не остается. Это свойство координат тензора Леви-Чивиты позволяет использовать их в одних математических выражениях вместе с векторами, получая при этом инвариантные относительно случайного выбора координат выражения.

Приведем такой пример. Свернем тензор Леви-Чивиты с тремя векторами $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$: $\varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$ в некоторой координатной системе. В других координатах для этого числа мы получим другое выражение: $\varepsilon_{i'j'k'} a^{i'} b^{j'} c^{k'}$. Для того, чтобы эти числа сравнить, приведем выражения к одной системе координат. Для этого выразим новые координаты через старые, используя закон их преобразования.

$$\varepsilon_{i'j'k'} a^{i'} b^{j'} c^{k'} = \varepsilon_{ijk} e^{i}{}_{i'} e^{j}{}_{j'} e^{k}{}_{k'} e^{i'}{}_{m} a^m e^{j'}{}_{n} b^n e^{k'}{}_{p} c^p =$$

$$= \varepsilon_{ijk} e^{i}{}_{i'} e^{i'}{}_{m} e^{j}{}_{j'} e^{j'}{}_{n} e^{k}{}_{k'} e^{k'}{}_{p} a^m b^n c^p = \varepsilon_{ijk} \delta^{i}{}_{m} \delta^{j}{}_{n} \delta^{k}{}_{p} a^m b^n c^p = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k\,.$$

Мы получили, что $\varepsilon_{i'j'k'} a^{i'} b^{j'} c^{k'} = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$ и, следовательно, результат вычисления не зависит от выбора координат. Если развернуть данное равенство, $\sqrt{g_{\bullet'\bullet'}}\, E_{i'j'k'} a^{i'} b^{j'} c^{k'} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{ijk} a^i b^j c^k$, то мы увидим его геометрическое содержание. Обе части уравнения, и правая и левая, равны объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$. Следовательно, тензоры Леви-Чивиты, наряду с векторами, пригодны для отражения как геометрической, так и физической реальности, независимой от произвольного выбора систем координат. Можно сформулировать это правило и в более общем виде: *индексированные математические объекты, законы преобразования индексов которых совпадают с векторными, могут быть использованы для отражения как геометрической, так и физической реальности, независимой от выбора систем координат*.

Индексированные математические объекты (массивы чисел), закон преобразования индексов которых совпадает с векторным, принято называть тензорами. Слово "тензор" впервые появилось в теории упругости в 1900г. Фохт назвал так систему коэффициентов, которая определяет деформацию упругого тела. Латинское слово "tendo" означает "натягивать", "растягивать". Из теории упругости это слово заимствовали создатели теории тензоров Риччи и Леви-Чивита в 1901 г. После опубликования работ А. Эйнштейна по специальной, и особенно, по общей теории относительности, тензоры стали популярными среди физиков. В настоящее время повышенный интерес к теории тензоров демонстрируют механики – тензор возвращается к своей alma mater.

Координаты вектора могут быть как ковариантными, так и контравариантными, и связь между ними осуществляется при помощи метрического тензора: $a^i = g^{ik} a_k$ и $a_i = g_{ik} a^k$. Используя это правило, мы также можем получить контравариантные координаты и для тензора Леви-Чивиты:

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{mnp} g^{im} g^{jn} g^{kp} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{mnp} g^{im} g^{jn} g^{kp} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, g^{\bullet\bullet} E^{ijk} =$$
$$= \frac{g^{\bullet\bullet} g_{\bullet\bullet}}{\sqrt{g_{\bullet\bullet}}} E^{ijk}.$$

Следовательно, $\varepsilon^{ijk} = \sqrt{g^{\bullet\bullet}}\, E^{ijk}$. Индексы в символе Веблена можно записывать как снизу, так и сверху. То, что мы индексы записали сверху, еще не говорит, что перед нами контравариантный тензор. Чтобы это утверждать наверняка, мы должны проверить закон преобразования полученного объекта. Пусть $\varepsilon^{i'j'k'} = \sqrt{g^{\bullet'\bullet'}}\, E^{i'j'k'}$ – контравариантные (как мы предполагаем) координаты тензора Леви-Чивиты в новой системе координат. Используя $\sqrt{g^{\bullet'\bullet'}} = \left|\left|e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right|\right| \sqrt{g^{\bullet\bullet}}$, получаем:

$$\varepsilon^{i'j'k'} = \sqrt{g^{\bullet'\bullet'}}\, E^{i'j'k'} = \left|\left|e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right|\right| \sqrt{g^{\bullet\bullet}}\, E^{i'j'k'} = s\sqrt{g^{\bullet\bullet}}\, E^{ijk} e^{i'}{}_i e^{j'}{}_j e^{k'}{}_k,$$ и,

следовательно: $\varepsilon^{i'j'k'} = s\,\varepsilon^{ijk} e^{i'}{}_i e^{j'}{}_j e^{k'}{}_k$, что действительно соответствует контравариантным преобразованиям индексов. Символ s, как обычно, учитывает изменение знака при преобразовании от правых систем к левым и наоборот. В остальном координаты тензора Леви-Чивиты аналогичны символам Веблена и, следовательно, для них будут справедливы следующие выражения:

1. $\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta^i{}_m \delta^j{}_n - \delta^i{}_n \delta^j{}_m$

Доказательство

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} = \sqrt{g^{\bullet\bullet}}\, E^{ijk} \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{mnk} = E^{ijk} E_{mnk} = \delta^{ij}_{mn} =$$
$$= \begin{vmatrix} \delta^i{}_m & \delta^i{}_n \\ \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \end{vmatrix} = \delta^i{}_m \delta^j{}_n - \delta^i{}_n \delta^j{}_m;$$

2. $\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mjk} = 2\,\delta^i{}_m$

Доказательство

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mjk} = \delta^i{}_m \delta^j{}_j - \delta^i{}_j \delta^j{}_m = 3\,\delta^i{}_m - \delta^i{}_m = 2\,\delta^i{}_m$$

3. $\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} = 2\,\delta^i{}_i = 6$

Единственной особенностью этих выражений является то, что свертывание производится только по индексам, занимающим различное положение. Конечно, можно вычислить и такую свертку: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk}$, но результат в этом случае будет зависеть от выбора системы координат:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{ijk} \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\, E_{mnk} = g_{\bullet\bullet} E^{ijk} E_{mnk} = g_{\bullet\bullet} \delta^{ij}_{mn}.$$

К тому же, этот четырехмерный массив преобразуется по законам отличным от тензорных. Для сравнения приведем оба закона.

"правильная" свертка:

$$\varepsilon^{i'j'k'} \varepsilon_{m'n'k'} = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnp} e^{i'}{}_i e^{j'}{}_j e^m{}_{m'} e^n{}_{n'} e^{k'}{}_k e^p{}_{k'} = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnp} e^{i'}{}_i e^{j'}{}_j e^m{}_{m'} e^n{}_{n'} \delta^p{}_k =$$
$$= \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} e^{i'}{}_i e^{j'}{}_j e^m{}_{m'} e^n{}_{n'};$$

"неправильная" свертка:

$$\varepsilon_{i'j'k'}\varepsilon_{m'n'k'} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}e^{i}{}_{i'}e^{j}{}_{j'}e^{m}{}_{m'}e^{n}{}_{n'}e^{k}{}_{k'}e^{p}{}_{k'}.$$

Мы видим, что "правильная" свертка преобразуется как четырехмерный массив с двумя верхними и двумя нижними индексами. В случае "неправильной" свертки мы получаем правило преобразования координат отличное от тензорного.

В заключение этого раздела, чтобы еще раз напомнить, что тензор Леви-Чивиты является массивом, приведем его в табличном представлении по аналогии с символами Веблена:

$$\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\,E_{ijk} \doteq \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

..Операция векторного умножения в произвольных косоугольных координатах

О векторном умножении мы достаточно говорили в свое время. Единственное, чего у нас пока нет, так это общего выражения для векторного умножения в произвольных косоугольных координатах. Все необходимые средства для решения этой проблемы в настоящий момент у нас уже имеются. Сейчас мы проделаем заново путь, который мы уже однажды прошли, когда рассматривали векторное умножение в декартовых координатах. Однако теперь мы воспользуемся произвольными косоугольными координатами. Начнем с общего выражения для ориентированного объема.

$$\overline{V}_e(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\,|\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\bar{\boldsymbol{c}}| = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\begin{vmatrix}a^1 & b^1 & c^1\\a^2 & b^2 & c^2\\a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix} =$$

Разложим определитель по первому столбцу.

$$= \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\left(a^1\begin{vmatrix}b^2 & c^2\\b^3 & c^3\end{vmatrix} - a^2\begin{vmatrix}b^1 & c^1\\b^3 & c^3\end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix}b^1 & c^1\\b^2 & c^2\end{vmatrix}\right) =$$

Представим сумму в виде скалярного произведения двух векторов.

$$= \left(a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\sqrt{g_{\bullet\bullet}}\left(\begin{vmatrix}b^2 & c^2\\b^3 & c^3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}^1 - \begin{vmatrix}b^1 & c^1\\b^3 & c^3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}^2 + \begin{vmatrix}b^1 & c^1\\b^2 & c^2\end{vmatrix}\boldsymbol{e}^3\right).$$

Второй вектор в этом скалярном произведении называется векторным произведением векторов $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$, что записывается следующим образом:

$$\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\left(\begin{vmatrix}b^2 & c^2\\b^3 & c^3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}^1 - \begin{vmatrix}b^1 & c^1\\b^3 & c^3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}^2 + \begin{vmatrix}b^1 & c^1\\b^2 & c^2\end{vmatrix}\boldsymbol{e}^3\right).$$

Свернув выражение в скобках, мы получим знакомую формулу:

$$\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}^1 & b^1 & c^1\\\boldsymbol{e}^2 & b^2 & c^2\\\boldsymbol{e}^2 & b^3 & c^3\end{vmatrix}.$$

Особенностью полученной формулы является то, что по известным контравариантным (обычные) координатам векторов $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ мы получаем ковариантные (необычные, странные) координаты их векторного произведения. Если же нам все же нужны контравариантные координаты, а чаще всего так и бывает, мы можем опустить индексы при помощи метрического тензора:

$$\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\begin{vmatrix} g^{1i}\boldsymbol{e}_i & b^1 & c^1 \\ g^{2j}\boldsymbol{e}_j & b^2 & c^2 \\ g^{3k}\boldsymbol{e}_k & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{g_{\bullet\bullet}}{\sqrt{g_{\bullet\bullet}}}\begin{vmatrix} g^{1i}\boldsymbol{e}_i & b^1 & c^1 \\ g^{2j}\boldsymbol{e}_j & b^2 & c^2 \\ g^{3k}\boldsymbol{e}_k & b^3 & c^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{g^{\bullet\bullet}}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g^{1i}\boldsymbol{e}_i & b^1 & c^1 \\ g^{2j}\boldsymbol{e}_j & b^2 & c^2 \\ g^{3k}\boldsymbol{e}_k & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \sqrt{g^{\bullet\bullet}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & b_1 & c_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & b_2 & c_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

При выводе мы учли, что $[g_{\bullet\bullet}]$ и $[g^{\bullet\bullet}]$ взаимно обратные матрицы и, поэтому, $g^{ik}g_{km} = \delta^i{}_m$. Мы использовали также правило преобразования ковариантных координат: $b_i = g_{ik}b^k$. Учитывая то, что промежуточные преобразования мы опустили, вывод нельзя назвать уж очень простым. Гораздо удобнее подобные преобразования проводить в индексной форме:

$$\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}^1 & b^1 & c^1 \\ \boldsymbol{e}^2 & b^2 & c^2 \\ \boldsymbol{e}^2 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\,E_{ijk}b^i c^j \boldsymbol{e}^k =$$

$$= \frac{g_{\bullet\bullet}}{\sqrt{g_{\bullet\bullet}}}E_{ijk}b^i c^j \boldsymbol{e}^k = \sqrt{g^{\bullet\bullet}}\,E^{mnp}g_{mi}g_{nj}g_{pk}b^i c^j \boldsymbol{e}^k = \sqrt{g^{\bullet\bullet}}\,E^{mnp}b_m c_n \boldsymbol{e}_p$$

Здесь мы воспользовались тем, что $g_{\bullet\bullet}E_{ijk}$ представляет собой определитель с переставленными столбцами, и он равен $g_{\bullet\bullet}E_{ijk} = E^{mnp}g_{mi}g_{nj}g_{pk}$.

Приведем еще раз выражения для векторного умножения в компактной индексной форме:

$$\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}} = \sqrt{g_{\bullet\bullet}}\,E_{ijk}a^i b^j \boldsymbol{e}^k = \sqrt{g}\,E_{ijk}a^i b^j \boldsymbol{e}^k = \varepsilon_{ijk}a^i b^j \boldsymbol{e}^k$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}} = \sqrt{g^{\bullet\bullet}}\,E^{ijk}a_i b_j \boldsymbol{e}_k = \frac{1}{\sqrt{g}}E^{ijk}a_i b_j \boldsymbol{e}_k = \varepsilon^{ijk}a_i b_j \boldsymbol{e}_k$$

Осталось проверить закон преобразования координат для того, чтобы не осталось никаких сомнений в том, что мы действительно имеем дело с вектором. Пусть $\varepsilon_{i'j'k'}a^{i'}b^{j'}\boldsymbol{e}^{k'}$ – векторное произведение векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$, вычисленное в новом базисе, а $c_{k'}$ – ковариантная координата этого произведения.

$$c_{k'} = \varepsilon_{i'j'k'}a^{i'}b^{j'} = \sqrt{g_{\bullet'\bullet'}}\,E_{i'j'k'}a^{i'}b^{j'} = \sqrt{g_{\bullet'\bullet'}}\sqrt{g^{\bullet\bullet}}\sqrt{g_{\bullet\bullet}}\,E_{i'j'k'}a^{i'}b^{j'} =$$
$$= \left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|\sqrt{g_{\bullet\bullet}}\,E_{i'j'k'}a^{i'}b^{j'}.$$

Мы воспользовались здесь тем, что $\sqrt{g^{\bullet\bullet}}\sqrt{g_{\bullet'\bullet'}} = \left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|$. Далее займемся произведением $\left|\left|e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right|\right|E_{i'j'k'}$.

$$\left|\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|\right| E_{i'j'k'} = \frac{\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|\right|}\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right| E_{i'j'k'} = \frac{\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|\right|} E_{ijk}\, e^{i}{}_{i'}\, e^{j}{}_{j'}\, e^{k}{}_{k'}\,.$$

Продолжим начатое преобразование:

$$\left|\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|\right| \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, E_{i'j'k'} a^{i'} b^{j'} = \frac{\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|\right|} \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, E_{ijk} e^{i}{}_{i'} a^{i'} e^{j}{}_{j'} b^{j'} e^{k}{}_{k'} =$$

$$= \frac{\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|\right|} \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, E_{ijk} a^{i} b^{j} e^{k}{}_{k'} = \frac{\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|\right|} c_k e^{k}{}_{k'},$$ где $c_k = \sqrt{g_{\cdot\cdot}}\, E_{ijk} a^{i} b^{j}$ – k-ая координата того же вектора в старом базисе.

Следовательно: $c_{k'} = \dfrac{\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|}{\left|\left|e^{\bullet}{}_{\cdot'}\right|\right|} c_k e^{k}{}_{k'}$.

Аналогично можно получить, что $c^{k'} = \dfrac{\left|e^{\bullet\prime}{}_{\bullet}\right|}{\left|\left|e^{\bullet\prime}{}_{\bullet}\right|\right|} c^k e^{k'}{}_{k}$.

Закон преобразования координат получился вполне векторным, за исключением знака, который изменяется на противоположный при переходе от левой системы координат к правой и наоборот. Это свойство векторного произведения мы подробно обсуждали раньше и, поэтому не будем больше на нем останавливаться.

Линейные преобразования или операторы

Векторы удобны для работы с теми или иными величинами, обладающими "векторными" свойствами. Векторы позволяют задать такие величины, т.е. дать им численную характеристику. Но на проблеме описания величин потребности науки и практики никогда не исчерпываются. Любая теория, прежде всего исследует связи или зависимости между изучаемыми величинами. Для отражения связей между различными величинами в математике вводится понятие функции. Наиболее простой, досконально проработанной и исследованной во всех деталях, является теория функций числового аргумента. То, что координатный метод позволяет использовать все достижения теории функций для описания функциональных зависимостей между векторными величинами можно считать одним из главных его достоинств. Для того чтобы задать функциональную зависимость между двумя векторными величинами $\bar{\boldsymbol{x}}$ и $\bar{\boldsymbol{y}}$, достаточно определить три функции трех числовых аргументов:

$$\begin{cases} y^1 = \varphi^1(x^1, x^2, x^3) \\ y^2 = \varphi^2(x^1, x^2, x^3) \\ y^3 = \varphi^3(x^1, x^2, x^3) \end{cases}.$$

Имеющийся набор хорошо исследованных элементарных, и не очень элементарных и совсем не элементарных функций позволяет задать практически любую мыслимую зависимость между векторными величинами. Наиболее простой вид зависимости между векторами определяют линейные функции:

$$\begin{cases} y^1 = a^1{}_1 x^1 + a^1{}_2 x^2 + a^1{}_3 x^3 \\ y^2 = a^2{}_1 x^1 + a^2{}_2 x^2 + a^2{}_3 x^3 \\ y^3 = a^3{}_1 x^1 + a^3{}_2 x^2 + a^3{}_3 x^3 \end{cases}, \text{ где } a^i{}_k \text{ – действительные числа.}$$

При всей своей простоте линейная зависимость обладает широкими выразительными возможностями. К тому же, если ограничить область исследования достаточно малой областью изменения величин, зависимость между ними почти всегда можно считать приближенно линейной.

Линейной является зависимость между дифференциалами координат векторов $\bar{\boldsymbol{y}}$ и $\bar{\boldsymbol{x}}$:

$$\begin{cases} dy^1 = \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} dx^1 + \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} dx^2 + \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x^3} dx^3 \\ dy^2 = \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x^1} dx^1 + \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} dx^2 + \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x^3} dx^3 \\ dy^3 = \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial x^1} dx^1 + \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial x^2} dx^2 + \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial x^3} dx^3 \end{cases}.$$

Последнее обстоятельство особенно важно для математического анализа.

Особую роль линейные функции получили в последнее время благодаря широкой компьютеризации и порожденному ей стремительному развитию численных методов, которые, так или иначе, сводят любую задачу к решению больших систем линейных уравнений.

Подробно теория линейных функций или линейных преобразований, как ее часто называют, изучается в курсе линейной алгебры. Мы остановимся на этом предмете только для того, чтобы на отдельных примерах продемонстрировать те идеи, которые имеют отношение к нашему предмету.

Линейные функции часто записывают в виде операторов. Принципиальной разницы между понятием оператора и функции не существует. Разница в основном терминологическая. На языке функций мы можем сказать, что $\bar{\boldsymbol{y}}$ есть векторная функция векторного аргумента $\bar{\boldsymbol{x}}$: $\bar{\boldsymbol{y}} = f(\bar{\boldsymbol{x}})$. Используя понятие оператора, то же самое мы скажем так: "оператор F преобразует вектор $\bar{\boldsymbol{x}}$ в вектор $\bar{\boldsymbol{y}}$: $\bar{\boldsymbol{y}} = F \circ \bar{\boldsymbol{x}}$". Вместе с тем каждый из подходов обладает своими особенностями. Когда мы говорим о функции, то мы под этим понимаем и саму функцию и ее значение. В записи же функции обычно перемешаны и аргументы и элементы, относящиеся непосредственно только к функции. "Операторный" язык, позволяет четко отделить саму функцию от ее аргумента и от ее значения. Оператор F можно представлять в виде некоторого рецепта, набора инструкций, компьютерной программы или даже некоего механизма, который поглощает все то, что стоит от него справа, и возвращает некий новый объект, который указывается, обычно, слева. Еще одной особенностью "операторного" языка является сходство его с матричной записью, что особенно полезно для линейных операторов.

Каждый линейный оператор может быть задан в виде линейных уравнений либо в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

Но кроме этих двух, линейный оператор может быть задан и многими другими способами, например, при помощи такой инструкции: повернуть вектор, стоящий на входе на угол φ относительно оси x в направлении от оси y к оси z. Для выполнения этой инструкции нет необходимости прибегать к матричной записи, хотя она и может быть сделана. Поэтому, принято различать сам оператор, который выполняет некоторые действия с векторами, и его матрицу, как некоторый, но не единственный способ выражения этих действий.

Линейный оператор и его матрица

Пусть $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}$ линейный оператор, который преобразует некоторый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}$ в вектор $\bar{\boldsymbol{y}}$: $\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{\bar{\boldsymbol{a}}} \cdot \bar{\boldsymbol{x}}$. Пусть векторы заданы своими контравариантными координатами, тогда матрицу оператора $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}$, которая выполняет преобразование контравариантных координат вектора $\bar{\boldsymbol{x}}$ в контравариантные же координаты вектора $\bar{\boldsymbol{y}}$ будем обозначать $\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]$. Запишем соответствующее преобразование в матричной форме: $\left[y^{\bullet}\right] = \left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right]$. Но векторы могут быть заданы и своими ковариантными координатами – выполним соответствующие преобразования:

$\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[y_{\bullet}\right] = \left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[x_{\bullet}\right]$;

$\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[y_{\bullet}\right] = \left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[x_{\bullet}\right]$.

Так как $\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]=E$, то $\left[y_{\bullet}\right]=\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[x_{\bullet}\right]$ и, следовательно, матрица $\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]$ определяет то же самое преобразование, но через ковариантные координаты векторов. Матрицу, выполняющую преобразование через ковариантные координаты будем обозначать $\left[a_{\bullet}{}^{\bullet}\right]$, следовательно, выражение
$\left[a_{\bullet}{}^{\bullet}\right]=\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]$ определяет правило поднятия и опускания индексов для матрицы линейного преобразования. Аналогично можно записать, что
$\left[a^{\bullet\bullet}\right]=\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[g^{\bullet\bullet}\right]$;
$\left[a_{\bullet\bullet}\right]=\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]$.

Мы видим, что с индексами элементов матрицы линейного преобразования можно производить операции по изменению их типа точно так же, как с индексами координат векторов. При этом мы получим четыре различные матрицы, которые при их правильном использовании, т.е. с координатами векторов соответствующего типа, приводят к одинаковому геометрическому результату.
Векторы также могут быть заданы в различных координатных системах. Пусть выражение $\left[y^{\bullet'}\right]=\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]\left[x^{\bullet'}\right]$ определяет то же самое преобразование в новой координатной системе. Выразим координаты векторов в новой системе через их координаты в старой системе:
$\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[y^{\bullet}\right]=\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right]$.
Умножим правую и левую части данного равенства на матрицу $\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]^{-1}$.

$\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[y^{\bullet}\right]=\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right]$, следовательно:
$\left[y^{\bullet}\right]=\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right]=\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right]$.

Отсюда мы получаем связь между матрицами одного и того же преобразования в различных координатных системах:

$$\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right].$$

Также можно доказать, что $\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]$.

Если подходить к этому закону как к формальному преобразованию индексов, то нетрудно заметить полную идентичность этого преобразования с правилом преобразования индексов ковариантных и контравариантных координат векторов. Поэтому, элементы матриц $\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]$, $\left[a_{\bullet}{}^{\bullet}\right]$, $\left[a_{\bullet\bullet}\right]$ и $\left[a^{\bullet\bullet}\right]$ принято называть координатами одного и того же линейного преобразования или тензора различного типа. Отметим также, что законы преобразования координат $\left[a_{\bullet\bullet}\right]$ и $\left[a^{\bullet\bullet}\right]$ совпадают с законами преобразования координат метрического тензора $\left[g_{\bullet\bullet}\right]$ и $\left[g^{\bullet\bullet}\right]$ соответственно.
Прежде чем переходить к конкретным примерам линейных преобразований, получим простое правило, которое позволит нам в некоторых случаях легко вычислить их координаты.

Пусть $\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right]$ один раз контравариантная и один раз ковариантная матрица координат некоторого линейного преобразования. Найдем результат ее действия на векторы, совпадающие с векторами базиса:

$$\bar{\bar{a}}\cdot\boldsymbol{e}_1 \doteq \begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 \\ a^2{}_1 \\ a^3{}_1 \end{bmatrix} \doteq {}^a\boldsymbol{e}_1 .$$

Символом ${}^a\boldsymbol{e}_1$ мы обозначили результат воздействия оператора $\bar{\bar{a}}$ на вектор базиса $\boldsymbol{e}_1$. Для других векторов базиса мы получим аналогичные результаты: $\bar{\bar{a}}\cdot\boldsymbol{e}_2 = {}^a\boldsymbol{e}_2$ и $\bar{\bar{a}}\cdot\boldsymbol{e}_3 = {}^a\boldsymbol{e}_3$. Следовательно:

$$\left[e^{\bullet}_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} {}^ae^1{}_1 & {}^ae^1{}_2 & {}^ae^1{}_3 \\ {}^ae^2{}_1 & {}^ae^2{}_2 & {}^ae^2{}_3 \\ {}^ae^3{}_1 & {}^ae^3{}_2 & {}^ae^3{}_3 \end{bmatrix}.$$

Теперь мы можем сформулировать следующее **правило**.

Для того, чтобы найти матрицу координат линейного преобразования $\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right]$, необходимо:

1. "Подействовать" преобразованием на векторы базиса и найти результат этого действия.
2. Найти координаты преобразованных векторов базиса.
3. Составить матрицу из координат преобразованных векторов базиса как из столбцов.

Пример

Поставим задачу найти координаты линейного оператора $\bar{\bar{a}}$ зеркально отображающего произвольный вектор ($\bar{\boldsymbol{b}}$) относительно плоскости, проходящей через начало координат нормально к вектору единичной нормали $\boldsymbol{n}$. Будем для простоты считать, что система координат декартова (рис. 47).

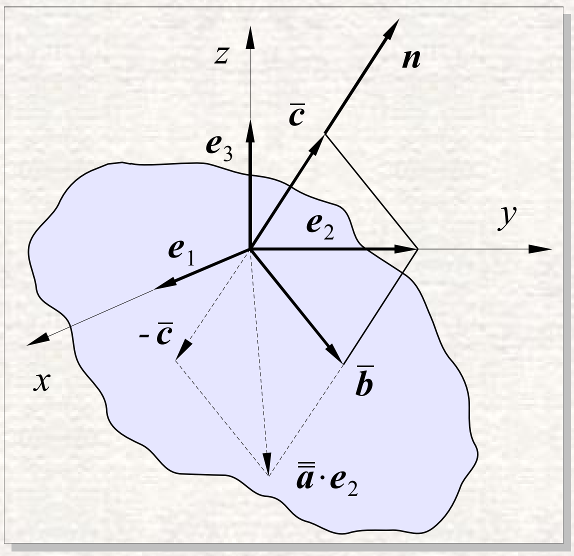


Рис. 47

В соответствии с полученным нами правилом, найдем векторы, которые получаются в результате действия преобразования на векторы базиса. Для этого разложим произвольный (для определенности возьмем вектор $\boldsymbol{e}_2$) базисный вектор на два вектора $\bar{\boldsymbol{c}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$. При этом вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ направим по нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности зеркала (рис. 47), а вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ расположим в плоскости зеркала.

$\boldsymbol{e}_2 = \bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{c}}$, при этом $\bar{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{n}$, а

$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{e}_2 - \bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{n}$.

При отражении в зеркале вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ не изменяется, а вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ изменяется на противоположный. Это замечание позволяет нам легко найти отражение базисного вектора в зеркале:

$\bar{\bar{a}}\circ\boldsymbol{e}_2 = \bar{\boldsymbol{b}} + (-\bar{\boldsymbol{c}}) = \boldsymbol{e}_2 - 2\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{e}_2 - 2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{n}$.

Для произвольного вектора:

$\bar{\bar{a}}\circ\boldsymbol{e}_i = \bar{\boldsymbol{b}} + (-\bar{\boldsymbol{c}}) = \boldsymbol{e}_i - 2\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{e}_i - 2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{n}$.

Теперь мы можем записать преобразованные базисные векторы в координатной форме.

$$\bar{\bar{a}}\circ\boldsymbol{e}_1 \doteq \begin{bmatrix} 1-2n^1n^1 \\ -2n^2n^1 \\ -2n^3n^1 \end{bmatrix},\ \bar{\bar{a}}\circ\boldsymbol{e}_2 \doteq \begin{bmatrix} -2n^1n^2 \\ 1-2n^2n^2 \\ -2n^3n^2 \end{bmatrix},\ \bar{\bar{a}}\circ\boldsymbol{e}_3 \doteq \begin{bmatrix} -2n^1n^3 \\ -2n^2n^3 \\ 1-2n^3n^3 \end{bmatrix}.$$

На последнем этапе мы строим матрицу преобразования из найденных столбцов.

$$\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} 1-2n^1n^1 & -2n^1n^2 & -2n^1n^3 \\ -2n^2n^1 & 1-2n^2n^2 & -2n^2n^3 \\ -2n^3n^1 & -2n^3n^2 & 1-2n^3n^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} n^1n^1 & n^1n^2 & n^1n^3 \\ n^2n^1 & n^2n^2 & n^2n^3 \\ n^3n^1 & n^3n^2 & n^3n^3 \end{bmatrix}$$

Задача решена. Общий метод работает, но не всегда общий метод является самым простым и коротким. Попробуем решить задачу иначе. Пусть вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ является произвольным вектором. Найдем результат действия преобразования на него. При этом мы используем основную идею, найденную в предыдущем решении.

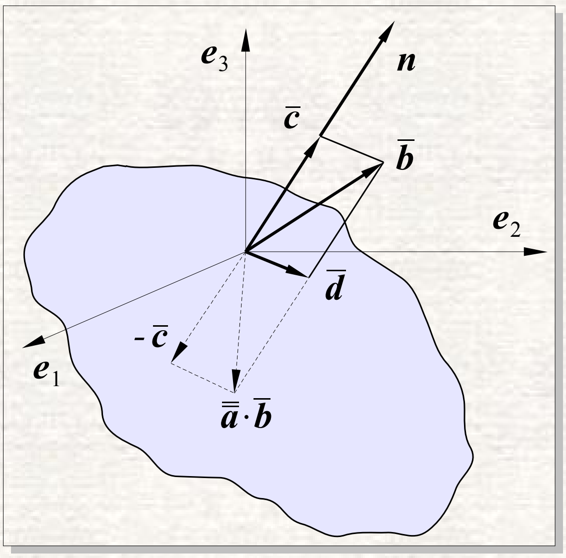


Рис. 48

Разложим вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ на два составляющих вектора $\bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{c}} + \bar{\boldsymbol{d}}$ таким образом, чтобы вектор $\bar{\boldsymbol{d}}$ лежал плоскости, а вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ был к ней ортогонален. При зеркальном отображе-

нии вектор $\bar{\boldsymbol d}$ преобразуется сам в себя, а вектор $\bar{\boldsymbol c}$ в ему противоположный (как и в предыдущем решении). Следовательно, зеркальное отображение вектор $\bar{\boldsymbol b}$ отобразит в вектор $\bar{\bar{a}}\circ\bar{\boldsymbol b} = \bar{\bar{a}}\circ(\bar{\boldsymbol c} + \bar{\boldsymbol d}) = \bar{\boldsymbol d} - \bar{\boldsymbol c}$. Как и предыдущем доказательстве $\bar{\bar{a}}\circ\bar{\boldsymbol b} = \bar{\boldsymbol b} - 2\bar{\boldsymbol c}$.
$\bar{\boldsymbol c} = (Пр_n\bar{\boldsymbol b})\boldsymbol n = b^k n_k \boldsymbol n$ и, следовательно: $c^i = b^k n_k n^i$. После несложных преобразований в индексной форме получаем:
$\bar{\bar{a}}\cdot\bar{\boldsymbol b} = \bar{\boldsymbol b} - 2\bar{\boldsymbol c} \doteq b^i - 2b^k n_k n^i = \delta^i{}_k b^k - 2b^k n_k n^i = (\delta^i{}_k - 2n^i n_k)b^k = a^i{}_k b^k$.

Таким образом: $a^i{}_k = \delta^i{}_k - 2n^i n_k$. Это и есть общее выражение для координат оператора зеркального отображения в индексной форме. Нам кажется, что данный вывод короче и проще, впрочем, это дело вкуса.

В данном случае мы воспользовались преобразованиями в индексной форме, но если перейти к матричной форме записи, то мы получим тот же самый результат:

$$\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} n^1 n_1 & n^1 n_2 & n^1 n_3 \\ n^2 n_1 & n^2 n_2 & n^2 n_3 \\ n^3 n_1 & n^3 n_2 & n^3 n_3 \end{bmatrix}.$$

Следует заметить, что на этот раз мы не делали никаких предположений о базисных векторах, следовательно, формулу можно считать действительной для самого общего случая.

В декартовой системе координат мы можем воспользоваться более привычными обозначениями для проекций вектора единичной нормали $\boldsymbol n$:

$$\left[a^{*}{}_{*}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} n_x n_x & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y n_y & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z n_z \end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы лучше понять смысл полученного выражения конкретизируем условие. Пусть

$\bar{\boldsymbol b} \doteq \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, а нормаль $\boldsymbol n \doteq \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ в декартовой системе координат.

Тогда

$$\left[a^{*}{}_{*}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 1\cdot1 & 1\cdot2 & 1\cdot0 \\ 2\cdot1 & 2\cdot2 & 2\cdot0 \\ 0\cdot1 & 0\cdot2 & 0\cdot0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$\bar{\boldsymbol b}_{зерк} \doteq \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 30 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Дадим графическую иллюстрацию полученному решению.

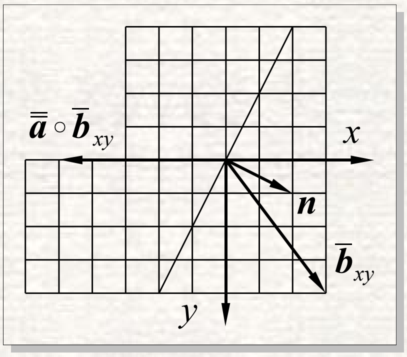


Рис. 49

Серьезной проблемой при решении задач на стереометрию оказывается сложность в выполнении пространственных чертежей. Данная задача хороша тем, что вектор $\boldsymbol{n}$ лежит в плоскости *xoy*. При этом вертикальная составляющая вектора $\bar{\boldsymbol{b}}_z$ лежит в зеркальной плоскости и при отражении не изменяется. Остается только выяснить, как изменяется составляющая $\bar{\boldsymbol{b}}_{xy}$, лежащая в плоскости *xoy*. Для этого достаточно изобразить только вид сверху, что мы и сделали на рис.

..Примеры линейных операторов

1. Оператор тождественного преобразования.

Оператор тождественного преобразования переводит любой вектор сам в себя. Другими словами, он возвращает тот же самый вектор, который принял, ничего с ним не делая. Оператор тождественного преобразования обозначается буквой *I*, следовательно: $I\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1$, $I\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2$ и $I\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3$. Отсюда находим матрицу тождественного преобразования.

$$\left[I^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E.$$

Проверим закон преобразования координат тождественного преобразования при смене координатной системы.

$$\left[I^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[I^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]E\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]=E.$$

Следовательно, как, впрочем, и можно было ожидать, матрица оператора тождественного преобразования равна единичной матрице.

Умножим матрицу тождественного преобразования на матрицу координат метрического тензора.

$\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[I^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=\left[I_{\bullet\bullet}\right]=\left[g_{\bullet\bullet}\right]E=\left[g_{\bullet\bullet}\right]$, следовательно, $\left[I_{\bullet\bullet}\right]=\left[g_{\bullet\bullet}\right]$.

Аналогично можно показать, что

$\left[I^{\bullet\bullet}\right]=\left[g^{\bullet\bullet}\right]$ и $\left[I^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=\left[I_{\bullet}{}^{\bullet}\right]=\left[g^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=\left[g_{\bullet}{}^{\bullet}\right]=E$.

Отсюда можно сделать вывод, что матрицы тождественного преобразования и метрического тензора совпадают. Этот факт имеет простое геометрическое объяснение. Матрица метрического тензора является матрицей перехода от основной системы координат к взаимной и наоборот, но вектор, координаты которого преобразуются, остается при этом тем же самым вектором. Следует заметить, что запись координат метрического тензора со смешанными индексами, хотя и не запрещена правилами, обычно не используется. Поскольку $g^{i}{}_{k}=\delta^{i}{}_{k}$, то вместо $g^{i}{}_{k}$ предпочитают записывать $\delta^{i}{}_{k}$. Однако при этом не следует забывать, что для символа Кронекера операции поднятия и опускания индексов не имеют смысла, поэтому $\delta^i{}_k g^k{}_m = g^i{}_m$ и $\delta^i{}_k g^k{}_m \neq \delta_{im}$.

Матрицу $\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]$ некоторые авторы [22] также рассматривают как матрицу тождественного преобразования особого вида, которое координаты произвольного вектора в одной координатной системе преобразует в координаты того же самого вектора, но в новой системе координат. В этом случае мы не можем говорить о координатах преобразования в какой-то конкретной системе, так как они зависят от двух систем координат сразу. Тем не менее мы можем применить формально общий закон преобразования координат к матрице $\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]$ и получим при этом обратную матрицу $\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right] = \left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]$.

Мы видим, что матрица тождественного преобразования многолика, и может принимать вид любой невырожденной матрицы в зависимости от способа ее трактовки.

Произвольное линейное преобразование также может быть представлено координатами сразу в двух координатных системах. В самом деле, пусть $\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]$ матрица линейного преобразования, которое вектор с координатами $\left[x^{\bullet}\right]$ в некоторой системе преобразует в вектор с координатами $\left[y^{\bullet}\right]$ в той же самой системе координат.

Тогда $\left[y^{\bullet}\right] = \left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right]$.

Выразим координаты вектора $\left[y^{\bullet}\right]$ через координаты в новой системе координат.

$\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[y^{\bullet'}\right] = \left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right]$.

Умножим правую и левую части равенства на матрицу $\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]$.

$\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[y^{\bullet'}\right] = \left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right]$.

Учитывая, что $\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right] = E$, получим

$\left[y^{\bullet'}\right] = \left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right] = \left[a^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[x^{\bullet}\right]$, где $\left[a^{\bullet'}{}_{\bullet}\right] = \left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]$ – матрица линейного преобразования, которая координаты вектора $\bar{\boldsymbol{x}}$, заданные в одной системе, преобразует в координаты вектора $\bar{\boldsymbol{y}}$, заданные в другой системе координат.

Ничего принципиально нового такая возможность не дает, и в дальнейшем мы не будем рассматривать линейные операторы, отнесенные к двум системам координат одновременно.

2. Обратный оператор

Если $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}$ – произвольный оператор, и если существует такой оператор $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}^{-1}$, что ,
то $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}^{-1}$ называется обратным оператором. Обратный оператор имеет обратную матрицу: $\left[a^{-1}\right] = \left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^{-1}$. Не каждый оператор имеет обратный, а только тот, который осуществляет взаимно однозначное преобразование.

3. Оператор растяжения

Представим, что геометрическое пространство построено из эластичного материала. Растянем его в направлении оси x так, чтобы каждый отрезок, расположенный вдоль этой оси растянулся бы в λ раз. В этом случае x координата каждого вектора увеличится в λ раз, в то же время остальные его координаты останутся без изменения.

$\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\boldsymbol{e}_1 = \lambda\boldsymbol{e}_1$; $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$; $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$.

Мы не вводим специального обозначения для этого оператора.

$$\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь, если мы растянем наше пространство по направлениям всех трех осей, то получим оператор трехосного растяжения:

$\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, где λ_i – коэффициенты растяжения вдоль соответствующих осей.

4. Оператор сдвига

Представим, что все пространство заполнено тонкими листами бумаги, аккуратно сложенными в одну стопку (рис. 50). Сдвинем листы на одну и ту же величину относительно друг друга в направлении оси y.

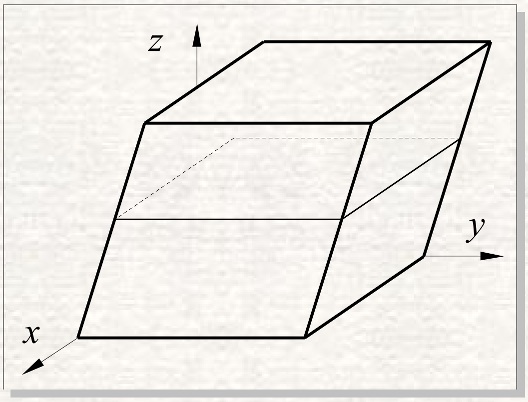


Рис. 50

Если считать лисы бумаги очень тонкими слоями геометрического пространства, то векторы, находящиеся в этом пространстве и с ним связанные также сдвинутся. Координаты векторов параллельных плоскости xoy, как лежащие в сдвигаемых слоях, не изменятся. Зато концы вектора перпендикулярного плоскости xoy сдвинутся один относительно другого в направлении оси y на величину пропорциональную длине вектора. Общее выражение для такого преобразования в векторной форме можно записать так: $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} = \bar{\boldsymbol{c}} + \lambda c^3 \boldsymbol{e}_2$.

Воздействие этого преобразования на векторы базиса можно записать следующим образом:

$\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \lambda e^3{}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \lambda\cdot 0\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1$;

$\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \lambda e^3{}_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \lambda\cdot 0\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$;

$\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 + \lambda e^3{}_3\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 + \lambda\boldsymbol{e}_2$.

Отсюда получаем матрицу линейного преобразования сдвига:

$$\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right]^{\to y}_{xoy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично получаем матрицу оператора сдвига в направлении оси y параллельно плоскости yoz.

$\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \lambda e^1{}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \lambda\boldsymbol{e}_2$;

$\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \lambda e^1{}_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \lambda\cdot 0\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$;

$\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\cdot\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 + \lambda e^1{}_3\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 + \lambda\cdot 0\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$.

$$\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right]^{\to y}_{yoz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы сдвигов относительно других осей получаются точно так же.

5. Оператор поворота относительно координатной оси

Если в предыдущих случаях для вычисления матриц операторов мы могли использовать произвольную систему координат, то для вычисления матрицы оператора поворота без декартовой системы координат обойтись очень трудно. Пусть $\overline{\overline{\varphi}}_x$ является оператором поворота относительно оси x декартовой системы координат xyz, причем поворот осуществляется по направлению от оси y к z оси. Найдем координаты векторов базиса, подвергнутых действию этого оператора, на рис. 51 они обозначены ${}^{\varphi}\boldsymbol{e}_2$ и ${}^{\varphi}\boldsymbol{e}_3$.

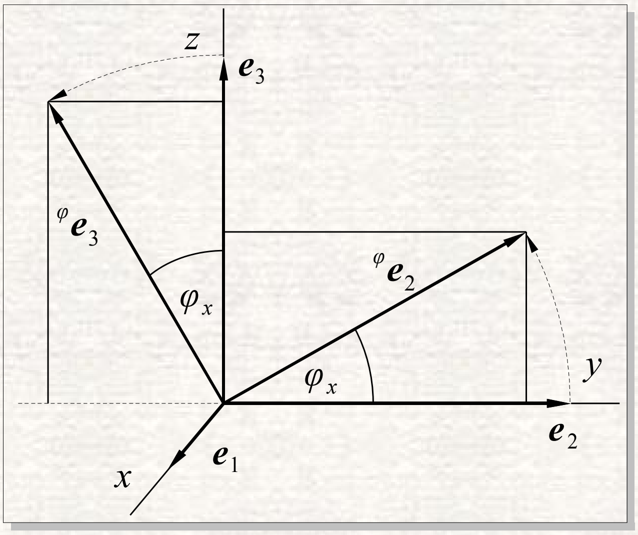


Рис. 51

$${}^{\varphi}\boldsymbol{e}_1 \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ {}^{\varphi}\boldsymbol{e}_2 \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\varphi_x \\ \sin\varphi_x \end{bmatrix},\ {}^{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\varphi_x \\ \cos\varphi_x \end{bmatrix}.$$

И, следовательно, $\left[\varphi_x{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{bmatrix}$

Аналогично можно доказать, что

$$\left[\varphi_y{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{bmatrix},$$

$$\left[\varphi_z{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Оператор поворота относительно произвольной оси

Если нам необходимо выполнить преобразование поворота относительно произвольной оси, не совпадающей ни с одной из координатных осей, мы можем воспользоваться услугами вспомогательной координатной системы $x'y'z'$. Если ось z' вспомогательной системы координат направить вдоль оси поворота, то матрица оператора поворота в этой системе запишется уже известным образом:

$$\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{z'} & -\sin\varphi_{z'} & 0 \\ -\sin\varphi_{z'} & \cos\varphi_{z'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь достаточно воспользоваться известным законом преобразования координат оператора, чтобы найти матрицу его координат в старой системе: $\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]$. Общее выражение для матрицы поворота не отличается ни простотой, ни красотой и мы ее здесь не приводим, но и не проводя никаких вычислений, можно сделать некоторые выводы относительно ее свойств. Умножим матрицу $\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]$ на $\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T$.

$$\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=\left(\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]\right)^T\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]=$$

$$=\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]^T\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]^T\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^T\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right].$$

Матрица преобразования $\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]$ составлена из координат векторов базиса системы $x'y'z'$ в старой системе координат и, поэтому,

$\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]^T\left[e^{\bullet}{}_{\bullet'}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_{1'} & \boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_{2'} & \boldsymbol{e}_{1'}\cdot\boldsymbol{e}_{3'}\\ \boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_{1'} & \boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_{2'} & \boldsymbol{e}_{2'}\cdot\boldsymbol{e}_{3'}\\ \boldsymbol{e}_{3'}\cdot\boldsymbol{e}_{1'} & \boldsymbol{e}_{3'}\cdot\boldsymbol{e}_{2'} & \boldsymbol{e}_{3'}\cdot\boldsymbol{e}_{3'}\end{bmatrix}=E$ так как система координат является ортонормированной.

По аналогичным причинам $\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]^T\left[e^{\bullet'}{}_{\bullet}\right]=E$. То, что $\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]^T\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet'}{}_{\bullet'}\right]=E$, можно проверить непосредственно. Следовательно, $\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=E$, а это означает, что матрица транспонированная к $\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]$, является к ней обратной: $\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^{-1}=\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T$. Матрицы, обладающие таким свойством и соответствующие им операторы, называются ортогональными. Следовательно, матрица оператора поворота, является ортогональной матрицей. Этот факт имеет простое геометрическое объяснение: как бы мы ни поворачивали первоначально ортонормированные векторы базиса, они всегда останутся ортонормированными и, поэтому естественно, что $\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[\varphi_{z'}{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=E$. Однако, все, что мы до сих пор сказали про оператор поворота, справедливо только для ортонормированных систем.

Пусть теперь $\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]$ будет оператор поворота в произвольных косоугольных координатах. Перейдем к ортонормированному базису:

$$\left[\varphi_l{}^{*}{}_{*}\right]=\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]^T\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[e^{\bullet}{}_{*}\right].$$

В ортонормированном базисе

$$\left[\varphi_l{}^{*}{}_{*}\right]^T\left[\varphi_l{}^{*}{}_{*}\right]=E=\left[e^{\bullet}{}_{*}\right]^T\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]^T\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{*}\right];$$

Так как $\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]^T\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]=\left[g_{\bullet\bullet}\right]$, то $E=\left[e^{\bullet}{}_{*}\right]^T\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{*}\right]$.

Умножим правую и левую части равенства на матрицу $\left[e^{\bullet}{}_{*}\right]^{-1}=\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]$ справа и на $\left[e^{\bullet}{}_{*}\right]^{-T}=\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]^T$ слева.

$\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]^T\left[e^{\bullet}{}_{*}\right]^T\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]\left[e^{\bullet}{}_{*}\right]\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]=\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]^T\left[e^{*}{}_{\bullet}\right]$ и упрощая далее, получаем $\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[g_{\bullet\bullet}\right]\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]=\left[g_{\bullet\bullet}\right]$. Умножая справа на $\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^{-1}$ и слева на $\left[g^{\bullet\bullet}\right]$, получим: $\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^{-1}=\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[\varphi_l{}^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[g_{\bullet\bullet}\right]$.

Вообще для произвольного оператора $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}$, оператором, сопряженным к нему $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}^T$, называется оператор, матрица которого равна $\left[a^{T\bullet}{}_{\bullet}\right]=\left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T\left[g_{\bullet\bullet}\right]$. Сопряженный оператор называется еще транспонированным, поскольку в ортонормированной системе $\left[a^{T\bullet}{}_{\bullet}\right]=\left[a^{\bullet}{}_{\bullet}\right]^T$.

Следовательно, обратная матрица произвольного ортогонального оператора и оператора поворота в частности равна матрице сопряженного оператора.

.Доказательство теоремы об определителе

В свое время мы отложили полное доказательство теоремы о том, что объем параллелепипеда, построенного на векторах, равен определителю, составленному из координат этих векторов. Сейчас, после проделанной нами работы, эти лучшие времена настали.

Пусть $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ произвольные некомпланарные векторы, проведенные из начала декартовой системы координат. Составим из координат этих векторов матрицу:

$$\begin{bmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix} = \left[a^{\bullet} b^{\bullet} c^{\bullet}\right].$$

Повернем все три вектора как жесткое целое относительно оси x таким образом, чтобы вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ совместился бы с плоскостью xoy. Пусть $\left[\varphi_{1x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]$ матрица оператора, который такое действие выполняет. Умножив матрицу координат векторов на $\left[\varphi_{1x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]$, мы получим новые координаты этих векторов после поворота: $\left[\varphi_{1x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet} b^{\bullet} c^{\bullet}\right]$.
Повернем теперь все векторы относительно оси z так, чтобы вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ совместился бы с осью x. Угол поворота выберем так, чтобы направления оси и вектора совпали бы тоже. Чтобы получить новые координаты векторов, нам теперь необходимо последнее выражение умножить на матрицу: $\left[\varphi_{z}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]$: $\left[\varphi_{z}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\varphi_{1x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet} b^{\bullet} c^{\bullet}\right]$.
Теперь снова повернем все векторы относительно оси x так, чтобы вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ оказался в плоскости xoy с положительной стороны оси y. Новые координаты векторов мы получим из выражения $\left[\varphi_{2x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\varphi_{z}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\varphi_{1x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet} b^{\bullet} c^{\bullet}\right]$, где $\left[\varphi_{2x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]$ – матрица оператора, выполняющего соответствующий поворот.
В результате этих преобразований вектор $\bar{\boldsymbol{a}}$ совместился с осью x, вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ оказался в плоскости xoy с положительной стороны оси y, а вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ занимает некоторое положение в верхнем или нижнем полупространстве.
Применим теперь оператор сдвига в плоскости параллельной xoz в направлении оси x, который совместит вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ с осью y. Снова найдем новые координаты векторов: $\left[\underset{xoz}{\overset{\to x}{\lambda_1}}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\varphi_{2x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\varphi_{z}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\varphi_{1x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet} b^{\bullet} c^{\bullet}\right]$, где $\left[\underset{xoz}{\overset{\to x}{\lambda_1}}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]$ обозначает матрицу соответствующего оператора сдвига. И, наконец, осуществим сдвиг параллельно плоскости xoy в направлении оси y так, чтобы вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ совпал с осью z. Новые координаты векторов: $\left[\underset{xoy}{\overset{\to y}{\lambda_2}}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\underset{xoz}{\overset{\to x}{\lambda_1}}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\varphi_{2x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\varphi_{z}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[\varphi_{1x}{}^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[a^{\bullet} b^{\bullet} c^{\bullet}\right]$. Мы не расписываем подробно все эти матрицы, поскольку не собираемся их перемножать. Важно, что все эти преобразования являются осуществимыми для произвольных некомпланарных векторов. Важно также, что эти преобразования не изменяют ни первоначального объема параллелепипеда, построенного на них, ни ориентации, которую они определяют. Запишем окончательную матрицу координат векторов:

$$\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = [\underset{xoy}{\overset{\to y}{\lambda_2}} \cdot\cdot][\underset{xoz}{\overset{\to x}{\lambda_1}} \cdot\cdot][\varphi_{2x} \cdot\cdot][\varphi_z \cdot\cdot][\varphi_{1x} \cdot\cdot][a^{\cdot} b^{\cdot} c^{\cdot}].$$

Определитель левой матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{vmatrix} = a'b'c'$.

$a' > 0$ и $b' > 0$ по построению. Если $c' > 0$, то $\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = a'b'c' = \Delta$.
Если $c' < 0$, то и в этом случае $\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = a'b'c' = \Delta$, поскольку векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$ образуют левую тройку векторов.
Но $\begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{vmatrix} = \left|[\underset{xoy}{\overset{\to y}{\lambda_2}} \cdot\cdot][\underset{xoz}{\overset{\to x}{\lambda_1}} \cdot\cdot][\varphi_{2x} \cdot\cdot][\varphi_z \cdot\cdot][\varphi_{1x} \cdot\cdot][a^{\cdot} b^{\cdot} c^{\cdot}]\right| = |a^{\cdot} b^{\cdot} c^{\cdot}|$,

поскольку определители всех матриц, использованных операторов, равны единице! Следовательно, для любых трех некомпланарных векторов

$\overline{V}(\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{c}}) = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ для произвольной ортонормированной системы координат. Как выражается ориентированный объем в произвольной косоугольной системе координат, мы уже достаточно говорили.

Тензоры

.Определение тензора

Проделанная нами работа позволяет сделать некоторые обобщения. Последовательно развивая координатный метод в теории векторов, мы постоянно оказываемся перед необходимостью работать с различными массивами чисел. Наиболее простой из них – это массив координат вектора. Затем необходимость выразить метрические отношения геометрического пространства приводит нас к массиву координат метрического тензора. Это уже двухмерный массив, обладающий более сложным строением. Потребность выразить функциональные отношения между векторами приводит к понятию линейного оператора, координаты которого также образуют двухмерный массив. Еще раньше понятие ориентированного объема приводит нас к трехмерному массиву координат тензора Леви-Чивиты.

Представим теперь, что нам понадобилось выразить линейную функциональную зависимость между двумя операторами $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}$ и $\bar{\bar{\boldsymbol{b}}}$. Понятно, что нам для этого потребуется массив чисел с четырьмя индексами: $b^i{}_j = C^i{}_j{}^n{}_m a^m{}_n$. Открыв таким образом двери перед векторными величинами, мы не можем уже отказаться от применения массивов с произвольным количеством индексов.

Следующее важное наблюдение, которое можно сделать, заключается в том, что массивы, о которых идет речь, существуют не сами по себе, а всегда связаны с некоторой системой координат. Можно сказать, что они всегда заданы в определенной системе координат и изменяются по известному закону при переходе к другой системе. Закон преобразования координат массивов копирует закон преобразования координат ковариантных и контравариантных координат векторов.

Над массивами можно выполнять алгебраические операции как над едиными объектами, получая при этом объекты того же типа, то есть новые массивы с теми же самыми законами преобразования координат. Это положение может показаться спорным, если учесть, что скалярное умножение двух векторов равно числу. Число не есть массив, и оно не изменяется при изменении координатной системы. Однако это исключение легко обойти, если положить, что число – это массив нулевой размерности, то есть с нулевым количеством индексов.

Общий закон изменения координат массивов с законом изменения координат векторов позволяет строить математические выражения не зависимые от случайного выбора координатных систем.

Все это является основанием для того, чтобы выделить такие массивы как особый предмет для самостоятельного изучения. Для этого нам необходимо только дать им особое название и соответствующее определение. Все это было уже сделано итальянскими математиками Риччи и Леви-Чивитой в 1901 г. Новый математический объект получил название тензора, а наука о тензорах была названа тензорным исчислением.

Общее определение тензора (29)

> Тензором размерности $p + q$ мы будем называть массив n^{p+q} чисел $n^{j_1 j_2 \dots j_q}{}_{i_1 i_2 \dots i_p}$, заданных в каждой координатной системе и занумерованных p индексами внизу и q индексами наверху, преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону:

$$a^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}{}_{i'_1 i'_2 \dots i'_p} = a^{j_1 j_2 \dots j_q}{}_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1}{}_{i'_1} e^{i_2}{}_{i'_2} \dots e^{i_p}{}_{i'_p} e^{j'_1}{}_{j_1} e^{j'_2}{}_{j_2} \dots e^{j'_q}{}_{j_q} .$$

Числа $a^{j_1 j_2 \dots j_q}{}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ мы будем называть координатами тензора в соответствующей координатной системе. Все индексы пробегают значения 1, 2, 3 ..., *n* независимо друг от друга.

Наиболее общей интерпретацией тензора является линейный оператор. Коэффициенты линейного оператора в любой координатной системе являются координатами тензора. Привычный геометрический вектор также может быть интерпретирован как линейный оператор. Однако с конкретным тензором может быть связан не один, а несколько линейных операторов, поэтому, понятия линейного оператора и тензора, хотя и близки, не являются тождественными.

.Общие определения алгебраических операций с тензорами

Алгебраические операции с тензорами вводятся таким образом, чтобы в результате их применения мы всегда снова получали бы тензоры. Для того чтобы это проверить, достаточно проконтролировать закон изменения координат.

Сложение тензоров

Складывать можно только тензоры одинакового строения, например, a^i и b^i; $a^i{}_k$ и $b^i{}_k$. Сложение тензоров заключается в почленном сложении элементов обоих массивов с одинаковыми номерами. В результате сложения образуется новый массив или тензор того же строения:

$c^i = a^i + b^i$; $c^i{}_k = a^i{}_k + b^i{}_k$.

Умножение тензоров

Умножать можно любые тензоры друг на друга. При умножении каждая координата одного тензора умножается на каждую координату другого. Пусть, к примеру, мы перемножаем два тензора a^{ik} и $b^m{}_{np}$, тогда в результате мы получим новый тензор $c^{ikm}{}_{np} = a^{ik} b^m{}_{np}$. С этой операцией мы сталкивались при умножении тензоров Леви-Чивиты. При перемножении ε^{ijk} и ε_{mnp} мы получаем шестимерный массив координат, каждый элемент которого вычисляется как обобщенный символ Кронекера: $\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnp} = \delta^{ijk}_{mnp}$.

При умножении тензоров размерность все время увеличивается. От этой операции не было бы большой пользы, если бы не было другой операции, которая может размерность понижать.

Свертывание тензора, свертывание тензоров

Свертывание тензора заключается в сложении всех элементов массива с одинаковыми значениями одного верхнего и одного нижнего индексов при фиксированных значениях остальных:

$c^{ik}{}_p = \sum_{m=1}^{m=n} a^{imk}{}_{mp} = a^{imk}{}_{mp}$. В этом случае говорят, что мы свернули тензор по второму и четвертому индексам. Полученный в результате свертки тензор $c^{ik}{}_p$ зависит только от остальных индексов, не участвующих в операции. С операцией свертывания мы встречались при скалярном умножении векторов: $\bar{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\boldsymbol{b}} = a^i b_i$. Операцию свертывания иногда удобно записывать при помощи символа Кронекера: $c^{ik}{}_p = a^{ijk}{}_{mp}\delta^m{}_j$.

Мы знаем, что произведению двух линейных операторов $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}$ и $\bar{\bar{\boldsymbol{b}}}$ соответствует линейный оператор $\bar{\bar{\boldsymbol{c}}}$, матрица координат которого равна произведению матриц координат операторов $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}$ и $\bar{\bar{\boldsymbol{b}}}$: $c^i{}_m = a^i{}_k b^k{}_m$. Операция умножения тензоров определена таким образом, что она не соответствует операции умножения операторов. Для того, чтобы найти тензор, соответствующий произведению операторов, мы должны выполнить две операции над тензорами. Сначала необходимо тензоры перемножить: $d^i{}_j{}^k{}_m = a^i{}_j b^k{}_m$. Затем свернуть по паре индексов: $c^i{}_m = a^i{}_j b^k{}_m \delta^j{}_k = a^i{}_k b^k{}_m$. Такую операцию, которая заключается в умножении двух тензоров с последующим свертыванием по индексам, один из которых принадлежит одному тензору, а второй другому, называется операцией свертывания тензоров. Тензоры можно свертывать по любому количеству индексов, например: $c = a^i{}_j b^k{}_m \delta^j{}_k \delta^m{}_i = a^m{}_k b^k{}_m$, в результате получаем скаляр.

Перестановка индексов (транспонирование)

Эта операция нам также уже встречалась. Для тензоров с двумя индексами данная операция называется транспонированием, а тензор, который получается в результате применения данной операции, называется транспонированным тензором. Пусть, например, тензор $b^{ki} = a^{ik}$, то есть элементы тензора b^{ki} равны элементам a^{ik} другого тензора. Тензор b^{ki} в этом случае называется транспонированным тензором и обозначается $\left(a^T\right)^{ik}$, то есть: $\left(a^T\right)^{ik} = a^{ki} \doteq \left[a^{T\bullet\bullet}\right] = \left[a^{\bullet\bullet}\right]^T$. Транспонированному тензору размерности два соответствует транспонированная матрица. Если индексы имеют различный тип, то это также требуется учесть при перестановке: $b_k{}^i = a^i{}_k$.

Использование метрического тензора позволяет, как мы уже знаем, задать еще одну тензорную операцию.

Операция поднятия и опускания индексов тензора

Например, $b^i{}_k = g^{im} b_m{}^n g_{nk}$. Следовательно, если $b_k{}^i = a^i{}_k = a^T{}_k{}^i$ (предыдущий пример), то $a^{Ti}{}_k = g^{im} a^n{}_m g_{nk}$ или в матричной форме:

$$\left[a^{T\bullet}{}_\bullet\right] = \left[g^{\bullet\bullet}\right]\left[a^\bullet{}_\bullet\right]^T\left[g_{\bullet\bullet}\right].$$

Операция транспонирования тензора по индексам различного типа является более сложной операцией, чем может показаться на первый взгляд и об этом не следует забывать.

Теперь, когда мы дали общее определение тензора и операций над тензорами, мы видим, что все это нам уже знакомо. Так или иначе, и с тензорами и с операциями над ними мы уже сталкивались, только мы не знали, с чем имеем дело. Конечно это не вся теория, это только ее начало, но, тем не менее, все то, что хотелось бы сказать об этом предмете в книге для начинающих, мы уже сказали.

.Примеры на применение тензоров в физике

..Тензор инерции

Вычислим момент импульса $\overline{\boldsymbol{L}}$ вращающегося твердого тела относительно некоторой оси, проходящей через начало координат, с угловой скоростью $\overline{\boldsymbol{\omega}}$. Разобьем тело на материальные точки объемом dV и массой dm. Запишем момент импульса для одной материальной точки.

$\overline{\boldsymbol{dL}} = \overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{v}}\, dm \doteq dL_k = \varepsilon_{ijk} r^i v^j dm$;

Скорость точек при вращательном движении определяется как векторное произведение угловой скорости на радиус вектор точки.

$v^j = \varepsilon^{mnj} \omega_m r_n$;

Следовательно:

$dL_k = \varepsilon_{ijk} r^i \varepsilon^{mnj} \omega_m r_n dm = -\varepsilon^{mnj} \varepsilon_{ikj} \omega_m r^i r_n dm$;

Свернем тензоры Леви-Чивиты.

$\varepsilon^{mnj} \varepsilon_{ikj} = \delta^m{}_i \delta^n{}_k - \delta^m{}_k \delta^n{}_i$;

$dL_k = \omega_m \left(\delta^m{}_k \delta^n{}_i - \delta^m{}_i \delta^n{}_k\right) r^i r_n dm$;

Просуммировав моменты импульсов всех материальных точек по всему объему тела, найдем момент импульса для тела в целом.

$L_k = \omega_m \left(\delta^m{}_k \delta^n{}_i - \delta^m{}_i \delta^n{}_k\right) \int\limits_V r^i r_n dm$;

Введем обозначение:

$J^m{}_k = \left(\delta^m{}_k \delta^n{}_i - \delta^m{}_i \delta^n{}_k\right) \int\limits_V r^i r_n dm$;

И с учетом обозначения:

$L_k = J^m{}_k \omega_m$;

Массив из девяти чисел $J^m{}_k$ называется тензором инерции. Тензор инерции выражает зависимость между угловой скоростью и моментом импульса тела. Его координаты определяются распределением масс тела относительно оси вращения.

Используя свойства метрического тензора, получаем связь для контравариантных координат векторов $\overline{\boldsymbol{L}}$ и $\overline{\boldsymbol{\omega}}$.

$L_k g^{kp} = g_{nm} J^m{}_k g^{kp} \omega^n$;

$L^p = J_n{}^p \omega^n$.

Наиболее простые выражения для координат тензора момента инерции мы получаем в декартовой системе координат.

Осевые моменты инерции

$J^1{}_1 = \left(\delta^1{}_1 \delta^n{}_i - \delta^1{}_i \delta^n{}_1\right) \int\limits_V r^i r_n dm = \int\limits_V \left(r^n r_n - r^1 r_1\right) dm$;

В декартовой системе $J^1{}_1$ обозначается – J_{xx} называется осевым моментом инерции.

$J^1{}_1 = J_{xx} = \int\limits_V \left(r_y^2 + r_z^2\right) dm$;

Далее аналогично:

$J^2{}_2 = J_{yy} = \int\limits_V \left(r_x^2 + r_z^2\right) dm$;

$$J^3{}_3 = J_{zz} = \int\limits_V \left(r_x^2 + r_y^2\right) dm \,;$$

Центробежные моменты инерции

$$J^1{}_2 = \left(\delta^1{}_2 \delta^n{}_i - \delta^1{}_i \delta^n{}_2\right) \int\limits_V r^i r_n \, dm = -\int\limits_V r^1 r_2 \, dm \,;$$

В декартовой системе координат $J^1{}_2$ обозначается J_{xy} и называется центробежным моментом инерции.

$$J^1{}_2 = J_{xy} = -\int\limits_V r_x r_y \, dm \,;$$

Далее аналогично:

$$J^2{}_3 = J_{yz} = -\int\limits_V r_y r_z \, dm \,;$$

$$J^3{}_1 = J_{zx} = -\int\limits_V r_z r_x \, dm \,;$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Теперь вычислим кинетическую энергию вращающегося тела. Воспользуемся тем же приемом: разобьем тело на материальные точки и вычислим сначала энергию для одной точки. Дальнейшие преобразования понятны без комментариев.

$$dK = \frac{1}{2} v^i v_i \, dm \,; \;\; v^i = \varepsilon^{jki} \omega_j r_k \,; \;\; v_i = \varepsilon_{mni} \omega^m r^n \,;$$

$$dK = \frac{1}{2} v^i v_i \, dm = \frac{1}{2} \varepsilon^{jki} \omega_j r_k \varepsilon_{mni} \omega^m r^n \, dm =$$

$$= \frac{1}{2} \omega_j \omega^m \left(\delta^j{}_m \delta^k{}_n - \delta^j{}_n \delta^k{}_m\right) r_k r^n \, dm \,.$$

$$K = \frac{1}{2} \omega_j \omega^m \left(\delta^j{}_m \delta^k{}_n - \delta^j{}_n \delta^k{}_m\right) \int\limits_V r_k r^n \, dm = \frac{1}{2} J^j{}_m \, \omega^m \omega_j$$

В матричной форме:

$$K = \frac{1}{2} J^j{}_m \, \omega^m \omega_j \doteq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^1{}_1 & J^1{}_2 & J^1{}_3 \\ J^2{}_1 & J^2{}_2 & J^2{}_3 \\ J^3{}_1 & J^3{}_2 & J^3{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix}.$$

..Тензор напряжений

Пусть упругое твердое тело находится в равновесии под действием внешних и внутренних сил. Мысленно вырежем из этого тела элемент в форме параллелепипеда (рис. 52).

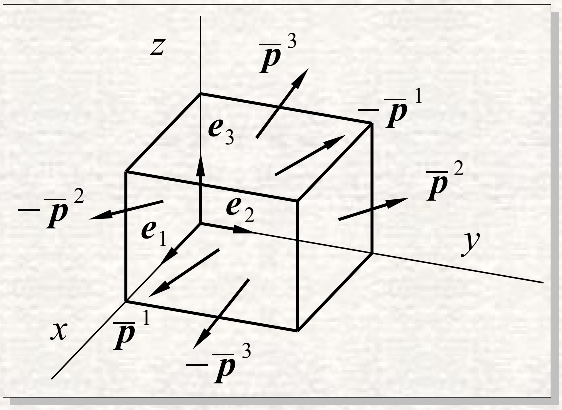


Рис. 52

Если размеры элемента достаточно малы, то можно считать, что напряжения, действующие в его гранях, постоянны в пределах каждой грани. Кроме того, напряжения на противоположных гранях равны по величине и противоположны по направлению. Напряжения обозначены символом $\overline{\boldsymbol{p}}$ с индексом, который указывает номер вектора базиса, совпадающего с нормалью к соответствующей грани. Например, $\overline{\boldsymbol{p}}^1$ – напряжение, которое действует в грани параллелепипеда нормальной к вектору базиса $\boldsymbol{e}_1$, на рис. 52 это передняя грань параллелепипеда. В противоположной грани, следовательно, действует напряжение $-\overline{\boldsymbol{p}}^1$. Отсечем от параллелепипеда тетраэдр, как показано на рис. 53.

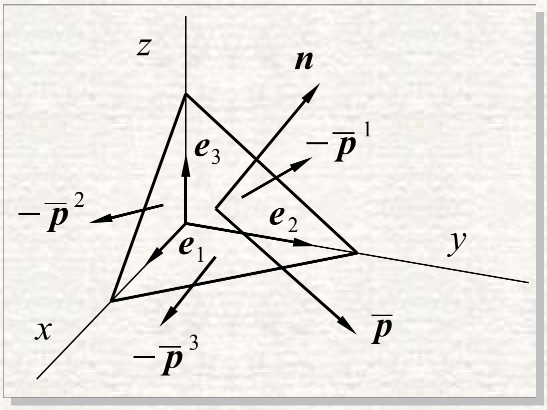


Рис. 53

Три грани получившегося тетраэдра совпадают с координатными плоскостями, положение четвертой грани задается вектором нормали $\boldsymbol{n}$. Напряжение, которое действует в четвертой грани неизвестно и мы обозначили его через $\overline{\boldsymbol{p}}$. Если изменять положение этой плоскости и соответственно и вектора нормали $\boldsymbol{n}$, то мы будем получать различные значения напряжения $\overline{\boldsymbol{p}}$. Вектор $\overline{\boldsymbol{p}}$, следовательно, является векторной функцией вектора нормали $\boldsymbol{n}$: $\overline{\boldsymbol{p}} = f(\overline{\boldsymbol{n}})$. Для того чтобы найти эту функцию, рассмотрим равновесие тетраэдра. Площади граней тетраэдра, в которых действуют напряжения $\overline{\boldsymbol{p}}^i$, мы обозначим соответственно Δs_i. Площадь четвертой грани обозначим Δs. Поскольку тетраэдр находится в равновесии, то сумма всех сил, действующих на него, должна равняться нулю:

$$-\overline{\boldsymbol{p}}^1 \Delta S_1 - \overline{\boldsymbol{p}}^2 \Delta S_2 - \overline{\boldsymbol{p}}^3 \Delta S_3 + \overline{\boldsymbol{p}} \Delta S = 0;$$

Поделив уравнение на Δs и, используя то, что $\dfrac{\Delta s_i}{\Delta s}$ равно косинусу угла наклона единичной нормали $\boldsymbol{n}$ к координатным осям, получим:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = \overline{\boldsymbol{p}}^{\,1}\frac{\Delta s_1}{\Delta s} + \overline{\boldsymbol{p}}^{\,2}\frac{\Delta s_2}{\Delta s} + \overline{\boldsymbol{p}}^{\,3}\frac{\Delta s_3}{\Delta s} = \overline{\boldsymbol{p}}^{\,1} n_1 + \overline{\boldsymbol{p}}^{\,2} n_2 + \overline{\boldsymbol{p}}^{\,3} n_3 = \overline{\boldsymbol{p}}^{\,i} n_i .$$

Разложим каждый из векторов напряжений по векторам базиса:

$$\overline{\boldsymbol{p}}^{\,i} = \sigma^{ik}\boldsymbol{e}_k .$$

$\overline{\boldsymbol{p}} = \sigma^{ik} n_i \boldsymbol{e}_k$, и в координатной форме $p^i = \sigma^{ik} n_k$.

Мы получили формулу, позволяющую по положению нормали к плоскости вычислить действующее в этой плоскости напряжение. Коэффициенты σ^{ik} образуют тензор, который называется тензором напряжения. В декартовой системе координат координаты тензора напряжения имеют простой физический смысл: они равны нормальным и касательным напряжениям в соответствующих координатных площадках.

$$\sigma^{11} = \sigma_x ;\ \sigma^{22} = \sigma_y ;\ \sigma^{33} = \sigma_z ;$$

$$\sigma^{12} = \sigma^{21} = \tau_{xy} ;\ \sigma^{23} = \sigma^{32} = \tau_{yz} ;\ \sigma^{31} = \sigma^{13} = \tau_{xz} .$$

Нормальное напряжение в произвольной площадке мы можем найти как проекцию вектора напряжения $\overline{\boldsymbol{p}}$ на направление нормали $\boldsymbol{n}$.

$$\sigma = \overline{\boldsymbol{p}}\cdot\overline{\boldsymbol{n}} = \sigma^{ik} n_i n_k .$$

Для того, чтобы найти касательное напряжение в плоскости, необходимо задать направление при помощи единичного вектора $\overline{\boldsymbol{l}}$, лежащего в этой плоскости. В этом случае касательное напряжение в плоскости с нормалью $\boldsymbol{n}$ в направлении вектора $\overline{\boldsymbol{l}}$ может быть вычислено по формуле:

$$\tau = \overline{\boldsymbol{p}}\cdot\overline{\boldsymbol{l}} = \sigma^{ik} n_i l_k .$$

До сих пор мы пользовались декартовой координатной системой, но ничто нам не мешает, пользуясь известными правилами, перейти к произвольной системе координат. Выразим векторы $\overline{\boldsymbol{p}}$ и $\boldsymbol{n}$ через их координаты в новой координатной системе.

$$p^{i'} e^{i}_{\ i'} = \sigma^{ik} n_{k'} e^{k'}_{\ \ k} ;$$

$$p^{i'} e^{i}_{\ i'} e^{m'}_{\ \ i} = \sigma^{ik} l_{k'} e^{k'}_{\ \ k} e^{m'}_{\ \ i} ;$$

$$p^{m'} = \sigma^{i'k'} n_{k'}, \text{ где } \sigma^{i'k'} = \sigma^{ik} e^{i'}_{\ \ i} e^{k'}_{\ \ k} .$$

Из этих преобразований следует, что σ^{ik} преобразуется вполне по тензорному закону, что оправдывает его название. К сожалению, ясный физический смысл координат тензора σ^{ik} в произвольной координатой системе не сохраняется. σ^{ik} больше не совпадают с нормальными и касательными напряжениями на соответствующих площадках. Но, несмотря на это, $p^i = \sigma^{ik} n_k$ являются координатами вектора напряжения в любой координатной системе. И мы можем воспользоваться этими уравнениями для того, чтобы найти физические напряжения на координатных площадках косоугольной системы координат. Вычислим напряжение на площадке, образованной базисными векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. В качестве нормали используем вектор $\boldsymbol{e}^1$, который к ним ортогонален.

$$\boldsymbol{e}^1 = \delta^1_{\ k}\boldsymbol{e}^k ;\ \left|\boldsymbol{e}^1\right| = \sqrt{\boldsymbol{e}^1\cdot\boldsymbol{e}^1} = \sqrt{g^{11}} .$$

Единичный вектор нормали равен $n = \dfrac{\boldsymbol{e}^1}{\left|\boldsymbol{e}^1\right|}$.

$$n_i\boldsymbol{e}^i = \frac{\delta^1_{\ i}}{\sqrt{g^{11}}}\boldsymbol{e}^i ;\ n_i = \frac{\delta^1_{\ i}}{\sqrt{g^{11}}} .$$

Теперь находим напряжение на площадке.

$$\overline{\boldsymbol{p}} = \sigma^{ik} \frac{\delta^1{}_i}{\sqrt{g^{11}}} \boldsymbol{e}_k = \frac{\sigma^{ik}}{\sqrt{g^{11}}} \boldsymbol{e}_k .$$

Находим проекцию вектора $\overline{\boldsymbol{p}}$ на вектор $\boldsymbol{n}$, которая и является нормальным напряжением на этой площадке.

$$\overline{\boldsymbol{p}} \cdot \frac{\delta^1{}_m}{\sqrt{g^{11}}} \boldsymbol{e}^m = \frac{\sigma^{1k}}{\sqrt{g^{11}}} \boldsymbol{e}_k \cdot \frac{\delta^1{}_m}{\sqrt{g^{11}}} \boldsymbol{e}^m = \frac{\sigma^{1k}}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\delta^1{}_m}{\sqrt{g^{11}}} \delta^m{}_k = \frac{\sigma^{ik}\delta^1{}_k}{g^{11}} = \frac{\sigma^{11}}{g^{11}} .$$

Аналогичные выражения можно получить и для других координатных площадок. Обозначив напряжение на координатной площадке с вектором нормали e^α символом σ_α , мы можем записать одно общее уравнение для всех трех площадок:

$\sigma_\alpha = \dfrac{\sigma^{\alpha\alpha}}{g^{\alpha\alpha}}$. Здесь и далее суммирование по греческим символам не производится.

Мы также можем найти касательные напряжения в координатных площадках в направлении координатных осей, как ортогональные проекции соответствующих векторов напряжений на направления осей.

$$\overline{\boldsymbol{p}} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} = \frac{\sigma^{\alpha k}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} \frac{\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} = \frac{\sigma^{\alpha k} g_{k\beta}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha} g_{\beta\beta}}} \text{, где } \beta \neq \alpha .$$

Обозначив касательное напряжение в координатной площадке с вектором нормали e^α в направлении координатной оси $\boldsymbol{e}_\beta$ ($\beta \neq \alpha$) символом $\tau_{\alpha\beta}$, мы можем записать одно общее уравнение для всех шести возможных вариантов:

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{\sigma^{\alpha k} g_{k\beta}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha} g_{\beta\beta}}}$$

Из полученных выражений следует, что реальные физические напряжения σ_α и $\tau_{\alpha\beta}$ в координатных площадках косоугольной системы координат не равны координатам тензора напряжения σ^{ik} и сами не образуют тензора.

.Задачи

Для того чтобы научиться свободно выполнять преобразования с тензорными величинами, необходима тренировка. Особенно полезно как можно больше прорешать задач на тождественные преобразования. К сожалению, специальных задачников по тензорной алгебре не существует. Тем не менее, задачи найти можно: каждый автор учебника обязательно их приводит. Конечно, в учебниках задач не бывает слишком много, но к счастью самих учебников по теории тензоров порядочно. Другая возможность заключается в том, чтобы применять тензорный аппарат для доказательства известных фактов, где это только возможно. Несколько задач такого типа мы здесь приводим.

..Задачи на тождественные преобразования

1. В векторной алгебре доказывается формула для двойного векторного произведения $\bar{\boldsymbol{a}}\times(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}})=\bar{\boldsymbol{b}}(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}})-\bar{\boldsymbol{c}}(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}})$, которую для запоминания иногда называют формулой "**Бац минус Цаб**". К сожалению, это название мало помогает. Стоит только иначе расставить скобки, и мы получим: $(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})\times\bar{\boldsymbol{c}}=\bar{\boldsymbol{b}}(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}})-\bar{\boldsymbol{a}}(\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}})$. А если для обозначения векторов использовать другие буквы или иначе их расставить, то о названии "Бац минус Цаб" лучше совсем не вспоминать.

Формула, тем не менее, полезная и часто используется. Для того чтобы при любых вариантах ее правильно воспроизвести, достаточно запомнить, что двойное векторное произведение раскладывается по векторам, заключенным в скобки: $\bar{\boldsymbol{d}}\times(\bar{\boldsymbol{f}}\times\bar{\boldsymbol{g}})=\lambda_1\bar{\boldsymbol{f}}-\lambda_2\bar{\boldsymbol{g}}$. Причем в этом разложении со знаком плюс идет всегда средний вектор, а со знаком минус – другой. Скалярные произведения оставшихся векторов образуют коэффициенты этого разложения: $\lambda_1=\bar{\boldsymbol{d}}\cdot\bar{\boldsymbol{g}}$, $\lambda_2=\bar{\boldsymbol{d}}\cdot\bar{\boldsymbol{f}}$. И мы получаем, что $\bar{\boldsymbol{d}}\times(\bar{\boldsymbol{f}}\times\bar{\boldsymbol{g}})=\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{\boldsymbol{d}}\cdot\bar{\boldsymbol{g}})-\bar{\boldsymbol{g}}(\bar{\boldsymbol{d}}\cdot\bar{\boldsymbol{f}})$
.

Докажем формулу $\bar{\boldsymbol{a}}\times(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}})=\bar{\boldsymbol{b}}(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}})-\bar{\boldsymbol{c}}(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}})$, используя индексную форму записи, принятую в тензорной алгебре в качестве основной.

$$\left(\bar{\boldsymbol{a}}\times(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}})\right)^n=\varepsilon^{mkn}a_m\varepsilon_{ijk}b^ic^j.$$

Свернем тензоры Леви-Чивиты.

$$\varepsilon^{mkn}\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon^{mnk}\varepsilon_{ijk}=\left(\delta^m{}_i\delta^n{}_j-\delta^m{}_j\delta^n{}_i\right)=\left(\delta^m{}_j\delta^n{}_i-\delta^m{}_i\delta^n{}_j\right).$$

Далее получаем:

$$\varepsilon^{mkn}a_m\varepsilon_{ijk}b^ic^j=\left(\delta^m{}_j\delta^n{}_i-\delta^m{}_i\delta^n{}_j\right)a_mb^ic^j=$$
$$\delta^m{}_j\delta^n{}_ia_mb^ic^j-\delta^m{}_i\delta^n{}_ja_mb^ic^j=b^na_jc^j-c^na_ib^i.$$

Полученное выражение как раз и является выражением исходной формулы в координатной форме.

2. Доказать тождество Лагранжа

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}})=\begin{vmatrix}\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} & \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}}\\ \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} & \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}}\end{vmatrix}.$$

Решение

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}})=\varepsilon_{ijk}a^ib^j\varepsilon^{mnk}c_md_n;$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{mkn}=\varepsilon_{kij}\varepsilon^{kmn}=\delta^m{}_i\delta^n{}_j-\delta^m{}_j\delta^n{}_i;$$

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}})=\left(\delta^m{}_i\delta^n{}_j-\delta^m{}_j\delta^n{}_i\right)a^ib^jc_md_n=$$

$$\delta^m{}_i \delta^n{}_j a^i b^j c_m d_n - \delta^m{}_j \delta^n{}_i a^i b^j c_m d_n = a^i c_i b^j d_j - a^i d_i b^j c_j =$$
$$(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}})(\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}}) - (\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}})(\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}}) = \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} & \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}} \\ \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} & \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}} \end{vmatrix}$$

3. Доказать формулу

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}))(\bar{\boldsymbol{x}}\cdot(\bar{\boldsymbol{y}}\times\bar{\boldsymbol{z}})) = \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} \\ \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} \\ \bar{\boldsymbol{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} \end{vmatrix}$$

Решение

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}))(\bar{\boldsymbol{x}}\cdot(\bar{\boldsymbol{y}}\times\bar{\boldsymbol{z}})) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k \varepsilon^{mnp} x_m y_n z_p =$$
$$= \sqrt{g}\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^i x_i & a^i y_i & a^i z_i \\ b^i x_i & b^i y_i & b^i z_i \\ c^i x_i & c^i y_i & c^i z_i \end{vmatrix}$$

Следовательно:

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}))(\bar{\boldsymbol{x}}\cdot(\bar{\boldsymbol{y}}\times\bar{\boldsymbol{z}})) = \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} \\ \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} \\ \bar{\boldsymbol{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} \end{vmatrix}.$$

Что и требовалось доказать.

Остальные задачи предлагаются для самостоятельного решения.

4. Доказать тождество Лагранжа

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}}) = \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} & \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}} \\ \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} & \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}} \end{vmatrix}.$$

5. Доказать тождество Якоби

$$\bar{\boldsymbol{a}}\times(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}) + \bar{\boldsymbol{b}}\times(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{a}}) + \bar{\boldsymbol{c}}\times(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}) = 0.$$

6. Найти $(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})^2$ и записать в координатной форме.

7. Доказать, что из равенства

$$\bar{\boldsymbol{a}}\times(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}) = (\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})\times\bar{\boldsymbol{c}}.$$

следует коллинеарность векторов $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$, если $\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{b}} \neq 0$ и $\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{c}} \neq 0$.

8. Вычислить смешанное произведение

$$(\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}})\cdot((\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\boldsymbol{c}})\times(\bar{\boldsymbol{c}} + \bar{\boldsymbol{a}})).$$

9. Доказать формулы:

а) $(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})\times(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}}) = \bar{\boldsymbol{b}}(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}})) - \bar{\boldsymbol{a}}(\bar{\boldsymbol{b}}\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}}))$

б) $(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})\cdot((\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}})\times(\bar{\boldsymbol{e}}\times\bar{\boldsymbol{f}})) =$

$$= (\bar{\boldsymbol{b}}\cdot(\bar{\boldsymbol{e}}\times\bar{\boldsymbol{f}}))(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}})) - (\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{e}}\times\bar{\boldsymbol{f}}))(\bar{\boldsymbol{b}}\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{d}})).$$

10. Доказать, что

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}})\cdot((\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}})\times(\bar{\boldsymbol{c}}\times\bar{\boldsymbol{a}})) = (\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}))^2.$$

11. Доказать формулу

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}))(\bar{\boldsymbol{x}}\cdot(\bar{\boldsymbol{y}}\times\bar{\boldsymbol{z}})) = \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} \\ \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} \\ \bar{\boldsymbol{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}} & \bar{\boldsymbol{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{y}} & \bar{\boldsymbol{c}}\cdot\bar{\boldsymbol{z}} \end{vmatrix}.$$

Методические комментарии

.О возникновении терминологии и обозначений, используемых в векторном исчислении

Даже при беглом знакомстве с предметом нельзя не заметить известную избыточность обозначений и специальных значков в векторной и тензорной алгебрах. Данная проблема сложилась не сегодня. Феликс Клейн в своей книге "Элементарная математика с точки зрения высшей" 1925-ого г. издания приводит интересный материал об истории и о причинах возникновения этой проблемы.

"Мне хочется прибавить несколько слов по поводу прискорбного вопроса о системе обозначений в векторном анализе. Дело в том, что для каждого действия с векторами употребляется большое количество различных знаков, и, к сожалению, до сих пор еще не удалось создать одну-единственную общеобязательную систему обозначений. Четыре года назад на съезде естествоиспытателей в Касселе (1903) с этой целью была даже избрана специальная комиссия, но члены ее не смогли вполне столковаться, а так как каждый из них все же имел доброе желание сделать шаг от своей первоначальной точки зрения навстречу другим взглядам, то единственным результатом явилось возникновение трех новых обозначений! После этого и других аналогичных случаев я пришел к тому заключению, что действительное объединение всех заинтересованных в таких вещах кругов на почве одних и тех же словесных и письменных обозначений возможно только в тех случаях, когда к этому побуждают в высшей степени важные материальные интересы. Только под таким давлением могло произойти в 1881г. в электротехнике признание единообразной системы мер вольт – ампер – ом и последующее закрепление ее государственным законодательством, так как промышленность настойчиво требовала подобного единства мер как основы всех операций. За векторным исчислением еще не стоят такие могущественные материальные стимулы, и поэтому приходится пока что – плохо ли, хорошо ли – мириться с тем, что каждый отдельный математик остается при привычном для него способе обозначений, который он считает наиболее удобным или даже – если он несколько склонен к догматизму – единственно правильным".

"...на конгрессе математиков в Риме (1908) избрали интернациональную комиссию, которая должна была предложить единую систему обозначений. ...

Созданная комиссия по унификации векторных обозначений не имела, как и следовало ожидать, ни малейшего успеха. На следующем интернациональном конгрессе в Кембридже (1912) она вынуждена была объявить, что не успела закончить своих работ, и просить о продлении ее мандата до следующего конгресса, который должен был собраться в 1916 г. в Стокгольме, но не состоялся из-за войны. Такая же судьба, по-видимому, постигнет и "Комиссию единиц и величин, входящих в формулы". Последняя опубликовала в 1921 г. проект обозначения векторных величин и вызвала этим тотчас же самые резкие возражения с различных сторон.

Общеупотребительная теперь терминология векторного исчисления исторически возникла главным образом из двух источников: из гамильтонова исчисления кватернионов и из грассманова учения о протяжении.

...

В связи с тем, что ортодоксальные во всем прочем последователи Грассмана заменили очень целесообразные обозначения учителя отчасти другими, а физики смешали воедино, либо модифицировали имеющиеся терминологии, а также проявили крайне большой произвол по отношению к знакам отдельных операций, получается, наконец, даже для специалиста большая неразбериха в этой математически совершенно простой области".

Мы привели эту развернутую цитату потому, что она удивительно точно характеризует проблему с обозначениями и определениями понятий в современных векторной и тензорной алгебрах. Отмеченная Ф. Клейном неразбериха в этих очень полезных для физиков и инженеров математических теориях благополучно доползла до наших дней через столетие.

.Проекция вектора на ось

Понятие проекции вектора на ось является одним из самых простых и полезных для приложений. Именно поэтому вызывает недоумение имеющая место несогласованность этого понятия в векторной алгебре с более общим понятием проекции. Видимо, стремлением преодолеть эту несогласованность, с одной стороны, и нежеланием слишком долго задерживаться на этом ровном месте, с другой стороны, можно как-то объяснить возникшую при этом путаницу.

По определению, которого придерживается большинство авторов, проекция вектора на ось – это число. Но это нелогично. Проекция точки есть точка, проекция отрезка есть отрезок, проекция вектора на плоскость есть вектор, даже проекция вектора на прямую есть, по мнению некоторых авторов, вектор, а проекцией вектора на ось является число. Такое определение видимо связано с тем фактом, что в декартовой системе координат произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ может быть представлен в виде: $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, где a_x, a_y, a_z – числа, которые по существующей традиции принято называть проекциями вектора. Векторы $a_x\boldsymbol{i}, a_y\boldsymbol{j}, a_z\boldsymbol{k}$ называются составляющими или компонентами вектора $\boldsymbol{a}$.

Определение проекции вектора как числа получило широкое распространение, и, будучи изначально нелогичным, и породило упомянутую путаницу.

Приведу несколько цитат с комментариями.

"Нельзя отождествлять понятия проекции силы и ее составляющей. ... Составляющая силы является вектором, который можно представить в виде произведения проекции силы на орт соответствующей оси" [3, с. 34].

Слово "составляющая" здесь является точным переводом англоязычного термина "компонента". В дальнейшем мы не будем эти термины различать, как, впрочем, и авторы задачника по высшей математике, цитату из которого я привожу ниже.

"Векторы $a_x\boldsymbol{i}, a_y\boldsymbol{j}, a_z\boldsymbol{k}$ в виде суммы которых представлен вектор $\boldsymbol{a}$, называются составляющими (компонентами) вектора $\boldsymbol{a}$ по осям координат" [6, с. 45].

Следующая цитата из учебника по теоретической механике.

"Рассмотрим вектор $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{a}$ и ось *Ox*, не лежащие, в общем случае, в одной плоскости. Проведем через точки *A* и *B* две плоскости, перпендикулярные к *Ox* и отметим точки *a* и *b* их пересечения с осью *Ox*. Как известно, отрезку *ab* можно поставить в соответствие положительное число, если направление этого отрезка совпадает с положительным направлением оси *Ox*, и отрицательное, если направление отрезка *ab* и оси *Ox* противоположны. Этот отрезок или соответствующее ему число будем называть ***проекцией*** вектора $\overline{\boldsymbol{AB}}$ на ось *Ox*" [8, с. 29-30].

Здесь, по сути, даны два определения: проекции как вектора (направленный отрезок *ab*) и как скаляра (соответствующее ему число). Но автор не вводит различные обозначения для разных случаев, что в дальнейшем приводит к неоднозначности в прочтении текста.

Следующие выдержки приводятся из известного учебника по общему курсу физики И.В. Савельева.

"Величина $a_l = a\cos\varphi$ (*a* – модуль вектора) называется проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на ось *l*.

...

...вектор $\boldsymbol{a}$ можно представить в виде линейной комбинации ортов $\boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{e}_y$: $\bar{\boldsymbol{a}} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y$. Роль коэффициентов при этом играют проекции вектора на оси координат.

...

Таким образом, любой вектор можно выразить через его проекции на координатные оси и орты этих осей. В связи с этим <u>проекции на координатные оси называются компонентами вектора</u>" [15, с. 22-23]. Подчеркнуто мной. Получается, что, с одной стороны, проекции вектора на координатные оси являются числами, но, с другой стороны, они являются компонентами вектора и поэтому должны считаться векторами.

Для практических целей важны оба понятия: и понятие компоненты, и понятие проекции вектора на ось. Но нелогичное определение одного из них приводит к терминологической путанице. Следующий автор пытается развести эти понятия.

"Не следует отождествлять проекцию вектора на ось и проекцию вектора на прямую. В первом случае – это число, а во втором – вектор" [14, с. 93].

Следовательно, если мы хотим получить вектор, мы должны считать, что проектируем вектор на прямую. Если же нам хочется иметь число, надо проектировать вектор на ось. Вряд ли это удобно, и кроме дополнительной путаницы ничего не дает.

Наиболее решительно и последовательно разводит эти понятия Г.Ф. Лаптев [12, с. 33]. Для этого ему приходится вводить два вида проекции вектора на ось: скалярную и векторную.

"Векторной проекцией вектора на ось называется вектор, началом и концом которого являются соответственно проекция начала и проекция конца исходного вектора на данную ось.

Векторная проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось *s* обозначается $\overline{Пр}_s\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{a}_s$: $\overline{Пр}_s\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_s$.

...

Проекцией или *скалярной проекцией* вектора на ось называется *скаляр*, абсолютная величина которого равна модулю векторной проекции того же вектора на ту же ось. При этом проекция считается положительной, если направление векторной проекции совпадает с направлением оси, и отрицательной в противном случае.

Скалярная проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось *s* обозначается $Пр_s\boldsymbol{a}$ или a_s: $Пр_s\boldsymbol{a} = a_s$".

Ну вот, казалось бы, и все – проблема решена. Вместо одной скалярной проекции мы имеем две: векторную, что логично, и скалярную, что удобно и привычно. К сожалению, проблема серьезнее. При определении проекции вектора традиционно имеется ввиду параллельная ортогональная проекция, хотя об этом не принято говорить явно. Пока мы находимся в декартовой системе координат, такое предпочтение выглядит естественно. Но стоит только перейти к произвольному базису $\boldsymbol{e}_i$, как в разложении вектора $\boldsymbol{a}$ по координатным осям $\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{e}_i$ коэффициенты a^i уже не могут считаться проекциями в вышеуказанном смысле. Как результат, в тех курсах векторной алгебры, в которых авторы не ограничиваются только декартовой системой координат, понятие проекции вектора на ось либо не используется вовсе, либо имеет ограниченное применение. А зря, ведь типичное в таких случаях определение координаты вектора как некоего коэффициента в разложении по векторам базиса неконструктивно, так как не указывает способа вычисления этого коэффициента. Определение же координаты вектора через проекцию, напротив, конструктивно. Надо только отказаться от узкого определения проекции вектора на ось, как от ортогональной проекции, и перейти к более широкому классу параллельных проекций. Но для задания параллельной проекции уже недостаточно знать только ось или плоскость, на которую производится проектирование, необходимо еще задать направление проектирования. В связи с этим требуется модернизировать обозначение для проекции вектора на плоскость и на ось.

.Определитель

Понятие определителя традиционно связывается с решением систем линейных уравнений и правилами Крамера. Однако давно уже признано, что роль определителей в практике решения систем линейных уравнений сильно преувеличена. В то же время геометрический смысл определителя отражен, по нашему мнению, во многих учебниках по высшей математике недостаточно. Не следует, конечно, полностью отказываться от традиций, но сделать определенный акцент в сторону геометрии на наш взгляд было бы полезно.

.Векторное произведение

Для введения векторного умножения имеются две равнозначные возможности и обе эти возможности, как обычно и бывает в таких случаях, используются. Ряд авторов определяет векторное произведение как истинный, абсолютный или полярный вектор, связывая его направление с направлением правого винта [1, 5, 12]. Другие же предпочитают связывать его направление с текущей системой координат, получая при этом псевдо или аксиальный вектор [7, 8, 11, 14]. Речь в данном случае идет о близких, но, тем не менее различных математический объектах, одинаково пригодных для отражения свойств таких геометрических и физических величин, как угловая скорость, угловое ускорение, момент силы, момент пары сил и т.д. Несмотря на то, что разница между двумя определениями векторного умножения чисто символическая, вторая возможность нам представляется более адекватной, поскольку само определение подчеркивает условный характер направление этих величин.

.Символ Кронекера

В отношении символа Кронекера есть две диаметрально противоположные точки зрения. Согласно одной из них – это просто символ и положение индексов (верхнее или нижнее) для него не имеет значения [7]. Согласно другой, символ Кронекера является абсолютным тензором [18]. Но если принять символ Кронекера за абсолютный тензор, то он становится полностью эквивалентен метрическому тензору и это делает его излишним.

.Символ Веблена

Символы подобные E_{ijk} вводят многие авторы, к сожалению, под разными названиями. Например, М.А. Акивис [1] называет их кососимметричными символами Кронекера, И. Сокольников [18] – *e*-системой. Мы назвали эти символы символами Веблена вслед за

В.И. Блохом [5]. К сожалению, В.И. Блох никак не называет букву необычного начертания, которую он использует для обозначения символов Веблена, и не дает необходимых комментариев для того, чтобы ее можно было однозначно отнести к какому-то алфавиту. Поэтому мы вынуждены были использовать наше обозначение, которое, естественно не является общепринятым. Теме не менее мы считаем, что оно вполне обосновано, и в той или иной степени сходно с обозначениями принятыми М.А. Акивисом, И. Сокольниковым, В.И. Блохом и некоторыми другими авторами.

.Об обозначениях

Нет ничего практичнее хорошей теории. Говорят, этот афоризм придумал Нильс Бор. Но практичность любой теории прямо пропорциональна полезному результату от ее применения и обратно пропорциональна затратам на ее изучение.

Возможно не будет преувеличением, если сказать, что львиная доля затрат на изучение любой теории связана с изучением ее специфического языка и связанной с ним письменностью. Математическая письменность в какой-то степени аналогична китайской грамоте. По крайней мере, различных значков, которые в ней используются, не меньше, чем китайских иероглифов. Хорошо если введение нового значка хоть как-то оправдано, но это бывает не всегда. Просматривая книги по векторной и тензорной алгебре, мы нашли, что разные авторы для обозначения матрицы преобразования использовали следующие обозначения: A, B, C, a, b, Г, γ, e, h, $A^{i'}_{\ j}, B^{i}_{\ j'}, A^{i}_{\ j}, B^{i}_{\ j}$, $C_{ij'}, C^{ij'}, C^{i}_{\ j'}, C_{i}^{\ j'}$, $\Gamma, \Gamma^{-1}, \gamma_{i'i}, \gamma_{ii'}$, $[\![a^{i\cdot}_{\cdot j}]\!]$, $[\![b^{i\cdot}_{\cdot j}]\!]$, $\underset{im}{e}, \underset{im}{e'}, \underset{im}{h}, \underset{im}{h'}$. Всего, если не учитывать индексов в различных вариантах, для обозначения матрицы преобразования были использованы следующие символы: A, B, C, a, b, Г, γ, e, h. В разных книгах для обозначения векторов базиса используются следующие символы: э, e, h, a, b, α, β. Зачем, если есть общеупотребительное $\boldsymbol{e}_i$?

Может показаться, что проблема обозначений мало существенная. В самом деле, какая разница, как мы обозначили ту или иную величину, если мы подробно при этом ее описали. Но если обозначение никак не связано с содержанием, то для понимания дальнейшего текста ее придется просто запомнить. И чем меньше смысла в обозначении, тем труднее его запомнить. Поэтому, самым лучшим обозначением является "говорящее", которое что-то подсказывает, упрощая либо само запоминание, либо выполнение каких-то действий с обозначенной величиной.

Выбор алфавита, из которого выбран символ, также имеет значение. Например, Хевисайд считал, что уже одно то, что Максвелл обозначал векторы готическими буквами, может вызвать предубеждение читателя против векторного анализа.

Конечно, невозможно тщательно продумать каждое обозначение и при изложении любой теории невозможно обойтись без множества промежуточных случайных обозначений. Но хотя бы для тех величин, которые в данной теории играют фундаментальную роль, хотелось бы видеть простые, ясные и удобные для запоминания значки.

.Требования к определениям математических понятий

"Назначение определений в том и состоит, что они подытоживают главное в исследовании предмета" [21, с. 148].

Дать определение, правильно отражающее сущность предмета, на раннем этапе его исследования не представляется возможным. Иногда на протяжении многих лет, а иногда даже столетий приходится пользоваться неполными или даже неправильными определениями.

Считается, что правильное определение, вскрывающее сущность предмета, может быть только одно [21, с. 149]. Возможно, что так оно и есть и возможно так оно и будет, когда наука закончится, и для каждого понятия будет, наконец, дано единственное полное и правильное определение. К счастью наука еще очень далека от завершения.

В большинстве математических учебников определения чаще всего возникают только по воле их творцов на совершенно ровном месте абсолютно из ничего, как кролик из шляпы фокусника.

Например, в учебнике Л.И. Головиной по линейной алгебре дается такое определение сопряженного оператора:

"Пусть A – линейное преобразование евклидова пространства R. Линейное преобразование A, такое, что $(A\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\bar{\boldsymbol{y}}=\bar{\boldsymbol{x}}\cdot(A^*\bar{\boldsymbol{y}})$ при всех $x, y \in R$, называется сопряженным к A".

Что это определение определяет? Зачем оно понадобилось? Для чего необходимо выделять преобразование с указанным свойством? *В каком отношении вновь определяемый объект находится с теми математическими объектами, которые были введены ранее*.

В учебниках по математике редко останавливаются на этих вопросах. Но для не математиков математика интересна лишь в той степени, в которой она для них полезна. А полезной для инженеров и физиков математика является лишь в той степени, в которой она является наукой о всеобщих законах природы. Математика как формальная система правил по формальным преобразованиям предложений составленных из математических значков инженерам не интересна.

Мы считаем, но конечно не настаиваем, что, придумывая определения математических понятий для инженеров, физиков и других пользователей, полезно следовать некоторым рекомендациям. Некоторые из таких рекомендаций мы позволили себе сформулировать.

Перед тем, как давать определение нового понятия, необходимо каким-то образом показать его необходимость.

Определение должно увязывать вновь вводимое понятие с теми, которые уже хорошо изучены к настоящему моменту.

Определение раскрывает сущность предмета и отличие его от других предметов.

Хорошо если определение математического понятия сформулировано таким образом, что позволяет легко увидеть связь между ним и теми геометрическими, физическими и техническими объектами, свойства которых оно отражает.

Определение должно быть удобным для использования в конкретной теории при решении ее специфических задач.

Название понятия должно по возможности правильно отражать его содержание.

Определение по возможности должно быть простым, кратким и удобным для обобщения.

Трудно представить, что каждое определение может отвечать всем этим требованиям, в особенности, если учесть, что оно обязано быть простым и кратким. Отсюда вытекает еще одна рекомендация:

лучше если определений будет несколько, причем каждое из них будет по-своему удобным и ясным.

.Определение тензора

П.К. Рашевский дает следующее определение тензора [13].

Мы говорим, что нам задан $p+q$ - валентный тензор, p раз ковариантный и q раз контравариантный, если в каждой координатной системе нам заданы n^{p+q} чисел $a^{j_1 j_2 \dots j_q}{}_{i_1 i_2 \dots i_p}$, занумерованных p индексами внизу и q индексами наверху и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону

$$a^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}{}_{i'_1 i'_2 \dots i'_p} = a^{j_1 j_2 \dots j_q}{}_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1}{}_{i'_1} e^{i_2}{}_{i'_2} \dots e^{i_p}{}_{i'_p} e^{j'_1}{}_{j_1} e^{j'_2}{}_{j_2} \dots e^{j'_q}{}_{j_q}.$$

Числа $a^{j_1 j_2 \dots j_q}{}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ мы будем называть координатами тензора в соответствующей координатной системе. Все индексы пробегают значения 1, 2, 3 ..., n независимо друг от друга.

Данное определение тензора изящным образом уходит от ответа на вопрос, что такое тензор. Можно только предположить, что тензор это нечто, что определяется в каждой координатной системе определенным набором чисел $a^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}{}_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}$. Обычно так и говорят, что тензор – это геометрический или физический объект, который может быть задан своими координатами в каждой координатной системе. Но что мы понимаем под геометрическим объектом? Давайте попробуем перечислить: шар, пирамида, конус, поверхность, трапеция... Что общего во всех этих объектах? Все они имеют форму. Все геометрические объекты имеют форму. Физические объекты обладают большим разнообразием, но и о многих из них можно сказать то же самое. Поэтому, когда мы говорим студенту, что мы определили геометрический или физический объект, он автоматически пытается его представить. Но из всех по-настоящему геометрических, то есть тех, что имеют форму, объектов только векторы удовлетворяют приведенному определению. Даже геометрическая точка не может считаться геометрическим объектом, поскольку ее координаты при перемене базиса изменяются по другому закону. Следующие по сложности объекты, которые могут быть заданы своими координатами, являются линейные преобразования. Но линейные преобразования не имеют формы, это просто функции, их нельзя представить в виде какого-то геометрического объекта. То же самое можно сказать и обо всех тензорах более сложного строения. Все это может показаться мало существенным, однако это не так. Язык математики, так же как и язык любой другой науки, не является полностью самостоятельным языком. Он является расширением естественного языка и должен, поэтому, быть максимально с ним согласован. Настоящее определение и другие подобные ему постоянно провоцируют людей на бесплодные разговоры о том, что такое тензор и как его представить. Те же, кто от бессмысленных попыток "увидеть" тензор устает, навсегда отказываются от надежды понять эту теорию.

Но давайте вернемся к определению. Надо признать, что научный язык часто изменяет первоначальный смысл слов естественного языка. В качестве расширения понятия геометрического объекта, линейный оператор, с известной натяжкой, может быть назван геометрическим объектом, поскольку он один геометрический объект (вектор) преобразует в другой геометрический объект. В соответствии с определением будем считать, что линейный оператор, координатами которого являются числа $a^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}{}_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}$, как раз и есть тот тензор, о котором говорится в определении. Но в этом случае возникает вопрос, какой именно оператор мы должны считать тем тензором, который задан. Дело в том, что один и тот же набор координат может порождать принципиально разные операторы. Например, $y^i = a^i{}_k x^k$ преобразует вектор x^k в вектор y^i, а $z_k = a^i{}_k x_i$ преобразует тот же вектор x_i в другой вектор z_k. Тензоры более сложного строения предоставляют гораздо больше возможностей для порождения различных операторов, имеющих одно общее свойство – одинаковые координаты во всех координатных системах.

Приведенные обстоятельства привели нас к убеждению, что тензором удобнее считать не геометрический объект (читай линейный оператор), а его координаты. Набор чисел, массив, рассматриваемый как единый математический объект с определенными свойствами – это и есть тензор в нашем понимании. Отсюда, в частности, следует вывод, что тензоры существуют только в связи с координатными системами. Этот вывод, кстати, не противоречит и приведенному определению П.К. Рашевского.

Наиболее яркое выражение альтернативной точки зрения на тензор как на абсолютный, то есть независимый от конкретных координатных систем, объект связано с так называемыми диадными и полиадными его представлениями. Диада, так же как и полиада, представляет собой искусственную композицию, составленную из векторов. Пусть $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ два произвольных вектора. Совокупности их координат являются тензорами. Тензором также является их тензорное произведение $a^i b_k$. Этот тензор порождает линейный оператор $\bar{\bar{\boldsymbol{c}}}$ с матрицей координат

$$\bar{\bar{\boldsymbol{c}}} \doteq \left[c^{\bullet}_{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} a^1 b_1 & a^1 b_2 & a^1 b_3 \\ a^2 b_1 & a^2 b_2 & a^2 b_3 \\ a^3 b_1 & a^3 b_2 & a^3 b_3 \end{bmatrix}.$$

Найдем воздействие этого оператора на произвольный вектор $\bar{\boldsymbol{d}}$.

$$\bar{\bar{\boldsymbol{c}}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}} \doteq \left[c^{\bullet}_{\bullet}\right]\left[d^{\bullet}\right] = \begin{bmatrix} a^1 b_1 & a^1 b_2 & a^1 b_3 \\ a^2 b_1 & a^2 b_2 & a^2 b_3 \\ a^3 b_1 & a^3 b_2 & a^3 b_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 b_i d^i \\ a^2 b_i d^i \\ a^3 b_i d^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} b_i d^i .$$

Этот результат короче можно записать в векторном виде
$\bar{\bar{\boldsymbol{c}}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}} = \bar{\boldsymbol{a}}(\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}}) = \bar{\boldsymbol{a}}\;\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}}$.

Два рядом записанные векторы $\bar{\boldsymbol{a}}$ и $\bar{\boldsymbol{b}}$ в последнем выражении называются диадой и считаются условным обозначением для порожденного ими оператора $\bar{\bar{\boldsymbol{c}}}$, следовательно, $\bar{\bar{\boldsymbol{c}}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}} = (\bar{\boldsymbol{a}}\,\bar{\boldsymbol{b}})\cdot\bar{\boldsymbol{d}} = \bar{\boldsymbol{a}}(\bar{\boldsymbol{b}}\cdot\bar{\boldsymbol{d}})$.

Аналогичным образом могут быть построены диады из векторов базиса. Например, диада $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^2$ является линейным оператором, который произвольный вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ преобразует в вектор $\bar{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^2\cdot\bar{\boldsymbol{c}} = c^2\boldsymbol{e}_1$.

Матрица координат этого оператора: $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^2 \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Поскольку матрица координат произвольного линейного оператора $\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right]$ может быть представлена как

$$\left[a^{\bullet}_{\bullet}\right] = a^1{}_1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a^1{}_2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a^1{}_3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ a^2{}_1\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + a^2{}_2\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} + a^2{}_3\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} +$$

$$+ a^3{}_1\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} + a^3{}_2\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} + a^3{}_3\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

то, используя базисные диады, мы можем записать, что

$$\bar{\bar{\boldsymbol{a}}} = a^1{}_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^1 + a^1{}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^2 + \ldots + a^3{}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}^3 = a^i{}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^k.$$

Искусственная конструкция $a^i{}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^k$ в этом выражении является условным обозначением оператора $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}$. Для того, чтобы найти воздействие оператора $a^i{}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^k$ на произвольный вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ достаточно формально выполнить скалярное умножение:

$$a^i{}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^k\cdot b^m\boldsymbol{e}_m = a^i{}_k\boldsymbol{e}_i b^m\delta^k{}_m = a^i{}_k b^k\boldsymbol{e}_i.$$

Аналогичным образом могут быть построены и более сложные формальные математические структуры, например, $a^i{}_k{}^{pq}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{e}_q$, которые по странному стечению обстоятельств принято называть истинными тензорами, а также геометрическими или физическими объектами. Последнее обстоятельство вызывает у людей определенные психологические трудности аналогичные тем, о которых мы уже упоминали. Вместе с тем данное направление обладает рядом достоинств, связанных прежде всего с привычным векторным формализмом, и на сегодняшний день настойчиво развивается. Более подробно об этом можно посмотреть в соответствующей литературе [5, 16, 17].

.В заключение о математической строгости

При всем уважении к профессиональным математикам хотелось бы иметь больше книг по математике, написанных инженерами и физиками. Несмотря на то, что физики и инженеры смотрят на математику иначе, чем чистые и строгие математики, писать об этом они не торопятся. Причина здесь, по нашему мнению, в том, что в общественном мнении слишком сильно утвердилось заблуждение об особом статусе математического знания, как принципиально отличного от всего остального естествознания. Инженер, понимая, что он использует математику не совсем так, как написано в ортодоксальных учебниках, скорее склонен скрыть этот постыдный, по его мнению, факт, чем поделиться своим опытом с другими, и очень жаль. Не следует слишком серьезно относиться к мифам и заблуждениям, даже если они освящены многовековой традицией. Возьмем к примеру миф об особой роли строгости и точности рассуждений в математике.

Нестрогим мы называем рассуждение, которое может привести к неверному результату. Но рассуждение, которое может привести к неверному результату, правильнее называть просто ошибочным. Ошибочных рассуждений следует избегать, и не имеет значения, о чем идет речь: о математике, физике или о презренном быте.

И. И. Блехман, А. Д. Мышкис и Я. Г. Пановко написали очень полезную книгу о логике и особенностях приложений математики [4]. Прикладная математика – это как раз та математика, которая имеет применение в естествознании. Другими словами, указанная группа авторов сделала попытку отстоять правомерность некоторых "физических" и "технических" подходов в математике, которые традиционно принято считать нестрогими.

Представление об ущербности таких методов, утвердившееся среди профессиональных математиков, настолько велико, что И. И. Блехман, А. Д. Мышкис и Я. Г. Пановко были вынуждены сделать соответствующие реверансы с целью предупредить нелицеприятную критику своих коллег. Один из таких реверансов из раздела "От авторов" мы приводим ниже.

"Отстаивая наличие специфики прикладного математического мышления и по необходимости заостряя дискуссионные вопросы, мы отдаем себе отчет в опасности извращения нашей позиции, которое может привести к замене "террора дедукции" "разгулом правдоподобия". Ни одна строка этой книги не должна быть истолкована как оправдание математической безграмотности, приводящей к грубым ошибкам.

...

Многие коллеги предупреждали нас, что только вполне зрелые специалисты правильно поймут общую установку книги, а часть читателей (в особенности молодежь) может воспринять книгу как некую декларацию математической распущенности и вседозволенности. И все же мы рассчитываем, что риск такого грубо ошибочного истолкования относительно невелик и книгу можно адресовать самому широкому кругу читателей, не сопровождая ее ограничительной надписью "детям до 16 лет читать запрещено".

Может сложиться впечатление, что в правильной математике заинтересованы только сами математики, а инженеры и физики только и ждут момента, чтобы эту строгую и чистую математику исказить и извратить. В действительности инженеры и физики заинтересованы в хорошей математике не меньше самих математиков, поскольку в их деле ошибки могут привести к вполне реальным, а не только воображаемым проблемам. То, что самолеты летают, автомобили ездят, корабли плавают, а многие дома служат нам довольно долго, служит доказательством того, что инженеры и физики вполне правильно понимают математику, которой пользуются.

Миф о низком уровне строгости рассуждений в остальном мире за пределами математики возник по недоразумению. Многие математики слабо разбираются в человеческих проблемах, в то же время подавляющее большинство людей практически не ориентируется в математике. Я думаю, что можно совершенно строго доказать, что любой здоровый человек всегда рассуждает совершенно правильно, если не ошибается, а ошибается он не чаще, чем среднестатистический математик.

Список литературы

1 Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1972. – 351 с.

2 Александрова Н.В. Математические термины. Справочник. – М.: "Высшая школа", 1978. – 190 с.

3 Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие для втузов. В 3-х т. Т. 1. Статика и кинематика. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука, 1990. – 672 с.

4 Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 328 с.

5 Блох В.И. Теория упругости. – Харьков: Издательство Харьковского государственного университета, 1964. – 483 с.

6 Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов. – 6-е изд. – М.: ООО "Издательство Оникс": "Издательство Мир и Образование", 2005. – 304 с.

7 Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.

8 Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. т. 1. – М.: Наука, 1977. – 480 с.

9 Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика: Учебное руководство: Пер. с англ./ Под ред. А.И. Шальникова и А.С. Ахматова. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 448 с.

10 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учебное пособие для втузов – СПб: "Специальная литература", 1998. – 200 с.

11 Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

12 Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975. – 336 с.

13 Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.

14 Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Учебник для втузов. М.: Высшая школа, 1972. 424 с.

15 Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1 Механика: Учеб. пособие для втузов / И.В. Савельев. – М.: ООО "Издательство Астрель": ООО "Издательство АСТ", 2002. – 336 с.

16 Садаков О.С. Основы тензорного анализа (применительно к теории упругости). – Челябинск: Из-во Челябинского политехнического института, 1981. – 92 с.

17 Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. 1. 1. – М.: Наука, 1983. – 528 с.

18 Сокольников И. Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред): Пер. с англ. – М.: Наука, 1971. – 376 с.

19 Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. – М.: Мир, 1980. – 454 с.

20 Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. – М.: Наука, 1965. – 456 с.

21 Формальная логика. / ред. И.Я. Чупахин, И.Н. Бродский / – Л.: "Издательство Ленинградского университета", 1977. – 357 с.

22 Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.