М.В. Шамолин

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Издание второе, переработанное и дополненное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2007

УДК 517
ББК 22.161.1
Ш19

Рецензенты:

$\boxed{\textbf{Бобылев Н.А.}}$ — доктор физико-математических наук, профессор
Алхутов Ю.А. — доктор физико-математических наук, профессор

Шамолин, М.В.

Ш19 Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики / М.В. Шамолин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство «Экзамен», 2007. — 318, [2] с.

ISBN 978-5-377-00761-6

Работа возникла в результате изучения движения летательного аппарата, которое описывается нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. На базе этих уравнений дается классификация возможных неисправностей в системе управления движением. Вводятся понятия опорных неисправностей и их окрестностей, дается математическое моделирование этих неисправностей и их окрестностей, вводится понятие диагностического пространства и его математической структуры.

В приложениях рассмотрены вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и динамических систем, как в применении к основной части книги, так и имеющих самостоятельный интерес.

УДК 517
ББК 22.161.1

Подписано в печать с диапозитивов 16.05.2007. Формат 84x108/32.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 10,66.
Усл. печ. л. 16,8. Тираж 30 000 (2-й завод — 200) экз. Заказ №

ISBN 978-5-377-00761-6

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Памяти Ивана Терентьевича Борисенка

Работа, начатая прекрасным ученым И.Т. Борисенком, возникла в результате изучения движения летательного аппарата, которое описывается нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. На базе этих уравнений дается классификация возможных неисправностей в системе управления движением. Вводятся понятия опорных неисправностей и их окрестностей, дается математическое моделирование этих неисправностей и их окрестностей, вводится понятие диагностического пространства и его математической структуры.

Главы 10-13 написаны совместно с И Т. Борисенком.

Поскольку в основной части книги используются методы качественной теории исследования динамических систем, автор счел необходимым дополнить книгу следующими приложениями.

В приложениях 1-8 затрагиваются некоторые качественные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, от решения которых зависит исследование динамических систем. Обсуждению подлежат такие проблемы как бифуркация рождения предельного цикла из слабого фокуса (ср. с [196-198]); вопросы существования так называемых монотонных предельных циклов, наличия замкнутых траекторий, стягиваемых в точку по двумерным поверхностям, наличия замкнутых траекторий, не стягиваемых в точку по фазовому цилиндру; качественные вопросы теории топографических систем Пуанкаре и более общих систем сравнения для динамических систем на плоскости; проблемы существования и единственности траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки для систем на плоскости; элементы качественной теории монотонных векторных полей, а также вопросы существования длиннопериодических и устойчивых по Пуассону траекторий. В заключение предлагается методика интегрирования некоторых классов неконсервативных систем через элементарные трансцендентные (в смысле теории функций комплексного переменного) функции.

Приложение 9 написано совместно с Р.Р. Айдагуловым и посвящено новому спектральному подходу в динамике сплошной среды.

Во всех приложениях используется сквозная нумерация формул.

В основной же части книги дается постановка задачи диагностики системы управления движением летательного аппарата. Задача диагностики представляется в виде двух последовательно решаемых задач: задачи контроля, то есть задачи определения наличия неисправности в системе управления, и задачи диагностирования, то есть задачи распознавания конкретной происшедшей неисправности. Обнаружение неисправностей происходит в процессе функционирования летательного аппарата.

В задаче контроля вводится понятие поверхности контроля. Критерием наличия неисправности является выход фазовой траектории на эту поверхность. Даются способы построения поверхности контроля.

Сформулирована и доказана теорема диагностирования. В силу этой теоремы предлагаются внешнетраекторные алгоритмы, при помощи которых, после выхода фазовой траектории на поверхность контроля или в процессе непрерывной экспресс-диагностики, осуществляется решение задачи диагностирования неисправностей, возникших в диагностическом пространстве, то есть в рассматриваемом случае в каналах управления движением летательного аппарата.

Сформулированы расширенные задачи контроля и диагностирования, а также общая задача диагностики, и показано, что решение этих задач существует.

Дано статистическое решение задачи диагностики в случае траекторных измерений с шумом, который является случайным процессом типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром; при этом получен функционал диагностики, который ранее выбирался априори, а его минимизация приводит к ранее полученному алгоритму диагностирования.

Проводится математический эксперимент на ЭВМ реализующий алгоритмы контроля и диагностирования и осуществляющий распознавание неисправностей систем управления четырех разных летательных аппаратов, выполняющих различные режимы движения.

PREFACE

In this paper, the motion of an aircraft is described by nonlinear ordinary differential equations. Based on these equations, the probable malfunctions in the motion control system are classified, the concepts of reference malfunctions and their neighborhoods are introduced, the mathematical modeling of these malfunctions and their neighborhoods is carried out, the concept of diagnostic space is introduced, and the mathematical structure of this space is defined.

The problem of diagnostics is stated for the motion control system of an aircraft. The problem of diagnostics is represented in the form of the following two problems, which are solved sequentially: the checking problem, that is, the problem of detecting the malfunctions in the control system, and the diagnostic problem, that is, the problem of tracking a particular fault that has occurred. The faults are detected in the course of the aircraft's functioning.

In solving the checking problem, the concept of checking surface is introduced. The criterion for a malfunction is the attainment of this surface by a state trajectory. Methods for constructing the checking surface are presented.

The diagnostic theorem is stated and proved. Based on this theorem, we propose extratrajectorial algorithms for solving the diagnostic problem for the malfunctions that have occurred in the diagnostic space, i.e., in the aircraft's motion control channels in the case under consideration. These algorithms are used once the state trajectory has attained the checking surface or in the process of uninterrupted express-diagnostics.

The extended checking and diagnostic problems as well as the general problem of diagnostics are stated; it is shown that solutions to these problems do exist. The problem of diagnostics is statistically solved for the case of noise-corrupted trajectory measurements; the noise is taken to be a stochastic process of normal white noise with zero mean value and bounded spectrum. Moreover, the diagnostic functional is obtained under this procedure. Earlier, this functional was chosen in advance. The minimization of the functional thus obtained yields the diagnostic algorithm obtained earlier.

A computer-aided mathematical experiment is carried out to implement the checking and diagnostic algorithms and to identify faults in the operation of control systems of four distinct aircraft flying at different modes.

ВВЕДЕНИЕ

Нет прикладных наук, есть только приложения науки.

Луи Пастер

Сложность современных управляемых систем, задач решаемых этими системами, многообразие этих задач, снижение аппаратурной избыточности [1, 2], высокая ответственность и интенсивность работы операторов, их высвобождение требуют интеллектуального приборного наполнения таких систем и, в частности, эффективной автоматической диагностики функционального состояния [3] в процессе их движения. По результатам диагностики можно произвести ремонт системы управления, отключение неисправного элемента, которое бывает эффективнее его неправильной информации, или осуществить коррекцию закона управления [4–6].

В дальнейшем будут рассмотрены внутренние непротиворечивые логически совершенные аспекты построения замкнутой теории дифференциальной диагностики управляемых систем на уровне математических моделей и программ.

Многие технические объекты имеют модульную структуру и обладают конечным набором возможных неисправностей. Движение таких объектов и элементов их систем управления, как исправных, так и неисправных, с высокой степенью точности априори можно описать, исходя из опыта и законов теоретической механики, обыкновенными дифференциальными уравнениями. В силу этого направление исследований диагностики функционального состояния управляемых систем и получило название «Дифференциальной диагностики». В основе ее лежат дифференциальные уравнения, описывающие движение исправной и возможных неисправных систем.

Задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления такого рода может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам [7,8]: задаче контроля, то есть установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования [1], то есть поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность π_k. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта в любой точке внутри поверхности π_k.

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля π_k.

Процедура контроля включает в себя фиксирование выхода траектории объекта на поверхность контроля π_k, что является выходом алгоритма контроля, то есть информацией о наличии неисправности в системе, и выдачу начальной информации для алгоритма диагностирования.

Задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля π_k. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течении весьма краткого интервала времени, например, за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства зачастую не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации [9] и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики. На это указывается, в частности, в [2] и в обзоре [3].

Исходной информацией для решения задачи диагностирования является конечный набор математических моделей неисправных систем, отличающихся друг от друга и от исходной системы той или иной возможной неисправностью, ограниченная область их начальных условий и информация с выхода алгоритма контроля.

Процедура диагностирования включает в себя описание информации, поступающей от датчиков, включая датчик контроля, организацию этой информации, определение последовательности действий, сравнение результатов наблюдений с расчетными возможными ожидаемыми результатами, процесс минимизации в пространстве поиска и выдачу результата, то есть номера происшедшей неисправности.

Процедура диагностирования может состоять из двух этапов: сначала определяется подсистема (например, один из каналов управления), в которой произошла неисправность, а затем осуществляется диагностирование конкретной неисправности в этой подсистеме. Процедура диагностирования может предусматривать не только указание конкретно происшедшей неисправности, но и определение последствий возникших ситуаций, составление рецептов исправления неправильного функционирования системы, выполнение последовательных предписанных исправлений, повторную диагностику, советы по исправлению поведения обучаемого оператора при управлении системой в целом.

В технике существует множество конструктивных приемов определения неисправностей, основанных, в основном, на анализе внутреннего состояния объекта. В то же время, имеется возможность определения неисправностей динамического объекта по характеру его поведения, по измерению его траектории, то есть с помощью внешнетраекторного контроля. В этом случае возможно автоматическое определение неисправностей чисто вычислительными средствами на базе информации о траектории объекта. Авторы не противопоставляют методику внешнетраекторного контроля традиционным способам, а желают указать на ее принципиальную осуществимость, дать ей на уровне математических моделей и программ механико-математическое обоснование, описать несколько простых расчетных алгоритмов и показать их конструктивность, работоспособность и эффективность.

В этой связи имеется возможность отметить некоторые внешнетраекторные методики диагностирования неисправностей.

1. Методику [8,10], основанную на сравнении действительной траектории объекта с расчетными траекториями, соответствующими траекториям объекта с той или иной неисправностью из списка возможных. При этом неисправности из априорного списка доставляют неустойчивость объекту. Методика [8] применима к любому классу систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

2. Три специализированные для линейных систем методики диагностирования, две из которых, основанные на использовании свойств инвариантных подпространств, обсуждались в [11], а третья методика использует свойства синхронных поверхностей. Эти методики не расширяют возможностей диагностирования по сравнению с [8].

В настоящей работе развиваются подходы решения задач диагностики, рассмотренные в [8]. Отметим основные особенности, которые отличают данную работу от [8].

Во-первых, даны определения и классификация опорных неисправностей, вводится понятие окрестности опорной неисправности, предложены простейшие математические модели опорных неисправностей и их окрестностей; вводится понятие диагностического пространства, рассматривается его математическая структура, формализующая непрерывность процессов в диагностическом пространстве, показано, что в этом пространстве рассматриваемые опорные неисправности и соответствующие им дифференциальные уравнения невырождены, то есть измеряемые траектории рассматриваемого ЛА с двумя различными опорными неисправностями не могут совпадать.

Во-вторых, сформулирована и решена в детерминированной и в статистической постановке задача контроля; при выборе поверхности контроля π_k в основу положено программное движение ЛА. Это отличает данный подход от подхода, изложенного в [12].

В-третьих, доказана предельная теорема, позволившая значительно упростить внешнетраекторный алгоритм диагностирования; параметры алгоритма определяются детерминированным способом. Показано, что предложенный алгоритм диагностирования работает в случае меньшей по сравнению с вектором состояния размерности вектора диагностирования и в условиях шумов.

В-четвертых, показана принципиальная возможность диагностирования не только включенных в априорный список опорных неисправностей, но и опорных неисправностей, таких, закон возникновения и изменения которых заранее не известен, и которые, поэтому, не предусмотрены априорным списком. Априорный список может содержать неисправности не обязательно доставляющие неустойчивость ЛА.

В-пятых, настоящая работа с методологической направленностью имеет практическое значение. В качестве расчетных математических моделей рассмотрены системы нелинейных дифференциальных уравнений с существенно нелинейным управлением. В частности, рассмотрена диагностика неисправностей системы управления в условиях шума при планирующем полете в пространственном движении ЛА с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости, и диагностика реальных неисправностей системы управления в условиях шума в плоском движении при посадке ЛА.

Совместная работа математической модели движения ЛА, моделей, отличающихся от нее той или иной неисправностью, и алгоритмов диагностики обеспечивается с помощью программы на ЭВМ, осуществляющей автоматическое диагностирование неисправностей.

Таким образом, весь процесс осуществления дифференциальной диагностики функционального состояния ЛА воплощен в триаде: «модели–алгоритмы–программа».

Эта работа построена так, что, зная основы теоретической механики, дифференциальных уравнений, теории управления, теории вероятностей, а также программирования, читатель может в полном объеме представить проблему диагностики управляемых систем. Все, что описано уравнениями движения и закономерными соотношениями, может быть подвергнуто конструктивной диагностике. Методическая часть книги написана в общем виде применительно к любой управляемой системе, движение которой моделируется обыкновенными дифференциальными уравнениями. Классификация неисправностей, также как модельные примеры по диагностике, даются применительно к конкретным системам управления, математические модели движения которых описаны в литературе.

В главе 1 приводятся общие известные сведения о математических моделях движения класса объектов, диагностика систем управления которых рассматривается в работе, а также общие сведения о предлагаемом подходе в задаче о диагностике.

В главах 2, 3 и 4 дается классификация неисправностей и вводятся понятия опорных неисправностей, которые могут произойти в системе управления объектом и в их окрестностях. Формулируются возможные простейшие подходы математического моделирования неисправностей и их окрестностей, детально обсуждается вопрос о невырожденности опорных неисправностей.

Вводится понятие диагностического пространства, определяется его математическая структура.

В главе 5 дается общая постановка задачи дифференциальной диагностики и предлагается рассматривать задачу диагностики в виде двух самостоятельных задач: задачи контроля и задачи диагностирования.

В главе 6 формулируются постановка задачи контроля и алгоритмы ее решения. Критерием наличия неисправности в управляемой системе, движение которой описано обыкновенными дифференциальными уравнениями, считается выход вектора контроля на поверхность контроля π_k . Сначала предлагаются способы решения задачи контроля, при которых в качестве поверхности контроля выбираются сфера, эллипсоид или трубка контроля. Затем рассматривается общий способ построения поверхности контроля методом статистических испытаний.

В главе 7 для случая точных траекторных измерений формулируются постановка задачи диагностирования, теорема диагностирования и, как следствие теоремы, два алгоритма диагностирования. Рассмотрена методика априорного счета констант, которые в случае использования первого алгоритма диагностирования требуется запоминать в программе диагностирования на ЭВМ и других параметров алгоритма. Второй алгоритм не требует запоминания констант, а основан на поиске минимального значения функционала диагностирования из его значений, полученных в процессе диагностирования для априори выбранного набора опорных неисправностей.

Обсуждаются различные обобщения теоремы диагностирования: вопросы применимости полученных алгоритмов диагностики при использовании вектора диагностирования меньшей чем вектор состояния размерности и в случае непрерывной экспресс-диагностики без применения поверхности контроля, задача о выборе «минимального» времени диагностирования, задача диагностирования неисправностей, происшедших в окрестностях опорных невырожденных неисправностей и не предусмотренных априорным списком, рассмотрены другие функционалы, решающие задачу диагностирования.

Наконец, сформулирована расширенная постановка задачи диагностирования, решение которой осуществимо с помощью предложенных алгоритмов.

В главе 8 дана оценка погрешностей метода полей направленной в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю заданными функциями времени, и в случае, если эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Показано, что и в этих случаях можно указать такое «наилучшее» число необходимых траекторных измерений, при котором предложенные алгоритмы диагностирования будут конструктивно работать.

В главе 9 показано, что диагностика в случае траекторных измерений с шумом, представляющим собой случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром, осуществима с помощью алгоритмов диагностирования, полученных в главе 7. То есть результаты этой главы остаются справедливыми и в этом достаточно общем случае, при этом получен функционал диагностирования, который в теореме главы 7 вводился априори.

В главе 10 рассматривается модельный пример по диагностике неисправностей в системе непрямого управления объектом, движение которого описывается нелинейными дифференциальными уравнениями третьего порядка, которые впервые изучались Б.В. Булгаковым. При этом используется алгоритм диагностирования, при котором выбирается сфера контроля, каждой неисправной системе ставится в соответствие некоторая константа и по определенным правилам осуществляется сравнение с этими константами чисел, полученных в процессе интегрирования уравнений и характеризующих функциональное состояние системы. Этот пример впервые рассматривался в докладе на всесоюзном симпозиуме проектирования систем диагностики в Ростове-на-Дону [13].

В главах 11 и 12 на уровне математических моделей и программ рассматривается диагностика систем прямого управления двух летательных аппаратов и показывается работоспособность предлагаемых алгоритмов диагностики. В главе 11 рассматривается летательный аппарат с прямым управлением, движение которого в вертикальной плоскости (посадка) может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Эти уравнения являются частным случаем уравнений, рассматриваемых в главе 14. Диагностике подвергаются отказы трех датчиков, формирующих три обратные связи в системе управления объектом. Результаты этой главы впервые докладывались И.Т. Борисенком на научных чтениях, посвященных 75-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея [14].

В главе 12 проводится математический эксперимент на ЭВМ по диагностике системы управления летательным аппаратом при его планировании с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости [15]. Показано, что предлагаемые алгоритмы диагностирования успешно работают при поиске различного рода опорных неисправностей, в частности, неисправностей датчиков управляющих сигналов с гиростабилизированной платформы, неисправностей, близких к опорным, при траекторных измерениях с ошибкой, а также в случае непрерывной экспресс-диагностики [16]. Результаты этой главы вошли также составной частью в отчет по договору с ЛИИ им. М.М. Громова [17].

В главе 13 рассматривается другой, по сравнению с предыдущей главой, подход в диагностике алгоритмической модели гиростабилизированной платформы, как автономной подсистемы, включенной в систему управления движением летательного аппарата. Формулируются задача контроля и задача диагностирования для этой автономной подсистемы. Вектор контроля и сфера контроля выбираются в пространстве углов курса, тангажа и крена, вычисленных на борту летательного аппарата, в этом же пространстве выбирается и вектор диагностирования [17].

Эта работа начала выполняться И.Т. Борисенком как контрольная по просьбе ЛИИ им. М.М. Громова. Математическая модель движения ЛА, математическое описание воздействующих на ЛА стохастических возмущений, программа расчета движения исходной (исправной) системы, а также набор отказов, были предложены ЛИИ им. М.М. Громова, диагностика отказов была осуществлена в лаборатории навигации и управления Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова. Все предложенные отказы были определены правильно.

В заключении перечисляются основные результаты работы и рассматриваются некоторые нерешенные задачи.

Автор выражает искреннюю благодарность всему коллективу лаборатории навигации и управления Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова.

Второе издание данной книги выполнено при финансовой поддержке Гранта Президента Российской Федерации для молодых докторов наук (МД-2311.2005.1; 2005 и 2006 гг.) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-08-01378-а и 05-01-00401-а).

ГЛАВА 1

Уравнения движения

Рассмотрим динамическую управляемую систему, движение которой может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которую запишем в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t), \tag{1.1}$$

где $x(t)$ и $X(t)$ – n-мерные вектор-функции с проекциями $x_1(t),...,x_n(t)$ и $X_1(x,t),...,X_n(x,t)$.

Функцию $X(x,t)$ в дальнейшем будем считать непрерывной в некоторой открытой области D. Система (1.1) задает закон движения некоторой начальной точки $x_0(t_0)$ $n+1$-мерного фазового пространства по траектории $x(t) = x(t, x_0(t_0))$.

Через $\|x\|$ обозначим норму вектора *x*. В простейшем случае норма вектора может совпадать с евклидовой длиной вектора, то есть

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = X(y,t) + R(y,t). \tag{1.3}$$

Предположим, что вектор-функция $R(y,t)$ непрерывна в области D и в этой области при $t_0 \le t \le t_0 + T$ выполняется неравенство

$$\|R(y,t)\| < \eta, \tag{1.4}$$

где η – постоянное число и $\eta \geq 0$.

Пусть начальные условия, определяющие решения $x = x(t, x_0)$ и $y = y(t, y_0)$ систем (1.1) и (1.3), удовлетворяют условиям

$$\|y_0 - x_0\| < \delta, \tag{1.5}$$

где δ – постоянное число и $\delta \geq 0$.

Предположим, кроме того, что функция $X(x,t)$ удовлетворяет в любой замкнутой области G, лежащей в D, условиям Липшица

$$\|X(y,t) - X(x,t)\| < L\|y - x\|, \tag{1.6}$$

где L – положительная постоянная.

В этом случае, то есть при выполнении условий (1.4)–(1.6) и условия Липшица в G для $R(y,t)$, гарантируется существование единственного решения $x = x(t, x_0)$ уравнения (1.1), удовлетворяющего начальным условиям $x_0 = x(t_0, x_0)$, и справедлива оценка отклонения решения [18]

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \frac{\eta}{L}\left(e^{L(t-t_0)} - 1\right) + \delta e^{L(t-t_0)}. \tag{1.7}$$

Отметим, в частности, что, если возмущены только начальные условия, а правые части неизменны, то $\eta = 0$ и оценка (1.7) принимает вид

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \delta e^{L(t-t_0)}.$$

Выбирая δ достаточно малым на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, можно удовлетворить неравенству

$$\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon,$$

где ε – произвольное положительное число.

Значит, решение уравнения (1.1) является непрерывной функцией начальных условий, что можно трактовать как свойства устойчивости решений на конечном интервале времени, присущее любой системе обыкновенных дифференциальных уравнений (в настоящее время устойчивость на конечном интервале времени называется непрерывной зависимостью). Второй предельный случай ($\delta = 0, \eta \neq 0$) выражает свойство непрерывности решения в некотором функциональном пространстве правых частей.

Если решение $x = x(t, x_0)$ определено для любого значения момента времени t, то такое решение называют *продолжаемым*. Если решение не выходит за пределы некоторой замкнутой ограниченной (то есть компактной) области [19], то это решение будет продолжаемым. Более общие критерии продолжаемости изложены в [18].

Если правые части системы (1.1) не зависят от времени t, то такие системы получают название автономных. В дальнейшем будем рассматривать автономные системы, все решения которых продолжаемы.

Рассмотрим автономную динамическую управляемую систему, функциональное состояние которой может быть описано векторным дифференциальным уравнением

$$x' = X(x). \tag{1.8}$$

Нас особенно будет интересовать поведение решений системы (1.8) в окрестности некоторого решения x_*. Пусть в системе имеется управляющее устройство, целью которого является удержание всех решений системы (1.8) как можно ближе к решению x_*. Предположим, что все компоненты $x_1,...,x_n$ вектора x можно разделить на два множества: координаты системы (объекта) $y_1,...,y_p$ и координаты управления $z_1,...,z_q$, где $p + q = n$. Координаты системы определяют p-мерный вектор y функционального состояния системы, а координаты управления являются составляющими q-мерного вектора управления z.

Перепишем уравнения (1.8) рассматриваемой системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} y' &= Y(y,z),\ Y(0,0) = 0, \\ z' &= Z(y,z),\ Z(0,0) = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Система (1.9) является системой с так называемым непрямым управлением или с управлением по производным. Такие системы применительно к управлению движением корабля впервые рассматривались Н. Минорским [20].

Объект управления описывается уравнением

$$y' = Y(y,0),$$

а управляющее свойство уравнением

$$z' = Z(0,z).$$

Задачей управляющего устройства является обеспечение или улучшение устойчивости объекта, то есть вектора y, и обеспечение желаемого движения объекта.

Отметим, что часто приходится прибегать к частичной или полной линеаризации системы (1.9). Предположение о линейности системы, то есть замена системы (1.9) ее линейным приближением, дает возможность продвинуться в исследовании достаточно далеко. Однако при этом могут ускользнуть некоторые важные свойства функционального поведения системы. Кроме того, многие системы и их управляющие устройства работают вне линейной области их характеристик.

Наряду с системами непрямого управления (1.9) рассматриваются также системы прямого управления

$$y' = Y(y,z),\, Y(0,0) = 0,$$
$$z' = Z(y,z),\, Z(0,0) = 0, \qquad (1.10)$$

при котором управляющий сигнал, то есть сигнал обратной связи, воздействует на объект непосредственно.

При проведении математических экспериментов по диагностике управляемых систем использовались математические модели типа (1.9) и (1.10). Классификация неисправностей, определение их окрестностей, простейшие подходы математического моделирования неисправностей и их окрестностей, обсуждение невырожденности опорных неисправностей, введение понятия диагностического пространства, а также первоначальная постановка задачи даются на базе уравнений типа (1.10), которые имеют следующую структуру:

$$x' = X(x) + A(x)\xi,$$
$$\xi' = \Phi(\delta),$$
$$\delta = Bx + \varphi(\sigma), \qquad (1.11)$$
$$\sigma = Cx,$$

где x – фазовый n-мерный вектор состояния,

$X(x)$ и $A(x)$ – определенные, непрерывные матрицы-функции;

ξ – трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются углы отклонения рулей высоты, элеронов, направления;

$B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ $(i = 1,2,3;\, j = 1,...,n)$ – следующие матрицы коэффициентов:

$$b_{ij}^0 \le b_{ij} \le b_{ij}^*;\;\; c_{ij}^0 \le c_{ij} \le c_{ij}^*; \qquad (1.12)$$

здесь b_{ij}^0, b_{ij}^* и c_{ij}^0, c_{ij}^* – некоторые положительные постоянные.

Элементы вектор-функций $\Phi(\delta)$ и $\varphi(\sigma)$ определены и непрерывны при всех значениях δ_h и σ_h, h = 1, 2, 3, и принадлежат к классу так называемых допустимых характеристик, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&1) \qquad && \Phi_h(\delta_1,\delta_2,\delta_3)=0, \text{ если } \delta_h=0; \\
& && \varphi_h(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0, \text{ если } \sigma_h=0. \\
&2) \qquad && \delta_h\Phi_h(\delta_1,\delta_2,\delta_3)>0, \text{ если } \delta_h\neq 0; \\
& && \sigma_h\varphi_h(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)>0, \text{ если } \sigma_h\neq 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

(Впрочем, условие 1 (для непрерывных функций) является следствием условия 2.)

Будем, кроме того, считать, что интегралы в пределах $[0,+\infty)$ и $[0,-\infty)$ от этих функций расходятся. Это условие гарантирует сходимость решений при $t\to\infty$.

Более детально уравнения (1.11) рассмотрены в [15], а применительно к решаемой задаче рассматриваются в главе 13.

Что же касается условий существования и единственности траекторий системы, то дополнительно отметим весьма полную теорему существования, изложенную в уже упоминавшейся работе Немыцкого и Степанова [19], а также теорему Лефшеца [21,22] и теоремы [23], определяющие достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши с фазовыми ограничениями. Отметим, кроме того, работу [24], в которой обсуждаются достаточные и необходимые условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем; при рассмотрении необходимых условий вводятся функции, отличные от функций Ляпунова.

В дальнейшем условия существования и единственности для систем вида (1.11) будем считать выполненными и возвращаться к этому вопросу уже не будем.

Уравнения (1.11) приводятся к уравнениям (1.1) или (1.10) путем исключения переменных. Будем считать, что система уравнений (1.11) обладает всеми свойствами, которые приписываются уравнению (1.1).

Последние три уравнения в (1.11) описывают систему управления (СУ) движением динамического объекта. Целью управления является удержание траектории $x(t)$, близкой к некоторой программной траектории $x_*(t)$. Допустим, что такое управление построено, то есть подобраны функции φ и Φ, а также значения коэффициентов матриц B и C, и именно эти φ Φ B и C присутствуют в (1.11).

Допустим, что в процессе функционирования в СУ могут возникать неисправности, которые приводят к тому, что управляющий сигнал ξ, вырабатываемый СУ объекта, формируется неправильно, то есть управление объектом уже не обеспечивает близости траектории $x(t)$ к $x_*(t)$.

Таким неисправностям соответствуют некоторые значения коэффициентов матриц B и C и виды функций φ и Φ. Допустим, что существует такой набор из l неисправностей, каждой их которых присущи свои матрицы B_i, C_i и функции φ_i, Φ_i, $i = 1,...,l$, что решения $x_i(t)$ систем

$$x_i'(t) = f_i(x_i, t)$$

с начальными условиями $x^0 \in X$, где функции f_i получаются подстановкой в (1.12) матриц B_i, C_i и функций φ_i, Φ_i и дальнейшим исключением переменных, различны между собой при одних и тех же начальных условиях для всех f_i и отличны также от программной траектории $x_*(t)$.

Тогда, при данном наборе неисправностей актуальна задача определения номера неисправности в наборе, то есть определения номера i функции f_i, $i = 1,...,l$, заменяющей функцию в правой части в некоторый момент времени t_0. Здесь t_0 – момент возникновения неисправности в СУ объекта.

В более общем виде задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть в неизвестный момент времени произошла некоторая неисправность. Задача сводится к отображению происшедшей в системе неисправности на множество из l возможных неисправностей и определения такого номера $i = 1,...,l$, неисправности из этого множества, который максимально «близок» к происшедшей неисправности. Отсутствие неисправности в системе также должно быть выходом решения задачи.

Входными данными для определения номера возникшей в СУ неисправности будут конечный набор неисправностей, характерных для СУ объекта и, значит, соответствующий набор дифференциальных уравнений, их решения и измеренные в процессе функционирования объекта значения компонент фазового вектора.

Следующие три главы посвящены характеристике неисправностей. Даются определения неисправностей, их классификация, рассмотрены простейшие подходы математического моделирования неисправностей, определен конечный набор опорных невырожденных неисправностей, вводится понятие окрестности неисправности, даются определения окрестностей, их математическое моделирование, вводится понятие диагностического пространства.

ГЛАВА 2

Классификация неисправностей

Классификацию неисправностей дадим на базе математической модели пространственного движения летательного аппарата (1.11) и запишем эти уравнения применительно к системе управления, рассмотренной в работе [15], в которой, в частности, изучается режим планирующего спуска с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Сохранив в этих уравнениях структуру управления, запишем их в следующем виде:

$$\begin{gathered} x' = A(x) + B(x)\xi, \\ \xi' = \Phi(\delta), \\ \delta = C(t)u + \varphi(\sigma), \\ \sigma = E(t)s, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где x – фазовый n-мерный вектор состояния,

$A(x)$ и $B(x)$ – определенные, непрерывные матрицы-функции;

ξ – трехмерный управляющий вектор, элементами которого являются углы отклонения ξ_i (i = 1,2,3) рулей высоты, элеронов, направления;

составляющие трехмерных векторов u и s в (2.1) могут быть приборно измерены или алгоритмически вычислены;

элементы матриц $C(t) = (c_{ij}(t))$ и $E(t) = (e_{ik}(t))$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} c_{ij} \in [\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}],\ \underline{c}_{ij} \le \overline{c}_{ij},\ i = 1,2,3, \\ e_{ik} \in [\underline{e}_{ik}, \overline{e}_{ik}],\ \underline{e}_{ik} \le \overline{e}_{ik},\ j = 1,\ldots,p,\ k = 1,\ldots,q, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}, \underline{e}_{ik}, \overline{e}_{ik}$ – некоторые постоянные значения.

Элементы вектор-функций $\Phi(\delta)$ и $\varphi(\sigma)$ определены и непрерывны при всех значениях δ_h и σ_h, h = 1, 2, 3, и принадлежат к классу так называемых допустимых характеристик, удовлетворяющих следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&1) \qquad \Phi_h(\delta_1,\delta_2,\delta_3)=0, \text{ если } \delta_h=0;\\
&\qquad\quad \varphi_h(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0, \text{ если } \sigma_h=0.\\
&2) \qquad \delta_h\Phi_h(\delta_1,\delta_2,\delta_3)>0, \text{ если } \delta_h\neq 0;\\
&\qquad\quad \sigma_h\varphi_h(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)>0, \text{ если } \sigma_h\neq 0.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

(Впрочем. условие 1 (для непрерывных функций) является следствием условия 2.)

Будем, кроме того, считать, что интегралы в пределах $[0,+\infty)$ и $[0,-\infty)$ от этих функций расходятся, что гарантирует сходимость решений при $t\to\infty$.

Зависимость от времени матриц C, E в правой части (2.1) обусловлена тем, что процесс развития неисправностей может явно зависеть от времени.

Перейдем теперь к классификации возможных неисправностей, дадим определение неисправности и опишем предлагаемый подход.

Классификация дается применительно к неисправностям, которые могут возникнуть в системе управления движением летательного аппарата (2.1). Она достаточна для описания возможных в системе управления неисправностей, может быть использована и для описания соответствующих возможных неисправностей в других частях летательного аппарата (в системе управления двигателями, навигационной системе, гиростабилизированной платформе и др.) и расширена. Необходимым условием расширения классификации неисправностей является наличие в рассматриваемой математической модели движения описания работы прибора, в котором может произойти неисправность, не предусмотренная классификационным списком.

Предлагаемая классификация неисправностей, не претендуя на законченность, позволит в последующем осуществить логические построения, решающие задачу дифференциальной диагностики.

Информационное содержание и силомоментные воздействия системы управления в (2.1) обеспечиваются датчиками. Современные системы управления имеют модульную структуру, состоящую из конечного набора датчиков (блоков). Датчиком назовем любой прибор из цепочки приборов, перерабатывающих информацию о траекторном движении летательного аппарата, начиная от измерительных или алгоритмических приборов и кончая рулевыми исполнительными устройствами, каждый из которых имеет входные и выходные сигналы и самостоятельную функциональную цель.

Неисправностью будем называть такое изменение функционального состояния в системе датчиков управления, которое обуславливает недопустимые отклонения летательного аппарата (2.1) от цели управления, то есть от программного движения.

Причины возникновения неисправности рассматриваться не будут. Нас главным образом будет интересовать неисправность самого датчика, как одного из приборов системы управления. В силу сказанного, система управления движением объекта (2.1) будет обладать конечным набором возможных неисправностей. Эти неисправности, благодаря имеющемуся инженерному опыту или в силу интуитивных соображений, можно априори зафиксировать и, исходя из механических представлений, математически описать.

Определим, теперь, класс возможных неисправностей в системе управления движением объекта, описываемым дифференциальными уравнениями (2.1), то есть определим список конкретных возможных неисправностей в системе датчиков управления, которые могут обуславливать недопустимые отклонения объекта.

1) Отказ. Отказом будем называть отсутствие сигнала на выходе датчика. В математической модели движения объекта и его системы управления отказ можно моделировать обнулением соответствующего коэффициента при выходном сигнале датчика или выходного сигнала датчика. Иначе говоря, поступающая с датчика информация в модели не должна учитываться.

Например, если в третьем уравнении (2.1) слагаемое

$$\delta_{11} = c_{11}(t)u_1 \tag{2.4}$$

в некоторый момент времени t_0 становится равным нулю, то есть $\delta_{11}(t) = 0$, $t \geq t_0$, то это будет означать что отказал датчик, формирующий сигнал (2.4). Из (2.4) следует, что отказ может быть обусловлен или отказом прибора, формирующего оператор $c_{11}(t)$ при сигнале, поступившем на вход датчика, или исчезновением самого сигнала u_1 в датчике, или того и другого одновременно. Объединение этих возможностей и будет определять отказ формирующего сигнал (2.4) датчика, то есть отсутствие сигнала на его выходе.

2) Сбой. Сбоем будем называть выход сигнала датчика за пределы допустимых номинальных значений. Сбой датчика может быть обусловлен недопустимым изменением некоторого параметра, характеризующего этот датчик. В уравнениях движения это можно моделировать выбором закона изменения соответствующего параметра. Если закон изменения параметра зависит от времени, то это значит, что рассматриваемая система перестает быть автономной. В реальных условиях закон изменения параметра может быть и не известен.

Например, если сигналу δ_{11} с выхода датчика, формирующего выражение (2.4), предписано находиться в пределах $\underline{\delta_{11}} \le \delta_{11} \le \overline{\delta_{11}}$, а изменение $c_{11}(t)$, или u_1, или $c_{11}(t)u_1$ в процессе движения таково, что δ_{11} выходит за пределы интервала $[\underline{\delta_{11}}, \overline{\delta_{11}}]$, то это будет означать сбой датчика, формирующего сигнал (2.4).

3) Заклинивание. Заклиниванием будем называть неисправность, при которой значение выходного сигнала датчика в некоторый момент времени фиксируется и в дальнейшем не изменяется во времени. К этому отнесем и неисправности, при которых около некоторого фиксированного положения совершаются незатухающие, например, синусоидальные колебания, то есть происходит заклинивание с наложением некоторых колебаний.

В качестве примера можно привести заклинивание руля или колебания руля около некоторого фиксированного положения. Заклинивание руля в нейтральном (нулевом) положении эквивалентно отказу канала управления этим рулем.

4) Активный отказ. Активным отказом будем называть неисправность, при которой сигнал датчика скачкообразно изменяется до определенного максимально возможного значения и фиксируется по величине и во времени.

5) Нарушение симметрии. Это неисправность, при которой происходит сдвиг начала отсчета сигнала датчика. В частности, это может быть сдвиг допустимой характеристики исполнительного органа, то есть характеристика исполнительного органа перестает принадлежать к классу допустимых функций (2.3).

Рассмотренные неисправности (**1)–5)**) образуют класс возможных неисправностей.

Любая неисправность из выделенного класса не приводит к изменению фазового пространства модели объекта. Модели объекта с той или иной неисправностью из класса возможных отличаются лишь структурой уравнений движения. Если в заранее неизвестный момент времени произойдет одна из неисправностей из класса возможных, то траектория исходной системы изменится и будет непрерывно продолжаема траекторией системы с происшедшей неисправностью. Некоторые из неисправностей могут доставлять неустойчивость движению объекта.

Рассмотрим некоторый датчик из набора датчиков управляющей системы. Этому датчику можно поставить в соответствие одну, две или более неисправностей из выбранного класса.

Рассмотрим теперь два любых различных датчика из набора датчиков в управляющей системе движением объекта. Различными будем называть датчики, перерабатывающие траекторную информацию разной природы, например, траекторную информацию разной размерности. Каждому из таких датчиков можно поставить в соответствие определенные неисправности из выбранного класса. Реакция системы на эти неисправности будет различной.

Для примера рассмотрим первую строку произведения матриц $C(t)u$, взятой из уравнений (2.1):

$$c_{11}(t)u_1 + c_{12}(t)u_2 + \ldots + c_{1p}(t)u_p.$$

Каждая из входных координат $u_1, u_2, \ldots, u_p$ вырабатывается соответствующим датчиком, содержит свою присущую только ей физическую информацию, в некотором смысле имеет свою размерность, то есть по своему воздействию на движение системы все входные координаты различны между собой. Коэффициенты $c_{11}(t), c_{12}(t), \ldots, c_{1p}(t)$, вырабатываемые операторами, также в некотором смысле имеют свою размерность и различны между собой.

Слагаемые $c_{11}(t)u_1, c_{12}(t)u_2, \ldots, c_{1p}(t)u_p$ в системе управления содержат различную физическую информацию и их влияние на движение системы (2.1) будет различным.

Функции остальных элементов модели системы управления также различны. Влияние нарушений в работе различных датчиков и операторов, формирующих управление системой, на движение системы также будет различным. Поэтому и влияние различных неисправностей из класса возможных на траекторное движение системы будет различным.

Всему конечному набору различных датчиков системы управления движением объекта можно поставить в соответствие конечный набор неисправностей из класса возможных. Такой априорный набор неисправностей будем в дальнейшем называть опорным, а неисправности, входящие в этот набор, – опорными неисправностями.

Таким образом, конечному набору попарно (в совокупности) различных датчиков системы управления движением объекта можно поставить в соответствие конечный набор Н опорных неисправностей

$$\mathrm{H} = \left\| \mathrm{H}_j \right\|_{j=1}^{l} \qquad (2.5)$$

из класса возможных.

В дальнейшем будут изучаться движения, соответствующие каждой из неисправностей (2.5) H_j, $j = 1,\ldots,l$ или нескольким из них, происходящие в геометрической фигуре, представляющей собой плоскости (H_m, t), $m = 1,\ldots,l$, связанные с осью времени t и осями H_m, $m = 1,\ldots,l$, исходящими из единого начала на оси времени t. Изучаться будут также влияние этих движений на движение рассматриваемой управляемой динамической системы, а также диагностика этих движений.

В заключение сделаем следующее предположение, оправдываемое тем, что процесс обнаружения неисправности ограничен малым временем.

От потока неисправностей будем требовать следующее.

Пусть распределение интервала времени между последовательными неисправностями системы (2.1) таково, что вероятность более чем одной неисправности на интервалах времени обнаружения пренебрежимо мала. Это предположение позволит нам детально поставить задачу диагностики, хотя в принципе это предположение, как будет показано в дальнейшем, не обязательно. Важно, чтобы происшедшая в системе (2.1) неисправность попала в апостериорный список $l_1 < l$ неисправностей.

В следующей главе проводится математическое моделирование опорных неисправностей в соответствии с введенной их классификацией. Эту главу следует рассматривать как простейшую иллюстрацию предлагаемого подхода.

ГЛАВА 3

Математическое моделирование опорных неисправностей

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.1) и дадим математическое моделирование определенных в предыдущем пункте опорных неисправностей из класса возможных, которые могут произойти в системе управления

$$\xi' = \Phi(\delta), \ \ \delta = C(t)u + \varphi(\sigma), \ \ \sigma = E(t)s. \tag{3.1}$$

1) Отказ. В силу данного в предыдущей главе определения, отказ датчика может быть обусловлен исчезновением сигнала, поступившего на вход датчика, или отказом прибора, формирующего оператор при входном сигнале, или и тем и другим одновременно. Таких комбинаций много. Выделим из этого множества и математически опишем только следующие:

а) обращение в ноль одной из составляющих ξ_i (i = 1,2,3) трехмерного вектора ξ, что означает отказ одного из трех каналов управления (3.1);

б) обращение в ноль одного из коэффициентов матриц

$$C(t) = (c_{ij}(t)), E(t) = (e_{ik}(t));$$

$$i = 1,2,3, \ j = 1,\ldots,p, \ k = 1,\ldots,q,$$

которые формируются из физических параметров и удовлетворяют условиям устойчивости рассматриваемой системы.

При этом, как обычно, система (в том числе датчик), реагирующая только на уже поступивший на вход сигнал, устойчива, если любому ограниченному входному сигналу соответствует ограниченный сигнал на выходе;

в) обращение в ноль одной из составляющих векторов u и s в (3.1).

Таким образом, будем рассматривать объединение следующих возможных отказов:

$$\begin{aligned} \xi_i &= 0, i = 1, 2, 3, \\ c_{ij} &= 0, u_j = 0, j = 1, \ldots, p, \\ e_{ik} &= 0, s_k = 0, k = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В (3.2) включаются и обрывы локальных обратных связей.

2) Сбой. В силу определения, данного в предыдущей главе, сбой характеризуется отклонением значения того или иного коэффициента (параметра) за пределы допустимых номинальных значений. Если учесть условия (2.2), то это будет соответствовать тому, что действительное значение одного из коэффициентов c_{ij}, e_{ik} матриц $C(t)$, $E(t)$ в (3.1) окажется за пределами ограничивающих его констант, то есть сдвинется влево или вправо от этих констант. Запишем это в виде объединения следующих возможностей:

$$\begin{aligned} & c_{ij} \notin [\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}], \text{ то есть } c_{ij} \in (0, \underline{c}_{ij}) \text{ или} \\ & c_{ij} \in (\overline{c}_{ij}, +\infty), i = 1, 2, 3, \\ & e_{ik} \notin [\underline{e}_{ik}, \overline{e}_{ik}], \text{ то есть } e_{ik} \in (0, \underline{e}_{ij}) \text{ или} \\ & e_{ik} \in (\overline{e}_{ik}, +\infty), j = 1, \ldots, p; k = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Точно также сбоем является отклонение от номинального значения одного из параметров функций $\Phi(\delta)$ или $\varphi(\sigma)$. Например, действительное значение параметра, характеризующего максимальное значение одной из указанных функций, увеличивается или уменьшается.

3) Заклинивание. В силу определения, заклинивание математически можно моделировать следующим образом:

$$\xi_i(t) \equiv \xi_i^{\varphi x} = const, i = 1,2,3;$$
$$u_j(t) \equiv u_j^{\varphi x} = const, \ j = 1,\dots,p, t_0 \le t \le T; \qquad (3.4)$$
$$s_k(t) \equiv s_k^{\varphi x} = const, k = 1,\dots,q,$$

то есть в процессе движения в некоторый момент времени на отрезке $[t_0, T]$ одна из координат $\xi_i(t)$, или $u_j(t)$, или $s_k(t)$ фиксируется (заклинивается) и в дальнейшем не изменяется во времени.

Если на постоянные значения (3.4) могут накладываться некоторые колебания, например, синусоидальные колебания постоянной амплитуды и частоты, то такое заклинивание можно описать следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} \xi_i(t) = \xi_i^{\varphi x} + a_{\xi_i}^{\varphi x} \sin(\omega_{\xi_i}^{\varphi x} t + \varphi_{\xi_i}^{\varphi x}), \\ u_j(t) = u_j^{\varphi x} + a_{u_j}^{\varphi x} \sin(\omega_{u_j}^{\varphi x} t + \varphi_{u_j}^{\varphi x}), \\ s_k(t) = s_k^{\varphi x} + a_{s_k}^{\varphi x} \sin(\omega_{s_k}^{\varphi x} t + \varphi_{s_k}^{\varphi x}); \\ i = 1,2,3, \ j = 1,\dots,p, \ k = 1,\dots,q; \ t_0 \le t \le T. \end{gathered} \qquad (3.5)$$

4) Активный отказ, то есть мгновенное изменение в некоторый момент времени t на отрезке $[t_0, T]$ одной из координат, формирующих систему управления, до максимально возможного значения и заклинивания, математически будем моделировать следующим образом:

$$\xi_i(t) \equiv \xi_i^{\max} = const, i = 1,2,3,$$
$$u_j(t) \equiv u_j^{\max} = const, \ j = 1,\dots,p, t_0 \le t \le T, \qquad (3.6)$$
$$s_k(t) \equiv s_k^{\max} = const, k = 1,\dots,q.$$

5) Нарушение симметрии. Математически нарушение симметрии можно моделировать сдвигом начала отсчета сигнала в процессе его формирования датчиком в плоскости одной из функций $\xi_i(t)$, $u_j(t)$, $s_k(t)$. Это можно обеспечить, например, введением запаздывания или упреждения, смещения вдоль оси ординат или тем и другим одновременно. В частности, нарушение симметрии в работе исполнительных органов, движение которых описывается в (2.1) характеристиками $\Phi(\delta,t)$ и $\varphi(\sigma,t)$, моделируется нарушением условий (2.3):

$$\begin{aligned}
&\Phi_h(\delta_1,\delta_2,\delta_3,t)\neq 0, \text{ если } \delta_h=0\\
&\quad\text{или для некоторых } \delta_h=\delta_h^*\neq 0, \delta_h^*\Phi(\delta_1^*,\delta_2^*,\delta_3^*,t)\leq 0,\\
&\varphi_h(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,t)\neq 0, \text{ если } \sigma_h=0\\
&\quad\text{или для некоторых } \sigma_h=\sigma_h^*\neq 0, \sigma_h^*\varphi(\sigma_1^*,\sigma_2^*,\sigma_3^*,t)\leq 0.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Соотношения (3.7) описывают ситуации, при которых происходит симметричный сдвиг характеристик исполнительных органов в плоскости функций $\Phi_h(\delta_1,\delta_2,\delta_3,t)$ или $\Phi_h(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3, t)$.

В заключение этой главы отметим следующее. В настоящей работе не рассматриваются причины возникновения неисправностей, а только их последствия; все формулируется применительно к одиночным неисправностям, но могут, как это и делается в конкретных задачах, рассматриваться и более сложные комбинации нарушений.

Таковы простейшие представления о математических моделях опорных неисправностей. Предлагаемое моделирование опорных неисправностей необходимо рассматривать только как первоначальный простейший подход к сложной и ответственной задаче диагностики динамических систем, однако требующий избыточную информацию о работе приборов, то есть более глубокого понимания механики динамических процессов, происходящих в этих приборах. Этот подход позволяет более осознанно подойти к задаче диагностики, дать строгую математическую постановку этой задачи и указать алгоритмы ее решения.

Перейдем теперь, к определению и описанию окрестностей опорных неисправностей.

ГЛАВА 4

Окрестности опорных неисправностей

Как отмечалось в главах 1 и 2, все процессы в рассматриваемой системе (2.1) предполагаются протекающими непрерывно. Если в некоторый заранее неизвестный момент времени t_0 в системе (2.1) возникнет некоторая неисправность из списка (2.5) или неисправность, не предусмотренная списком (2.5), но «близкая» к какой-нибудь из списочной неисправности, то траектория системы (2.1) в последующее время при $t \geq t_0$ будет непрерывно продолжаемой.

Очевидно, что в силу непрерывности процессов, если неучтенная списком (2.5) непредвиденная неисправность произойдет в «близкой» к $Н_j$ области, то траектории системы (2.1) с этими неисправностями будут мало отличимы.

Введем понятие окрестности опорной неисправности.

Определение. *Окрестностью* $О_j$ *(областью влияния) опорной неисправности* $Н_j$ *из (2.5) назовем множество точек таких, что если в точке окрестности* $О_j$*, включая точку* $Н_j$*, произойдет не предусмотренная списком (2.5) неисправность, развивающаяся по заранее неизвестному закону, то траектории системы (2.1) с этой неисправностью и с неисправностью* $Н_j$ *из (2.5) будут «мало» отличаться, и она будет распознаваема как одна из опорных неисправностей (2.5).*

Неисправность, не предусмотренная списком (2.5), но «близкая» к списочной неисправности $Н_j$ из окрестности $О_j$, то есть такая, при возникновении которой траектории системы будут «мало» отличаться от траекторий системы со списочной неисправностью $Н_j$, будет распознаваться алгоритмом, решающим задачу обнаружения неисправности, как списочная неисправность H_j; если же не предусмотренная списком (2.5) неисправность произойдет в области пересечения окрестностей O_j, она может быть обнаружена как одна из списочных неисправностей, окрестности которых образуют область пересечения. Это не должно считаться проблемой. Интерес, главным образом, представляет обнаружение неисправного датчика, а не конкретной неисправности в этом датчике.

Теперь можно дать более конкретные определения окрестностей неисправностей из классификационного списка главы 2 и рассмотреть простейшие математические модели этих окрестностей.

1) Окрестность отказа. Окрестностью отказа датчика назовем множество точек, распределенных во времени, такое, что любая возникшая и развивающаяся в этом множестве по неизвестному нам закону неисправность, возможно ведущая к отказу, может быть диагностирована как отказ.

Окрестности отказов (3.2) математически можно моделировать как полосы во времени, ограниченные сверху и снизу максимально и минимально возможными значениями координат ξ_i, u_j, s_k, а для коэффициентов c_{ij} и e_{ik} – максимально возможными их значениями и осью времени t:

$$\begin{gathered}\xi_i \in [\underline{\xi_i}, \overline{\xi_i}],\ \underline{\xi_i} \le \overline{\xi_i},\ i = 1,2,3,\\ c_{ij} \in [\underline{c_{ij}}, \overline{c_{ij}}],\ u_j \in [\underline{u_j}, \overline{u_j}],\ j = 1,\ldots,p,\\ e_{ik} \in [\underline{e_{ik}}, \overline{e_{ik}}],\ s_k \in [\underline{s_k}, \overline{s_k}],\ k = 1,\ldots,q.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Определенные таким образом окрестности (4.1) отказов (3.2) могут пересекаться только по прямым на оси времени t.

2) Окрестность сбоя. Окрестностью сбоя будем называть множество точек, распределенных во времени, охватывающее множество допустимых значений выходного сигнала датчика и такое, что любая возникшая и развивающаяся во времени в этом множестве неисправность может быть диагностирована по априори фиксированному сбою датчика.

В соответствии с (2.2) и (3.3) окрестности сбоев математически можно описать как полосы вдоль оси времени, ограниченные, соответственно, значениями констант $\underline{c_{ij}}, \underline{e_{ik}}, \overline{c_{ij}}, \overline{e_{ik}}$ и нижними $\underline{\underline{c_{ij}}}, \underline{\underline{e_{ik}}}$ и верхними $\overline{\overline{c_{ij}}}, \overline{\overline{e_{ik}}}$ границами, то есть

$$\begin{gathered} \underline{\underline{c_{ij}}} \in (0, \underline{c_{ij}}],\ \underline{\underline{e_{ik}}} \in (0, \underline{e_{ik}}],\ i = 1,2,3, \\ \overline{\overline{c_{ij}}} \in [\overline{c_{ij}}, \infty),\ \overline{\overline{e_{ik}}} \in [\overline{e_{ik}}, \infty),\ j = 1,\ldots,p,\ k = 1,\ldots,q. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Определенные таким образом окрестности (4.2) сбоев (3.3) не пересекаются между собой, то есть окрестности сбоев различных датчиков также не пересекаются.

Окрестности отказа и сбоя для данного датчика, вообще говоря, могут не пересекаться, но могут и пересекаться. В последнем случае непредвиденные неисправности, происшедшие в области пересечения, могут быть диагностированы или как отказ, или как сбой, или как отказ и сбой одновременно. В любом случае неисправный датчик будет диагностирован алгоритмом обнаружения неисправностей.

3) Окрестность заклинивания. Окрестность заклинивания можно выбрать в виде полосы, ограниченной сверху прямой $\xi_i^+(t)$ (или прямыми $u_j^+(t), s_k^+(t)$) и снизу прямой $\xi_i^-(t)$ (или прямыми $u_j^-(t), s_k^-(t)$), включающей в себя соответствующий режим (3.4) или (3.5).

4) Окрестность активного отказа (3.6) может быть описана как полуполоса, ограниченная сверху одним из значений $\xi_i^{\max}, u_j^{\max}, s_k^{\max}$, а снизу некоторой прямой $\xi_i^{(-)}, u_j^{(-)}, s_k^{(-)}$, соответственно, или полуполосой, ограниченной снизу одним из значений $\xi_i^{\min}, u_j^{\min}, s_k^{\min}$, а сверху некоторой прямой $\xi_i^{(+)}, u_j^{(+)}, s_k^{(+)}$, соответственно.

5) Окрестность нарушения симметрии можно моделировать окружностью с центром в точке сдвига радиуса r_{ξ_i}, r_{u_j} или r_{s_k}, которая перемещается вместе с точкой сдвига, или, что то же самое, полосой, шириной $2r_{\xi_i}, 2r_{u_j}$ или $2r_{s_k}$, соответственно.

Приближенные границы рассмотренных в настоящей главе окрестностей возможных опорных неисправностей априори могут быть найдены, если это необходимо, методом Монте-Карло или другими методами.

В дальнейшем окрестности O_j опорных неисправностей H_j из априорного списка (2.5) считаются открытыми множествами.

Определение. *Опорные неисправности (2.5) из класса возможных, окрестности которых не пересекаются или пересекаются только вдоль прямых по оси времени, назовем невырожденными.*

Таким образом, конечному набору попарно (в совокупности) различных датчиков системы управления (3.1) движением объекта, описываемым дифференциальными уравнениями (2.1), можно поставить в соответствие конечный набор (2.5) опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.

Если для конкретного датчика некоторые окрестности неисправностей, которыми он представлен в наборе (2.5), пересекаются, то это, как уже отмечалось, не следует считать проблемой. Важно уметь диагностировать датчик, в котором произошла неисправность.

Определение. *Диагностическим пространством назовем совокупность датчиков, которой становится в соответствие набор возможных опорных неисправностей* H_j *с их окрестностями* O_j*, подвергающихся диагностированию посредством опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.*

В заключение рассмотрим математическую структуру всего диагностического пространства:

$$(\mathrm{M}; O_1, O_2, \ldots, O_l; A_1, A_2, A_3), \tag{4.3}$$

где M – множество неисправностей $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_l$ из (2.5) вместе с их окрестностями $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_l$.

Аксиомы A_1, A_2, A_3 определяются следующим образом:

$$A_1 : \forall \mathrm{H}_j \in \mathrm{M} \exists \mathrm{O}_j (\mathrm{H}_j \subset \mathrm{O}_j);$$

$$A_2 : \forall \mathrm{O}_j \exists \mathrm{H}_j (\mathrm{H}_j \subset \mathrm{O}_j);$$

$$A_3 : \mathrm{H}_j \subset \mathrm{O}_j \cap \mathrm{O}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \mathrm{O}_\mu (\mathrm{H}_j \subset \mathrm{O}_\mu \subset \mathrm{O}_j \cap \mathrm{O}_k \vee \mathrm{O}_\mu \subset \mathrm{O}_j \cup \mathrm{O}_k).$$

Аксиома A_1 утверждает, что окрестности O_j, являющиеся подмножествами множества М, покрывают все М, а из аксиомы A_2 следует, что эти окрестности не пусты.

Аксиома A_3 позволяет обеспечить непрерывный процесс приближения к элементу H_j:

$$\mathrm{H}_j = \lim_{\mu \to \infty} \mathrm{O}_\mu \Leftrightarrow \forall \mathrm{O}_\mu \exists \overline{M} (\mu > \overline{M} \Rightarrow \mathrm{H}_j \subset \mathrm{O}_\mu),$$

каждая окрестность O_μ которого содержит H_j и «близкие» к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе (2.5) неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях O_j, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей (2.5).

Если же под элементом x понимать не только событие H_j, но и непредвиденное событие (не включенное в список Н возможных неисправностей (2.5)), которое может произойти в любой точке М и которое требуется диагностировать посредством H_j, то аксиомы математической структуры диагностического пространства (4.3) могут быть записаны в следующем виде:

$$A_1 : \forall x \in \mathrm{M} \exists \mathrm{O}_i (x \in \mathrm{O}_i),$$

то есть окрестности покрывают все М;

$$A_2 : \forall \mathrm{O}_i \exists x (x \in \mathrm{O}_i),$$

то есть окрестности не пусты ;

$$A_3 : x \in \mathrm{O}_i \cap \mathrm{O}_j \Rightarrow \exists \mathrm{O}_k (x \in \mathrm{O}_k \subset \mathrm{O}_i \cap \mathrm{O}_j \vee \mathrm{O}_k \subset \mathrm{O}_i \cup \mathrm{O}_j),$$

то есть окрестности можно измельчать и обеспечивать процесс приближения к элементу x. Предел последовательности $\{\mathrm{O}_k\}$ можно определить как элемент $x = \lim\limits_{k \to \infty} \mathrm{O}_k$, каждая окрестность $\mathrm{O}_j(x)$ которого содержит H_j и «близкие» к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе (2.5) неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях $\mathrm{O}_j(\mathrm{H}_j)$, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей (2.5):

$$x = \lim_{k \to \infty} \mathrm{O}_k \Leftrightarrow \forall \mathrm{O}_k(x) \exists \overline{K} (k > \overline{K} \Rightarrow x \in \mathrm{O}_k, \mathrm{H}_j \subset \mathrm{O}_k, j = 1, \ldots, l).$$

Математическая структура диагностического пространства (4.3) позволяет обеспечить ситуацию, при которой решение системы (2.1) и этой системы с неисправностями (2.5) в системе управления (3.1) с одинаковыми начальными условиями x^0 из некоторого ограниченного пространства будут отличаться (различимы) друг от друга, а решение системы (2.1) с опорной неисправностью Н_j из (2.5) и с не предусмотренной списком (2.5) (непредвиденной) неисправностью из окрестности О_j этой опорной неисправности с одинаковыми начальными условиями x^0 будут «близкими», то есть «мало» отличаться друг от друга, и они могут быть диагностированы как опорные неисправности.

Это во всяком случае будет справедливо для непересекающихся окрестностей О_j, $j = 1, \ldots, l$, или окрестностей, пересекающихся только вдоль прямых по оси времени.

Перейдем теперь к постановке задачи диагностики.

ГЛАВА 5

Задача дифференциальной диагностики

Дифференциальная диагностика алгоритмическим способом решает задачу обнаружения неисправности, возникшей в управляемой динамической системе, вычислительными средствами, исходя из знания математической модели движения системы, некоторой информации о возможных неисправностях в системе и имеющейся внешнетраекторной информации.

Как уже отмечалось, задачу дифференциальной диагностики целесообразно разрабатывать одновременно с проектированием конкретной системы. В частности, разработку задачи диагностики системы управления движением объекта целесообразно совместить с синтезом системы управления.

Будем рассматривать объекты, движение которых может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$x' = f(x,u,t) = f_0(x,t), \tag{5.1}$$

где x – вектор $(n \times 1)$, характеризующий отклонение от режима, предписанного целью управления. Относительно управлений $u(t) = \|u_\nu(t)\|_{\nu=1}^{m}$ будем предполагать, что они принимают значения из ограниченной замкнутой области U, то есть

$$u(t) \in U. \tag{5.2}$$

Цель управления будет формализовываться следующим тождеством:

$$x(t) \equiv 0. \tag{5.3}$$

Рассмотрим, далее, функцию Ляпунова $v(x,t) \geq 0$ и следующую пару [24]

$$\{v(x,t); u(x,t)\}, \tag{5.4}$$

где $u(x,t) \in U$.

Пара (5.4) позволяет синтезировать [24] допустимое управление, удовлетворяющее (5.2), доставляющее асимптотическую устойчивость решению (5.3) нелинейной системы (5.1).

Пусть, кроме того, известен конечный набор (2.5) опорных невырожденных неисправностей

$$\mathrm{H} = \left\| \mathrm{H}_j \right\|_{j=1}^{l} \tag{5.5}$$

в системе управления объектом, движение которого описывается уравнениями (5.1) и, значит, известен соответствующий набор функций управления

$$u = \left\| u_j(x,t) \right\|_{j=1}^{l}. \tag{5.6}$$

Набор функций (5.6) не изменяет фазового пространства системы (5.1); функции, его составляющие, отличаются той или иной неисправностью и не обязательно удовлетворяют в области параметров системы (5.1) условиям асимптотической устойчивости решения (5.3), определяемым функцией $v(x,t)$ в (5.4).

Конечному набору управления (5.6) поставим в соответствие следующий набор систем дифференциальных уравнений:

$$x' = f_j(x,t),\ j = 1,\ldots,l, \tag{5.7}$$

где $f_j(x,t)$ – соответствующие неисправностям (5.5) в управлениях (5.6) известные вектор-функции размеров $(n \times 1)$, отличные друг от друга и от функции $f_0(x,t)$ в (5.1).

Модели (5.1) и (5.7) принадлежат одному и тому же фазовому пространству и отличаются лишь структурой. Если в заранее неизвестный момент времени функция $f_0(x,t)$ в (5.1) заменяется на одну из функций $f_j(x,t),\ j=1,\ldots,l,$ из (5.7), то траектория системы (5.1) непрерывно продолжается одной из траекторий системы (5.7).

Задача дифференциальной диагностики может быть сформулирована следующим образом.

Пусть известны дифференциальные уравнения (5.1) и (5.7) и значение фазового вектора в начальный момент времени $x(t_0)$.

Требуется построить функционал

$$S_j = \Phi(x(t), x(t_0), f_j(x,t), \tau - \tau_0),\ j = 0,\ldots,l,$$

решающий задачу дифференциальной диагностики, то есть задачу однозначного распознавания возникшей в диагностическом пространстве (4.3) системы (5.1) неисправности по априорному набору (5.5) опорных невырожденных неисправностей. Данная задача решается минимизацией по *j*, то есть осуществлением процесса обработки выходной информации в силу уравнений (5.1) и (5.7) по входной информации о состоянии системы в момент времени t_0 и последующего слежения за траекторией объекта (5.1) на интервале времени $[\tau_0, \tau]$, где $\tau - \tau_0$ – время диагностики.

В дальнейшем будет лишь показано, что множество функционалов и алгоритмов, решающих поставленную задачу, не пусто. Будет дано замкнутое решение задачи. При этом будем исходить из того, что задачу дифференциальной диагностики управляемых динамических систем и, в частности, задачу диагностики систем управления движением этих систем можно представить в виде двух самостоятельных последовательно решаемых задач: задачи контроля и задачи диагностирования.

Задача контроля устанавливает критерий наличия неисправности в системе, а задача диагностирования устанавливает критерий поиска и обнаружения датчика, в котором произошла неисправность при условии, что известен априорный список возможных опорных неисправностей.

В настоящей работе применительно к объектам, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, предлагаются простые подходы решения задач дифференциальной диагностики управляющих систем этих объектов, опирающиеся на знание законов классической механики и основанные на сравнении действительного и возможных состояний объекта. Эти подходы являются естественным продолжением дифференциальной теории управления движущимися объектами, работающими в идеальных условиях и в условиях воздействия шумов, и требуют более глубокого понимания и математического описания динамики отдельных узлов системы управления и ее возможных состояний.

При этом заметим, что в действительности системы (5.1) и (5.7) являются системами с неполной информацией, и неисправности в системе (5.1) могут возникать и развиваться по законам, которые не предусмотрены системами (5.7), а начальные условия систем (5.1) и (5.7) в общем случае определены ограниченными множествами; поэтому при решении задач контроля и диагностирования на этапе проектирования на уровне математических моделей и программ целесообразно использовать статистический метод теории вероятностей и получать, таким образом, детерминированный аналог решения задачи диагностики, который и должен реализовываться на борту реального объекта.

Перейдем теперь к постановке и решению задач контроля и диагностирования.

ГЛАВА 6

Задача контроля

Рассмотрим динамическую систему с полностью наблюдаемым фазовым вектором x, описываемую уравнениями

$$x' = f_0(x,t), \tag{6.1}$$

на временном отрезке $[0,T]$. Будем полагать, что множество X^0 начальных значений x^0 фазового вектора x известно и ограничено. Будем считать также, что в момент времени t_0 $(0 \le t_0 \le T)$ правая часть уравнения (6.1) заменяется на $f_j(x,t)$:

$$x' = f_j(x,t), \tag{6.2}$$

то есть, в терминах предыдущей главы, происходит j-я неисправность из списка l неисправностей, возникновение которых возможно в системе управления движением динамического объекта.

Введем в рассмотрение вектор $y(t)$, координаты которого представляют собой подмножество координат фазового вектора $x(t)$, то есть

$$y(t) = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}),\ m \le n. \tag{6.3}$$

Допустим, что существует такой вектор $y(t)$, называемый вектором контроля, что наблюдение за его компонентами позволит судить об исправности или неисправности системы управления объекта, то есть о наличии в правой части уравнений (6.1) либо функции f_0, либо одной из функций f_j $j = 1,\ldots,l$, из (6.2).

Задача контроля может быть решена с помощью различных по множеству координат векторов контроля $y(t)$. Поэтому естественно стремиться к тому, чтобы вектор контроля был меньшей размерности. Для систем со сложными нелинейными функциями f_j в (6.2) правильный выбор компонент вектора $y(t)$ подтверждается моделированием возникновения различных неисправностей и определением факта наличия в системе управления неисправности по наблюдению за вектором $y(t)$. При удовлетворительных результатах определения факта неисправности конкретный набор компонент фазового вектора x принимается за вектор контроля.

Пусть даны уравнения (6.1), множество X^0 начальных условий x^0, время T и набор функций f_j, $j=1,\ldots,l$, в (6.2). Пусть существует поверхность π_k в пространстве координат вектора $y(t)$ такая, что вектор контроля, составленный из компонент решения уравнения (6.1) на отрезке времени $[0,T]$, не выйдет на поверхность π_k, а вектор контроля $y(t)$, составленный из соответствующих компонент решений x любой из систем (6.2) с начальными условиями $x^0 = x(t_0) \in X^0$, выйдет на π_k в момент времени t_k $(t_0 \le t_k \le T)$.

Таким образом, критерием наличия неисправности в системе управления объекта, описанного уравнениями (6.1), будет выход вектора контроля (6.3) на поверхность π_k в некоторый момент времени $t_k < T$. Назовем поверхность π_k поверхностью контроля.

Такая поверхность контроля π_k является, вообще говоря, функцией начальных условий x^0 и набора функций f_j, $j=0,\ldots,l$. Построение такой поверхности контроля π_k в случае нелинейных уравнений движения (6.1) и (6.2) аналитически является трудной задачей. Однако, при знании функций f_j, $j=0,\ldots,l$, и относительной малости области начальных условий X_0 возможно построение поверхности π_k методом статистических испытаний.

В дальнейшем рассмотрим способы построения некоторых поверхностей контроля в той постановке и в той последовательности, в которой они возникали при решении задач дифференциальной диагностики.

Сфера контроля. Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x' = f_0(x,t),\ x(t_0) = x^0 \in S^0,\ t_0 \le t \le T_0, \tag{6.4}$$

где x – n-мерный фазовый вектор функционального состояния рассматриваемой системы,

$f_0(x,t)$ – определенная и непрерывная вектор-функция,

S^0 – известная ограниченная с центром в нуле радиуса R^0 сфера начальных значений,

T_0 – конечное время.

Предположим, что система (6.4) удовлетворяет условиям существования и единственности решений. Пусть, кроме того, тривиальной решение системы (6.4) асимптотически устойчиво, а сама система описывает желаемое движение, которое обеспечивается во времени в рассматриваемой области пространства при помощи координат $u(t)$ системы управления (СУ). Структура координат $u(t)$ и их параметры выбираются, исходя из цели управления (5.3) и условий устойчивости системы (6.4), полученных, например, с помощью функции Ляпунова $v(x,t) \ge 0$, то есть, осуществляя синтез управления с помощью пары (5.4).

Систему (6.4) удовлетворяющую перечисленным условиям, обычно называют *исправной.*

Пусть, далее, в соответствии с ранее введенной классификацией неисправностей, в СУ движением объекта (3.1) может произойти l неисправностей (5.5). Формально определим неисправность следующим образом. Априори известно, что в некоторый случайный момент времени t правая часть системы (6.4) изменяется каким-либо из l способов. При этом система (6.4) заменяется на одну из систем следующего вида:

$$\begin{gathered} x' = f_j(x,t),\, x(t_0) = x^0 \in S^0, \\ t_0 \le t < T_0,\ j = 1,\ldots,l. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Траектория системы (6.4) после возникновения неисправности непрерывно продолжается траекторией одной из систем (6.5).

Введем в рассмотрение вектор контроля (6.3). Задача контроля может решаться с помощью различных векторов контроля.

Предположим, что наблюдение за компонентами выбранного вектора контроля (6.3) дает возможность судить о том, что система (6.5) исправна, или в этой системе произошла неисправность.

Задачу контроля переформулируем следующим образом.

В фазовом пространстве вектора контроля $y(t)$ требуется построить сферу S_R радиуса R такую, чтобы фазовые траектории вектора контроля при интегрировании системы (6.4) с начальными условиями из выбранной сферы S^0 в течение времени $t < T_0$ лежали внутри S_R, а траектории систем (6.5) – пересекались с S_R.

Пусть система (6.4) находится в малой окрестности начала координат, а неисправности (5.5) таковы, что они доставляют неустойчивость системе (6.4) [8]. В случайный момент времени происходит неисправность, то есть непрерывный переход на траекторию одной из систем (6.5), которая выходит из окрестности нуля.

В этом случае, проводя розыгрыш начальных условий x^0 из ограниченного множества S^0 и с этими начальными условиями интегрируя систему (6.4) на интервале времени $[t^0, T^0]$, можно построить m ансамблей фазовых портретов координат вектора контроля $y(t)$. За сферу контроля S_R можно выбрать сферу, охватывающую объем ансамблей. Если через a обозначить длину отрезка от начала координат до максимально удаленной точки этого объема, то радиус R сферы S_R выбирается так, чтобы $R > a$.

Пусть, далее, система (6.4) находится в малой окрестности нуля под воздействием малого шума, который зададим функцией плотности $F_1(x)$ отклонений системы. Радиус R сферы S_R в этом случае выбирается так, чтобы

$$\int_{\|y\|>R} F_1(x)dx << 1,$$

то есть чтобы выход $y(t)$ за сферу означал, что в системе (6.4) произошла неисправность.

Изложенный подход позволяет решать задачу контроля и в случае, когда среди систем (6.5) имеются устойчивые системы. Траектории $y(t)$ таких систем, выходящие из S^0, также должны пересекать сферу S_R.

В любом случае необходимо найти наиболее простое решение задачи контроля, такое, чтобы оно обеспечивало правильное решение основной задачи диагностики – задачи диагностирования.

Таким образом, выход изображающей точки вектора контроля $y(t)$ системы (6.4) на поверхности сферы S_R будет означать, что в системе произошла некоторая неисправность.

Сферу контроля S_R можно, кроме того, использовать для того, чтобы отфильтровать уже при решении задачи контроля часть систем вида (6.5), то есть уменьшить список l априорных неисправных систем, с помощью которого в последующем проще будет диагностировать действительно происшедшую в системе (6.4) неисправность.

Это можно осуществить, если указать области на сфере контроля S_R, в которые траектория j-той системы (6.5) не может попадать. Если такие области ненулевой меры существуют и траектории вектора контроля попадают в эти области, то j-я гипотеза отбрасывается сразу.

Рассмотрим сферу контроля S_R и квадратичную форму $(y, y') = 0$. Этим уравнением для каждой из систем (6.5) определяется некоторый объем траекторий вектора контроля; границу этого объема изнутри аппроксимируем конической поверхностью, пересечение которой со сферой S_R обозначим через S_R^j, $j = 1, \ldots, l$. Фазовые траектории вектора контроля $y(t)$, полученные интегрированием j-той системы (6.5) с начальными условиями из S^0 $(R^0 < R)$, будут выходить из сферы S_R через область S_R^j. Те из S_R^j, которые не пересекаются с другими при попадании в них фазовой траектории вектора контроля, сразу определяют номер неисправности. В противном случае, то есть если фазовая траектория вектора контроля попадает в области, в которые траектория j-той системы (6.5) не может попадать, j-я гипотеза отбрасывается сразу.

В случае $m = n$ области S_R^j можно рассматривать в качестве начальных областей при счете параметров алгоритма диагностирования.

Таким образом, уже при решении задачи контроля можно уменьшить список (6.5) и даже диагностировать некоторые неисправности.

Эллипсоид контроля. Одной из основных задач контроля движения управляемой системы является сокращение избыточной информации и получение такой информации, которая позволяет не пропускать недопустимое состояние системы. В этой связи изучим другой возможный подход при решении задачи внешнетраекторного контроля.

Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой описывается нелинейными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} x' &= Ax + b\xi, \\ \xi' &= \varphi(\sigma), \\ \sigma &= C^T x - \rho\xi, \end{aligned} \tag{6.6}$$

где x – n-мерный вектор состояния системы,
A – устойчивая матрица с постоянными коэффициентами,
b, C, ρ – постоянные матрицы,
ξ– управляющее воздействие,
функция φ принадлежит к классу допустимых функций и удовлетворяет условиям $\varphi(\sigma) = 0$ при $\sigma = 0$ и $\sigma\varphi(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$, $\sigma \in R$.

Уравнения (6.6) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} \zeta' &= A\zeta + b\varphi(\sigma), \\ \sigma' &= C^T \zeta - \rho\varphi(\sigma). \end{aligned} \tag{6.7}$$

При этом, для невырожденности преобразования

$$\begin{aligned} \zeta &= Ax + b\xi, \\ \sigma &= C^T x - \rho\xi \end{aligned}$$

необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} A & b \\ C^T & \rho \end{vmatrix} \neq 0.$$

Предположим, что на координаты вектора контроля (6.3) наложено следующее ограничение на интервале $t \in [t_0, T_0]$ движения системы:

$$\left(\left|x_{k_1}\right|, \ldots, \left|x_{k_m}\right|\right) \leq (\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_m(t)), \tag{6.8}$$

где $\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_m(t)$ – непрерывные положительные функции, определенные на отрезке $[t_0, T_0]$.

Требуется в фазовом пространстве $R^n\{x\}$ найти область, в которой может находиться вектор состояния системы (6.7), такую, чтобы движение системы, начавшееся в любой точке этой области, гарантирует выполнение условия (6.8), при этом для каждой координаты, не входящей в вектор контроля (6.3), в каждый момент времени $t \in [t_0, T_0]$ можно найти интервал изменения, также гарантирующий выполнение условия (6.7).

Поставленная задача решается методом построения для системы (6.7) функции Ляпунова в форме Лурье:

$$V = x^T Bx + \int_0^{\eta} \varphi(\eta) d\eta \tag{6.9}$$

с матрицей B, которая является решением матричного алгебраического уравнения Ляпунова

$$A^T B + BA = -C_1, \tag{6.10}$$

где C_1 – некоторая симметричная положительно определенная матрица.

Значение квадратичной формы «на» D

$$x^T Bx = D, \tag{6.11}$$

где D – некоторая положительная постоянная, определяет в фазовом пространстве эллипсоид. Матрица B задает форму эллипсоида, а величина D – его размер. Значения полуосей d_k этого эллипсоида определяются величинами собственных чисел λ_k матрицы B:

$$d_k = \sqrt{\frac{D}{\lambda_k}},$$

а направления главных осей совпадают с направлениями собственных векторов матрицы B.

Величину D размера эллипсоида (6.11) выберем таким образом, чтобы изменяющаяся поверхность функции Ляпунова (6.9) лежала внутри эллипсоида (6.11).

Таким образом, выбранный эллипсоид (6.11) будет областью функционирования рассматриваемой нелинейной системы (6.6), и он может быть выбран в качестве эллипсоида контроля.

Вариант построения областей допустимых отклонений для задачи контроля для линейных систем дифференциальных уравнений обсуждался в [27,28].

Трубка контроля. Рассмотрим управляемую динамическую систему (6.4). Множество начальных условий системы (6.4) представляет собой сферу S_0 радиуса R_0 в пространстве фазовых переменных с центром в точке x_0, через которую проходит программная траектория, то есть траектория цели.

Производя розыгрыш начальных условий и интегрируя с этими начальными условиями систему (6.4) и системы (6.5) в пространстве вектора контроля (6.3) вокруг программной траектории, можно построить трубку такую, что траектории вектора контроля $y(t)$ на интервале времени $[t_0, T_0]$ системы (6.4) будут лежать внутри этой трубки, а для систем (6.5) – пересекаться с поверхностью трубки.

Такую трубку назовем *трубкой контроля*. Выход траектории вектора контроля рассматриваемой системы на поверхность трубки контроля будет означать, что в диагностическом пространстве рассматриваемой управляемой динамической системы произошла неисправность. Построение трубки для задачи контроля при движении по глиссаде обсуждалось в [28].

Выделим в отдельный пункт методику построения поверхности контроля методом статистических испытаний [16, 17, 42].

1. Построение поверхности контроля методом статистических испытаний

Для произвольного момента времени $\bar{t}$ и номера i компоненты x_i вектора контроля $y(t)$, $i = k_1,\ldots,k_m, m \le n$, статистически оценим значения $x_{i\max}, x_{i\min}$, в пределах которых заключено значение $x_i(\bar{t})$. Для этого зададим на X^0 распределение случайной величины $x(t_0)$ – начальных условий системы уравнений (6.1). Взяв область начальных условий в виде n-мерного куба, можно задать, например, равномерное распределение n-мерной случайной величины

$$x(t_0) = (x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0))$$

с независимыми распределениями по каждой из координат.

Статистический эксперимент будет состоять в следующем:

1) розыгрыш случайной величины $x(t_0)$;

2) вычисление значения новой случайной величины $x(\bar{t})$ – значения фазового вектора $x(t)$ в момент времени $\bar{t}$. Эта случайная величина получается как результат применения оператора $L_{f_0}^{\bar{t}}$ численного интегрирования системы (6.1) на отрезке времени $[t_0,\bar{t}]$ к случайной величине $x(t_0)$, то есть

$$x(\bar{t}) = L_{f_0}^{\bar{t}}(x(t_0)).$$

Тогда для выборки независимых значений случайной величины $x^j(t_0),\ j=1,\dots,N_1$, где N_1 – объем выборки, получим выборку независимых значений другой случайной величины $x^j(\bar{t})$. Каждый элемент такой выборки – *n*-мерный вектор. Выделим значения *i*-й компоненты фазового вектора *x* и получим выборку случайной величины $x_i^j(\bar{t}),\ j=1,\dots,N_1$.

Из этой выборки можно найти два значения

$$x_{i\min}(\bar{t}) = \min_{j=1,\dots,N_1} x_i^j(\bar{t}) \text{ и } x_{i\max}(\bar{t}) = \max_{j=1,\dots,N_1} x_i^j(\bar{t});$$

3) проводя N_2 серий по N_1 экспериментов каждая, получим две выборки новых случайных величин объемом N_2:

$$x_{i\min}^1(\bar{t}),\dots,x_{i\min}^{N_2}(\bar{t}) \text{ и } x_{i\max}^1(\bar{t}),\dots,x_{i\max}^{N_2}(\bar{t}).$$

Каждая из них представляет собой выборку независимых одинаково распределенных величин $x_{i\min}$ и $x_{i\max}$, соответственно. При этих условиях распределение данной случайной величины $\dfrac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{N_2}}$, где $a = Mx_{i\max}^k$ – математическое ожидание случайной величины $x_{i\max}^k$, $\sigma^2 = Dx_{i\max}^k$ – его дисперсия, а $\bar{x} = \dfrac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2} x_{i\max}^k$, – близко к нормальному с параметрами (0, 1) [26].

Заменив σ^2 его состоятельной оценкой, полученной из выборки $\sigma_{N_2}^2$, получим также распределение, близкое к нормальному, то есть к $N(0,1)$. Теперь из соотношения

$$\lim_{N_2\to\infty} P\left\{\left|\frac{\bar{x}-a}{\sigma_{N_2}/\sqrt{N_2}}\right| < u_\alpha\right\} = 1-2\alpha$$

получается доверительный интервал для математического ожидания a величины $x_{i\max}$:

$$P\left\{\bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma_{N_2}}{\sqrt{N_2}} < a < \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma_{N_2}}{\sqrt{N_2}}\right\} \approx 1 - 2\alpha, \qquad (6.12)$$

где $1 - 2\alpha$ – доверительная вероятность.

Ширина интервала зависит от α, по значению которого определяется u_α (из таблицы значений функции $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$), и объема выборки N_2. Оценка $\sigma^2_{N_2}$ является состоятельной, если $\sigma_{N_2} = \frac{\sigma_{\max}}{N_2}$, где $\sigma_{\max}$ – стандартная ошибка в выборке $x^k_{i\max}$, вычисляемая следующим образом [26]:

$$\sigma_{\max} = \sum_{k=1}^{N_2} \left(\frac{x^k_{i\max}}{N_2}\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{N_2} \frac{x^k_{i\max}}{N_2}\right)^2 .$$

Таким образом, по выборке $x^k_{i\max}$, $k = 1,\ldots,N_2$, при заданной доверительной вероятности $1 - 2\alpha$ построен доверительный интервал для математического ожидания (6.12) величины $x_{i\max}$. Аналогично можно построить интервал для $Mx_{i\min}$.

Теперь, взяв в качестве величины

$$\bar{x}_{i\max}(\bar{t}) = \bar{x}' + u_\alpha \frac{\sigma'_{N_2}}{\sqrt{N_2}} \text{ и } \underline{x}_{i\min}(\bar{t}) = \bar{x}'' + u_\alpha \frac{\sigma''_{N_2}}{\sqrt{N_2}},$$

получим интервал для значений фазовой координаты $x_i(\bar{t})$:

$$\underline{x}_{i\min}(\bar{t}) \le x_i(\bar{t}) \le \bar{x}_{i\max}(\bar{t}),$$

внутри которого будут находиться величины $x_i(\bar{t})$ с доверительной вероятностью $1-2\alpha$. Величины $\bar{x}', \bar{x}''$ и $\sigma'_{N_2}, \sigma''_{N_2}$, вообще говоря, различны, так как представляют собой статистические средние разных выборок: $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$, соответственно.

Процедура построения поверхности контроля системы (6.1) на отрезке времени $[t_0, T]$ с вектором контроля $y(t)$ сводится теперь к следующему.

Методом статистических испытаний строятся оценки $\underline{x}_{i\min}(t_l), \bar{x}_{i\max}(t_l)$ для каждой из координат вектора x_i контроля $y(t)$. Моменты времени t_l представляют собой величины $t_l = t_0 + lh,\ l = 1, \ldots, \left[\dfrac{T-t_0}{h}\right]$ (здесь $[\ldots]$ – целая часть), где h – шаг метода численного интегрирования системы (6.1).

Получаем набор оценок $\underline{x}_{i\min}(t_l), \bar{x}_{i\max}(t_l)$. В качестве поверхности контроля π_k возьмем границу объема, определяемого через теоретико-множественное произведение:

$$V = \prod_{i=1}^{m}\left[\min_l \underline{x}_{k_i}(t_l), \max_l \bar{x}_{k_i}(t_l)\right],\ l = 1, \ldots, \left[\frac{T-t_0}{h}\right],$$

где k_i – номера компонент, составляющих вектор контроля $y(t)$.

Эта поверхность контроля построена с доверительной вероятностью, не меньшей чем $1 - 2\alpha$. Для построения такой поверхности требуется N_1N_2 численных экспериментов, то есть численных интегрирований системы (6.1) с начальными условиями $x(t_0)$, где $x(t_0)$ – n-мерная случайная величина с заданным распределением на области X^0 начальных условий;

4) для построенной поверхности контроля π_k и заданного набора функций f_i (см. (6.2)) методом статистических испытаний можно установить вероятность p_i выхода траектории решения системы (6.2) с f_i в правой части на границу π_k.

Для этого на множестве X^0 начальных условий задается некоторое распределение случайной величины $x(t_0)$ – начальных условий системы (6.2). Затем численно интегрируется система (6.2) с f_i в правой части на отрезке времени $[t_0, T]$. Таким образом, получается следующая последовательность:

$$x(t_l) = L_{f_i}^{t_l}(x(t_0)), \ t_l = t_0 + lh, \ l = 1, \ldots, \left[\frac{T - t_0}{h}\right].$$

Здесь $L_{f_i}^{t_l}$ – оператор метода численного интегрирования системы (6.2) с f_i в правой части с шагом интегрирования h. Далее формируем случайную величину ξ

$$\xi = \begin{cases} 1, \text{ если } \ \exists l, i : x_i(t_l) < \underline{x}_{i\min} \text{ или } \ x_i(t_l) > \overline{x}_{i\max}; \\ \qquad 0 \text{ в противном случае}, \end{cases} \tag{6.13}$$

то есть $\xi = 1$ при выходе траектории решения системы (6.2) с начальными условиями $x(t_0)$ на границу π_k на отрезке времени $[t_0, T]$ и $\xi = 0$ в противном случае.

Математическое ожидание ξ равно $M\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) =$ $= p = p_i$. Оценив по выборке значений величины ξ ее математическое ожидание, получим оценку вероятности выхода траектории на π_k за время $[t_0, T]$. Таким образом, в схеме опытов Бернулли с вероятностью успеха в одном опыте p_i надо определить $M\xi$ по выборке случайной величины ξ. Одним опытом в данном случае является розыгрыш значения $x(t_0)$ как случайной величины с заданным на области X^0 распределением с дальнейшим формированием последовательности $x(t_l), l = 1, \ldots, N_3$, и вычислением значения ξ по правилу (6.13).

Статистической оценкой математического ожидания $M\xi$ является величина $\bar{\xi} = \frac{\sum_{k=1}^{N_3} \xi_k}{N_3}$, где N_3 – объем выборки случайной величины ξ. Будучи суммой большого количества независимых одинаково распределенных случайных величин ξ, величина $\bar{\xi}$ является нормально распределенной величиной с математическим ожиданием $M\xi_k = a$ и дисперсией $\sigma^2 = D\xi_k$.

Тогда

$$\lim_{N_3 \to \infty} P\left\{ \left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma / \sqrt{N_3}} \right| < u_\alpha \right\} = 1 - 2\alpha,$$

где $1 - 2\alpha$ – доверительная вероятность выполнения оценки

$$\left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma / \sqrt{N_3}} \right| < u_\alpha .$$

Заменив σ ее статистической оценкой σ_{N_3}, которая является состоятельной [26], получим аналогичную оценку математического ожидания случайной величины $\bar{\xi}$:

$$\lim_{N_3 \to \infty} P\left\{ \left| \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma_{N_3} / \sqrt{N_3}} \right| < u_\alpha \right\} = 1 - 2\alpha .$$

Так как $M\xi = a = p_i$, то, взяв статистические средние в виде $\bar{\xi} = \frac{\mu_{N_3}}{N_3}$, где μ_{N_3} – число успехов в N_3 опытах и $\sigma_{N_3} = \sqrt{\frac{\mu_{N_3}}{N_3}\left(1 - \frac{\mu_{N_3}}{N_3}\right)}$ – состоятельная оценка для $\sigma = \sqrt{D\xi_k}$ в схеме Бернулли [26], получим доверительный интервал для p_i:

$$\frac{\mu_{N_3}}{N_3} - \frac{u_\alpha}{\sqrt{N_3}}\sigma_{N_3} < p_i < \frac{\mu_{N_3}}{N_3} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{N_3}}\sigma_{N_3} \tag{6.14}$$

с доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$. Задавшись доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$, величину u_α получим из таблиц. Величины σ_{N_3} и μ_{N_3} вычисляются из выборки случайной величины ξ. Таким образом, с заданной доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$ найден доверительный интервал для вероятности p_i (6.14) выхода траектории системы (6.2) с f_i в правой части на поверхность контроля π_k. Величина p_i характеризует надежность контроля в случае возникновения i-й списочной неисправности. Ввиду статистического характера построения поверхности π_k может быть принята следующая процедура контроля и обнаружения неисправностей: при выходе траектории вектора контроля $y(t)$ на π_k включается алгоритм диагностирования неисправностей;

5) при попадании траектории в слой фазового пространства, прилегающий к π_k с внутренней стороны поверхности, также может быть включен алгоритм диагностирования. Слой фазового пространства, прилежащий к π_k, при попадании траектории в который включается алгоритм диагностирования, можно представить как трубку между поверхностью π_k и поверхностью μ_k, где μ_k – граница объема $\overline{V}$ (здесь опять имеется в виду теоретико-множественное произведение):

$$\overline{V} = \prod_{i=1}^{m} \left[\max_l \underline{x}_{k_i}(t_l), \min_l \overline{x}_{k_i}(t_l) \right],\ l = 1,\ldots,\left[\frac{T - t_0}{h}\right].$$

Таким образом, методом статистических испытаний получено решение задачи контроля, то есть способ построения в определенных доверительных пределах поверхности контроля π_k, а также найдены вероятности выхода траектории систем с той или иной возможной неисправностью из априорного списка на границу π_k. Это дает возможность выбрать такую вероятность контроля, с помощью которой в последующем решается основная задача дифференциальной диагностики – задача диагностирования, то есть задача обнаружения происшедшей в системе данной конкретной неисправности, вообще говоря, конкретной неисправности из априорного списка неисправностей.

В связи с этим возникает необходимость дать расширенную постановку задачи контроля, позволяющую контролировать не только неисправности из априорного списка, но и «близкие» к ним, возникшие в их окрестностях.

2. Расширенная постановка задачи контроля

Рассмотрим диагностическое пространство

$$(\mathrm{M}; \mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_l; A_1, A_2, A_3). \tag{6.15}$$

В пространстве (6.15) будут протекать процессы, описываемые уравнениями (6.1) и (6.2), а также уравнениями

$$x' = f(x,t), \tag{6.16}$$

обусловленными неисправностями не из априорного списка, но близкими к ним, происшедшими в их окрестностях $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_l$ пространства (6.15), например, неисправностью, закон развития которой, возможно приводящий к неисправности с математическим ожиданием $a = 0$ из априорного списка, можно моделировать путем уменьшения a до нуля, изменяющейся по линейному закону

$$a(t) = a_{nom} b(t - t_0), t > t_0, \tag{6.17}$$

где a_{nom} – номинальное значение коэффициента;

a, b – отрицательная постоянная.

Достигнув нуля, значение a больше не меняется. Значение $a = 0$ в силу (6.17) может достигаться за время, отличное от времени выхода на поверхность контроля системой (6.1) со списочной неисправностью при $a = 0$. Неисправность (6.17) близка к списочной (когда $a = 0$), но не совпадает с ней.

Таким образом, динамическая система, описываемая уравнениями (6.16), содержит элементы с неполной информацией, и для описания такой системы используют дифференциальные включения

$$x' \in F(x,t),\ \ F(x,t) \in f(x,t), \tag{6.18}$$

где через $F(x,t)$ обозначено обусловленное возникновением неисправностей не из априорного списка множество скоростей, которые могут возникнуть в сферах влияния опорных систем (6.2), то есть в окрестностях $\mathrm{O}_1,\dots,\mathrm{O}_l$ опорных неисправностей пространства (6.15).

Расширенная постановка задачи контроля (или, другими словами, постановка расширенной задачи контроля) может быть сформулирована следующим образом.

Пусть даны уравнения движения (6.1), ограниченное множество начальных условий X^0, время T, набор функций $f_j(x,t),\ j = 1,\dots,l$, в (6.2) и диагностическое пространство (6.15).

Требуется найти вектор контроля (6.3) такой, чтобы он содержал минимальное подмножество координат фазового вектора $x(t)$ состояния системы и позволял построить выпуклую поверхность контроля π_k минимального объема в пространстве координат найденного вектора $y(t)$ такую, что вектор $y(t)$, составленный из компонент решения уравнения (6.1) на отрезке времени $[t_0, T]$, не выходил на поверхность контроля π_k, а векторы контроля $y(t)$, составленные из соответствующих компонент решений любой из систем (6.2) и любой из систем

(6.16), (6.18), обусловленной неисправностью не из априорного списка (6.2), но принадлежащей окрестностям $O_1, \ldots, O_l$ диагностического пространства (6.15) и приводящую к недопустимым отклонениям системы (6.1) с начальными условиями $x^0 = x(t_0) \in X^0$, выходили на поверхность π_k в момнт времени $t_k \in [t_0, T]$.

Таким образом, критерием наличия неисправности в диагностическом пространстве объекта, движение которого описано уравнениями (6.1), будет выход вектора контроля $y(t)$ на поверхность контроля π_k в некоторый момент времени $t_k < T$.

Перейдем теперь к постановке и решению задачи диагностирования.

ГЛАВА 7

Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений)

Рассмотрим динамическую систему, движение которой может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_0(x,t), \tag{7.1}$$

где $x(t)$, $f_0(x,t)$ – n-мерные вектор-функции.

Начальные условия уравнения (7.1) будем считать принадлежащими некоторой ограниченной области. Будем считать, кроме того, что функция $f_0(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения уравнений (7.1) в некоторой области пространства $R^{n+1}(x,t)$.

Пусть осуществлен синтез управления и его структура, и параметры выбраны таким образом, что уравнения (7.1) описывают желаемое движение, то есть движение $x(t)$, близкое к некоторой программной траектории $x_{\bullet}(t)$. Такую схему принято называть *исправной.*

Конечному набору опорных невырожденных неисправностей (2.5) из класса возможных, введенного в главах 2 и 3, поставим в соответствие набор обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x,t),\ j = 1,\ldots,l. \tag{7.2}$$

Здесь $f_j(x,t)$ – известные вектор-функции, отличающиеся друг от друга той или иной неисправностью (2.5). Модели

(7.2) будем называть *невырожденными*. Таким образом, на выбор правых частей уравнений (7.2) вводятся некоторые ограничения.

Модели (7.1) и (7.2) принадлежат одному фазовому пространству и отличаются лишь своей структурой. Если в заранее неизвестный момент времени происходит одна из возможных неисправностей, то траектория системы (7.1) изменяется и непрерывно продолжается траекторией одной из систем (7.2). Набор моделей (7.1) и (7.2) невырожден, и их можно рассматривать объединенными

$$x' = f_j(x,t),\ j = 0,\ldots,l. \tag{7.3}$$

В системе (7.1) могут происходить неисправности, не предусмотренные априорным набором (7.2). Такие неисправности могут возникнуть, например, в окрестностях опорных неисправностей. Это значит, что функции в правых частях уравнений (7.3) могут содержать элементы с неполной информацией. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (7.3) могут отличаться от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

Для описания систем, содержащих элементы с неполной информацией, используют дифференциальные включения [24, 25]:

$$x' \in F(x,t), \tag{7.4}$$

где вектор x характеризует отклонение системы (7.1) от состояния, предписанного целью управления, а через $F(x,t)$ обозначено множество скоростей (7.3)

$$F(x,t) \in f_j(x,t),\ f = 0,\ldots,l, \tag{7.5}$$

и, в частности, таких, которые априори неизвестны, но могут возникнуть и принадлежать, например, сферам влияния скоростей опорных систем (7.3).

Множество $F(x,t)$ функций $f_j(x,t)$ дифференциального включения (7.4), (7.5), например, для систем (2.1) формируется с помощью вектора $\xi(t)$, моделирующего воздействие управляющего устройства, в соответствии с рассмотренной в главе 2 классификацией неисправностей.

Под решением дифференциального включения (7.4), (7.5) [29] будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую соотношению $x' \in F(x(t),t)$ при всех t на рассматриваемом интервале времени и соотношению $x(t_0) \in \Xi$.

Достаточные условия существования и единственности таких решений для систем с фазовыми ограничениями приводятся в [23].

Заметим, наконец, что, если в рассматриваемой системе (7.1) произойдет неисправность, не предусмотренная априорным списком опорных неисправностей (7.2), то эта неисправность также должна быть обнаружена как одна из опорных неисправностей, или сообщение о такой ситуации будет являться одним из возможных выходов работы алгоритма, решающего задачу диагностирования. В принципиальном плане важнее знать в каком датчике произошла неисправность, чем какая конкретная неисправность произошла в данном датчике.

Процесс анализа траекторий систем (7.3) после выхода фазовой траектории вектора контроля $y(t)$ на поверхность контроля π_k, то есть процесс, решающий задачу диагностирования, назовем *алгоритмом диагностирования*.

Перейдем к постановке задачи и построению алгоритмов диагностирования.

В дальнейшем будем считать, что время диагностирования τ задано и такое, что $\tau_0 < \tau < T_0$. Для этого случая сформулируем и докажем теорему, которая дает возможность построить алгоритмы диагностирования.

Введем в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1}, \ldots, x_{d_q}) = (z_1, \ldots, z_q),\ q = 1, \ldots, n, \tag{7.6}$$

компоненты которого являются подмножеством компонент фазового вектора состояния $x(t)$, причем размерность множества компонент вектора контроля $y(t)$ не превышает размерность подмножества компонент вектора $z(t)$, то есть $m \le q$. Будем предполагать, что вектор $z(t)$ является таким, что характер функции $f_j(x,t)$ проявляется в поведении компонент вектора $z(t)$. Вектор $z(t)$ назовем *вектором диагностирования.*

Задача диагностирования может быть сформулирована следующим образом.

Пусть известны невырожденные дифференциальные уравнения (7.3), поверхность контроля π_k, момент времени τ_0 выхода вектора контроля на π_k и значение фазового вектора $x(\tau_0)$. Требуется по измерению фазового вектора $x(t)$ в некоторые последующие после выхода на π_k моменты времени t_k на интервале $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$ с помощью вектора диагностирования $z(t)$ однозначно определить номер j функции $f_j(x,t)$ из (7.3); τ – малый промежуток времени, $\tau_0 + \tau < T_0$.

Таким образом, по информации о выходе системы на поверхность контроля и в результате слежения за последующей траекторией объекта необходимо определить номер j возникшей в системе управления объектом неисправности из априорного списка в l неисправностей.

Перейдем теперь к более детальной формализованной постановке задачи и результатам, которые следуют из этой постановки. При этом начнем с рассмотрения случая $q = n$.

Введем следующие обозначения. Через $x_j(t)$ будет обозначаться точка траектории j-й системы (7.3). Обозначение $x(t)$ будет применяться нами в рассуждениях, относящихся ко всем системам, или как общее обозначение точки траектории, когда ее принадлежность той или иной системе (7.3) не установлена, то есть при описании действительного состояния рассматриваемой системы.

Примем за начало отсчета времени момент выхода $x(t)$ на поверхность π_k. Введем некоторое натуральное число N. Будем производить траекторные измерения в следующие моменты времени:

$$\tau_0 = 0, t_1 = \frac{\tau}{N}, t_2 = \frac{2\tau}{N}, \ldots, t_N = \tau.$$

Введем обозначения:

$$x_{0j} = x_j(0), x_{1j} = x_j(\frac{\tau}{N}), x_{2j} = x_j(\frac{2\tau}{N}), \ldots, x_{Nj} = x_j(\tau),$$

$$x_0 = x(0), x_1 = x(\frac{\tau}{N}), x_2 = x(\frac{2\tau}{N}), \ldots, x_N = x(\tau).$$

Предположим, что произошла неисправность, траектория системы вышла на π_k и далее, в течение времени τ, мы получили значения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Нам надо проверить полную систему l гипотез: j-я гипотеза, $j = 0, \ldots, l$, – это утверждение о том, что траектория $x(t)$ есть траектория j-й системы (7.3), то есть $x \equiv x_j$ при условии $x_{0j} = x_0$.

Рассмотрим функционал от $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N, x_{1j}, \ldots, x_{Nj}$ следующего вида:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n} (x_{is} - x_{ijs})^2, \ j = 0, \ldots, l. \tag{7.7}$$

Здесь x_{is} – s-я компонента вектора состояния $x(t)$, измеренная в момент времени $t_i, i = 1,\ldots,N$; x_{ijs} – s-я компонента вектора состояния в момент времени t_i, полученная в результате интегрирования системы (7.3) с f_j в правой части.

Для каждого j и N на интервале $[0,\tau]$ S_j^N имеет свое значение, то есть является переменной величиной, заданной на множестве функций и зависящей от выбора одной или нескольких функций.

Сформулируем теперь предельную теорему для случая точных траекторных измерений.

Теорема. *Для невырожденного конечного набора систем обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$x' = f_j(x,t),\ x(t_0) = x_0 \in X^0,\ j = 0,\ldots,l, \tag{7.8}$$

дифференциального включения $x' \in F(x,t) \in f_j(x,t)$ *и всех j найдутся такие наборы чисел* S_j^N, M_j, S_j *и* $\overline{N}$*, что для* $N > \overline{N}$ *с помощью функционала* S_j^N *из (7.7), который запишем в виде*

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{ij})^2,\ j = 0,\ldots,l, \tag{7.9}$$

возникшая в процессе движения в неизвестный момент времени на интервале $[t_0, T_0]$ *неисправность, удовлетворяющая критерию контроля, будет диагностирована однозначно, как одна из систем (7.8) с номером j, если*

1. $S_j^N \le M_j$:

$$M_j(N) = \frac{\max S_j^N}{\{x_0 \in X^0 : x_0 \in \pi_k\}} \overset{=}{=} o(\frac{1}{N}) \tag{7.10}$$

или если

$$\textbf{2.}\ S_j^N = S_j : S_j = \min_{\mu} S_\mu^N. \tag{7.11}$$

Доказательство теоремы. Функционал (7.9) запишем, сохраняя для него прежнее обозначение, в приращениях

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} (\Delta_i x - \Delta_i x_j)^2, \tag{7.12}$$

где $\Delta_i x = |x_i - x_{i-1}|$ – измеренное приращение действительной траектории рассматриваемой системы;

$\Delta_i x_j = |x_{ij} - x_{i-1j}|$ – вычисленное приращение ожидаемой траектории j-й системы (7.3) от начального значения x_{i-1j}.

Предположим сначала, что величины $\Delta_i x_j, i = 1, \ldots, N$, $j = 0, \ldots, l$, представляются своими точными значениями. Тогда, если j-я гипотеза верна, то, как нетрудно видеть, $S_j^N \equiv 0$, поэтому мы отбрасываем все гипотезы с номерами μ такими, что $S_\mu^N \neq 0$. Очевидно, что мы не можем отбросить в этом случае верную гипотезу.

Но предположение о том, что в нашем распоряжении могут быть точные значения $\Delta_i x_{jk}$, не оправдано. Мы располагаем только величинами $x_0, x_1, \ldots, x_N$, а также правыми частями систем (7.3). Следовательно, мы можем организовать лишь приближенное нахождение величин $\Delta_i x_{jk}$ путем численного интегрирования систем (7.3). Мы располагаем на i-м шаге начальным условием x_{i-1} и ищем приращения решения j-й системы за один шаг.

В теории численных решений дифференциальных уравнений рассматриваются одношаговые процессы и даются приближенные формулы для $\Delta_i x_{jk}$ с оценками погрешностей. Общая одношаговая формула для j-й системы (7.3) [30] имеет вид

$$\Delta_i x_j = x_{ij} - x_{i-1j} \cong h\Phi_j(x_{i-1j}, h) \tag{7.13}$$

с точностью до $\overset{=}{o}(h^p)$, где h – длина шага (в нашем случае $h = \dfrac{\tau}{N}$), а $\Phi_j(x_{i-1}, h)$ – вектор-функция от x_{i-1} и h, зависящая, кроме того, от правой части f_j системы; p – натуральное число, зависящее от вида Φ_j.

Подставим в (7.12) приближенные выражения (7.13) для $\Delta_i x_{jk}$, полагая $h = \dfrac{\tau}{N}$, и получим, что

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N}\left(\Delta_i x - \frac{\tau}{N}\left|\Phi_j(x_{i-1}, \frac{\tau}{N})\right|\right)^2, \; j = 0,\dots,l. \tag{7.14}$$

Пусть $x \equiv x_j$, тогда (7.14) будет иметь следующий вид:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N}\left(\Delta_i x_j - \frac{\tau}{N}\left|\Phi_j(x_{i-1j}, \frac{\tau}{N})\right|\right)^2, \; j = 0,\dots,l. \tag{7.15}$$

Заметим, что величины S_j^N в этом случае будут функциями точек выхода x_{0j} на поверхность π_k. Действительно, все $x_{ij}, i = 1,\dots,N$, принадлежат траектории $x_j(t), t \in [0,T]$, которая определяется начальным условием x_{0j}.

Предположим, что $\Phi_j, j = 0,\dots,l,$ ограничены и непрерывны по совокупности координат x и h, что затем будет выполняться при конкретных Φ_j. Предположим также, что функции в (7.15), а именно, $S_j^N = S_j^N(x_0), j = 0,\dots,l,$ монотонно сходятся к нулю при $N \to \infty$ в каждой фиксированной точке поверхности π_k. Это предположение также будет выполняться, когда мы рассмотрим конкретные Φ_j.

Из этих предположений сразу следует ограниченность и непрерывность $S_j^N(x_0)$ на поверхности π_k. Отсюда следует, что существует конечное значение

$$M_j(N) = \max_{x_0 \in \pi_k} S_j^N(x_0). \tag{7.16}$$

А из монотонной сходимости к нулю $S_j^N(x_0)$ при $N \to \infty$ в каждой точке поверхности контроля и непрерывности $S_j^N(x_0)$ на этой поверхности следует сходимость $M_j(N) \to 0$ при $N \to \infty$, $j = 0, \ldots, l$.

Зададимся определенным N. Пусть траектория x вышла на поверхность контроля, то есть произошла неисправность. Проверяем j-ю гипотезу, $j = 1, \ldots, l$, формируя (7.14).

Очевидно, если j-я гипотеза верна, то $S_j^N \le M_j$, поэтому отбрасываем все гипотезы с номерами μ такими, для которых $S_\mu^N > M_\mu$. В этом случае мы не можем отбросить верную гипотезу.

Таким образом, за счет того, что отбрасываются гипотезы о возможности некоторых неисправностей, мы, вообще говоря, сужаем априорный набор возможных неисправностей до апостериорного набора. При условии j-й неисправности величина S_j^N есть функция точек поверхности контроля, а M_j – константы, поэтому в каждой точке поверхности определен размер апостериорного набора. Обозначим его $l_j(x), x \in \pi_k$.

После того, как в общем случае построен алгоритм диагностирования при точных траекторных измерениях, приведем обычно применяемые на практике одношаговые формулы Эйлера

$$\Phi_j(x_{i-1}, \frac{\tau}{N}) = f_j(x_{i-1}),\ p = 1. \qquad (7.17)$$

Если подставить формулы Эйлера (7.17) в (7.14), то величины S_j^N будут характеризовать равномерно вдоль всей траектории j-й системы то, насколько разняться поля направлений j -й и μ -й систем.

Наконец, получим некоторые результаты, необходимые для доказательства предельной теоремы.

Вновь рассмотрим выражения (7.15). Из (7.13) следует, что

$$S_j^N(x_{0j}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\overset{=}{o}\left(\left(\frac{\tau}{N} \right)^p \right) \right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \overset{=}{o}\left(\left(\frac{\tau}{N} \right)^{2p} \right) = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{N^{2p-1}} \right).$$

Обозначим $2p - 1 = \nu$, тогда

$$S_j^N(x_{0j}) = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{N^{\nu}} \right)$$

для любой точки $x_{0j} \in \pi_k$ при $N \to \infty$.

Это значит, что

$$N^{\nu} S_j^N(x_{0j}) \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

При доказательстве сходимости $M_j(N) \to 0$ при $N \to \infty$ мы требовали, чтобы в каждой точке поверхности контроля была сходимость $S_j^N(x_{0j}) \to 0$, монотонная при $N \to \infty$. Сейчас мы потребуем, чтобы в каждой точке поверхности контроля последовательность $\{N^{\nu} S_j^N(x_{0j})\}$, $N = 1, 2, \dots$, начиная с некоторого $N > N_0$, одного для всей поверхности контроля, сходилась к нулю монотонно при $N \to \infty$. Заметим, что величины $N^{\nu} S_j^N(x_{0j})$ непрерывны на поверхности контроля.

Известно, что последовательность непрерывных на компакте функций, монотонно сходящаяся к нулю в каждой точке, сходится к нулю равномерно на этом компакте.

Заметим, что рассмотренные выше поверхность контроля π_k, сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля являются ограниченными замкнутыми множествами, то есть они являются компактными.

Итак, $\{N^{\nu} S_j^N(x_{0j})\}, N = 1, 2, \ldots,$ есть последовательность непрерывных на поверхности контроля функций, монотонно сходящаяся к нулю в каждой точке поверхности. По указанной выше теореме $N^{\nu} M_j(N) \to 0$ при $N \to \infty$ и, поскольку

$$N^{\nu} M_j(N) = \max_{x_{0j} \in \pi_k} \left(N^{\nu} S_j^N(x_{0j}) \right),$$

то стремление $N^{\nu} M_j(N) \to 0$ при $N \to 0$ означает, что $M_j(N) = \overset{=}{o}\left(\dfrac{1}{N^{\nu}}\right)$, где $\nu = 2p - 1$; $p \geq 1$. Поэтому условие (7.10) теоремы

$$M_j(N) = \overset{=}{o}\left(\frac{1}{N}\right)$$

всегда выполнено.

Заметим далее, что на траектории μ-й ($\mu = 0, \ldots, l$) системы (7.3) при $j \neq \mu$

$$\Delta_i x_{\mu} = \frac{\tau}{N} f_{\mu}(x_{i-1\mu}) + \overset{=}{o}\left(\frac{\tau}{N}\right),$$

$$\frac{\tau}{N} \Phi_j(x_{i-1\mu}, \frac{\tau}{N}) = \frac{\tau}{N} f_j(x_{i-1\mu}) + \overset{=}{o}\left(\frac{\tau}{N}\right).$$

Подставим эти выражения в (7.15). Получим:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\tau}{N} \left| f_\mu (x_{i-1\mu}) \right| - \frac{\tau}{N} \left| f_j (x_{i-1\mu}) \right| + \bar{\bar{o}}\left(\frac{\tau}{N} \right) \right)^2 =$$

$$= \frac{\tau}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\left| f_\mu (x_{i-1\mu}) \right| - \left| f_j (x_{i-1\mu}) \right| + \bar{\bar{o}}(1) \right)^2 \frac{\tau}{N}.$$

Суммы

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\left| f_\mu (x_{i-1\mu}) \right| - \left| f_j (x_{i-1\mu}) \right| + \bar{\bar{o}}(1) \right)^2 \frac{\tau}{N}$$

сходятся при $N \to \infty$ к интегралам

$$\mathrm{I}_{\mu,j}(x_{0\mu}) = \int\limits_{x_{0\mu}}^{x_\mu(\tau)} \left(\left| f_\mu (x_\mu) \right| - \left| f_j (x_\mu) \right| \right)^2 dx_\mu ,$$

для которых, в силу невырожденности уравнений (7.3), найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\mathrm{I}_{\mu,j}(x_{0\mu}) > \varepsilon$ для любых μ, $j = 0,\ldots,l$, $\mu \neq j$, при любом $x_{0\mu} \in \pi_k$.

Таким образом, показано, что

$$S_j^N (x_{0\mu}) \cong \frac{c_{\mu j}}{N},$$

где $c_{\mu j}$ – некоторые константы такие, что $c_{\mu j} > \varepsilon\tau$, то есть

$$\lim_{N\to\infty} N S_j^N (x_{0\mu}) = c_{\mu j} > \varepsilon\tau$$

для всех $x_{0\mu} \in \pi_k$.

Так как к тому же $M_j(N) = \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{N} \right)$, то найдется N_1 такое, что будет выполняться для всех $N > N_1$ неравенство

$$S_j^N(x_{0\mu}) > \frac{\varepsilon\tau}{N} > M_j(N) \tag{7.18}$$

для всех $\mu \neq j$ и для всех $x_{0\mu} \in \pi_k$.

Это означает, что будут отбрасываться все j-е гипотезы при $j \neq \mu$ и будет выполняться только неравенство

$$S_\mu^N(x_{0\mu}) \leq M_\mu, \quad (\mu = j)$$

то есть $l_\mu(x_{0\mu}) = 1$.

Таким образом, в случае точных траекторных измерений возникшая в системе неисправность из априорного списка неисправностей будет однозначно отфильтровываться.

Процедура диагностирования неисправности сводится к следующему.

Алгоритм 1. *В процессе функционирования объекта после выхода его траектории на поверхность контроля* π_k *формируются, в соответствии с функционалом диагностирования (7.7), (7.9), числа* S_j^N, *и каждое число* S_j^N *сравнивается с заранее подобранными константами* M_j. *Если* $S_j^N \leq M_j$, *то j-я система (7.3) включается в апостериорный набор* l_j, *в противном случае – исключается. Теорема утверждает, что, таким образом, номер функционального состояния объекта (неисправности) из известного списка может быть диагностирован однозначно, то есть* $l_j = 1$.

Прежде чем изложить методику априорного счета параметров алгоритма 1, рассмотрим доказательство второй части (7.11) теоремы. В силу непрерывности функционала S_j^N, оно очевидно вытекает из доказательства первой части теоремы.

Действительно, пусть S_j^N удовлетворяет условию (7.11). Возьмем $\overline{N} = \max_j N_j$, где N_j – число траекторных измерений для j-й системы (7.3) и такое, что для всех $N > N_j$ выполняется оценка (7.18).

Тогда при любых $N > \overline{N}$ условия

$$S_j^N > \frac{\varepsilon\tau}{N} > M_j(N)$$

выполняются для всех упомянутых j.

Пусть произошла μ-я неисправность, то есть действительная траектория является одной из списочных и $S_j = \min\limits_{\mu} S_\mu^N$.

Тогда

$$S_j > M_\mu \text{ для } \mu \neq j,$$

$$S_j \leq M_\mu \text{ для } \mu = j.$$

Таким образом, и в случае $S_j = \min\limits_{\mu} S_\mu^N$ теорема верна и в пределе на интервале [0, τ] можно диагностировать все системы (7.3) из априорного списка.

На этапе проектирования процесс предварительного выбора N на уровне математических моделей и программ может быть осуществлен следующим образом (алгоритм 2).

Алгоритм 2. *После выхода траектории объекта на поверхность контроля* π_k *формируются, в соответствии с функционалом диагностирования, для всевозможных* j *из списка заранее известных неисправностей объекта (7.3) и* $N = 1$ *составляются числа* S_j^N, *из которых выбирается наименьшее* S_{j1}. *Номер* j_1, *соответствующий наименьшему* S_j, *указывает номер случившейся неисправности. Затем вычисляется* S_j^N *для* $N = 2$ *и определяется* j_2. *При равенстве* $j_1 = j_2$ *неисправность в объекте считается правильно определенной, и алго-*

ритм заканчивает работу. В противном случае, то есть если $j_1 \neq j_2$, *вычисляется* S_j^N *для* $N = 3$ *и производится сравнение* j_2 *и* j_3 *и т. д.*

Если τ не ограничено заранее сверху, то при осуществлении этого процесса может быть определен момент времени $\tau\ (\tau = Nh)$ окончания диагностирования.

Таким образом, теорема доказана. Строго говоря, доказана теорема, и сформулированы алгоритмы, позволяющие диагностировать неисправности, предусмотренные априорным списком неисправностей. Однако, в силу непрерывности происходящих процессов при работе алгоритмов и в силу определений окрестностей влияния, введенные в главах 2 и 3, удовлетворяющие критерию контроля неисправности, возникшие и развивающиеся в окрестностях списочных неисправностей, то есть неисправностей, близких списочным, возможно ведущих к ним, но не являющихся ими, будут диагностироваться с помощью предлагаемых алгоритмов как соответствующие списочные неисправности, близкие к происшедшим. Поэтому можно считать теорему доказанной полностью.

Теорема позволила сформулировать два алгоритма диагностирования. Первый из этих алгоритмов требует запоминания констант.

Рассмотрим методику априорного счета этих констант и параметров алгоритма 1.

Параметрами алгоритма диагностирования являются M_j, N, l_j, а также вероятность отбросить верную гипотезу, то есть вероятность ложного срабатывания λ. Непосредственно для алгоритма диагностирования требуются только M_j и N. Эти параметры рассчитываются заранее и вносятся в вычислитель на объекте. Что же касается параметров λ и l_j, то они являются показателями эффективности алгоритма.

Заметим, что задача аналитического нахождения в общем виде приемлемых констант $N, M_j, j = 0,\dots l$, обеспечивающих заданную величину λ и l_j уже в случае линейных систем (7.3), крайне трудна. В то же время, для конкретных систем (7.3) выбор N, нахождение M_j, счет оценок для λ и l_j с высокой заданной точностью можно проводить на ЭВМ методом статистических испытаний Монте-Карло, то есть построением искусственной вероятностной модели, обладающей свойствами изучаемого процесса.

Очевидно, что функции (7.7) $S_j^N, j = 0,\dots,l$, зависят от реализации начального положения $x_0 \in X^0$, , то есть являются неотрицательными случайными величинами; $l_j(x_0), x_0 \in \pi_k$, также можно рассматривать как функции случайных точек выхода траектории j-й системы на поверхность контроля, то есть $l_j(x_0)$ также являются случайными величинами. Если ввести функцию плотности $P_j(\zeta), \zeta \geq 0$, случайных величин S_j^N, то M_j будет параметром этой функции:

$$\int_{M_j}^{+\infty} P_j(\zeta) d\zeta = \lambda.$$

Имея это в виду, сформулируем задачу априорного определения параметров M_j и N [8].

Пусть даны j-я система (7.3), поверхность контроля π_k и вероятность ложного срабатывания λ. Требуется для любых случайным образом выбранных начальных условий $x_0 \in X^0$ определить такие M_j и N, чтобы с вероятностью, не превышающей λ, выполнялось неравенство $S_j^N > M_j$, то есть вероятность противоположного события

$$P\{S_j^N \leq M_j\} > 1 - \lambda$$

и при этом $l_j =$ `1.

Будем моделировать на вычислительной технике j-ю неисправность ($j = 1,\ldots l$) следующим образом. С помощью датчика случайных чисел реализуем начальную точку траектории π_k -й системы. Далее, интегрируя эту систему до поверхности контроля π_k и на отрезке времени $[0,\tau]$ за поверхностью, получим точки $x_{0j}, x_{1j}, \ldots, x_{Nj}$. Накладывая на эти точки некоторый нормально распределенный шум, получим требуемые нам точки для формирования чисел S_j^N.

Производя независимую выборку j-х неисправностей, мы будем получать и независимую выборку чисел S_j^N.

Объем выборки чисел S_j^N обозначим через γ, а оценку M_j по выборке объема γ обозначим через $\overline{M_j}$.

Проводя очередную реализацию, будем полагать $\overline{M_j}$ равным такому S_j^N из получившейся выборки, при котором отношение $\frac{\delta}{\gamma}$, где δ – количество точек, для которых выполнено неравенство $S_j^N > M_j$, наименее уклонялось от λ.

Оценкой $\bar{\lambda}$ для λ примем $\frac{\delta}{\gamma}$. Асимптотически, по теореме Бернулли, при $\gamma \to \infty$ оценка $\bar{\lambda} = \frac{\delta}{\gamma} \to \lambda$, а оценки $\overline{M_j} \to M_j$.

По интегральной теореме Муавра–Лапласа вероятность β того, что частота $\frac{\delta}{\gamma}$ отклонится от вероятности λ не более чем на α, приближенно [31] равна

$$\beta = P\left\{\left|\frac{\delta}{\gamma} - \lambda\right| \le \alpha\right\} \cong \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda(1-\lambda)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (7.19)$$

Задавшись приемлемыми α и β из (7.19), можно найти соответствующий объем выборки γ. При этом оценка $\overline{M_j}$ будет удовлетворять требуемой от $\bar{\lambda} = \frac{\delta}{\gamma}$ точности.

Итак, с требуемой к $\bar{\lambda}$ точностью найдем $\overline{M_j}$. В алгоритме в качестве λ и M_j будем применять их оценки $\bar{\lambda}$ и $\overline{M_j}$.

Определив, таким образом, M_j и, имея вместо λ близкую к ней вероятность отбросить верную гипотезу $\bar{\lambda}$, возьмем выборку *j*-х неисправностей объема γ_1. Она даст нам выборку $l_j(x_0)$. Обозначим через $l_j^{\kappa}(x_{0j}), \kappa = 1, \ldots, \gamma_1$, κ-ю реализацию $l_j(x_{0j})$.

За оценку $\overline{l_j}$ среднего l_j примем

$$\overline{l_j} = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{\kappa=1}^{\gamma_1} l_j^{\kappa}(x_{0j}),$$

а за оценку $\overline{\sigma_j}$ среднеквадратического отклонения σ_j примем

$$\overline{\sigma_j} = \left[\frac{1}{\gamma_1} \sum_{\kappa=1}^{\gamma_1} \left(\overline{l_j} - l_j^{\kappa}(x_{0j}) \right) \right]^{1/2},$$

при этом $\overline{l_j}$ является случайной величиной. Известно, что математическое ожидание оценки $\overline{l_j}$ удовлетворяет уравнению $\mathrm{M}(\overline{l_j}) = l_j$ а дисперсия оценки $\overline{l_j}$ (см. [1]) такова:

$$\mathrm{M}\left(\left(\overline{l_j} - l_j \right)^2 \right) = \frac{\sigma_j^2}{\gamma_1}.$$

Согласно центральной предельной теореме, если γ_1 велико (достаточно $\gamma_1 > 30$) и величины $l_j^{\kappa}(x_0), \kappa = 1,\ldots,\gamma_1$, не коррелированы, то $\overline{l_j}$ подчиняется нормальному распределению с математическим ожиданием l_j и среднеквадратическим отклонением $\frac{\overline{\sigma_j}}{\sqrt{\gamma_1}}$.

Следует заметить, что величина σ_i нам неизвестна, но приближенно (при больших γ_1) заменим ее оценкой $\overline{\sigma_j}$ и будем считать среднеквадратическое отклонение оценки $\overline{l_j}$ равным $\frac{\overline{\sigma_j}}{\sqrt{\gamma_1}}$. Таким образом, можно записать оценку для l_j в виде $\overline{l_j} \pm \frac{\overline{\sigma_j}}{\sqrt{\gamma_1}}$ [6].

Итак, задавшись N (например, $N = 1$) и λ, с требуемой точностью можно найти $M_j (j = 1,\ldots,l), \lambda$ и l_j. Если найденные l_j нас не устраивают, то можно увеличить N и произвести подсчет сначала. Продолжая процесс и опираясь на тот факт, что $l_j = 1$ при $N \to \infty$, можно найти такое N, при котором $l_j = 1$.

Можно поступить несколько иначе. Для каждой из систем (7.3) найти свои N_j и M_j такие, что $l_j = 1$. Тогда для любого $N > \max\limits_j N_j$ будет обеспечено условие $l_j = 1$.

Таким образом, для случая точных траекторных измерений теорема полностью доказана.

Рассмотрим далее обобщения, для которых условия теоремы не нарушаются.

1) Пусть заданы уравнения (7.8) и вектор диагностирования (7.6) $z(t)$. В этом случае вместо функционала (7.7) можно использовать функционал

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{q}\left(z_{ijs} - z_{is}\right)^2,\ q < n. \tag{7.20}$$

В поведении компонент вектора диагностирования $z(t)$ проявляется характер функций $f_j(x,t)$, $j = 1,\ldots,l$, поэтому, очевидно, что теорема и обусловленные ею алгоритмы диагностирования остаются справедливыми и при диагностике с помощью функционала (7.20). Доказательство теоремы для этого случая легко продублировать.

В связи с доказательством этой части теоремы сделаем два уточняющих замечания.

Замечание 1. Рассмотрим функционал (7.20), который запишем в следующем виде (индекс N для простоты опускаем):

$$S_j^d = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{ijk} - z_{ik}\right)^2,\ j = 1,\ldots,l,\ q < n\,,$$

и аналогичный функционал

$$S_j^\Delta = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(\Delta_{ijk} - \Delta_{ik}\right)^2,$$

в котором, подобно теореме, $\Delta_{ik} = \left|z_{ik} - z_{i-1k}\right|$, $\Delta_{ijk} = \left|z_{ijk} - z_{i-1jk}\right|$.

После возведения в квадрат и элементарных преобразований получим

$$S_j^\Delta = S_j^d + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{i-1jk} - z_{i-1k}\right)^2 +$$
$$+\ 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left|z_{ijk} - z_{ik}\right|\left|-z_{i-1jk} + z_{i-1k}\right|.$$

Вторая и третья суммы в выражении для S_j^{Δ} положительны, и из сходимости S_j^{Δ} следует сходимость S_j^d .

Замечание 2. Пусть *j*-я неисправность может быть диагностирована с помощью функционала S_j^d , то есть существует число M_j , такое что $S_j^d \le M_j$ и $S_J^d > M_j$ для некоторого $J \ne j$.

Покажем, что тогда эта неисправность может быть диагностирована и с помощью функционала S_j^{Δ} , в котором теперь $\Delta_{ik} = z_{ik} - z_{i-1k}$, с числом $\overline{M_j} = 4M_j$.

Действительно,

$$S_j^{\Delta} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{ijk} - z_{i-1jk} - (z_{ik} - z_{i-1k})\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{ijk} - z_{ik} - (z_{i-1jk} - z_{i-1k})\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{ijk} - z_{ik}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{i-1jk} - z_{i-1k}\right)^2 -$$

$$-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{ijk} - z_{ik}\right)\left(z_{i-1jk} - z_{i-1k}\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{ijk} - z_{ik}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{i-1jk} - z_{i-1k}\right)^2 +$$

$$+2\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left|z_{ijk} - z_{ik}\right|\left|z_{i-1jk} - z_{i-1k}\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{ijk} - z_{ik}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{i-1jk} - z_{i-1k}\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{ijk} - z_{ik}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left(z_{i-1jk} - z_{i-1k}\right)^2 = 4S_j^d .$$

Таким образом, из сходимости S_j^d к числу, меньшему M_j, следует сходимость S_j^Δ к числу, меньшему $4M_j$, и, тем самым, диагностирование *j*-й неисправности.

2) Если время диагностирования τ заранее не задано, то для каждой из систем (7.3) по изложенной процедуре можно выбрать свои N_j, M_j, и τ_j такие, при которых $l_j = 1$.

В этом случае для любых $N > \max\limits_j N_j$ и $\tau > \max\limits_j \tau_j$ будет выполнено условие $l_j = 1$, то есть диагностирование неисправностей при выбранных N и τ будет осуществляться однозначно.

Можно ставить задачу о выборе минимального τ.

3) За исходную точку начала процесса диагностирования в предыдущем выбиралась точка выхода траектории вектора контроля на поверхность контроля, то есть сначала решалась задача о наличии неисправности, а затем задача диагностирования. Алгоритм диагностирования включался только на поверхности контроля. Нас не интересовало поведение системы внутри поверхности контроля. Траектории систем с неисправностями из априорного списка на рассматриваемом интервале времени встречаются с поверхностью контроля. Такой подход не всегда бывает эффективным способом решения задачи о наличии неисправности в системе. Это проявляется в тех случаях, когда необходимо рассматриваются неисправности, не ведущие к нарушению устойчивости системы. Траектории систем с такими неисправностями могут не выходить на поверхность контроля достаточно длительное время или не выходить на нее вообще.

Поэтому в некоторых случаях целесообразно отказаться от использования поверхности контроля и строить алгоритмы непрерывной экспресс-диагностики. Суть такой диагностики состоит в том, что алгоритм диагностирования периодически включается в определенные моменты времени и работает на определенном временном интервале. Моменты включения алгоритма диагностирования и интервалы времени его работы могут вырабатываться заранее или в процессе движения объекта.

Рассмотренные выше алгоритмы диагностирования решают задачу диагностики систем управления и при непрерывной экспресс-диагностике как в случае диагностики только опорных неисправностей, так и таких, которые могут возникнуть в их окрестностях и не предусмотрены априорным списком!

4) Как уже отмечалось, набор функций $f_j(x,t)$ в (7.3) может содержать элементы с неполной информацией. Недоопределенность описания возникает в связи с тем, что законы изменения некоторых элементов в (7.3) могут отличаться от законов, предусмотренных в классе возможных неисправностей, и эти законы неизвестны.

В главах 2 и 3 даны определение и математическое моделирование окрестностей опорных неисправностей. Эти окрестности являются областями влияния опорных неисправностей в том смысле, что будут близкими траектории вектора состояния объекта с опорной неисправностью и с неисправностью, происшедшей в окрестности опорной неисправности. Если окрестности опорных неисправностей для данного датчика пересекаются, то большее влияние на неисправность, происшедшую в области пересечения окрестностей, будет у той опорной неисправности, у которой наблюдается большая близость траекторий.

В этом смысле не предусмотренные опорным списком неисправности, происшедшие в окрестностях опорных неисправностей, можно с помощью рассмотренных алгоритмов диагностировать как опорные неисправности. Алгоритмы не выявят конкретно происшедшую неисправность, а диагностируют одну из опорных неисправностей, в достаточно малой окрестности которой произошла конкретная неисправность.

5) Рассмотрим другие функционалы, близкие к (7.7) и решающие задачу диагностирования динамических управляемых систем в аналогичных или несколько отличных от уже рассмотренных условиях.

Предположим, что произошла неисправность, траектория вышла на поверхность контроля π_k и далее, в течение времени τ получены значения $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Надо проверить полную систему l возможных ситуаций: j-я ситуация $(j = 1, \ldots, l)$ – это утверждение о том, что траектория $x(t)$ есть траектория j-й системы (7.2), то есть $x \equiv x_j$ при условии $x_{0j} = x_0$.

Рассмотрим следующие l функционалов (см. (7.11)) от $x_0, x_1, \ldots, x_N, \Delta_1 x_j, \ldots, \Delta_N x_j$:

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \left| x_{ik} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk} \right|^2, \; j = 1, \ldots, l, \tag{7.21}$$

где $\Delta_i x_{jk}$ – приращение решения j-й системы (7.2) от начального значения x_{i-1} на отрезке времени $\frac{(i-1)\tau}{N} \le t \le \frac{i\tau}{N}$.

Смысл функционала (7.21) состоит в следующем. Проверяя j-ю возможную ситуацию на каждом шаге, происходит (в смысле квадратического отклонения) сравнение действительных и ожидаемых приращений x, то есть S_j^N характеризует среднеквадратическое отклонение ожидаемой траектории от траектории, реализующейся в действительности. Иначе говоря, с помощью функционала (7.21) осуществляется сравнение полей направления действительной и ожидаемых траекторий динамической управляемой системы (7.1).

Функционалы (7.7), (7.12) и (7.21) близки между собой, удовлетворяют условиям предельной теоремы диагностирования и, с помощью вытекающих из нее алгоритмов, конструктивно решают задачу диагностики динамических управляемых систем в случае достаточной малости ошибок траекторных измерений.

Сказанное распространяется и на случай меньшей размерности вектора диагностирования (7.6), то есть на случай, когда

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} \left| z_{ijk} - z_{ik} \right|^2, q < n, \tag{7.22}$$

или

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{q} \left| z_{ik} - z_{i-1k} - \Delta_i z_{jk} \right|^2, q < n, \tag{7.23}$$

поскольку компоненты вектора диагностирования несут достаточную информацию о характере функций f_j $(j = 1, \ldots, l)$ в правых частях уравнений (7.2).

Суммируемые разности в функционалах (7.7), (7.12) и (7.21)–(7.23) в случае достаточно малых расхождений действительной и ожидаемой траекторий могут оказаться малыми. Это усиливается квадратичной формой рассматриваемых функционалов. В некоторых случаях поэтому целесообразно иметь дело с видоизмененным функционалом. Выпишем такой функционал, сохранив прежнее обозначение, для случая (7.21):

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \left| x_{ijk} - x_{i-1k} - \Delta_i x_{jk} \right|^2, j = 1, \cdots, l. \tag{7.24}$$

Для функционала (7.24) также справедлива теорема диагностирования предыдущей главы и алгоритмы, которые из нее получаются.

Отметим, однако, следующее. В (7.24) фактически осуществляется численное дифференцирование измеренных значений на каждом шаге и суммирование модулей отклонений. Даже если ошибки измерений (шумы) малы, при суммировании модулей отклонений может получиться значительная случайная ошибка.

Вместо сумм (7.24), в которых производится суммирование модулей полей направлений, рассмотрим суммы самих отклонений

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}(\overline{x_{ik}} - \overline{x_{i-1k}} - \Delta_i x_{jk}), \qquad (7.25)$$

где $\bar{x}$ – измеренные значения действительной (в дальнейшем обозначается индексом «g») траектории динамической управляемой системы.

Функционал (7.25), как будет показано далее, с точностью до малых ошибок сводится к интегралу по траекториям

$$J_{gj} = \int_{\tau_0}^{\tau} (f_g(x(t)) - f_j(x(t)))dt\,, \qquad (7.26)$$

и разделение траекторий с помощью функционала (7.25) будет осуществляться однозначно.

В дальнейшем перейдем к более детальной оценке погрешности метода полей направлений в случае траекторных измерений с ошибкой.

В заключение настоящей главы отметим, что можно в функционалах использовать нормированные величины. Например (см. (7.20)),

$$S_j^N = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\left|z_{ijk} - z_{ik}\right|^2 \frac{1}{z_{ik}^2}.$$

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать расширенную постановку задачи диагностирования, решение которой осуществимо с помощью предложенных алгоритмов.

Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x' = F(x,u,t) = f_0(x,t),\ x_0 \in X^0, \tag{7.27}$$

где x – n-мерный вектор, характеризующий отклонение системы от режима, предписанного целью управления,
X^0 – ограниченное множество начальных условий.

Относительно управлений $u(t) = \|u_\nu(t)\|_{\nu=1}^{m}$ будем предполагать, что они принимают значения из ограниченной замкнутой области U, то есть

$$u(t) \in U. \tag{7.28}$$

Цель управления будет формализоваться тождеством

$$x(t) \equiv 0. \tag{7.29}$$

Рассмотрим далее функцию Ляпунова $v(x,t) \geq 0$ и пару

$$\{v(x,t); u(x,t)\}. \tag{7.30}$$

Пара (7.30) позволяет синтезировать допустимое управление (7.28), доставляющее асимптотическую устойчивость решению (7.29) нелинейной системы (7.27).

Пусть известен конечный набор

$$\mathrm{H} = \|\mathrm{H}_j\|_{j=1}^{l} \tag{7.31}$$

возможных опорных невырожденных неисправностей в системе управления объектом (7.27) и, значит, известен соответствующий набор функций управления

$$u = \left\| u_j \right\|_{j=1}^{l}. \tag{7.32}$$

Функции (7.32) не изменяют фазового пространства системы (7.27), отличаются той или иной неисправностью (7.31) и не обязательно удовлетворяют в области параметров системы (7.27) условиям асимптотической устойчивости решения (7.29), определяемые функцией $v(x,t)$ в (7.30). Управления (7.32) могут не принадлежать (7.28).

Конечному набору управлений (7.32) поставим в соответствие набор систем дифференциальных уравнений

$$x' = f_j(x,t),\ j = 1,\dots,l, \tag{7.33}$$

где $f_j(x,t)$ – соответствующие неисправностям (7.31) известные вектор-функции размерности $(n \times 1)$, отличные друг от друга и от функции $f_0(x,t)$ в (7.27).

Модели (7.27) и (7.33) принадлежат одному фазовому пространству и отличаются лишь структурой. Если в заранее неизвестный момент времени функция $f_0(x,t)$ в правой части уравнения (7.27) заменяется на одну из функций $f_j(x,t)$ из (7.33), то траектория системы (7.27) непрерывно продолжается одной из траекторий систем (7.33).

Объединим уравнения (7.27) и (7.33):

$$x' = f_j(x,t),\ x_0 \in X^0,\ j = 0,\dots,l. \tag{7.34}$$

Введем далее в рассмотрение вектор

$$z(t) = (x_{d_1},\dots,x_{d_q}) \equiv (z_1,\dots,z_q),\ q = 1,\dots,n, \tag{7.35}$$

компоненты которого являются измеряемым подмножеством компонент фазового вектора состояния системы $x(t)$ и, в соответствии с (7.35), функционал

$$S^j = \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{s=1}^{q} (z_{ijs} - z_{is})^2, \, q = 1, \ldots, n, \; j = 0, \ldots, l, \tag{7.36}$$

где z_{ijs} – значение s-й компоненты вектора $z(t)$ в момент $t_i = 1, \ldots, N_j$, полученное в результате интегрирования системы (7.34) с f_j в правой части,

z_{is} – значение s-й компоненты вектора $z(t)$, измеренное в момент времени t_i, N_j – минимальное число измерений компонент вектора $z(t)$, необходимое и достаточное (для данного шага h интегрирования j-й системы (7.34)) для диагностирования j-й неисправности.

Расширенную задачу диагностирования можно сформулировать следующим образом.

Пусть известны невырожденные уравнения (7.33), поверхность контроля π_k, некоторое функциональное состояние системы $x(\tau_0)$ в момент τ_0 выхода ее траектории на поверхность контроля, структура вектора (7.35) и функционала (7.36).

Требуется выбрать вектор $z(t)$, содержащий минимальное подмножество измеряемых компонент фазового вектора состояния $x(t)$ и такой, чтобы с помощью функционала

$$S_j = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{q} (z_{ijs} - z_{is})^2, \, N = \max_j N_j, \tag{7.37}$$

любая возникшая неисправность из априорного опорного списка (7.31) или происшедшая в ее окрестности $\mathrm{O} = \left\| \mathrm{O}_j \right\|_{j=1}^{l}$ и обусловившая выход вектора контроля $z(t)$ на поверхность контроля π_k, была однозначно диагностирована как одна из функций f_j в (7.33), то есть номер j функции f_j в правой части уравнений (7.31) (вне зависимости о того, какая неисправность произошла: предусмотренная опорным списком или в его окрестности) был однозначно определен за минимально возможное время $\tau - \tau_0$.

Иначе говоря, после выхода фазовой траектории системы в момент времени τ_0 на поверхность контроля π_k путем последующего слежения за внешней траекторией системы с помощью функционала (7.37) возникшие неисправности из заданного списка и их окрестностей должны быть однозначно диагностированы за минимально возможное время τ.

При реализации непрерывной экспресс-диагностики необходимо вместо уравнений (7.33) рассматривать уравнения (7.34).

В проведенном ниже вычислительном эксперименте показана реализация решения расширенной задачи диагностирования.

Перейдем теперь к более детальной оценке погрешности метода полей направлений в случае траекторных измерений с ошибкой.

ГЛАВА 8

Задача диагностирования (случай траекторных измерений с ошибкой)

До сих пор рассматривалась задача диагностики систем управления для случая точных траекторных измерений. На практике решение задачи контроля и поиска неисправностей сопровождается наличием случайных возмущений и, в частности, случайных возмущений, накладываемых на вектор диагностирования, который формируется из измеряемых координат вектора состояния. Задача контроля для случая траекторных измерений с шумом сформулирована и решена в главах 5, 6 с достаточной полнотой. Сформулируем некоторые промежуточные результаты, которые показывают, что и задача диагностирования в случае траекторных измерений с шумом может быть решена однозначно. Сначала, в рамках теоремы диагностирования предыдущей главы, дадим оценку погрешности в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю.

Полученные оценки справедливы и в случае, если в рассмотрение вводится вектор диагностирования $z(t)$, составленный из измеряемых координат вектора состояния.

Мы не будем останавливаться на доказательстве полученных оценок при выборе числа измерений фазовых траекторий на интервале времени $[0,\tau]$: это сравнительно просто можно сделать в рамках доказательства теоремы диагностирования. Сразу перейдем к рассмотрению общего подхода в диагностике в случае траекторных измерений с шумом.

Рассмотрим несколько видоизмененный функционал (7.23), который для простоты запишем в виде

$$S_{gj}=\sum_{i=1}^{N}\left|\overline{x_i}-\overline{x_{i-1}}+\Delta_i x_j\right|,\ j=0,\ldots,l, \tag{8.1}$$

где $\Delta_i x_j$ описывается общей одношаговой формулой

$$\Delta_i x_j=h\Phi_j(\overline{x_{i-1}},h) \tag{8.2}$$

и, как наиболее простой, формулой Эйлера

$$\Phi_j(\overline{x_{i-1}},h)=f_j(\overline{x_{i-1}}). \tag{8.3}$$

Для измеренных значений введем обозначения

$$\overline{x}(t)=x(t)+\xi(t), \tag{8.4}$$

где $x(t)$ – действительное положение системы в момент времени t,

$\xi(t)$ – ошибки измерений, ограниченные по модулю

$$|\xi(t)|\le\zeta(t) \tag{8.5}$$

заданными функциями времени $\zeta(t)$.

В соответствии с (8.2)–(8.4) составим суммы (8.1) в виде

$$S_{gj}=\sum_{i=1}^{N}\left|x_i-x_{i-1}+\xi_i-\xi_{i-1}-hf_j(x_{i-1}+\xi_{i-1})\right|. \tag{8.6}$$

В выражении (8.6) функции f_j, $j=0,\ldots,l$, разложим в ряд

$$f_j(x_{i-1}+\xi_{i-1})=f_j(x_{i-1})+\left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{\xi_{i-1}^*}\xi_{i-1}, \tag{8.7}$$

где ξ_{i-1}^* лежит на отрезке прямой, соединяющей точки x_{i-1} и $x_{i-1}+\xi_{i-1}$.

Сумму (8.6) с учетом (8.7) запишем в таком виде:

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^{N} \left| x_i - x_{i-1} - hf_j(x_{i-1}) + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x}\bigg|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|, \qquad (8.8)$$

где E – единичная матрица.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением формулы Эйлера (8.3). Учтем следующее приближение в разложении в ряд Тейлора и оценим его влияние на сумму (8.8), то есть оценим долю произведенного выше усечения.

Имеем:

$$x_i - x_{i-1} = hf_g(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2} f_g{}'(x(t))\Big|_{t=t_i^*}, \qquad (8.9)$$

где t_i^* – некоторая точка между t_{i-1} и t_i.

Подставим (8.9) в (8.8). Тогда

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^{N} \left| h(f_g(x_{i-1}) - f_j(x_{i-1})) + \frac{h^2}{2} f_g{}'(x(t))\Big|_{t_i^*} + \right.$$
$$\left. + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x}\bigg|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|. \qquad (8.10)$$

Рассмотрим далее два случая.

1) Пусть j совпадает с действительным функциональным состоянием рассматриваемого объекта, то есть $j = g$. В этом случае

$$S_{gj} = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{h^2}{2} f_g{}'(x(t))\Big|_{t_i^*} + \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_j}{\partial x}\bigg|_{\xi_{i-1}^*} \right) \xi_{i-1} \right|. \qquad (8.11)$$

Функции f_j дифференцируемы и имеют все непрерывные частные производные при любом $j = 0, \ldots, l$.

Поэтому, используя теорему о дифференцировании сложной функции, учитывая определение нормы матрицы и линейность отображения, задаваемого матрицей, получим следующую оценку для величины $\left| f_g\,'(x(t)) \right|$:

$$\left| \left. \frac{df_g(x(t))}{dt} \right|_{t_i^*} \right| = \left| \left. \frac{\partial f_g}{\partial t} \right|_{x_i^*} \right| = \left| \left. \frac{\partial f_g}{\partial x} \right|_{x_i^*} f_g(x_i^*) \right| \le$$

$$\le \max_{x \in D^*} \left(\left| \left. \frac{\partial f_g}{\partial x} \right|_x \right| \left| f_g(x) \right| \right) \le L_g < \infty$$

и оценку для члена, представляющего ошибку усечения:

$$\left| \frac{h^2}{2} f_g\,'(x(t)) \Big|_{t_i^*} \right| \le \frac{h^2}{2} L_g. \qquad (8.12)$$

Здесь x_i^* – некоторая точка траектории, соответствующая моменту времени $t = t_i^*$, D^* – замкнутая область, содержащая все отрезки траектории от τ_0 до τ, а также

$$L_g = \max_{x \in D^*} \left| f_g\,'(x) \right|.$$

Дадим теперь оценку ошибки измерения.

Так как величины $\left| f_g \right|$ и $\left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|$ ограничены в D^*, то ошибка измерения оценивается следующим образом:

$$\left| h \left. \frac{\partial f_g}{\partial x} \right|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right| \le h \left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|_{D^*} \xi_{i-1} \le h l_g \zeta_{\max}, \; \zeta_{\max} = \max_{[0,\tau]} \zeta(t). \qquad (8.13)$$

Максимум

$$l_g = \max_{x \in D^*} \left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\|$$

существует, так как D^* – замкнутая область и f_g – регулярная функция.

Во всяком случае,

$$\left\| \frac{\partial f_g}{\partial x} \right\| \le \sqrt{\sum_{\kappa, p} \left| \frac{\partial f_{g\kappa}}{\partial x_p} \right|^2} .$$

В силу (8.13) будет ограниченной ошибка одного шага измерения

$$\begin{gathered} \left| \xi_i - \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \bigg|_{\xi^*_{i-1}} \right) \xi_{i-1} \right| \le \left| \xi_i \right| + \left| \left(E + h \frac{\partial f_g}{\partial x} \bigg|_{\xi^*_{i-1}} \right) \xi_{i-1} \right| \le \\ \le \left| \xi_i \right| + \left| \xi_{i-1} \right| + h l_g \zeta_{\max} \le 2\zeta_{\max} + h l_g \zeta_{\max} . \end{gathered} \tag{8.14}$$

В силу (8.12) и (8.14) получим оценку суммы (8.11) (так как $Nh = \tau$):

$$\begin{gathered} S_{gj} \le N \frac{h^2}{2} L_g + 2N\zeta_{\max} + Nh l_g \zeta_{\max} = \\ \frac{\tau}{2} L_g h + 2\tau \zeta_{\max} \frac{1}{h} + \tau l_g \zeta_{\max} . \end{gathered} \tag{8.15}$$

Из (8.15) следует, что в рассматриваемом случае $S_{gj} \to \infty$ при $h \to 0$ из-за накопления модулей ошибки измерения. А вот при $h \to 0$ слагаемое $\tau l_g \zeta_{\max}$ ошибки измерения составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj} .

2) Пусть номер системы j не совпадает с действительным функциональным состоянием объекта, то есть $j \ne g$. В этом случае, в соответствии с (8.10),

$$\left| h\left(f_g(x_{i-1}) - f_j(x_{i-1})\right) + \frac{h^2}{2} f_g{}'(x)\Big|_{t_i^*} \right| \le hL_{gj} + \frac{h^2}{2} L_g$$

и, значит,

$$\begin{aligned} S_{gj} &\le NhL_{gj} + N\frac{h^2}{2}L_g + 2N\zeta_{\max} + Nhl_g\zeta_{\max} = \\ &= \tau L_{gj} + \frac{\tau}{2}L_g h + 2\tau\zeta_{\max}\frac{1}{h} + \tau l_g\zeta_{\max}, \end{aligned} \tag{8.16}$$

где

$$L_{gj} = \max_{x\in D^*}\left| f_g(x) - f_j(x)\right|.$$

Таким образом, и в этом случае за счет накопления ошибки измерения в (8.16) величина $S_{gj} \to \infty$ при $h \to 0$. Ошибка усечения в случае $j \ne g$ стремится к $\tau(L_{gj} + l_g\zeta_{\max})$.

Так как ошибка измерения стремится к ∞ при $N \to \infty$, а ошибка усечения при $N \to \infty$ составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj}, то при $h \to 0$ вероятность разделения действительной траектории объекта с происшедшей неисправностью и траекторий *j* систем стремится к нулю.

Возникает задача о выборе такого наименьшего $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. В соответствии с (8.15),

$$\min_h S_{gj} = \min_h \tau\left(\frac{1}{2}L_g h + 2\frac{\zeta_{\max}}{h} + l_g\zeta_{\max}\right) =$$

$$= \tau\left(\sqrt{\frac{\zeta_{\max}}{L_g}} + \sqrt{\frac{L_g}{\zeta_{\max}}} + l_g\zeta_{\max}\right)$$

достигается при

$$h = \bar{h} = 2\sqrt{\frac{\zeta_{\max}}{L_g}}.$$

Значение наилучшего $N = N^*$ будет, соответственно, равно

$$N = \overline{N} = 2\tau\sqrt{\frac{L_g}{\zeta_{\max}}}.$$

Таким образом, и в случае траекторных измерений с ошибкой, ограниченной по модулю известной функцией времени, можно для каждого $j = 1,\ldots,l$, в соответствии с (8.1), найти такие величины

$$S_{gj},\, M_j^* = \max_{x_0^j \in \pi_k^j} S_{gj},\, h_j^* = \min_h S_{hj},\, N_j^*,\, \tau_j^*,$$

что траектории систем с номерами $j = 1,\ldots,l$, с помощью алгоритмов диагностирования, сформулированных в предыдущей главе, будут разделяться однозначно.

Вместо сумм (8.1), в которых производится суммирование модулей отклонений полей направлений, будем рассматривать суммы самих отклонений. Составим следующие суммы:

$$\begin{aligned} S_{gj} &= \sum_{i=1}^{N}(\overline{x_i} - \overline{x_{i-1}} - hf_j(\overline{x_{i-1}})) = (\overline{x_N} - \overline{x_0}) - \sum_{i=1}^{N} hf_j(\overline{x_{i-1}}) = \\ &= (x_N - x_0) + (\xi_N - \xi_0) - \sum_{i=1}^{N} h\left(f_j(x_{i-1}) + \left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right) = \qquad (8.17) \\ &= \left(x_N - x_0 - \sum_{i=1}^{N} hf_j(x_{i-1}) \right) + \left(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^{N} h \left.\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|_{x_{i-1}^*} \xi_{i-1} \right). \end{aligned}$$

Величина $\sum_{i=1}^{N} hf_j(x_{i-1})$ в (8.17) есть интегральная сумма. Разлагая ее на каждом из интервалов времени $[t_{i-1}, t_i]$ в ряд Тейлора и затем суммируя, получим:

$$\sum_{i=1}^{N} hf_j(x_{i-1}) = \int_{\tau_0}^{\tau} f_j(x(t))dt - \sum_{i=1}^{N} \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x}\bigg|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^{*}),$$

где x_{i-1}^{**} – набор N некоторых «средних точек».

Следовательно, возвращаясь к (8.17), получим

$$\begin{aligned} S_{gj} &= (x_N - x_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} f_j(x(t))dt + \sum_{i=1}^{N} \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x}\bigg|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^{*})) + \\ &\quad +(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^{N} h \frac{\partial f_j}{\partial x}\bigg|_{x_{i-1}^{*}} \xi_{i-1}) = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau} (f_g(x(t)) - f_j(x(t)))dt + \sum_{i=1}^{N} \frac{h^2}{2} \frac{\partial f_j}{\partial x}\bigg|_{x_{i-1}^{**}} f_j(x_{i-1}^{*}) + \\ &\quad +(\xi_N - \xi_0 - \sum_{i=1}^{N} h \frac{\partial f_j}{\partial x}\bigg|_{x_{i-1}^{*}} \xi_{i-1}). \end{aligned} \tag{8.18}$$

Так как $|f_j|$ и $\left\|\frac{\partial f_j}{\partial x}\right\|$ ограничены, то ошибка усечения (в случае $j = g$) в (8.18) стремится к нулю при $h \to 0$, а ошибка измерения ограничена. Ошибка измерения с уменьшением h будет уменьшаться.

При $j \neq g$ ошибка измерения остается того же порядка, ошибка усечения при $h \to 0$ стремится к

$$I_{gj} = \int_{\tau_0}^{\tau} (f_g(x(t)) - f_j(x(t)))dt. \tag{8.19}$$

Таким образом,

$$S_{gj} = I_{gj} + \overline{\zeta}.$$

Если $I_{gj} >> \overline{\zeta}$, то разделение траекторий с помощью функционала (8.19) и сформулированных ранее алгоритмов будет осуществляться однозначно.

Рассмотрим далее случай траекторных измерений с шумом. До сих пор предполагалось, что ошибка измерения $\xi(t)$ в (8.4) ограничена по модулю заданной функцией времени (8.5). Предположим теперь, что эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2. Оценим дисперсию случайной ошибки измерения:

$$D\left(\xi_i - \left(E + h\frac{\partial f_g}{\partial x}\bigg|_{\xi^*_{i-1}}\right)\xi_{i-1}\right) =$$
$$= D\xi_i + D\left(E + h\frac{\partial f_g}{\partial x}\bigg|_{\xi^*_{i-1}}\right)\xi_{i-1} \le \sigma^2 + \sigma^2(1+hl_g)^2 \ge 2\sigma^2. \tag{8.20}$$

Таким образом, средняя ошибка одного шага измерения имеет порядок $\sigma\sqrt{2}$. Учитывая (8.12) и (8.20), можно провести следующую оценку:

$$S_{gg} \le \sum_{i=1}^{N}\left|x_i - x_{i-1} - hf_g(x_{i-1})\right| +$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left|\xi_i - \left(E + h\frac{\partial f_g}{\partial x}\bigg|_{\xi^*_{i-1}}\right)\xi_{i-1}\right| \cong \tag{8.21}$$
$$\cong N\left(\frac{h^2}{2}L_g + \sigma\sqrt{2}\right) = \tau\left(\frac{1}{2}L_g h + \frac{1}{h}\sigma\sqrt{2}\right).$$

Выражение (8.21) показывает, что $S_{gg} \to \infty$ при $h \to 0$.

В случае $j \ne g$, в соответствии с (8.10), можно провести оценку следующего вида:

$$S_{gj} \cong NhL_{gj} + N\frac{h^2}{2}L_g + N\sigma\sqrt{2 + 2hl_g + h^2 l_g^2} =$$
$$= \tau L_{gj} + \frac{1}{2}\tau h L_g + \frac{1}{h}\tau\sigma\sqrt{2 + 2hl_g + h^2 l_g^2}. \tag{8.22}$$

Таким образом, и в этом случае за счет накопления случайной ошибки измерения $S_{gj} \to \infty$ при $h \to 0$.

Ошибка усечения при этом стремится к τL_{gj}. Так как средняя ошибка измерения стремится к бесконечности при $N \to \infty$, а ошибка усечения при $N \to \infty$ составляет все меньшую и меньшую часть S_{gj}, то при $h \to 0$ вероятность разделения траекторий систем стремится к нулю.

Выберем такое наименьшее $h = h^*$, при котором еще возможно разделение траекторий. Оценим порядок наилучшего $h = h^*$. Минимум

$$S_{gg} \cong \min_h \tau\left(\frac{h}{2}L_g + \frac{1}{h}\sigma\sqrt{2}\right) = \tau\sqrt{2\sqrt{2}\sigma L_g}$$

достигается при

$$h = h^* \cong \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\sigma}{L_g}}.$$

Соответственно, порядок наилучшего N таков:

$$N = N^* \cong \tau\sqrt{\frac{L_g}{2\sqrt{2}\sigma}}.$$

Таким образом, дана оценка для наилучших значений $h = h^*$, $N = N^*$ и, значит, $\tau = \tau^*$. Если при этих наилучших значениях ошибка усечения достаточно мала, то диагностика неисправностей с помощью функционалов (8.1) и, значит, функционалов (8.8) в случае траекторных измерений с шумом позволяет получить, в некотором смысле, наилучший апостериорный набор возникших неисправностей.

Если раньше, как показано в случае точных траекторных измерений, пользуясь в алгоритмах диагностирования константами M_j или S_g, мы не могли отбросить верную гипотезу, то в случае траекторных измерений с шумом при любом выборе констант алгоритма диагностирования всегда будет существовать такая возможность.

Зададимся достаточно малой ненулевой допустимой вероятностью ε. Для разделения траекторий выберем константы M_j такие, что для любой траектории j-й системы

$$P\left\{S_{jj} \geq M_j\right\} < \varepsilon.$$

Иначе говоря, вероятность ложного срабатывания должна находиться в допустимых границах. При этом в случае траекторных измерений с шумом будем пользоваться теми же алгоритмами диагностирования, что и в случае точных траекторных измерений.

Перейдем теперь к рассмотрению метода интегралов в случае траекторных измерений с шумом.

Как уже отмечалось, ошибка усечения в (8.18) ($j = g$) не превосходит $\tau \frac{h}{2} L_g$, и эта ошибка стремится к нулю при $h \to 0$. Средняя ошибка обусловлена суммой $h\sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f_g}{\partial x}\right|_{\xi_{i-1}^*} \xi_{i-1}$ и, по теореме о сложении дисперсий независимых случайных величин, будет меньше или равна $h\sigma\sqrt{N} l_g$, а, следовательно, средняя ошибка измерения не будет превышать величины

$$\sigma\sqrt{2} + h\sigma\sqrt{N} l_g = \sigma\sqrt{2} + \sigma\sqrt{\tau h} l_g \tag{8.23}$$

и будет стремиться к $\sigma\sqrt{2}$ при $h \to 0$.

Формула (8.23) показывает, что средняя ошибка измерения зависит от постоянного слагаемого $\sigma\sqrt{2}$ и от $\sigma\sqrt{\tau h} l_g$. С уменьшением h ошибка, обусловленная шумом, уменьшается, и можно ожидать, что при

$$h < \frac{1}{\tau l_g^2}$$

будут достигаться достаточно хорошие результаты по разделению систем.

В случае $j \neq g$, как показывает выражение (8.18) для S_{gj}, ошибка измерения остается того же порядка, а ошибка усечения при $h \to 0$ стремится к интегралу (8.19). При $N \to \infty$ выполнено $S_{gg} \to \overline{\overline{\zeta}}$, где $\overline{\overline{\zeta}}$ – случайная величина, распределенная по нормальному закону с дисперсией $2\sigma^2$, при этом $S_{gj} \to I_{gj} + \overline{\overline{\zeta}}$. Если I_{gj} значительно больше дисперсии случайной величины $\overline{\overline{\zeta}}$, то разделение траекторий систем с помощью интеграла (8.19) в случае траекторных измерений с шумом будет осуществляться с высокой точностью. Константы M_j могут быть найдены, исходя из условия

$$P\left\{\left|S_{jj}\right| \geq M_j\right\} < \varepsilon.$$

ГЛАВА 9

Статистическое решение задачи дифференциальной диагностики

В предыдущей главе, в рамках доказательства предельной теоремы, была показана возможность диагностики динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с ошибкой ограниченной по модулю заданной функцией времени и в случае, если эта ошибка является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с дисперсией σ^2. Показано, что в этих случаях можно указать «наилучшее» число необходимых траекторных измерений, при которых возможно разделение траекторий неисправных систем, то есть точное определение происшедшей в системе неисправности.

Покажем теперь, что с помощью предложенных алгоритмов можно осуществить диагностику динамических управляемых систем в случае траекторных измерений с шумом, исходя из более общих вероятностных представлений [16].

В соответствии с (7.2) рассмотрим уравнения

$$x' = f_j(x,t),\ j = 1,\dots,l. \tag{9.1}$$

Предположим, что в момент $t = 0$ произошла j-я неисправность, то есть в правой части (9.1) присутствует одна из функций $f_j(x,t)$, причем это может быть любая f_j $(j = 1,\dots,l)$ с равной вероятностью.

Предположим, что доступен наблюдению вектор

$$z(t) = x(t) + \xi(t),$$

где $x(t)$ – вектор состояния системы,

$\xi(t)$ – случайный процесс типа нормального белого шума с нулевым средним значением и ограниченным спектром $W(\omega)$:

$$W(\omega)=\begin{cases} M_0, |\omega| \le \Delta; \\ 0, |\omega| > \Delta. \end{cases} \tag{9.2}$$

Величина $\xi(t)$ является ошибкой измерения вектора состояния системы $x(t)$.

На основе анализа наблюдаемого суммарного сигнала $z(t)$ можно вычислить распределение $P_z(x)$ для всех возможных значений сигнала $x(t)$. Распределение $P_z(x)$ называют распределением обратных вероятностей [33], так как оно указывает на то, каковы вероятности тех или иных значений причины x, если известно вызванное этой причиной следствие z.

На основе анализа этого распределения принимается решение о том, каково было значение сигнала $x(t)$, то есть в нашем случае – каков был номер правой части системы (9.1), решением которой является вектор x. Будем обозначать решение системы (9.1) с правой частью $f_j(x,t)$ буквой x с индексом j. Номер j может быть определен, например, на основе принципа максимальной обратной вероятности, то есть в качестве j принимается номер решения x_j, для которого вероятность $P_z(x_j)$ имеет наименьшее значение.

Вероятность $P_z(x)$ находится из соотношений

$$P(x,z)=P(x)P_x(z)=P(z)P_z(x),$$

где $P(x,z)$ – совместная вероятность двух случайных функций x и z,

$P_x(z)$ – условная вероятность z при заданном x,

$P(z)$ – безусловная вероятность z.

Тогда, заменяя $\frac{1}{P(z)}$ на постоянную K (так как нас интересует зависимость $P_z(x)$ при данном измеренном z), получим

$$P_z(x) = KP(x)P_x(z).$$

Постоянная K определяется из условия нормировки

$$\int_{A_x} P_z(x)dx = 1,$$

где A_x – область всех возможных значений x.

Величины $P(x) = P(x_j) = \frac{1}{l}$ (где l – число возможных правых частей (9.1)) априорно известны. Требуется найти зависимость $P_x(z)$ от x при данном измеренном z.

При данном $x_j(t)$ вероятность реализации $z(t)$ равна вероятности реализации $\xi_j(t) = z(t) - x_j(t)$.

Считая $\xi_j(t)$ и $x_j(t)$ статистически независимыми, получим [33,34]

$$P_x(z) = F(\xi_j) = \frac{1}{(2\pi M)^N} e^{-\frac{1}{M_0}\int_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t)dt},$$

где $M_0 = \frac{M}{2\Delta}$ – единичная интенсивность шума (9.2),

M – средняя интенсивность,

$N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$ (квадратные скобки в данном случае означают целую часть числа), Δ – ширина спектра, $\tau - \tau_0$ – время определения номера j (так называемое время диагностирования).

Таким образом,

$$P_x(z) = \frac{1}{(2\pi M)^N} e^{-\frac{1}{M_0}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}(z(t)-x_j(t))^2\,dt}.$$

Тогда

$$P_z(x_j) = \frac{K}{l}\frac{1}{(2\pi M)^N} e^{-\frac{1}{M_0}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}(z(t)-x_j(t))^2\,dt}. \qquad (9.3)$$

В силу того, что K и l постоянны, величина $(2\pi M)^N$ в (9.3) при конкретном $\xi(t)$ и заданном $\tau - \tau_0$ также постоянна; нахождение максимума обратной вероятности сводится к нахождению максимума величины

$$e^{-\frac{1}{M_0}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}(z(t)-x_j(t))^2\,dt}$$

или, что то же самое, к нахождению минимума

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau}(z(t)-x_j(t))^2\,dt \qquad (9.4)$$

(так как $M_0 = const$ при фиксированных M и Δ).

Величина (9.4), путем использования теоремы Котельникова о разложении случайной функции, может быть сведена от интеграла к сумме.

Действительно, так как время диагностирования $\tau - \tau_0$ задано , и характеристики шума $\xi(t)$ известны (в частности, известна ширина спектра Δ), то по теореме Котельникова [33, 34] существует число $N = [\Delta(\tau - \tau_0)]$ такое, что N значений $\xi_j(t_i), i = 1,\ldots,N$, $t_i = \frac{i}{\Delta}$, являются некоррелированными (а при нашем предположении о нормальности белого шума и статистически независимыми) координатами процесса $\xi_j(t)$, и на конечном интервале времени (τ_0, τ) применимо разложение вида

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \xi_j^2(t)dt = \sum_{i=1}^{N} \xi_j^2(t_i). \qquad (9.5)$$

Моменты времени t_i в (9.5) являются моментами измерений вектора $z(t)$ в процессе функционирования системы. Для тех же моментов времени t_i в бортовом вычислителе по модели объекта вычисляются все вектора состояний $\overline{x_j}$, $j = 1, \ldots, l$. Решающее правило определения номера j правой части (9.1) сформулируем теперь следующим образом.

На интервале времени (τ_0, τ) для всех возможных значений номеров j правой части (9.1) формируются суммы

$$S_j = \sum_{i=1}^{N} (z(t) - \overline{x_j}(t))^2. \qquad (9.6)$$

Число j, для которого значение S_j минимально, указывает номер правой части (9.1), то есть номер случившейся в системе неисправности.

Таким образом, в результате статистического решения задачи дифференциальной диагностики при траекторных измерениях с шумом получен алгоритм диагностики, аналогичный алгоритму, который влечет теорема главы 7, а также функционал диагностирования (9.6), который в теореме вводился априори, то есть получено замкнутое детерминированное решение задачи дифференциальной диагностики: получен функционал, решающий задачу, и указано правило его минимизации.

Полученный алгоритм верен и в случае, если вектор $z(t)$ содержит подмножество, несущее информацию о характере функций $f_j(x,t)$, $j=1,\dots,l$, в правых частях уравнений (9.1) $d < n$, измеряемых координат фазового вектора состояния $x(t)$.

Если динамическая управляемая система подвержена внутренним и внешним воздействиям шумов, и математическая модель движения этой системы так или иначе описывает эти шумы, то диагностика управления такой системой также может быть осуществлена с помощью полученного алгоритма.

ГЛАВА 10

Диагностика одной системы непрямого управления

(написана совместно с И.Т. Борисенком)

В качестве модельного примера рассмотрим систему с непрямым управлением, которая впервые изучалась Б.В. Булгаковым [35]:

$$T^2\eta'' + U\eta' + k\eta = T^2\xi,$$
$$\xi' = \varphi(\sigma), \sigma = a\eta + E\eta' + G^2\eta'' - \frac{1}{l}\xi. \tag{10.1}$$

Здесь постоянная T^2 характеризует инерционность объекта управления, $U > 0$ и $k > 0$ – его естественное демпфирование и восстанавливающую сил, a, E, G^2, l – постоянные параметры системы управления; $\varphi(\sigma)$ принадлежит к классу допустимых функций и удовлетворяет условиям $\varphi(\sigma) = 0$ при $\sigma = 0$, $\sigma\varphi(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$. Устойчивость системы (10.1) изучалась также в работах [36] и [37].

В задаче (10.1) мы будем считать, что параметры T^2, U, k не изменяются в процессе движения, а параметры a, E, G^2, l в процессе движения могут претерпевать изменения.

Необходимо прежде всего найти условия асимптотической устойчивости системы (10.1) в пространстве ее параметров.

1. Достаточные условия устойчивости. Уравнения (10.1) запишем в форме (1.11) ($\eta = x_1, \eta' = x_1' = x_2$):

$$x' = Ax + b\xi,$$
$$\xi' = \varphi(\sigma), \sigma = C^* x - \rho\xi. \tag{10.2}$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{U}{T^2} > 0,\ a_2 = \frac{k}{T^2} > 0,\ \rho = \frac{1}{l} - G^2,$$

$$\gamma_1 = E - U\frac{G^2}{T^2},\ \gamma_2 = a - k\frac{G^2}{T^2}.$$

Звездочкой обозначено транспонирование.

Матрица A в (10.2) является устойчивой, так как корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

имеют отрицательные действительные части (E – единичная матрица).

Уравнения (10.2) приводят к виду ($x' = \zeta$):

$$\begin{aligned} \zeta' &= A\zeta + b\varphi(\sigma), \\ \sigma' &= C^*\zeta - \rho\varphi(\sigma). \end{aligned} \tag{10.3}$$

При этом, для невырожденности преобразования

$$\begin{aligned} \zeta &= Ax + b\xi, \\ \sigma &= C^*x - \rho\xi \end{aligned} \tag{10.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A & b \\ C^* & -\rho \end{vmatrix} \neq 0. \tag{10.5}$$

Поскольку $|A| = a^2 \neq 0$, то из (10.5) получается условие

$$\rho \neq -C^* A^{-1} b = \frac{\gamma^2}{a_2} \text{ или } a \neq \frac{1}{l}\frac{k}{T^2}. \tag{10.6}$$

Задача состоит в определении такой области значений параметров регулятора, при которых гарантируется асимптотическая устойчивость решения системы (10.3).

Функцию Ляпунова возьмем в форме Лурье–Постникова

$$V = \zeta^* B\zeta + \int_0^\sigma \varphi(\sigma)d\sigma. \tag{10.7}$$

В силу уравнений (10.3)

$$-V = \begin{pmatrix} \zeta^* & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & d \\ d^* & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{10.8}$$

где

$$-C = A^* B = BA, \ -d = Bb + \frac{1}{2}C. \tag{10.9}$$

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}.$$

Если

$$p > 0, \ pr - q^2 > 0, \tag{10.10}$$

то матрица C положительно определена.

Из второго условия (10.10) следует, что

$$r > 0. \tag{10.11}$$

Из первого равенства (10.9) находим

$$\begin{aligned} p &= 2a_2 q_0, \\ q &= a_1 q_0 + a_2 r_0 - p_0, \\ r &= 2(a_1 r_0 - q_0). \end{aligned} \tag{10.12}$$

Определитель системы (10.12) относительно неизвестных p_0, q_0, r_0 равен $4a_1a_2 > 0$, поэтому система имеет единственное решение

$$p_0 = \frac{1}{2}\frac{a_1^2 + a_2}{a_1a_2}p - q + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1}r,$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{a_2}p, \tag{10.13}$$

$$r_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{a_1a_2}p + \frac{1}{2}\frac{1}{a_1}r.$$

Используем, далее, модификацию Лурье. На выбор параметров системы (10.3) наложим ограничение, положив $d = 0$. Тогда, в соответствии с (10.9), учитывая (10.13), получим два соотношения

$$\begin{gathered} p + a_2\gamma_2 = 0, \\ p + ra_2 + a_1a_2\gamma_1 = 0. \end{gathered} \tag{10.14}$$

Из первого равенства (10.14), в силу первого условия (10.10), следует, что $\gamma_2 < 0$, а из второго равенства (10.14), в соответствии с (10.11), заключаем, что и $\gamma_1 < 0$. Исключая, далее, p из (10.14) и учитывая (10.11), получим, кроме того, что $\gamma_2 > a_1\gamma_1$.

Таким образом, имеем три условия на параметры системы (10.1):

$$\gamma_1 < 0, \gamma_2 < 0, \gamma_2 > a_1\gamma_1. \tag{10.15}$$

К этим условиям необходимо еще добавить непосредственно следующее из (10.8) условие

$$\rho > d^*C^{-1}d = 0. \tag{10.16}$$

Неравенства (10.15) и (10.16) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости рассматриваемой системы.

В исходных обозначениях эти условия запишутся в следующем виде:

$$E < U\frac{G^2}{T^2}, \tag{10.17}$$

$$0 < k\frac{G^2}{T^2} - a < \frac{U}{T^2}\left(U\frac{G^2}{T^2} - E\right), \tag{10.18}$$

$$G^2 < \frac{1}{l}. \tag{10.19}$$

Рассмотрим трехмерное пространство параметров a, E, G^2. В этом пространстве условия (10.17)–(10.19) задают область $\overline{Y}$, целиком принадлежащую области Y асимптотической устойчивости исходной системы. Область $\overline{Y}$ ограничена следующими плоскостями:

I. $G^2 = \dfrac{ET^2}{U}$. **III.** $G^2 = \dfrac{1}{l}$.

II. $G^2 = \dfrac{aT^2}{k}$. **IV.** $G^2 = T^2\dfrac{\left(a - \dfrac{EU}{T^2}\right)}{\left(k - \dfrac{U^2}{T^2}\right)}$.

Условие (10.6) невырожденности преобразования (10.4) удовлетворяется во всех внутренних точках этой области. Номинальные значения $\overline{a}$, $\overline{E}$, $\overline{G^2}$ параметров a, E, G^2 выбирались внутри области $\overline{Y}$.

Перейдем теперь к рассмотрению численного примера и реализации алгоритмов задачи диагностики [13].

2. Исправная система. Пусть объект управления рассматриваемой системы (10.1) характеризуется следующими значениями параметров:

$$T = 1;\, U = 0,4;\, k = 1, \tag{10.20}$$

а параметры a, E, G^2 системы управления объектом имеют номинальные значения из области $\overline{Y}$:

$$\overline{a} = 0,5;\ \overline{E} = 0,2;\ \overline{G^2} = 0,5. \tag{10.21}$$

Кроме того, будем считать, что параметр обратной связи удовлетворяет условию

$$l = 1. \tag{10.22}$$

Система (10.1) с параметрами (10.20)–(10.22) асимптотически устойчива. Эту систему и будем считать исправной.

В качестве области начальных условий Н выберем сферу S_r радиуса r:

$$H = S_r : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le r^2. \tag{10.23}$$

Если выбрать $r = 0,7$, то любая траектория системы (10.1) с параметрами (10.20)–(10.22) и начальными условиями из области (10.23) за конечное время вернется в S_r и не выйдет оттуда, то есть будет лежать в области притяжения нуля.

3. Выбор сферы S_R**.** При выборе сферы S_R радиуса R использовалась идея метода статистических испытаний. Выбор точки в пространстве параметров производился следующим образом. Параметры a, E, G^2 считались независимыми нормально распределенными случайными величинами с математическими ожиданиями $\overline{a}, \overline{E}, \overline{G^2}$ и дисперсиями $\sigma_a^2 = 0,03$; $\sigma_E^2 = 0,005$ и $\sigma_{G^2}^2 = 0,03$, обеспечивающими близкую к единице вероятность попадания в область $\overline{\overline{Y}} \subset \overline{Y}$:

$$\overline{\overline{Y}} : \overline{a} \pm 3\sigma_a, \overline{E} \pm 3\sigma_E, \overline{G^2} \pm 3\sigma_{G^2}. \tag{10.24}$$

При выборе точки в области S_r начальных условий имелось в виду следующее обстоятельство. Будем считать, что при любых фиксированных параметрах из области $\overline{\overline{Y}}$ область S_r начальных условий целиком погружена в область притяжения начала координат. В этом случае любая траектория, начинающаяся из S_r, за конечное время вернется в S_r и уже не выйдет оттуда. Обозначим через X_H область фазового пространства, заполненную траекториями системы, начинающимися в S_r. Для отыскания границ X_H достаточно рассмотреть только те траектории, которые начинаются со сферы S_r, а в качестве поверхности контроля выбрать сферу S_R, охватывающую множество X_H.

Начальные условия считались независимыми равномерно распределенными по сфере

$$S_r : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 0,7^2. \tag{10.25}$$

Точка в пространстве параметров $\overline{\overline{Y}}$ (10.24) и точка в пространстве начальных условий на S_r (10.25) выбирались независимо друг от друга. В качестве сферы S_R была выбрана сфера радиуса $R = 1$, целиком содержащая множество X_H из более чем 600 траекторий.

4. Неисправные системы. В качестве неисправных рассматривались три системы (10.1) с параметрами:

	a	E	G^2	$1/l$
1	0,5	1,5	0,5	1
2	0,5	0,2	1,5	1
3	0,5	0,2	0,5	0

В первой системе неисправен датчик угловой скорости; во второй системе неисправным является прибор, вырабатывающий сигнал, пропорциональный угловому ускорению; в третьей системе оборвана обратная связь в исполнительном органе. Все три неисправности имеют различную физическую природу, они имеют различные размерности, то есть являются невырожденными. Все три неисправности доставляют неустойчивость рассматриваемой системе. Интегрирование уравнений (10.1) с параметрами, соответствующими неисправным системам, начиналось из точек, равномерно распределенных на сфере S_r радиуса $r = 0,7$.

5. Выбор констант M_j. Система уравнений (10.1) с параметрами a, E, G^2, l, соответствующими неисправным системам 1, 2, 3, интегрировалась по 450 раз.

Каждый раз после выхода фазовой траектории в момент времени τ_0 на сферу S_R радиуса $R = 1$ на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$, где $\tau = 0,2$ сек, для различных $N = 1, 3, 5$ осуществлялся подсчет чисел

$$S_j = \sum_{i=1}^{N}((x_{ij1} - x_{ig1})^2 + (x_{ij2} - x_{ig2})^2 + (\xi_{ij} - \xi_{ig})^2). \qquad (10.26)$$

Максимальное из 450 чисел S_j, полученных для каждой неисправной системы, $j = 1,2,3$, и определенного $N = 1,3,5$, выбиралось в качестве константы $M_j = \max S_j$ следующим образом:

M_j	$N = 1$	$N = 3$	$N = 5$
M_1	$0,50124 \cdot 10^{-4}$	$0,74702 \cdot 10^{-8}$	$0,43220 \cdot 10^{-9}$
M_2	$0,11825 \cdot 10^{-6}$	$0,14546 \cdot 10^{-10}$	$0,24749 \cdot 10^{-11}$
M_3	$0,12751 \cdot 10^{-6}$	$0,22850 \cdot 10^{-10}$	$0,13614 \cdot 10^{-10}$

Таблица показывает, что с ростом N константы M_j уменьшаются. Таким образом, каждой неисправной системе ставится в соответствие определенное число M_j.

6. Подсчет $\overline{K_j}, S_j, K_j$ и выбор *N*. С начальными условиями, равномерно распределенными на сфере S_r, интегрируется одна из неисправных систем $(j = 1, 2, 3)$. После выхода фазовой траектории на сферу S_R на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$ при определенном $N = 1, 3, 5$ осуществляется подсчет трех сумм S_j и их сравнение с соответствующими M_j, которые ранее были определены для данного N и j. Количество S_j, удовлетворяющих неравенству $S_j \le M_j$, будет $K_j^{\kappa}(x_0^i)$. Интегрирование уравнений определенной неисправной системы с различными начальными условиями повторяется $\kappa = 50$ раз и подсчитываются величины [8]:

$$\overline{K_j} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} K_j^{\kappa}(x_o^i),$$

$$\overline{\sigma_j} = \left[\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (\overline{K_j} - K_j^{\kappa}(x_o^i))^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$K_j = \overline{K_j} \pm \frac{\overline{\sigma_j}}{\sqrt{50}}.$$

Для рассматриваемой системы уравнений (10.1) с неисправностями 1, 2, 3 при произвольных начальных условиях на S_r, $\kappa = 50$ и $N = 1,3,5$ получалось $K_j = 1$ с ошибкой в вычислении, не превышающей 2%. Поэтому достаточно выбрать $N = 1$, то есть при одном измерении, исключая измерение начальных условий в момент выхода фазовой траектории системы на сферу S_R, алгоритм диагностирования позволяет точно определять рассматриваемые неисправности.

7. Реализация алгоритма восстановления. До сих пор априори определялись параметры алгоритма восстановления S_R, M_j, N и оценивалось качество этих параметров. Используем теперь найденные параметры для обнаружения возникшей неисправности и восстановления системы (10.1). Можно воспроизвести результаты математического эксперимента по восстановлению системы (10.1) при неисправном датчике угловой скорости, т.е. системы (10.1) с параметрами первой неисправной системы. Неисправность возникает в окрестности начала координат (0;0,01), и фазовая точка перемещается по некоторой фазовой траектории I. Если включен алгоритм поиска неисправности, то процесс восстановления осуществляется следующим образом. В момент τ_0 фазовая траектория неисправной системы встречается со сферой S_R; на интервале $[\tau_0,\tau]$ происходит поиск неисправности (формируются суммы S_j и сравниваются с соответствующими константами M_j; $N = 1$); в момент $\tau = 0{,}2$ сек происходит обнаружение неисправности и подключение исправной системы. После этого фазовая точка по некоторой фазовой траектории II возвращается в окрестность начала координат.

Аналогичный результат получается и в случае, когда в системе управления (10.1) доступна измерению только одна фазовая координата $x_1 = \eta$, а функционал диагностирования (10.26) имеет выражение

$$S_j = \sum_{i=1}^{N} (x_{ij1} - x_{ig1})^2, \ j = 1, 2, 3,$$

получается аналогичный вышеизложенному результат.

ГЛАВА 11

Диагностика одной системы прямого управления. Часть I

(написана совместно с И.Т. Борисенком)

Рассмотрим применение развиваемой методики диагностирования на интересном примере, взятом из теории летательных аппаратов (ЛА).

1. Уравнения движения. Рассмотрим летательный аппарат с прямым управлением, движение которого может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\begin{gathered} x' = Ax - b\delta, \\ \delta = \Phi(\zeta), \\ \zeta = r^T x + h\varphi(x, \delta, f(\eta)). \end{gathered} \tag{11.1}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – вектор, характеризующий состояние летательного аппарата;

δ – координата управления;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – постоянная устойчивая матрица.

Рассмотрим функционал

$$\varphi(x, \delta, f(\eta)) = \int_{t_0}^{t} (p^T x + q\delta - f(\eta))dt,$$

где $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ – постоянные столбцы;

q и h – постоянные скалярные величины;

T – символ транспонирования матрицы.

Функции $\Phi(\zeta)$ и $f(\eta)$ (η – формируемый сигнал обратной связи) принадлежат к классу допустимых функций: они определены и непрерывны при всех значениях ζ и η и удовлетворяют следующим (допустимым) условиям

$$\begin{aligned} &\Phi(\zeta)=0, \zeta=0; \zeta\Phi(\zeta)>0, \zeta\neq 0; \\ &f(\eta)=0, \eta=0; \eta\Phi(\eta)>0, \eta\neq 0. \end{aligned} \qquad (11.2)$$

Первая задача, которая возникает при исследовании системы (11.1), ставится следующим образом: найти такое формируемое значение η, которое не доставляет неустойчивости аппарату и обеспечивает выполнение цели управления. Целью управления может быть, например, отслеживание системой данного формируемого сигнала η.

Для решения этой задачи прежде всего необходимо найти условия, при выполнении которых система (11.1) является устойчивой.

2. Достаточные условия устойчивости. В дальнейшем требуется выражение для ζ'. В рассматриваемой системе (11.1) справедливо равенство:

$$\zeta'=r^T x'+h\varphi'=c^T x-\rho\Phi(\zeta)-hf(\eta), \qquad (11.3)$$

где

$$c=r^T A+hp^T=\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix}, \;\; \rho=r^T b+hq.$$

Функцию Ляпунова выберем в виде Лурье и Постникова

$$V=x^T Bx+\int_0^{\zeta}\Phi(\zeta)d\zeta. \qquad (11.4)$$

Производная по времени вдоль траектории системы (11.1) представится в следующем виде:

$$V'=x'^T Bx+x^T Bx'+\Phi(\zeta)\zeta'.$$

В силу (11.1) и (11.3)

$$-V' = \begin{pmatrix} x^T & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d^T & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Phi \end{pmatrix} + \Phi(\zeta) h f(\eta), \tag{11.5}$$

где

$$-C = A^T B + BA, \tag{11.6}$$

$$d = Bb - \frac{1}{2} c. \tag{11.7}$$

Для положительной определенности величины $-V'$ как квадратичной формы от x, Φ и f потребуем выполнение условий

$$C > 0, \tag{11.8}$$

$$\rho > d^T C^{-1} d, \tag{11.9}$$

$$h > 0, \tag{11.10}$$

$$\Phi(\zeta) f(\eta). \tag{11.11}$$

В дальнейшем воспользуемся модификацией Лурье. Положительную определенность величины $-V'$ гарантировать проще, положив

$$d = Bb - \frac{1}{2} c = 0. \tag{11.12}$$

В силу (11.12) из (11.9) следует, что

$$\rho = r_1 b_1 + r_2 b_2 + hq > 0. \tag{11.13}$$

Из (11.11) также следует, что функция $f(\eta)$должна иметь тот же знак, что и функция $\Phi(\zeta)$. Перейдем теперь к совместному решению уравнений Ляпунова (11.6) и уравнения (11.9). С этой целью выберем матрицы B и C в следующем виде:

$$B = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}. \tag{11.14}$$

Если в (11.14) принять, что

$$p > 0, r > 0, \tag{11.15}$$

то матрица C положительно определена.

С учетом (11.14) и уравнения Ляпунова (11.6), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} -p = 2\left(\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)p_0 - \frac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}}r_0\right), \\ -r = 2\left(\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)r_0 + \frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}p_0\right), \\ a_{11} + a_{22} \neq 0. \end{gathered} \tag{11.16}$$

Если определитель системы уравнений (11.16) относительно неизвестных p_0, r_0

$$\Delta = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \tag{11.17}$$

отличен от нуля, то система (11.16) будет иметь единственное решение. Предположим, что определитель (11.17) не равен нулю, и выпишем решение системы уравнений (11.16):

$$\begin{gathered} p_0 = \frac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)p - \frac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}}r\right), \\ r_0 = \frac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)r - \frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}p\right). \end{gathered} \tag{11.18}$$

При этом

$$q_0 = \frac{2}{\Delta}\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(a_{12}a_{22}p + a_{21}a_{11}r). \tag{11.19}$$

Выпишем, далее, учитывая (11.14), решение уравнения (11.12). Имеем:

$$
\begin{aligned}
&p_0 b_1 + q_0 b_2 = \frac{1}{2} c_{11}, \\
&q_0 b_1 + r_0 b_2 = \frac{1}{2} c_{22}.
\end{aligned}
\tag{11.20}
$$

Перепишем уравнения (11.20) с учетом (11.18) и (11.19):

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\Delta}\left\{\left(-b_1\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)+b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}\right)p+\right. \\
&\left.+\left(-b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}+b_2\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}\right)r\right\}=\frac{1}{2}c_{11}, \\
&\frac{2}{\Delta}\left\{\left(b_1\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\frac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}\right)p+\right. \\
&\left.+\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)r\right\}=\frac{1}{2}c_{22}.
\end{aligned}
\tag{11.21}
$$

Определитель системы (11.21) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\overline{\Delta}=&\left(-b_1\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)+b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}\right)\times \\
&\times\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}-b_2\left(a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)- \\
&-\frac{1}{(a_{11}+a_{22})^2}(-b_1a_{21}^2+b_2a_{21}a_{11})(b_1a_{12}a_{22}-b_2a_{12}^2).
\end{aligned}
\tag{11.22}
$$

Тогда решение системы (11.21) имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\left\{\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11} - \right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2 a_{21}a_{11} - b_1 a_{21}^2)c_{22}\right\},\\
r &= \frac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\left\{\left(b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_1\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22} - \right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_1 a_{12}a_{22} - b_2 a_{12}^2)c_{11}\right\}.
\end{aligned}
\tag{11.23}
$$

Учитывая (11.15), из (11.23) получим следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11} > \\
&\quad > \frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2 a_{21}a_{11} - b_1 a_{21}^2)c_{22},\\
&\left(b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_1\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22} > \\
&\quad > \frac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_1 a_{12}a_{22} - b_2 a_{12}^2)c_{11}.
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

Таким образом, если $a_{11}+a_{22} \neq 0, \Delta \neq 0, \overline{\Delta} \neq 0$, то выполняются условия (11.10), (11.13) и (11.24), а поэтому рассматриваемая система будет абсолютно устойчивой независимо от выбора допустимых функций Ф и *f*, удовлетворяющих условию (11.11). То есть все решения системы (11.1) будут сходиться к началу координат при $t \to +\infty$. При этом предполагается, что начало координат x_0 является единственной критической (особой) точкой системы (11.1).

Условие (11.11), в силу (11.12), легко может быть нарушено. Могут возникнуть и другие ситуации, которые обусловят нежелательные последствия, то есть обусловят нарушение цели управления. Поэтому возникает вторая задача при исследовании системы (11.1) – задача диагностирования нежелательных ситуаций, то есть диагностирования неисправностей, которые могут возникнуть в системе управления летательным аппаратом.

3. Априорный список неисправностей. Остановимся только на диагностировании отказов в системе управления летательным аппаратом (11.1). Рассмотрим отказы трех датчиков, так или иначе формирующих три обратные связи в системе управления объектом:

$$\textbf{1)}\ r_1 = 0. \tag{11.25}$$

$$\textbf{2)}\ r_2 = 0, p_2 = 0, q = 0. \tag{11.26}$$

$$\textbf{3)}\ \eta = 0. \tag{11.27}$$

4. Функционал диагностирования. Формируются суммы

$$S_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N}(x_{jk}(t_l) - x_{gk}(t_l))^2,\ j = 0,\ldots,3, \tag{11.28}$$

где $x_{jk}(t_l)$ являются значениями компонент вектора состояния рассматриваемой системы в момент t_l, $l = 1,\ldots N$, рассчитанными для j-й траектории по уравнениям (11.1) для исходной системы и систем с параметрами (11.25)–(11.27). Величины $x_{gk}(t_l)$ в (11.28) являются компонентами действительного вектора состояния, измеренного в моменты времени t_l, $l = 1,\ldots,N$.

Справедлива

Теорема. *Для конечного набора систем уравнений найдутся такие* S_j *и* N *(* $j = 0,\ldots,3$ *), что при* $S_i = \min S$ *возникшая в системе неисправность с неизвестным номером* i *в процессе движения объекта с помощью функционала (11.29) будет диагностирована однозначно.*

Из этой теоремы и вытекает алгоритм диагностирования: из всех чисел S_j выбирается наименьшее и номер i такого числа S_i принимается за номер случившейся неисправности. Под номером «0» в априорный список включена исходная (исправная) система (11.1). Алгоритм диагностирования включается циклически и, если он обнаруживает нулевую неисправность, то моделируется дальнейшее функционирование системы, если же номер j неисправности не был равен нулю, то выдается сигнал о возникновении j-й неисправности.

5. Численный эксперимент. На ЭВМ моделировалось поведение рассматриваемой системы, возникновение неисправности в системе и диагностика этой неисправности. Как уже отмечалось, априорный список содержал три неисправности, каждая из которых характеризует обрыв, соответствующий обратной связи в системе управления. В рассматриваемом примере вектор диагностирования был вектором состояния системы (x_1, x_2). Число измерений $N = 3$.

Моделировалось исправное движение системы, начинавшееся в момент $t_0 = 0$, затем возникновение неисправности № 1 в момент $t_1 = 15$ сек, включение алгоритма диагностирования в момент $t_2 = 20$ сек. Алгоритм правильно диагностировал неисправность в момент $t_3 = 24$ сек.

Неисправность № 2 моделировалась аналогичным образом, значения t_0, t_1, t_2, t_3 были такими же, как при моделировании неисправности № 1. Неисправность № 2 была определена в момент t_3 правильно.

Неисправность № 3 моделировалась следующим образом: начало функционирования – момент $t_0 = 0$, возникновение неисправности – $t_1 = 10$ сек, включение алгоритма – при $t_2 = 15$ сек. При первом включении алгоритм диагностировал систему как исправную, поэтому функционирование системы продолжалось, и алгоритм включился вторично в момент $t_3 = 30$ сек и правильно диагностировал неисправность № 3 в момент $t_4 = 34$ сек.

ГЛАВА 12

Диагностика одной системы прямого управления. Часть II

(написана совместно с И.Т. Борисенком)

В качестве численного эксперимента было рассмотрено движение летательного аппарата (ЛА), описываемого уравнениями, приведенными в [15]. ЛА находится в режиме планирующего спуска с высот, близких к орбитальным ($\cong$ 100 км), с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Воспроизведем полные уравнений движения ЛА [15] и покажем, что они приводятся к виду (1.5).

1. Уравнения движения. Эти уравнения имеют следующую структуру.

Динамические уравнения центра масс

$$V_{y_i}{}' = -W_{e_{y_i}} + g_{y_i} + \frac{F_{y_i}}{m}, \tag{12.1}$$

где V_{y_i} – проекции вектора путевой скорости ЛА V на оси системы координат M_{y_i}, связанной с географической вертикалью и ориентированной в азимуте в ортодромической координатной сетке,

$W_{e_{y_i}}$ – проекции составляющей ускорения точки M, обусловленной кривизной и вращением Земли на те же оси,

g_{y_i} – проекции ускорения силы тяжести,

F_{y_i} – проекции силы F, действующей на ЛА,

где $F = A + T$, A – аэродинамическая сила,

T – сила тяги двигателя, m – масса ЛА.

Кинематические уравнения движения центра масс имеют вид [15]:

$$\sigma_1' = \frac{V_{y_1}}{r\cos\sigma_2}, \sigma_2' = \frac{V_{y_2}}{r}, r' = V_{y_3}; \qquad (12.2)$$

где σ_1 и σ_2 – ортодромические долгота и широта точки M ЛА, r – радиус-вектор этой точки в системе O_{y_i}.

Уравнения движения ЛА вокруг центра масс в проекциях на оси M_s системы, жестко связанной с ЛА, таковы [15]:

$$I_{s_1}\frac{d\omega_{s_1}}{dt} + (I_{s_3} - I_{s_2})\omega_{s_2}\omega_{s_3} - I_{s_2s_3}(\omega_{s_2}^2 - \omega_{s_3}^2) = M_{s_1},$$

$$I_{s_2}\frac{d\omega_{s_2}}{dt} + (I_{s_1} - I_{s_3})\omega_{s_1}\omega_{s_3} - I_{s_2s_3}(\frac{d\omega_{s_3}}{dt} + \omega_{s_2}\omega_{s_3}) = M_{s_2}, \qquad (12.3)$$

$$I_{s_3}\frac{d\omega_{s_3}}{dt} + (I_{s_2} - I_{s_1})\omega_{s_2}\omega_{s_1} - I_{s_2s_3}(\frac{d\omega_{s_2}}{dt} - \omega_{s_1}\omega_{s_2}) = M_{s_3}.$$

Здесь $I_{s_1}, I_{s_2}, I_{s_3}$ – главные, а $I_{s_2s_3}$ – центробежный моменты инерции, ω_{s_i}, $i = 1, 2, 3,$ – угловые скорости ЛА в проекциях на оси M_s.

Так как $\omega_s = \omega_c + \alpha' + \beta' + \gamma_c'$, где ω_c – угловая скорость траекторной системы координат, α – угол атаки, β – угол скольжения, γ_c – угол скоростного крена, то имеем еще одну группу уравнений:

$$\omega_s = D_{sc}\omega_c + \gamma_c' D_{sc}\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix} + \beta'\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} + \alpha'\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}, \qquad (12.4)$$

которые можно разрешить относительно $\alpha', \beta', \gamma_c'$. Здесь D_{sc}, D_{sn} – матрицы перехода [15]. Кроме того, имеем группу уравнений, выражающих ω_c через U, σ_1, σ_2, ψ_c и θ, где U – угловая скорость вращения Земли, ψ_c – угол скоростного курса, θ – угол наклона траектории:

$$\omega_c = D_{cy}\left(U_y + \psi_c{}' \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} - \sigma_2{}' \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}\right) + \sigma_1{}' D_{c\zeta} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + \theta' \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad (12.5)$$

где $D_{cy}, D_{c\zeta}$ – соответствующие матрицы перехода [15].

Из определения углов ψ_c и θ следуют соотношения

$$\psi_c{}' = -\frac{V_{y_1}{}' \cos\psi_c + V_{y_2}{}' \sin\psi_c}{V\cos\theta},$$
$$\theta' = \frac{V_{y_3}{}' \cos\theta + \sin\theta(V_{y_1}{}' \sin\psi_c - V_{y_2}{}' \cos\psi_c)}{V}, \qquad (12.6)$$

где V – абсолютная величина вектора путевой скорости ЛА.

Уравнения (12.1)–(12.6) могут быть представлены в форме Коши как

$$x' = \mathrm{K}(x), \qquad (12.7)$$

где x – 14-мерный вектор

$$x = (V_{y_1}, V_{y_2}, V_{y_3}, \psi_c, \theta, r, \lambda, \varphi, \omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3}, \alpha, \beta, \gamma_c). \qquad (12.8)$$

Здесь рассмотрен случай, когда полюс ортодромии лежит на оси вращения Земли, т.е. $\sigma_1 = \lambda, \sigma_2 = \varphi$, где λ и φ – геоцентрические долгота и широта центра масс ЛА.

2. Структура системы управления ЛА. Аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА, определяются следующими выражениями

$$X = c_x \frac{\rho V^2}{2} S,\ \ Y = c_y \frac{\rho V^2}{2} S,\ \ Z = c_z \frac{\rho V^2}{2} S,$$

$$\frac{\rho V^2}{2} S b_a m_z,\ \ M_{s_2} = \frac{\rho V^2}{2} S l m_x,\ \ M_{s_3} = \frac{\rho V^2}{2} S l m_y, \tag{12.9}$$

где ρ – плотность воздуха на высоте полета,

S – характерная площадь ЛА,

b_a – средняя аэродинамическая хорда,

l – размах крыльев,

c_x, c_y, c_z – аэродинамические коэффициенты сил,

m_x, m_y, m_z – аэродинамические коэффициенты моментов.

Будем рассматривать аэродинамические коэффициенты в виде [15]

$$c_x = c_{x\alpha}(M,\alpha) + c_{xTP}(M,h),$$

$$c_y = c_{y\alpha}(M,\alpha) + c_y^{\delta_b}(M)\delta_b, \tag{12.10}$$

$$c_z = c_z^{\beta}(M,\alpha)\beta + c_z^{\delta_H}(M,\alpha)\delta_H,$$

$$m_z = m_{s_1} = m_{s_1\alpha}(M,\alpha) + m_{s_1}^{\omega_{s_1}}(M)\frac{b_a}{V}\omega_{s_1} + m_{s_1}^{\delta_b}(M)\delta_b,$$

$$m_x = m_{s_2} = m_{s_2}^{\beta}(M,\alpha)\beta + m_{s_2}^{\omega_{s_2}}(M)\frac{l}{2V}\omega_{s_2} +$$

$$+ m_{s_2}^{\omega_{s_3}}(M)\frac{l}{2V}\omega_{s_3} + m_{s_2}^{\delta_H}(M,\alpha)\delta_H + m_{s_2}^{\delta_Э}(M)\delta_Э, \tag{12.11}$$

$$m_z = m_{s_3} = m_{s_3}^{\beta}(M,\alpha)\beta + m_{s_3}^{\omega_{s_3}}(M)\frac{l}{2V}\omega_{s_3} +$$

$$+ m_{s_3}^{\omega_{s_3}}(M)\frac{l}{2V}\omega_{s_3} + m_{s_2}^{\delta_H}(M,\alpha)\delta_H.$$

Здесь δ_b, $\delta_Э$, δ_H – отклонение рулей высоты, элеронов и рулей направления, соответственно.

Структура системы управления отклонением рулей высоты, направления и элеронов зависит от выбранной программы движения. В данном случае было рассмотрено управления следующего вида:

$$\delta_u = f(\delta_{u\max}, \delta_u^0),\ u = b, Э, н, \tag{12.12}$$

где $\delta_{u\max}$ – максимальная величина отклонения δ_b, $\delta_Э$, δ_H, соответственно,

f – некоторая функция.

Переменные δ_u^0 определяются по следующим формулам [15]:

$$\delta_b^0 = r_1\omega_{s_1} - r_2\Phi[1] + f(\alpha_m, \sigma_e),$$

$$\delta_Э^0 = k_1\omega_{s_2} - k_2\Phi[2] + f(\gamma_m, \sigma_Э) + k_7\Phi[3], \tag{12.13}$$

$$\delta_н^0 = l_1\omega_{s_3} - l_2\Phi[3] + f(\beta_m, \sigma_н) + l_7\Phi[2].$$

Здесь $\Phi[1] = \theta', \Phi[2] = \gamma_n - \gamma_s', \Phi[3] = -\beta'$ – сигналы, поступающие с гироплатформы: значения углов тангажа (θ'), скольжения ($-\beta'$) и разности между программным (γ_n) и вычисленным в БЦВМ (γ_s') значениями угла крена. Сигналы с постоянными коэффициентами r_i, l_i, k_i формируются в зависимости от углового движения ЛА. Сигналы $f(\sigma_u)$ формируются в зависимости от характеристик траекторного движения ЛА. Здесь $f(\sigma_u)$ – также некоторая функция. Сигналы σ_u формируются в следующем виде:

$$\sigma_e = r_3(\alpha' - \alpha_n) + r_4(\dot{\alpha}' - \alpha_n) + r_5\int_{t_0}^{t}(\alpha' - \alpha_n)dt,$$

$$\begin{gathered}\sigma_Э = k_3(\sigma_{2n}^{0}{}' - \sigma_{2n}) + k_4(\dot{\sigma}_{2n}^{0}{}' - \dot{\sigma}_{2n}) + \\ +k_5\int_{t_0}^{t}(\sigma_2^0{}' - \sigma_2)dt + k_6(\psi_s{}' - \psi_{sn}),\end{gathered} \tag{12.14}$$

$$\begin{gathered}\sigma_н = l_3(\sigma_{2n}^{0}{}' - \sigma_{2n}) + l_4(\dot{\sigma}_{2n}^{0}{}' - \dot{\sigma}_{2n}) + \\ +l_5\int_{t_0}^{t}(\sigma_2^0{}' - \sigma_2)dt + l_6(\psi_s{}' - \psi_{sn}).\end{gathered}$$

Здесь величины K' – суть вычисленные в БЦВМ значения переменных, K_n – программные значения этих переменных, r_i, l_i, k_i – постоянные коэффициенты, $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ – контакты, ограничивающие значения сигналов траекторного автопилота.

Значения коэффициентов r_i, l_i, k_i приведены в таблице 1.

Таблица 1

1	2	3	4	5	6	7	
r	20	0	10	0	0	0	0
k	0,4	0,3	0	0	0	0	1
l	7	7	0	0	0	0	0,3

Уравнения (12.7) совместно с (12.8)–(12.13) и с учетом таблицы 1 могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{gathered}x' = X(x) + A(x)\xi, \\ \xi = \Phi(\delta), \\ \delta = Bx^{*} + f(\sigma), \\ \sigma = Cx^{**}.\end{gathered} \tag{12.15}$$

Здесь

$$x^* = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3}, \theta^*, \gamma_n - \gamma_s^*, -\beta^*),$$

$$x^{**} = (\alpha^* - \alpha_n, \psi_s^* - \psi_n, \sigma_s^* - \sigma_n),$$

– шестимерный и трехмерный вектора, соответственно, составляющие которых представляют значения некоторых координат фазового вектора состояния x, вычисленные в БЦМВ ЛА в процессе полета или сигналов, поступающих с гироплатформы; $\delta = (\delta_b^0, \delta_э^0, \delta_н^0)$ – трехмерный вектор переменных вида (12.13);

$$\Phi(\delta) = (f(\delta_{b\max}, \delta_b^0), f(\delta_{э\max}, \delta_э^0), f(\delta_{н\max}, \delta_н^0))$$

и

$$f(\sigma) = (f(\alpha_m, \sigma_b), f(\gamma_m, \sigma_э), f(\beta_m, \sigma_н))$$

– трехмерные векторы допустимых (1.3) нелинейных функций, имеющих вид (12.13)–(12.14), где $\sigma = (\sigma_b, \sigma_э, \sigma_н)$ – трехмерный вектор сигналов (12.14);

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & -k_2 & k_7 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 & l_7 & -l_2 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} r_3 & 0 & 0 \\ 0 & k_6 & 0 \\ 0 & 0 & l_6 \end{pmatrix}$$

– постоянные матрицы; в численном эксперименте коэффициенты k_6 и l_6 принимались равными нулю.

Уравнение $x' = X(x) + A(x)\xi$, где x – 14-мерный фазовый вектор (12.8) системы (12.15), $\xi = (\delta_b, \delta_э, \delta_н)$ – 3-мерный вектор управления, имеет $X(x)$ и $A(x)$ матрицы-функции с довольно громоздкими коэффициентами и здесь не приводятся.

Система (12.15) представляет собой систему с прямым перекрестным управлением по отклонениям рулей высоты, элеронов и направления.

3. Численный эксперимент. Моделировалось движение ЛА, представляющее собой планирующий спуск с высот, близких к орбитальным ($\cong 100$ км), с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Программное движение определялось заданием программного угла атаки и крена.

Численный эксперимент заключался в моделировании различных неисправностей в системе управления (12.13) и (12.14). Был составлен список возможных неисправностей, в соответствии с классификацией неисправностей, приведенной в главе 2.

Первый список возможных неисправностей включал следующие неисправности, происходящие в первом канале управления (12.13), т.е. в канале управления рулями высоты δ_b.

Априорный список неисправностей № 1.

Список состоял из 5 неисправностей.

1) *Отказ датчика угловой скорости* ω_{s_1}. Неисправность моделировалась путем обнуления коэффициента r_1 в (4.2) в момент времени $t = t_0$, t_0 – момент возникновения неисправности.

Таким образом, при неисправности № 1

$$r_1(t) = 0, t \geq t_0.$$

2) *Отказ при формировании сигнала* σ_b. Моделируется путем обнуления r_3 в (4.1):

$$r_3(t) = 0, t \geq t_0.$$

3) *Нарушение симметрии функции* $f(\delta_{b\max}, \delta_b^0)$. Моделируется путем замены $f(\delta_{b\max}, \delta_b^0)$ на $f(\delta_{b\max}, \delta_b^0 + \delta_{сдв})$, т.е. сдвига графика функции *f* по оси *x*.

4) *Заклинивание управляющего органа (руля высоты).* Моделируется как $\delta_b(t) = \delta_b(t_0)$ при $t \geq t_0$, где t_0 – момент возникновения неисправности.

5) *Активный отказ управляющего органа (руля высоты).* Значение δ_b в момент возникновения неисправности t_0 скачком меняется на $\delta_{b\max}$ – максимально возможное значение δ_b.

Неисправность моделируется как

$$\delta_b(t) = \delta_{b\max}, t \geq t_0.$$

В процессе полета тяжелого ЛА, уравнения движения которого рассмотрены выше, характерно наличие двух существенно отличных по временным характеристикам движений. Это движения вокруг центра масс с постоянными времени порядка минут.

Все перечисленные выше неисправности приводят к изменениям относительно исправного движения вокруг центра масс. В то же время движения ЛА относительно центра масс при различных неисправностях различны между собой и приводят к выходу на поверхность контроля через разные промежутки времени, начиная с момента возникновения неисправности.

Численное интегрирование исправной и соответствующих неисправных систем (12.15) проводилось с шагом $h = 0{,}8$ сек, характерным для движения относительно центра масс тяжелого ЛА с данными уравнениями движения.

Поверхность контроля.

Вектор контроля $y(t)$ для данной системы состоял из одной компоненты – угла атаки α. Множество начальных условий представляло собой сферу радиуса 0,1 в пространстве фазовых переменных с центром в точке

$$x_0 = (V^0_{y_1}, V^0_{y_2}, V^0_{y_3}, \psi^0_c, \theta^0 r^0, \lambda^0, \varphi^0, \omega^0_{s_1}, \omega^0_{s_2}, \omega^0_{s_3}, \alpha^0, \beta^0, \gamma^0_c).$$

Здесь

$$\begin{gathered} V^0_{y_1} = 7350 \text{ км}, \; V^0_{y_2} = 0, \; V^0_{y_3} = 0, \\ \lambda^0 = 0, \; \varphi^0 = 45^\circ, \; \omega^0_{s_1} = 0, \; \omega^0_{s_2} = 0, \; \omega^0_{s_3} = 0, \\ \alpha^0 = 0{,}519 \text{ рад}, \; \gamma^0_c = 0, \; \beta^0 = 0, \\ r^0 = 646572 \text{ м } (h = 100 \text{ км}). \end{gathered} \tag{12.16}$$

Промежуток времени процесса построения был выбран в следующих пределах: [0; 2000 – сек].

Для такого множества начальных условий X^0, вектора контроля $y(t)$ и априорного списка неисправностей методом статистических испытаний была получена поверхность контроля π_k – отрезок [0,499; 0,539] (в радианах). При исправном движении ЛА значение угла атаки находится внутри π_k. Поверхность контроля построена с доверительной вероятностью, не меньшей 0,95.

Обнаружение неисправностей.

Путем численного интегрирования системы (12.15) моделировалось исправное функционирование объекта (полет ЛА), затем возникновение некоторой (j-й) неисправности из априорного списка в момент времени t_0 и дальнейшее функционирование вплоть до выхода траектории на поверхность π_k. Времена выхода на π_k для разных неисправностей из списка приведены в следующей таблице.

Таблица 2

номер неисправности	1	2	3	4	5
время выхода на π_k (сек)	28	118	16	36	2.4

По выходе траектории на π_k включается алгоритм диагностирования с вектором диагностирования $z = \alpha$, т.е. содержащим ту же компоненту фазового вектора, что и вектор контроля.

Характеристиками алгоритма являются время диагностирования τ и число измерений N (так как численное интегрирование осуществлялось с шагом h = 0,8сек, то N и τ связаны соотношением $\tau = Nh$).

Численный эксперимент показал, что для всех номеров i из априорного списка неисправностей алгоритм диагностирования правильно определяет априорные неисправности при $N = 3$ (τ = 2,4 сек). Моделировалось также обнаружение неисправностей с вектором диагностирования $\bar{z} = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3})$. Численный эксперимент показал, что для $\bar{z}$ все неисправности из априорного списка определялись однозначно за число измерений $N = 3$.

Определение неисправностей не из априорного списка.

Располагая априорным списком неисправностей, можно определить неисправность, не находящуюся в списке. Но близкую к одной из списочных.

Были рассмотрены две неисправности не из априорного списка.

1) *Постепенное ухудшение качества показаний датчика угловой скорости* ω_{s_1} *вплоть до полного исчезновения поступающего с него сигнала.*

Эта неисправность моделировалась путем уменьшения r_1 до нуля по линейному закону:

$$r_1(t) = r_{1N} c_1 (t - t_0), t > t_0,$$

где r_{1N} – номинальное значение коэффициента r_1,

c_1 – отрицательная константа.

Достигнув нуля значение r_1 больше не меняется. Значение $r_1 = 0$ достигается за время $\tau \cong 30 \div 40$ сек, т.е. после выхода неисправной системы на поверхность контроля. Таким образом, эта неисправность близка к неисправности № 1 из списка № 1, но не совпадает с ней, так как в момент выхода на π_k коэффициент r_1 еще не равен нулю.

2) *Постепенный отказ в формировании сигнала* σ_b. *Моделируется как*

$$r_3(t) = r_{3N} c_3(t - t_0), t > t_0.$$

где r_{3N} – номинальное значение коэффициента r_3,

c_3 – некоторая отрицательная константа.

Достигнув нуля, r_3 далее не меняется. Значение $r_3 = 0$ достигается за время $\tau \cong 140 \div 150$ сек, т.е. после выхода системы на π_k. Эта неисправность близка к неисправности № 2 из списка № 1.

Обнаружение неисправностей 1 и 2 моделировалось следующим образом: возникновение неисправности № 1 (неисправности № 2) в момент t_0, включение алгоритма на выходе на π_k (время выхода на π_k для неисправности № 1–78 сек, для неисправности № 2 – 224 сек), включение алгоритма с одним из векторов диагностирования $z, \bar{z}$ и выбор минимума из S_j^N, $j = 1, \ldots, 5$.

Обнаружением неисправности № 1 (неисправности № 2) в данном случае является определение случившейся неисправности как неисправности № 1 (неисправности № 2) списочной.

Численное моделирование показало, что для $N = 5$ ($\tau = 4$ сек) алгоритм с векторами диагностирования z и $\bar{z}$ правильно обнаруживают неисправности № 1 и № 2.

Априорный список неисправностей № 2.

Каждая неисправность из этого списка характеризовалась наличием функций f_j, $j = 1,\ldots,17$, где f_j содержала j-й набор значений коэффициентов r_1, r_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 в цепях формирования сигналов $\delta_и^0$ автопилота. Различные комбинации приведены в таблице 3. В таблице N означает номинальное значение коэффициента. Из таблицы видно, что неисправности с номерами 1–3 относятся к первому каналу управления из (2), формирующему δ_b, с номерами 4–10 – ко второму ($\delta_э$), а с номерами 11–17 – к третьему ($\delta_н$).

По этим опорным неисправностям проводилось затем определение не списочных неисправностей в каналах управления. В этом случае распознавался только номер канала (при номере i минимального из чисел S_j^N, $j = 1,\ldots,17$, равном 1, 2 или 3, неисправность определялась как случившаяся в первом канале управления (δ_b), $i = 4,\ldots,10$, – во втором, $i = 11,\ldots,17$, – в третьем.

Таблица 3

Nw	r_1	r_3	k_1	k_2	k_3	l_1	l_2	l_3
1	0	N						
2	N	0						
3	0	0						
4			0	N	N			
5			N	0	N			
6			N	N	0			
7			0	0	N			
8			N	0	0			
9			0	N	0			
10			0	0	0			

Окончание таблицы

Nw	r_1	r_3	k_1	k_2	k_3	l_1	l_2	l_3
11						0	N	N
12						N	0	
13						N	N	0
14						0	0	N
15						N	0	0
16						0	N	0
17						0	0	0

Поверхность контроля π_k в данном случае при векторе контроля $y = \alpha$ и множестве начальных условий была получена такой же как и для априорного списка номера 1 (множество начальных условий такое же, как и для априорного списка № 1):

$$\pi_k : [0,499; 0,539].$$

Численное моделирование показало, что диагностирование неисправностей с векторами диагностирования $z = \alpha$ и $\bar{z} = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3})$ за число измерений $N = 8$ ($\tau = 6,4$ сек) привело к правильному определению номера канала, в котором произошла неисправность. Набор не списочных неисправностей, для которых проводилось определение номера неисправного канала, приведен в таблице 4.

Номинальные значения коэффициентов в цепях управления (12.15) приведены в таблице 1. При этом

$$r_1 = 20, r_3 = 10, k_1 = 7, k_2 = 1,$$

$$k_3 = 0,3, l_1 = 7, l_2 = 1, l_3 = 0,7.$$

Таблица 4

№ канала	Коэффициенты в цепи управления
1	$r_1 = 5$, $r_3 = 10$
1	$r_1 = 1$, $r_3 = 5$
1	$r_1 = 0$, $r_3 = 2$
2	$k_1 = 0{,}5$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0{,}3$
2	$k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$
2	$k_1 = 3$, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$
3	$l_1 = 3$, $l_2 = 1$, $l_3 = 0{,}7$
3	$l_1 = 1$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0{,}3$
3	$l_1 = 1$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$

Обнаружение неисправностей без применения поверхности контроля.

Возможно обнаружение неисправностей по алгоритму диагностирования (см. главу 3) без построения поверхности контроля π_k. При этом:

1. Под номером 0 в априорный список неисправностей вносится исправная система.

2. Алгоритм диагностирования включается циклически, с некоторым интервалом Δt.

3. Если обнаружена «неисправность» под номером 0 – то есть система исправна, – продолжается функционирование объекта до момента нового включения алгоритма диагностирования.

4. Если обнаружена неисправность с номером $i \neq 0$, выдается сообщение о наличии этой неисправности.

Численное моделирование диагностики с циклическим включением алгоритма показало, что при интервалах включения алгоритма $\Delta t = 10, 20, 30$ сек все вышеперечисленные неисправности из априорного списка 1 и априорного списка 2 были правильно определены.

Алгоритм диагностирования работал с векторами диагностирования $z = \alpha$ и $\bar{z} = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3})$ и числом измерений $N = 5$ ($\tau = 4$ сек).

Таким образом, с помощью предлагаемого алгоритма диагностирования численным экспериментом показана возможность диагностирования неисправностей датчиков управляющих сигналов, формирующих СУ движением ЛА и, в частности, датчиков управляющих сигналов с гиростабилизированной платформы.

Таблица 3 представляет собой опорные неисправности. В этой таблице неисправности 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 17 формируются, в частности, отказами датчиков сигналов управления с гиростабилизированной платформы. Эти неисправности правильно диагностируются.

По опорным неисправностям (таблица 3) проводилось диагностирование не списочных неисправностей (таблица 4) в каналах управления движением ЛА (неисправности 5, 6, 8, 9 формируются в таблице 4 и с помощью отказов датчиков сигналов управления с гиростабилизированной платформы). В этом случае распознавался только номер канала управления движением летательного аппарата. Численное моделирование показало, что диагностирование неисправностей за вполне приемлемое время привело к правильному определению номера сигнала управления, в котором произошла неисправность.

Численный эксперимент, таким образом, показал работоспособность предлагаемого алгоритма диагностирования.

4. Диагностика в условиях измерения части фазового вектора. Для практического применения алгоритма диагностирования неисправностей, как показано в предыдущей главе численного эксперимента, требуется знание начальных условий для всего 14-мерного фазового вектора состояния x. Это несколько затрудняет возможность практического применения алгоритма диагностирования неисправностей.

Из системы уравнений (12.15) может быть выделена подсистема из 3-х уравнений относительно угловых скоростей ω_{s_i}. В виде Коши она может быть представлена как

$$\begin{aligned}
\omega_{s_1}' &= \frac{\rho V_e^2}{2}\frac{Sb_a}{I_{s_1}}\left(m_{s_1}^{\alpha} + m_{s_1}^{\delta_e}\delta_e + m_{s_1}^{\omega_{s_1}}\frac{b_a}{V_e}\omega_{s_1}\right) + \\
&\quad + \frac{I_{s_2} - I_{s_3}}{I_{s_1}}\omega_{s_2}\omega_{s_3} + \frac{M_{s_1}^{\partial}}{I_{s_1}}, \\
\omega_{s_2}' &= \frac{\rho V_e^2}{2}\frac{SL}{I_{s_1}}\Big(m_{s_2}^{\beta}(\beta - \beta_e) + m_{s_2}^{\delta_Э}\delta_Э + m_{s_2}^{\delta_н}\delta_н + \\
&\quad + m_{s_2}^{\omega_{s_2}}\frac{L}{2V_e}\omega_{s_2}\Big) + \frac{I_{s_3} - I_{s_1}}{I_{s_2}}\omega_{s_1}\omega_{s_3} + \frac{M_{s_2}^{\partial}}{I_{s_2}}, \\
\omega_{s_3}' &= \frac{\rho V_e^2}{2}\frac{SL}{I_{s_3}}\Big(m_{s_3}^{\beta}(\beta - \beta_e) + m_{s_3}^{\delta_н}\delta_н + m_{s_2}^{\omega_{s_2}}\frac{L}{2V_e}\omega_{s_2} + \\
&\quad + m_{s_3}^{\omega_{s_3}}\frac{L}{2V_e}\omega_{s_3}\Big) + \frac{I_{s_1} - I_{s_2}}{I_{s_3}}\omega_{s_1}\omega_{s_2} + \frac{M_{s_3}^{\partial}}{I_{s_3}}.
\end{aligned} \tag{12.17}$$

Эти уравнения имеют место при совпадении главных осей инерции со строительными осями, т.е. при тензоре инерции следующего вида

$$I = \begin{vmatrix} I_{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{s_3} \end{vmatrix}.$$

Здесь ρ, L, S, I_{s_i} – константы, m_{s_i} – медленно меняющиеся коэффициенты аэродинамических моментов, которые можно считать постоянными на времени работы алгоритма диагностирования. Величины ω_{s_i} – наблюдаются и, таким образом, начальные условия для уравнения (12.17) известны. Величины $\delta_e = \delta_b, \delta_э, \delta_н$ известны в любой момент времени, так как это – формируемое управление (здесь индекс $b = e$).

Таким образом, измеряя величины $V_e, \beta - \beta_e$, присутствующие а правой части, можно замкнуть систему уравнений (12.17) и численно ее интегрировать на некотором промежутке времени (диагностирования) $[t_0, T]$ с начальными условиями $\omega_{s_i}(t_0)$.

Численный эксперимент представлял собой диагностирование неисправностей из априорного списка № 1 в условиях неточных измерений величин $V_e, \beta - \beta_e$ (измеренные значения отличались (при каждом измерении) на $5 \div 10\,\%$ от действительных). Измеряемый вектор $z(t) = (\omega_{s_i}(t))$, компоненты расчетного вектора z_j получались путем численного интегрирования системы (12.17). Алгоритм диагностирования работал циклически (под № 0 в него была включена исправная система) с интервалом включения $15 \div 20$ сек и правильно определял происшедшее в системе управления ЛА неисправности за $10 \div 15$ измерений ($8 \div 14$ сек).

ГЛАВА 13

О диагностике алгоритмической модели гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата

(написана совместно с И.Т. Борисенком)

Задачу контроля работы гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением ЛА, можно решить другим способом, аналогично тому, как это предложено в главах 5, 6.

Сначала кратко опишем математическую модель гироплатформы.

Воспользуемся представлениями о математической модели трехосного гироскопического стабилизатора, которые изложены в работе [15], и ограничимся рассмотрением прецессионных уравнений.

Кинематическая схема трехосного гироскопического стабилизатора представить себе не трудно, кроме того, необходимо заметить, что система координат (*Mz*), жестко связана с летательным аппаратом.

Гиростабилизированная платформа, с которой связана система координат (*Mz*), подвешена в кардановом подвесе, обеспечивающим ей три степени свободы.

На платформе установлены три дважды интегрирующих гироскопа с двумя степенями свободы.

Через H_i и $\delta_i, i = 1,2,3,$ обозначим кинетические моменты гироскопов и углы разворота их кожухов. Будем считать $H_1 = H_2 = H_3 = H = const \cdot$

Стабилизация углов δ_i осуществляется двигателями стабилизации, установленными на осях карданова подвеса гиростабилизатора. Система стабилизации стремится свести углы δ_i к нулю.

Моменты, которые создаются датчиками моментов, установленными на осях прецессии гироскопов, обозначим через $M_{z_2}^1$, $M_{z_1}^2$, $M_{z_1}^3$, а абсолютную угловую скорость системы координат (Mz) – через $\omega_z = (\omega_{z_1}, \omega_{z_2}, \omega_{z_3})$. Если углы δ_i малы и мала угловая скорость платформы, то с точностью до величин второго порядка малости можно получить [15] следующее:

$$\omega_{z_1} = -\frac{M_{z_2}^1}{H}, \omega_{z_2} = \frac{M_{z_1}^2}{H}, \omega_{z_1} = -\frac{M_{z_1}^3}{H}. \tag{13.1}$$

Величины в правых частях уравнений (13.1) представляют собой командные значения угловой скорости прецессии гироплатформы. Если, например, гироплатформа должна сохранять неизменной свою первоначальную ориентацию в пространстве, то моменты в правых частях уравнений (13.1) должны быть равными нулю. В случае горизонтируемой площадки эти моменты вырабатываются в БЦВМ в зависимости от законов управления и параметров движения.

В реальных устройствах эти моменты реализуются с погрешностями.

Установим зависимость углов разворота рамок карданова подвеса гиростабилизатора от углов разворота ЛА. Рассмотрим две кинематические схемы карданова подвеса: трехрамочный и четырехрамочный.

1) Трехосную гироскопическую платформу расположим на ЛА таким образом, чтобы ось внешнего карданова кольца была направлена вдоль M_{s_2} – продольной оси ЛА, ось внутреннего кольца – вдоль оси M_{s_1}, направленной по правому

крылу, ось гиростабилизированного основания – вдоль оси M_{s_3}. Угол поворота гиростабилизированного основания относительно внутреннего кольца обозначим через φ_1, внутреннего кольца относительно внешнего – через φ_2, внешнего кольца относительно корпуса ЛА – через φ_3 (трехгранники (M_z) и (M_s) совпадают, если $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$). Переход от системы координат (M_z) к системе координат (M_s) задается последовательностью поворотов:

$$(M_z) \underset{3}{\overset{\varphi_1}{\rightarrow}} \underset{1}{\overset{\varphi_2}{\rightarrow}} \underset{2}{\overset{\varphi_3}{\rightarrow}} (M_s).$$

При идеальной работе системы трехгранник (M_z) совпадает с (My^0), начало которого совпадает с точкой *M*, а оси ориентированы относительно трехгранника $(O\zeta)$, задающего инерциальное пространство так же, как и у системы координат (Oy^0), связанной с иоцентрической вертикалью и ориентированной в азимуте в ортодромической координатной сетке.

Переход от системы координат (My^0) к системе координат (M_s) осуществляется последовательностью следующих поворотов [15]:

$$(My^0) \underset{3}{\overset{\psi_s}{\rightarrow}} \underset{1}{\overset{\theta}{\rightarrow}} \underset{2}{\overset{\gamma_s}{\rightarrow}} (M_s).$$

Здесь ψ_s – угол курса, θ – угол тангажа, γ_s – угол крена.

Таким образом, между углами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и ψ_s, θ, γ_s устанавливается следующее соответствие:

$$\varphi_1 = \psi_s, \varphi_2 = \theta, \varphi_3 = \gamma_s. \tag{13.2}$$

2) В четырехрамочной гиростабилизированной платформе, установленной на ЛА, устанавливается следующее соответствие [15]:

$$\varphi_1 = \psi^*, \varphi_3 = \theta^*, \varphi_4 = \gamma^*. \qquad (13.3)$$

Углы $\psi^*, \theta^*, \gamma^*$ являются аналогами углов курса, тангажа, крена.

Перейдем теперь к контролю и диагностированию работы гироплатформы.

Сформулируем задачу контроля применительно к системе, рассмотренной в предыдущей главе.

Вектор контроля выберем в виде

$$y(t) = (\psi_s', \theta', \gamma_s'). \qquad (13.4)$$

Здесь $\psi_s', \theta', \gamma_s'$ – углы курса, тангажа, крена (13.2), вычисленные алгоритмически.

Предположим, что наблюдение за компонентами выбранного вектора контроля (13.4) дает возможность судить о том, что гироплатформа, включенная в систему управления движением ЛА (12.15), исправна или, что процесс движения системы (12.15) осуществляется по траектории, обусловленной той или иной неисправностью гиростабилизированной платформы.

Задача контроля гироплатформы может быть сформулирована следующим образом.

В фазовом пространстве вектора контроля (13.4) требуется построить сферу $S_R(\psi_s', \theta', \gamma_s')$ с центром в точке $(\psi_n, \theta_n, \gamma_n)$, где $\psi_n, \theta_n, \gamma_n$ – программные движения, такую, чтобы фазовые траектории компонент вектора контроля (13.4) при интегрировании исправной системы с начальными условиями из выбранного ограниченного множества в течение времени T лежали внутри S_R, а траектории системы с той или иной неисправностью гиростабилизированной платформы из априорного опорного списка неисправностей пересекали поверхность S_R.

Решение сформулированной задачи можно осуществить методом статистических испытаний. Проводя розыгрыш начальных условий x^0 из ограниченного множества (12.16) и интегрируя с этими начальными условиями на интервале времени $[t_0, T]$ исправную систему, можно построить ансамбли фазовых портретов координат вектора контроля (13.4).

За сферу контроля S_R можно выбрать сферу, охватывающую объем ансамблей. Если через L обозначить длину отрезка от точки $(\psi_n, \theta_n, \gamma_n)$ до максимально удаленной точки этого объема, то радиус R сферы S_R можно выбрать таким, чтобы $R > L$.

Остается проверить, что поверхность таким образом выбранной сферы S_R пересекает фазовые траектории координат вектора контроля систем с опорными неисправностями гиростабилизированной платформы.

Для построения сферы контроля S_R в случае, когда система находится под воздействием малого шума, можно воспользоваться методом, изложенным в [16].

Таким образом, выход изображающей точки вектора контроля (13.4) на поверхность сферы S_R будет означать, что в системе произошла некоторая неисправность гиростабилизированной платформы.

Воспользовавшись, далее, алгоритмом диагностирования, который изложен в главе 8, выбрав, при этом, вектор $z(t) = y(t)$, можно диагностировать происшедшую в гиростабилизированной платформе конкретную неисправность.

Однако, уже на уровне решения задачи контроля сферу контроля S_R можно использовать для диагностирования датчика, вырабатывающего управление с гиростабилизированной платформы, в котором произошла неисправность и, значит, упростить задачу диагностики рассматриваемой гиростабилизированной платформы, переключив диагностику на неисправный датчик для обнаружения происшедшей конкретной неисправности.

Обнаружение неисправного датчика (канала управления) можно осуществить, если указать области на сфере S_R, в которые не могут попадать траектории компонент вектора контроля неисправной системы. Если такие области ненулевой меры существуют, и траектория соответствующей компоненты вектора контроля попадает в свою область, то соответствующая гипотеза отбрасывается сразу.

Для примера рассмотрим, применительно к задаче главы 4, следующую геометрическую структуру диагностического пространства.

Пусть даны три априорные опорные неисправности, характеризующие, например, отказы датчиков (каналов управления), которые вырабатывают управляющие сигналы $\psi_s', \theta', \gamma_s'$ с гиростабилизированной платформы. Рассмотрим, кроме того, сферу S_R и квадратичную форму

$$(y, y') = 0. \qquad (13.5)$$

Уравнением (13.5) для каждой из трех неисправных систем при розыгрыше начальных условий из сферы (12.16) и интегрировании этих систем определяется некоторый объем траектории каждой из компонент вектора контроля; границу каждого из этих объемов изнутри аппроксимируем конической поверхностью, пересечение которой со сферой S_R обозначим через S_R^j, $j = 1, 2, 3$.

Предположим, что для каждого *j* области S_R^j, $j = 1, 2, 3$ не пересекаются.

Фазовые траектории компонент вектора контроля $y(t)$, полученные интегрированием *j*-й системы с начальными условиями из сферы (12.16), будут выходить из сферы S_R через область S_R^j. Те из S_R^j, в которые попадают фазовые траектории компонент вектора контроля, сразу определяют номер неисправности. В противном случае, то есть, если фазовая траектория компонент вектора контроля попадает в области, в которые она не может попадать, соответствующая гипотеза отбрасывается сразу.

Таким образом, уже при решении задачи контроля можно диагностировать канал управления гиростабилизированной платформы, в котором произошла неисправность.

Очевидно, что описанный в настоящей главе подход можно использовать для диагностики неисправностей из диагностического пространства гиростабилизированной (изолированной) платформы.

Заключение

В настоящей работе на базе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений дана классификация опорных неисправностей и определены окрестности их влияния, дано математическое моделирование этих неисправностей и их окрестностей, рассмотрено свойство невырожденности дифференциальных уравнений, введено понятие диагностического пространства и его математической структуры.

Сформулирована постановка задачи дифференциальной диагностики; для случая точных траекторных измерений сформулирована и доказана предельная теорема о возможности однозначного распознавания возникшей в процессе движения опорной неисправности.

На базе теоремы сформулированы внешнетраекторные алгоритмы, при помощи которых осуществляется решение задач контроля и диагностирования опорных неисправностей. Показано, что предложенные алгоритмы позволяют диагностировать не только опорные неисправности, но по опорным и такие, которые могут возникнуть в окрестностях опорных, однако априори их невозможно предвидеть. То есть каждому датчику можно поставить в соответствие набор невырожденных опорных неисправностей, который с помощью предложенных алгоритмов однозначно позволит идентифицировать неисправный датчик.

Показано, что в случае траекторных измерений с ошибкой предельная теорема перестает быть справедливой, однако, при этом можно указать такое «наилучшее» число необходимых траекторных измерений координат вектора диагностирования, при котором предложенные функционал и алгоритм диагностирования работают и позволяют однозначно идентифицировать неисправности, возникающие в условиях шумов.

Исходя из более общих представлений, показано, что в случае траекторных измерений с шумом диагностика неисправностей осуществима и сводится к предлагаемому функционалу и алгоритму диагностирования.

В работе приводятся результаты математических экспериментов на ЭВМ, реализующих алгоритмы контроля и диагностирования, и подтверждающие их конструктивность и работоспособность.

Рассматриваются два иллюстрирующих модельных примера по диагностике систем с непрямым и прямым управлением, а также результаты двух экспериментов по диагностике неисправностей, возникающих в системе управления движением при планирующем спуске летательного аппарата с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости, и диагностике неисправностей, возникающих в условиях внутреннего и внешнего шума, в системе управления в плоском движении по глиссаде при посадке летательного аппарата.

На примере математической модели движения при планирующем спуске летательного аппарата с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости, показана осуществимость диагностики в условиях измерения части фазового вектора; при этом отпадает необходимость знания начальных условий для всего 14-мерного фазового вектора состояния. На этом примере рассмотрены, кроме того, два подхода в диагностике алгоритмической модели гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата.

Наконец, сформулируем еще раз расширенные задачи дифференциальной диагностики, решение которых, как показано выше, существуют, но полного доказательства (необходимых и достаточных условий) существования решений этих задач в рамках математических моделей и программ в настоящей работе не дано.

1. Расширенная задача контроля. Даны математическая модель движения исходной динамической системы (исправной), диагностическое пространство в этой системе, его математическая структура и математические модели движения динамической системы с опорными невырожденными неисправностями из класса возможных.

Требуется найти минимальный вектор контроля и построить соответствующую этому вектору минимальную поверхность контроля, решающую задачу контроля, то есть задачу обнаружения факта наличия неисправности в диагностическом пространстве динамической системы.

Иначе говоря, требуется построить поверхность контроля такую, чтобы фазовая точка минимального вектора контроля исправной системы не встречалась с поверхностью контроля, а фазовая точка вектора контроля неисправной системы с неисправностью из диагностического пространства, то есть с опорной неисправностью из априорного списка неисправностей или и неисправностью, «близкой» к опорной из ее окрестности, выходила на поверхность контроля.

Таким образом, диагностическому пространству требуется поставить в соответствие поверхность контроля, которая решает расширенную задачу контроля.

Более детальная постановка расширенной задачи контроля изложена в главе 6.

2. Расширенная задача диагностирования. Пусть известен конечный набор невырожденных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение исправной управляемой динамической системы и соответствующих неисправных систем с той или иной неисправностью из класса возможных, поверхность контроля, функциональное состояние динамической системы в момент выхода ее траектории на поверхность контроля, структура вектора диагностирования и функционал диагностирования.

Требуется выбрать вектор диагностирования, содержащий минимальное подмножество измеряемых компонент фазового вектора состояния динамической системы и такой, чтобы с помощью заданного функционала диагностирования любая возникшая неисправность из априорного опорного списка или происшедшая в ее окрестности и обусловившая выход вектора контроля на поверхность контроля, была однозначно диагностирована за минимально возможное время как одна из заданных систем дифференциальных уравнений из известного набора.

Иначе говоря, после выхода фазовой траектории в некоторый момент времени на поверхность контроля путем последующего внешнетраекторного слежения за динамической системой с помощью заданного функционала диагностирования возникшие неисправности в диагностическом пространстве должны быть однозначно диагностированы за минимально возможное время по известным опорным неисправностям.

Таким образом, любой неисправности из диагностического пространства, обусловившей встречу фазовой траектории динамической системы с поверхностью контроля, требуется поставить в соответствие одну из неисправностей из априорного списка опорных неисправностей.

Алгоритм, решающий расширенную задачу диагностирования, будет решать и задачу непрерывной экспресс-диагностики. При этом надо позаботиться только о выборе моментов времени включения алгоритма диагностирования.

О расширенной задаче диагностирования см. главу 8.

3. Задача диагностики. Пусть известен конечный набор невырожденных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих возможные движения управляемой динамической системы и значение фазового вектора состояния системы в некоторый заранее неизвестный момент времени (см. главу 5).

Требуется построить функционал (класс функционалов) и соответствующий этому функционалу алгоритм диагностики (класс алгоритмов диагностики), решающие в результате последующего слежения за траекторией системы задачу дифференциальной диагностики, то есть позволяющие однозначно обнаружить возникшую в диагностическом пространстве системы неисправность.

Иначе говоря, в результате слежения за траекторией управляемой динамической системы требуется установить однозначное соответствие между любой неисправностью из диагностического пространства системы и набором дифференциальных уравнений.

В настоящей работе показано, что решения сформулированных задач существуют и в некотором смысле единственны (см. также [43–49]).

Литература

1. Пархоменко П.П., Сагомонян Е.С. Основы технической диагностики. М.: Энергия, 1981.

2. Карибский В.В., Пархоменко П.П., Сагомонян Е.С., Халчев В.Ф. Основы технической диагностики. Кн. 1. М.: Энергия, 1976.

3. Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика, 1980. – № 3. – С. 96–121.

4. Майоров А.В., Москатов Г.К., Шибанов Г.П. Безопасность функционирования автоматизированных объектов. М.: Машиностроение, 1988.

5. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М.: Машиностроение, 1972.

6. Rutkovskij V.J., Zemlyakov S.D., Glumov V.M., et al. Adaptive algorithmic methods for diagnostics and faultless operation of control systems // Proc. 3rd IMECO Simposium on Technical Diagnostics, Moscow, 1983. Budapest, Publ. IMECO, 1985. Pp. 173–180.

7. Борисенок И.Т. Система управления с резервированием // Тр. III Всес. совещ. По автомат. управ. (техн. кибернетике). Одесса, 1963.

8. Борисенок И.Т. К вопросу о дифференциальной теории восстановления. Некоторые вопросы управления и устойчивости механических систем. Научн. тр. № 22 Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: Изд-во МГУ, 1973. – С. 101–108.

9. Эйкхофф М. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.

10. Беляков В.И., Борисенок И.Т. Метод моделей с использованием списка возможных дефектов при функциональном диагностировании динамических систем // Тез. докл. VIII симп. По пробл. избыточности в информ. сист. Ленинград, 1983. – Ч. 3.

11. Беляков В.И., Борисенок И.Т., Самсонов В.А. Об одном алгоритме непрерывной экспресс-диагностики // Автоматика и телемеханика, 1982. – № 3. – С. 113–116.

12. Беляков В.И., Борисенок И.Т. Об одном способе построения поверхности контроля в задаче диагностирования // Сб. темат. статей «Некоторые задачи динамики управляемого твердого тела». М.: Изд-во МГУ, 1982.

13. Борисенок И.Т., Локшин Б.Я. К вопросу о диагностике систем // Тез. докл. Всес. симп. по проектированию систем диагностики. Ростов-на Дону, май 1978.

14. Борисенок И.Т., Смаржевский И.А. Диагностика одной системы прямого управления // Тез. докл. Научн. чтений памяти В.Н. Челомея. М., Ин-т Машиноведения АН СССР, июнь 1989.

15. Окунев Ю.М., Парусников Н.А. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. М.: Изд-во МГУ, 1983.

16. Борисенок И.Т., Смаржевский И.А. Теория навигации и управления движущимися объектами. Механика функциональной диагностики системы управления движением летательного аппарата. Научн. отчет № 3930 Ин-та механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: Изд-во МГУ, 1990.

17. Борисенок И.Т., Шакотько А.Г. Разработка алгоритмов контроля и диагностики АКС. Научн. отчет № 4173 Ин-та механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: Изд-во МГУ, 1992.

18. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.

19. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949.

20. Minorsky N. Directional Stability of Automatically Steering Bodies, J. soc. Of Navel Endrs (May, 1922).

21. Lefschets S. Differential Equations: Geometric Theory, 2nd ed., Wiley, Interscience, New-York, 1963.

22. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1961.

23. Чикин М.Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика, 1987. – № 10. – С. 38–46.

24. Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика, 1994. – № 3. – С. 24–36.

25. Богатырев А.В., Пятницкий Е.С. Построение кусочно-квадратичных функций Ляпунова для нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1987. – № 10. – С. 30–38.

26. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987.

27. Борисенок И.Т., Беляков В.И. Построение областей допустимых отклонений для задачи контроля // Тез. докл. IV Всес. совещ. по техн. диагностике. Черкассы, 1979. – М., 1979. – Ч. 2. – С. 24–26.

28. Борисенок И.Т., Беляков В.И. Построение трубки для задачи контроля при движении по глиссаде // Тез. докл. II Всес. научн.-техн. конф. По безопасности полетов. Оптимизация процессов функционирования авиационной транспортной системы. Ленинград, 1979. – С. 46–47.

29. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Сб. обз. статей «Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы». – Ч. 2. – К 50-летию Института. – Тр. МИАН СССР. – Т.169. – М.: Наука, 1985. – С.194–252.

30. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969.

31. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1963.

32. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1970.

33. Гуткин Л.С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М., 1972.

34. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1989.

35. Булгаков Б.В. Колебания. М., 1954.

36. Летов А.М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматгиз, 1962.

37. Левшец С. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования. М.: Мир, 1967.

38. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Алгоритмы решения задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. матем. конф. «Еругинские чтения III», (Брест, 14–16.05.1996). – Брест, 1996, с. 102.

39. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Существование и единственность решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. 5 Межд. совещ.-сем. «Инженерно-физические проблемы новой техники» (Москва, 19–22.5.1998). – М.: Изд-во МГТУ, 1998. – С. 6–7.

40. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Существование решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. Конф., посвящ. 40-летию Института механики МГУ (22–26 ноября 1999 г.). – М.: Изд-во МГУ, 1999. – С. 259–260.

41. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фунд. и прикл. мат. – 1999. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 775–790.

42. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2001. – № 1. – С. 29–31.

43. Шамолин М.В., Шебаршов Д.В. Методы решения основной задачи дифференциальной диагностики / М., 1999. – 21 с. Деп. в ВИНИТИ 12.05.99, № 1500–В99.

44. Шамолин М.В., Шебаршов Д.В. Некоторые задачи дифференциальной диагностики // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (25–29.5.1999): Тезисы докладов (System Modelling). – Киев, 1999, с. 61.

45. Шамолин М.В., Шебаршов Д.В. Некоторые задачи дифференциальной диагностики // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». – Фунд. и прикл. мат. – 2001. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 305.

46. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Расширенная задача дифференциальной диагностики // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». – Фунд. и прикл. мат. – 2001. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 308.

47. Шамолин М.В. Задача диагностирования как главная задача общей задачи дифференциальной диагностики, In: Book of Abstracts of the Third Int. Conf. «Tools for Mathematical Modelling», Saint-Petersburg, Russia, 18–23 June, 2001; Saint-Petersburg State Tech. Univ., 2001, p. 121.

48. M.V. Shamolin, Foundations in diferential and topological diagnostics, In: Book of Abs. of Annual Scient. Conf. GAMM 2002, Univ. of Augsburg, March 25–28, 2002; Univ. of Augsburg, 2002, p. 154.

49. M.V. Shamolin, Foundations of differential and topological diagnostics, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 114, No. 1, 2003, p.p. 976–1024 (пер. «Итоги науки и техники», сер. «Современные проблемы математики и ее приложения», тематические обзоры, т. 88, «Динамические системы-12», 2001).

Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Замечания по бифуркации рождения цикла Пуанкаре–Андронова–Хопфа

Поскольку в основной части книги используются методы качественной теории исследования динамических систем, автор счел необходимым дополнить книгу следующими приложениями.

В приложениях 1–8 затрагиваются некоторые качественные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, от решения которых зависит исследование динамических систем. Обсуждению подлежат такие проблемы как бифуркация рождения предельного цикла из слабого фокуса (ср. с [196–198]); вопросы существования так называемых монотонных предельных циклов, наличия замкнутых траекторий, стягиваемых в точку по двумерным поверхностям, наличия замкнутых траекторий, не стягиваемых в точку по фазовому цилиндру; качественные вопросы теории топографических систем Пуанкаре и более общих систем сравнения для динамических систем на плоскости; проблемы существования и единственности траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки для систем на плоскости; элементы качественной теории монотонных векторных полей, а также вопросы существования длиннопериодических и устойчивых по Пуассону траекторий. В заключение предлагается некоторая простая методика интегрирования некоторых классов неконсервативных систем через элементарные трансцендентные (в смысле теории функций комплексного переменного) функции.

Приложение 9 написано совместно с Р.Р. Айдагуловым и излагает новый спектральный подход в динамике сплошной среды.

Во всех приложениях используется сквозная нумерация формул.

1. Общие теоремы о рождении предельного цикла

Цель этого параграфа – предложить достаточно простое, хотя и не исчерпывающее, изложение того, что обычно называют бифуркацией рождения предельного цикла из слабого фокуса, а также ее приложений к задачам динамики твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Исторически это восходит к работам Пуанкаре [196, 197] (1892 г.). Эта тема также обсуждалась А.А. Андроновым [3–13], начиная с 1930 г. Основные же работы Хопфа по данному вопросу появились в 1942 г. Хотя термин «бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа» (сюда иногда даже включают Фридрихса) был бы более точным, в западной литературе более распространен термин «бифуркация Хопфа». Причиной этого является то, что самый существенный вклад Хопфа – обобщение результата с двумерного случая на высшие размерности.

Бифуркация рождения цикла – это появление периодических орбит («автоколебаний») из устойчивой неподвижной точки при прохождении параметра через критическое значение. Хотя в наше время доказана возможность применения бифуркационной теории Хопфа к нелинейным параболическим уравнениям с частными производными, мы целиком и полностью ограничимся применением этой теории к обыкновенным дифференциальным уравнениям на плоскости.

Как было указано ранее, обычно к указанной бифуркации относят бифуркацию рождения устойчивого цикла из слабого асимптотически устойчивого положения равновесия.

Теорема 1 [61,197]. *Рассмотрим на плоскости автономную систему, заданную достаточно гладкими функциями* $X_1(x_1, x_2, \mu)$, $X_2(x_1, x_2, \mu)$

$$
\begin{aligned}
x_1' &= X_1(x_1, x_2, \mu), \\
x_2' &= X_2(x_1, x_2, \mu),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

зависящую от параметра μ. *Пусть для любого* μ *система имеет в начале координат неподвижную точку. Если* $\lambda_i(\mu)$ $(i = 1, 2)$ *являются собственными значениями линеаризованной системы в начале координат, и они комплексно-сопряженные (а также чисто мнимые при* $\mu = \mu_0$*), то пусть*

$$\left. \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda_i(\mu) \right|_{\mu = \mu_0} > 0\ (< 0).$$

При этом предположим, что начало координат при $\mu = \mu_0$ *асимптотически устойчиво.*

Тогда:

1) $\mu = \mu_0$ *– точка бифуркации системы.*

2) Существует $\mu_1 < \mu_0$ $(\mu_1 > \mu_0)$ *такое, что для любого* $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ $(\mu \in (\mu_0, \mu_1))$ *начало координат – устойчивый фокус.*

3) Существует $\mu_2 > \mu_0$ $(\mu_2 < \mu_0)$ *такое, что для любого* $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ $(\mu \in (\mu_2, \mu_0))$ *начало координат – неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом, размер которого растет с возрастанием (убыванием)* μ *от* μ_0 *до* μ_2 *как* $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$.

Доказательство этой теоремы (а также более общей) можно найти в [61]. Основная техника, используемая в доказательстве – это метод инвариантных многообразий. Суть доказательства лежит в применении теоремы о неявной функции.

В силу теоремы 1 можно сформулировать аналогичную теорему для рождения неустойчивого предельного цикла.

Теорема 2. *Пусть система (1) имеет неподвижную точку в начале координат для любого* μ. *Если* $\lambda_i(\mu)$ $(i=1,2)$ *– собственные значения линеаризованной системы, и они комплексно-сопряженные (а также чисто мнимые при* $\mu=\mu_0$*), то пусть*

$$\frac{d}{d\mu}\mathrm{Re}\,\lambda_i(\mu)\bigg|_{\mu=\mu_0} < 0 \ \ (>0).$$

При этом предположим, что при $\mu=\mu_0$ *существует окрестность начала координат такая, что любая нетривиальная траектория покидает ее за конечное время.*

Тогда:

1) $\mu=\mu_0$ *– точка бифуркации системы.*

2) Существует $\mu_1<\mu_0$ $(\mu_1>\mu_0)$ *такое, что для любого* $\mu\in(\mu_1,\mu_0)$ $(\mu\in(\mu_0,\mu_1))$ *начало координат – неустойчивый фокус.*

3) Существует $\mu_2>\mu_0$ $(\mu_2<\mu_0)$ *такое, что для любого* $\mu\in(\mu_0,\mu_2)$ $(\mu\in(\mu_2,\mu_0))$ *начало координат – устойчивый фокус, окруженный неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с возрастанием (убыванием)* μ *от* μ_0 *до* μ_2 *как* $\sqrt{|\mu-\mu_0|}$.

Теорему 2 можно доказать либо методом, используемым при доказательстве теоремы 1, либо сведением системы (1) к новой системе при помощи замены независимого переменного $t\to -t$ и $\mu\to -\mu$, в которой произойдет рождение устойчивого предельного цикла согласно теореме 1.

Замечание 1. Теоремы, изложенные выше, существенно связаны с однопараметрическими семействами дифференциальных уравнений. Поэтому никаких равномерных оценок на параметры, при которых происходит бифуркация рождения цикла, вообще говоря, не существует.

Таким образом, если система уравнений зависит от m параметров, то, вообще говоря, рождение цикла связано лишь с изменением одного параметра при фиксированных остальных $m-1$ параметрах.

Замечание 2. Основным моментом существования указанной бифуркации является наличие негрубого положения равновесия (но только фокуса – аттрактора или репеллера), т.е. такого равновесия, которое «меняет» свой тип при малейшем шевелении параметров системы. Можно привести примеры, когда все условия теоремы выполнены кроме одного: как в линейном, так и в нелинейном случае положение равновесия является центром. Последнее условие и является ключевым в данном вопросе. Оно будет противоречить рождению грубого предельного цикла.

2. Рождение предельных циклов в задаче о движении тела в среде при наличии неголономной связи

Рассмотрим маятниковые системы вида

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}, \\ \omega' &= A_2 F(\alpha) - h\omega \end{aligned} \tag{2}$$

в подмножестве $\Pi = \left\{(\alpha,\omega) \in R^2 : -\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2}\right\}$ плоскости $R^2\{\alpha,\omega\}$. Здесь выполнено условие

$$F \in \Phi\ . \tag{3}$$

Класс Φ состоит из достаточно гладких нечетных π-периодических функций, обращающихся в нуль только в точках $0 \mod \dfrac{\pi}{2}$ и удовлетворяющих следующим условиям: $F'(0) > 0$, $F'(\dfrac{\pi}{2}) < 0$. При условии (3) система (2) описывает плоскопараллельное движение тела в сопротивляющейся среде, при котором на тело наложена неинтегрируемая связь, обеспечивающая постоянство со временем модуля скорости характерной точки твердого тела [209–211, 249]. В последней ситуации при $h \neq 0$ на тело наложен линейный демпфирующий момент [249].

Лемма 1. *Пусть:*

1) $A_1 > 0,\ F'(0) > 0,\ F(-\alpha) = -F(\alpha),\ F(\varepsilon_0) > 0, \forall \varepsilon_0 \in (0, \dfrac{\pi}{2}),$ $A_1^2\ F'(0) + A_2 < 0$*;*

2) $|F(\alpha)| < F'(0)|\alpha|\cos\alpha$ $(|F(\alpha)| > F'(0)|\alpha|\ \cos\alpha)$*, в некоторой окрестности начала координат (либо* $F'''(0) + 3F'(0) < 0$ *(* $F'''(0) + 3F'(0) > 0$ *)),* $F \in C^2((-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}))$;

3) $\dfrac{d}{d\alpha}\dfrac{F(\alpha)}{\cos\alpha} \geq 0, \forall \alpha \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.

Тогда:

1) при $h \leq 0$ *не существует в полосе* Π *замкнутых кривых из траекторий;*

2) $h = h_0 = A_1 F'(0)$ *– точка бифуркации системы;*

3) существует $h_1 < h_0$ *такое, что для любого* $h \in (h_1, h_0)$ *точка* $(0,0)$ *– неустойчивый фокус, окруженный единственным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением h от* h_0 *до* h_1 *(для любого* $h \in (h_1, h_0)$ *точка* $(0,0)$ *– неустойчивый фокус);*

4) существует $h_2 > h_0$ *такое, что для любого* $h \in (h_0, h_2)$ *точка* $(0,0)$ *– устойчивый фокус (для любого* $h \in (h_0, h_2)$ *точка* $(0,0)$ *– устойчивый фокус, окруженный единственным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом* h *от* h_0 *до* h_2*).*

Доказательство. Пусть для определенности $|F(\alpha)| < F'(0)|\alpha|\cos\alpha$ в некоторой окрестности (либо $F'''(0) + 3F'(0) < 0$). Пусть существует замкнутая траектория, которая ограничивает область S, содержащую начало координат. Следуя Бендиксону [37], должно быть выполнено равенство

$$\int_S [A_1 \frac{d}{d\alpha} \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha} - h] d\alpha d\omega = 0 . \qquad (4)$$

Видно, что если $h \le 0$, то в полосе Π замкнутой кривой из траекторий нет, поскольку $A_1 > 0$.

Если же такая траектория существует, то значение параметра h от координаты ε точки пересечения такой траектории с координатной осью α выражается функцией

$$h = h(\varepsilon),$$

причем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} h(\varepsilon) = A_1 F'(0)$.

Рассмотрим линеаризованную систему

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + A_1 F'(0)\alpha, \\ \omega' &= A_2 F'(0)\alpha - h\omega, \end{aligned} \qquad (5)$$

при $h = h_0$. Ее собственные значения имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-h + A_1 F'(0)) \pm \frac{i}{2}\sqrt{-D},$$

где $D = (h - A_1 F'(0))^2 + 4A_2 F'(0) + 4A_1^2 F'(0)^2$.

Видно, что $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 \in R$, при $h = h_0$ Если заменить в системе (5) h на $-h$, то будет выполнено неравенство

$$\left.\frac{d}{dh}\right|_{h=h_0} \operatorname{Re}\lambda_i(h) > 0 .$$

Докажем, что начало координат при $h = h_0$ асимптотически устойчиво.

Замена фазовых переменных $\begin{pmatrix}\alpha\\ \omega\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \vartheta\end{pmatrix}$, где $\vartheta = A_1 F'(0)\alpha + \omega$, приводит при $h = h_0$ искомую систему к уравнению

$$\alpha'' = A_1^2 F'(0)\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha} + A_2 F(\alpha) - A_1 F'(0)\alpha' + A_1\alpha' \frac{d}{d\alpha}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}.$$

По условию $A_1^2 F'(0) + A_2 < 0$, поэтому функцию Ляпунова выберем в виде

$$V(\alpha,\alpha') = \frac{\alpha'^2}{2} - A_2\int_0^\alpha F(\xi)d\xi - A_1^2 F'(0)\int_0^\alpha \frac{F(\eta)}{\cos\eta}d\eta. \qquad (6)$$

Поскольку функция $\dfrac{F(\eta)}{\cos\eta}$ нечетна, то $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{F(\eta)}{\cos\eta}d\eta$ – четна. Поэтому $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{F(\eta)}{\cos\eta}d\eta = \frac{F'(0)}{2}\alpha^2 + \overset{=}{o}(\alpha^2)$ в окрестности начала координат.

По этой же причине $\displaystyle\int_0^\alpha F(\xi)d\xi = \frac{F'(0)}{2}\alpha^2 + \overset{=}{o}(\alpha^2)$ в окрестности начала координат, поэтому функция $V(\alpha,\alpha')$ положительно определена.

Производная функции $V(\alpha, \alpha')$ в силу уравнения (6) равна

$$V'(\alpha, \alpha')\big|_{(6)} = -A_1 \alpha'^2\big|_{(6)} [F'(0) - \frac{d}{d\alpha}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}].$$

Условие $F'(0) > \dfrac{d}{d\alpha}\dfrac{F(\alpha)}{\cos\alpha}$ в окрестности начала координат эквивалентно $|F(\alpha)| < F'(0)|\alpha|\cos\alpha$ (или $F'''(0) + 3F'(0) < 0$), что и требовалось для доказательства леммы (ср. с [247]).

Замечание. Условие 3) леммы 1 на самом деле лишнее, как будет показано ниже, применяя другую методику поиска циклов.

Следствие. *Функция* $F = F_0 = AB\sin\alpha\cos\alpha$, $A, B > 0$, *удовлетворяет условию леммы 1. При этом в полосе* Π *появится устойчивый предельный цикл.*

Лемма 2. *Рассмотрим системы вида (2) в полосе* Π' *при условиях леммы 1 (здесь* $\Pi' = \left\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \dfrac{\pi}{2} < \alpha < 3\dfrac{\pi}{2}\right\}$*), а также при условии* $F(\alpha + \pi) = -F(\alpha)$.

Тогда:

1) при $h \geq 0$ *не существует замкнутых кривых из траекторий в полосе* Π'*;*

2) точка $h = h_0 = -A_1 F'(0)$ *– точка бифуркации системы;*

3) существует $h_1 > h_0$ *такое, что для любого* $h \in (h_0, h_1)$ *точка* $(\pi, 0)$ *– устойчивый фокус, окруженный единственным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом h от* h_0 *до* h_1 *(для любого* $h \in (h_0, h_1)$ *точка* $(\pi, 0)$ *– устойчивый фокус);*

4) существует $h_2 < h_0$ *такое, что для любого* $h \in (h_2, h_0)$ *точка* $(\pi, 0)$ *– неустойчивый фокус (для любого* $h \in (h_2, h_0)$ *точка* $(\pi, 0)$ *– неустойчивый фокус, окруженный единствен-*

ным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением h от h_0 до h_2).

Лемма 2 следует из леммы 1 и теоремы Четаева о неустойчивости.

3. Рождение предельных циклов в задаче о свободном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде

Рассмотрим системы вида

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I}F(\alpha) - \frac{\sigma}{I}\omega F(\alpha)\sin\alpha + \sigma\omega^3\cos\alpha + \frac{\omega}{m}s(\alpha)\cos\alpha \end{aligned} \tag{7}$$

в полосе Π' при условии (3) и

$$s \in \Sigma\,. \tag{8}$$

Класс Σ состоит из достаточно гладких 2π-периодических четных функций, равных нулю лишь в точках $\dfrac{\pi}{2} \bmod \pi$ и удовлетворяющих условиям:

$$s(0) > 0,\ s'(\frac{\pi}{2}) < 0,\ s(\alpha+\pi) = -s(\alpha), \forall\alpha \in R.$$

При условиях (3),(8) система (7) описывает плоскопараллельное свободное торможение тела в сопротивляющейся среде [250, 254, 256, 264]. Здесь m, s, I – физические положительные постоянные, являющиеся, вообще говоря, размерными величинами.

Переносся систему координат в точку $(\pi, 0)$, в новых координатах система (7) примет следующий вид:

$$\alpha' = \omega - \frac{\sigma}{I} F(\alpha)\cos\alpha - \sigma\omega^2 \sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha,$$
$$\omega' = -\frac{1}{I} F(\alpha) - \sigma\omega^3 \cos\alpha + \frac{\sigma}{I}\omega F(\alpha)\sin\alpha + \omega\frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha, \tag{9}$$

поскольку $s(\alpha+\pi) = -s(\alpha)$ и $F(\alpha+\pi) = F(\alpha)$.

Пусть

$$F \in C^3((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})) \cap \Phi,\ s \in C^2((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})) \cap \Sigma.$$

Тогда справедливо следующее разложение правой части системы (9):

$$\alpha' = \omega + \alpha\{-\frac{\sigma}{I}F'(0) + \frac{s(0)}{m}\} + \frac{a^3}{6} * \{-\frac{\sigma}{I}F'''(0) +$$
$$+ 3\frac{\sigma}{I}F'(0) + 3\frac{s''(0)}{m} - \frac{s(0)}{m}\} - \sigma\alpha\omega^2 + R_\alpha(\alpha,\omega),$$
$$\omega' = \alpha(-\frac{1}{I}F'(0)) + \frac{\alpha^3}{6}(-\frac{1}{I}F'''(0)) - \sigma\omega^3 + \omega\frac{s(0)}{m} + \tag{10}$$
$$+ \omega\alpha^2\{\frac{\sigma}{I}F'(0) + \frac{s''(0)}{2m} - \frac{s(0)}{m}\} + R_\omega(\alpha,\omega),$$

где $R_\lambda(\alpha,\omega) \overset{=}{o}((\alpha^2+\omega^2)^{\frac{3}{2}}),\ \lambda = \alpha,\omega$.

Матрица линеаризованной системы (оператор производной поля системы в координатах $\{\alpha,\omega\}$ возле точки $(0,0)$) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{I}F'(0) + \frac{s(0)}{m} & 1 \\ -\frac{1}{I}F'(0) & \frac{s(0)}{m} \end{pmatrix}.$$

Если $n_0^2 = \dfrac{F'(0)}{I}$, $B = s(0)$, то введем два безразмерных параметра $\mu_1 = 2\dfrac{B}{mn_0} > 0, \mu_2 = \sigma n_0 > 0.$ Пусть $\mu = \mu_1 - \mu_2$. После линейной регулярной замены переменных во всей фазовой плоскости

$$\alpha = a,$$

$$\omega = \frac{\sigma F'(0)}{2I} a + \omega_0 w,$$

где $\omega_0 = n_0 \sqrt{1 - \dfrac{\sigma^2 n_0^2}{4}}$, система (10) при $\mu = 0$ примет вид, в котором правые части разложены до третьего порядка включительно:

$$a' = \omega_0 w + \frac{a^2}{6}\{-\frac{\sigma}{I} f_3 + 3\frac{s_2}{m} + \frac{5}{2}\sigma n_0^2\} -$$

$$-\sigma a(\frac{\sigma n_0^2}{2} a + \omega_0 w)^2 + R_a(a, w),$$

$$w' = -\omega_0 a - \frac{a^3}{6\omega_0}\frac{f_3}{I} - \frac{\sigma}{\omega_0}(\frac{\sigma n_0^2}{2} a + \omega_0 w)^3 +$$

$$+\frac{a^2}{\omega_0}(\frac{\sigma n_0^2}{2} a + \omega_0 w)(\frac{3}{4}\sigma n_0^2 + \frac{s_2}{2m}) -$$

$$-\frac{\sigma n_0^2}{2\omega_0}[\frac{a^3}{6} \times \{-\frac{\sigma}{I} f_2 + 3\frac{s_2}{m} + \frac{5}{2}\sigma n_0^2\} -$$

$$-\sigma a(\frac{\sigma n_0^2}{2} a + \omega_0 w)^2] + R_w(a, w),$$

где $R_\lambda(a, w) = \overset{=}{o}((a^2 + w^2)^{\frac{3}{2}}), \lambda = a, w; f_3 = F'''(0), s_2 = s''(0).$

Поскольку $\mu = 0$, то корни характеристического уравнения последней системы чисто мнимы.

Подсчитаем индекс

$$J = |\omega_0|(Y^1_{111} + Y^1_{122} + Y^2_{112} + Y^2_{222}) + (Y^1_{11}Y^2_{11} -$$

$$-Y^1_{11}Y^1_{12} + Y^2_{11}Y^2_{12} + Y^2_{22}Y^2_{12} - Y^1_{22}Y^1_{12} - Y^1_{22}Y^2_{22}),$$

где

$$Y^i_{jk} = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial Y_j \partial Y_k}(0,0),\ Y^i_{jkl} = \frac{\partial^3 Y_i}{\partial Y_j \partial Y_k \partial Y_l}(0,0).$$

Здесь Y_i-координатные направления. Если (см. [310]) $J < 0$, то начало координат асимптотически устойчиво.

Нетрудно заметить, что $Y^1_{11} = Y^2_{12} = Y^1_{22} = 0$. Поэтому индекс J становится нечетной функцией от коэффициентов искомого векторного поля.

Следствие. *Будут получены необходимые и достаточные условия как наличия аттрактора, так и наличия репеллера (если $J \neq 0$).*

Очевидно

$$Y^1_{111} = \left\{-\frac{\sigma}{I}f_3 + 3\frac{s_2}{m} + \frac{5}{2}\sigma n_0^2\right\} - \frac{3}{2}\sigma^3 n_0^4,\ Y^1_{122} = -2\sigma\omega_0^2,$$

$$Y^2_{112} = -\frac{\sigma^3 n_0^4}{2} + \frac{3}{2}\sigma n_0^2 + \frac{s_2}{m},\ Y^2_{222} = -6\sigma\omega_0^2.$$

Пусть $J = |\omega_0| In$. Тогда $In = -\frac{\sigma}{I}f_3 + 4\frac{s_2}{m} - 4\sigma n_0^2$. Итак, нами доказано

Предложение 1. *При $In < 0$ точка $(\pi, 0)$ – аттрактор, а при $In > 0$ – репеллер.*

Из предложения 1 следует основная

Лемма 3. *Рассмотрим систему (7) в полосе* Π'. *Пусть* $F \in C^3((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \cap \Phi$, $s \in C^2((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \cap \Sigma$, *а также* $\sigma n_0 < 2$, $In = -\frac{\sigma}{I} f_3 + 4\frac{s_2}{m} - 4\sigma n_0^2$, $\mu = \mu_1 - \mu_2$.

Тогда:

1) если $In < 0$, *то:*

1. При $\mu_1 = \mu_2$ *происходит бифуркация системы.*

2. Зафиксируем $\mu_2^0 < 2$. *Существует* $\overline{\mu}_1 < 0$ *такое, что для любого* $\overline{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\overline{\mu_1}, 0)$ *точка* $(\pi, 0)$ *– устойчивый фокус; существует* $\overline{\mu}_2 > 0$ *такое, что для любого* $\overline{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \overline{\mu}_2)$ *точка* $(\pi, 0)$ *– неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом* $\overline{\mu}$ *от* 0 *до* $\overline{\mu}_2$;

2) если $In > 0$, *то:*

1. При $\mu_1 = \mu_2$ *происходит бифуркация системы.*

2. Зафиксируем $\mu_2^0 < 2$. *Существует* $\overline{\mu}_1 > 0$ *такое, что для любого* $\overline{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \overline{\mu_1})$ *точка* $(\pi, 0)$ *– неустойчивый фокус; существует* $\overline{\mu}_2 < 0$ *такое, что для любого* $\overline{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\overline{\mu}_2, 0)$ *точка* $(\pi, 0)$ *– устойчивый фокус, окруженный неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением* $\overline{\mu}$ *от* 0 *до* $\overline{\mu}_2$.

Замечание. На $\overline{\mu}_1$ $\overline{\mu}_2$ в силу топологической классификации можно написать конкретные оценки.

В лемме 3 не существует равномерных оценок на оба параметра μ_1 и μ_2.

Следствие. *Пусть* $F = F_0$ *(см. следствие из леммы 1)* $s = s_0 = B\cos\alpha$, $\sigma n_0 < 2$. *Тогда:*

1. При $2\dfrac{B}{mn_0} = \sigma n_0$ *происходит бифуркация системы.*

2. Зафиксируем $\sigma n_0 = \mu_2^0 < 2$. *Существует* $\overline{\mu}_1 < 0$ *такое, что для любого* $\overline{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\overline{\mu}_1, 0)$ *точка* $(\pi, 0)$ *– устойчивый фокус; существует* $\overline{\mu}_2 > 0$ *такое, что для любого* $\overline{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \overline{\mu}_2)$ *точка* $(\pi, 0)$ *– неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом* $\overline{\mu}$ *от 0 до* $\overline{\mu}_2$.

Замечание. Цепочка равенств $\mu_1 = \mu_2, In = 0, \ldots$ задает в бесконечномерном пространстве коэффициентов тейлоровских разложений функций F и s некоторое множество. В силу того, что при $\mu_1 \neq \mu_2$ или $In \neq 0$ удается определить характер траекторий возле точки $(\pi, 0)$, величины $\mu = \mu_1 - \mu_2$ и In являются функциями от первых двух коэффициентов функции последования.

Действительно, $\mu = 0$ и $In = 0$ тогда и только тогда, когда либо линейный, либо коэффициент при кубе разложения по малому параметру функции последования равны нулю.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

О замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых в точку по фазовой поверхности

В данном разделе затрагиваются вопросы существования замкнутых кривых из траекторий систем дифференциальных уравнений на двумерных поверхностях. Рассматриваемые фазовые кривые стягиваются в точку по фазовой поверхности. Таким образом, искомые замкнутые фазовые траектории являются подмножеством той части фундаментальной группы данной двумерной фазовой поверхности, которая представляет тривиальную компоненту.

Важность отыскания такого класса замкнутых кривых, состоящих из фазовых траекторий, состоит в том, что для любого гладкого фазового двумерного многообразия существуют кривые, стягиваемые по нему в точку. И хотя последние кривые могут и не быть фазовыми траекториями, необходимость ответа на вопрос о существовании такого типа замкнутых траекторий очевидна [196]. К тому же замкнутые траектории всегда являются ключевыми (по крайней мере для систем на двумерных многообразиях), поскольку от их расположения зависит глобальное расположение многих остальных фазовых траекторий. Последний факт объясняется тем, что фазовые кривые, состоящие из траекторий динамических систем на двумерных многообразиях и стягиваемых по ним в точку, разделяют фазовое многообразие на две части.

Если искомые кривые существуют, то основным методом их исследования является построение и изучение функции последования Пуанкаре.

1. Вопросы существования монотонных предельных циклов

Рассмотрим замкнутую траекторию данного векторного поля в многомерном пространстве и трансверсальную площадку коразмерности *1* в какой-нибудь точке. Отображение последования переводит векторы поля, приложенные к площадке, в векторы поля, также приложенные к данной площадке. Поэтому существует по крайней мере один собственный вектор с собственным значением, равным 1, для данного отображения последования. Последний собственный вектор является вектором поля, приложенным к данной точке замкнутой траектории. Замкнутые траектории впредь будем называть циклами.

Допустим, что векторное поле задано в трехмерном пространстве. Тогда трансверсальная площадка двумерна и можно рассмотреть вектор нормали в данной точке цикла. На вектор поля системы и на построенную нормаль в данной точке можно натянуть соприкасающуюся плоскость. В ней можно определить координаты вдоль вектора поля и вектора нормали в данной точке.

Пусть трансверсальная площадка проходит через вектор нормали и вектор бинормали в данной точке.

Зафиксируем некоторые координаты в фазовом пространстве.

Определение. *Если для каждой точки исследуемого цикла близлежащие траектории, пересекающие построенную перпендикулярную площадку, стремятся к циклу строго монотонно, то цикл назовем монотонным.*

Другими словами, строгая монотонность означает, что близлежащие вектора поля не параллельны векторам поля вдоль цикла в данных координатах. Можно дать ряд эквивалентных определений монотонных циклов. Ограничимся одним.

Определение. *Цикл называется монотонным, если ни один близлежащий вектор поля к вектору поля вдоль цикла не проектируется на перпендикулярную площадку в нулевой вектор возле любой точки цикла.*

В частности, для динамических систем на плоскости можно дать

Определение. *Предельный цикл на плоскости назовем монотонным, если при развертке его на прямую близкие траектории стремятся к циклу строго монотонно.*

Рассмотрим системы вида (2) при $h = 0$ в полосе Π.

Лемма 4. *Если $F(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \neq 0$, то монотонных предельных циклов не существует.*

Доказательство. Если $F(\alpha) \neq 0$, то никакой замкнутой траектории в полосе П нет, в противном случае внутри нее существовало бы положение равновесия.

Пусть теперь $F(0) = 0$. Тогда на прямой, задаваемой уравнением $\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = 0\}$, векторное поле системы перпендикулярно этой прямой в координатах (α, ω). Если бы существовал монотонный цикл, то возле цикла в данных координатах все траектории не были бы параллельны циклу.

Следствие. *Если $F \in \Phi$, то лемма 4 выполнена во всей плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$, а именно, во всей плоскости не существует монотонных предельных циклов.*

Замечание. Ниже будет показано, что при $A_1 A_2 \neq 0$ у систем вида (2) при $h = 0$ не существует никаких замкнутых кривых из траекторий во всей плоскости (по крайней мере при $F \in \Phi$). Таким образом, локальные соображения о несуществовании монотонных циклов позволяют в дальнейшем исследовать вопрос о несуществовании любых замкнутых кривых из траекторий.

Аналогично лемме 4 доказывается простая

Теорема 3. *Пусть у векторного поля на плоскости (обозначим его ϑ) в области D существуют точки покоя такие, что*

$$ind_{\partial D}\vartheta = 1.$$

Если существует прямая l, пересекающая ∂D, такая, что векторное поле на ней $\vartheta|_l$ образует постоянный угол с ней, то у поля не существует монотонного предельного цикла, содержащего внутри себя точку покоя поля, лежащую на прямой l.

Последняя теорема легко обобщается на случай высших размерностей.

2. Об отсутствии замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых в точку на двумерных поверхностях

В предыдущем пункте уже частично рассматривались вопросы существования циклов динамических систем в связи с определением монотонных предельных циклов. Ниже будут рассмотрены вопросы существования замкнутых кривых произвольного вида из траекторий динамических систем, стягиваемых в точку по фазовой двумерной поверхности.

С помощью применения теоремы Стокса можно доказать следующее простое утверждение.

Теорема 4. *Рассмотрим ориентируемое риманово многообразие $N^2 \subset R^3$ с векторным полем ϑ на нем. Пусть w – поле такое, что $(w,\vartheta)\big|_{N^2} = 0$. Если существует такая достаточно гладкая функция F на многообразии, что $(rotFw, n)|_{N^2}$ не меняет знака в данной области и не равна тождественно нулю, то в этой области не существует замк-*

нутой кривой из траекторий поля ϑ, стягиваемой по многообразию в точку (здесь n – внешняя нормаль).

В частности, на плоскости для отсутствия данных замкнутых кривых из траекторий достаточно, чтобы существовала гладкая функция F такая, что дивергенция поля $F\vartheta$ не меняла бы знака.

Идея доказательства теоремы 4 будет освещена при доказательстве более слабого утверждения – леммы 5.

В каждом конкретном случае данную теорему можно усилить.

Лемма 5. *Рассмотрим систему (2) при* $h = 0$ *в полосе* П. *Если* $A_1 \neq 0, F \in C^1((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$, *величина* $\frac{d}{d\alpha}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}$ *знакопостоянна при* $\alpha \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, *то в полосе* П *не существует замкнутой кривой из траекторий.*

Замечание. Можно доказать, что и при более слабых условиях на функцию F замкнутые кривые из траекторий поля системы (2) при $h = 0$ будут отсутствовать. В частности, если $F \in \Phi$, то лемма 5 выполнена. Последнее утверждение будет доказано, когда будут рассмотрены системы сравнения для (2).

Доказательство леммы 5. От противного. Пусть существует замкнутая кривая γ_0 из траекторий поля в полосе П, ограничивающая область S. Заметим, что точка $(0,0) \in S$. Если $X = \{X_1, X_2\}$ – векторное поле системы, то, очевидно, в стандартной метрике $(Y,X)|_{R^2} = 0$, где $Y = \{-X_2, X_1\}$. Поскольку П односвязна и $F \in C^1((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$, то по формуле Грина

$$\int_{\gamma_0}(-X_2dx_1 + X_1dx_2) = \int_S divXd\alpha d\omega.$$

Левая часть этого равенства обращается в нуль, так как γ_0 – траектория поля *X*. Поскольку $A_1 \neq 0$, то

$$\int_S \frac{d}{d\alpha} \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha} d\alpha d\omega = 0,$$

что противоречит условиям леммы, так как величина $\frac{d}{d\alpha} \frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}$ не меняет знака во всей полосе П.

Замечание. В силу теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема с постоянной плотностью условия леммы 5 являются достаточными для отсутствия сохранения интегрального инварианта.

Тем же методом можно доказывать отсутствие замкнутых кривых из траекторий у полей в R^n, интегрируя нормальные поля вдоль 1–путей [84, 85].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Об отсутствии замкнутых кривых из траекторий, не стягиваемых в точку по фазовому цилиндру

1. Общие утверждения об отсутствии замкнутых траекторий, охватывающих цилиндр, для систем, обладающих центральной симметрией

В предыдущем разделе рассматривались замкнутые траектории систем дифференциальных уравнений, стягиваемых в точку по двумерной фазовой поверхности. Такие траектории представляют часть тривиальной компоненты фундаментальной группы. Эта компонента всегда существует для двумерных гладких многообразий. В отличие от траекторий, рассматриваемых в предыдущем параграфе, замкнутые кривые, которые не стягиваются по фазовому многообразию в точку, могут не существовать. Последнее связано с тем, что топология фазового многообразия может препятствовать существованию нетривиальной компоненты у фундаментальной группы данного многообразия.

Рассмотрим для простоты случай двумерного цилиндра, топология которого допускает существование замкнутых кривых, не стягиваемых по цилиндру в точку. Примером такой кривой может служить огибающая цилиндр окружность. К тому же в дальнейших главах часто будут рассматриваться динамические системы на двумерном цилиндре.

В предыдущих разделах уже употреблялся термин «кривая, состоящая из фазовых траекторий». В этой связи дадим

Определение. *Фазовой характеристикой назовем кривую, касающуюся векторного поля. В частности, кривая, состоящая из фазовых кривых поля, будет являться фазовой характеристикой.*

Определение. *Центром симметрии векторного поля, заданного в координатах* (x, y), *назовем точку* (x_0, y_0) *такую, что после замены переменных*

$$\begin{pmatrix} x_0 & -x \\ y_0 & -y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 & +x \\ y_0 & +y \end{pmatrix}$$

векторное поле меняет знак на противоположный.

Справедлива следующая теорема [32].

Теорема 5. *Рассмотрим автономную систему*

$$\begin{aligned} \psi' &= \Psi(\psi, y), \\ y' &= Y(\psi, y) \end{aligned} \tag{11}$$

на цилиндре $Ц = S^1\{\psi \bmod 2\pi\} \times R^1\{y\}$, *где* $\Psi, Y \in C^1(Ц)$. *Пусть существует достаточно гладкая функция* $M : Ц \to R$ *такая, что величина* $div M V(\psi, y)$ *знакоопределена (здесь* $V(\psi, y) = (\Psi(\psi, y), Y(\psi, y))$ *в области* Ω, *огибающей цилиндр).*

Тогда в Ω *нет более одной замкнутой кривой из траекторий системы (11), не стягиваемой по цилиндру в точку.*

Если же при этом существует центр симметрии x_0 *векторного поля системы (11) такой, что ни одна нетривиальная фазовая характеристика не продолжается через* x_0, *то у системы (11) не существует даже одной замкнутой кривой из траекторий системы (11).*

Доказательство. От противного. Пусть γ_1, γ_2 – замкнутые кривые из траекторий в области Ω. Рассмотрим область S на цилиндре, ограниченную кривыми γ_1 и γ_2. Очевидно, если M – гладкая функция на цилиндре, то векторное поле $M\bar{x} = (-MY, M\Psi)$ на цилиндре $Ц$ в стандартной его метрике ортогонально исходному:

$$M(\bar{x}, V)\Big|_{Ц} = M(\bar{x}, V)\Big|_{R^2} = 0.$$

Введем координату $\tau \subset R^3$ такую, что цилиндр $Ц \subset R^3$ задается соотношением $\tau = 1$. При этом продолжим систему в R^3:

$$\begin{aligned} \psi' &= \Psi(\psi, y), \\ y' &= Y(\psi, y), \\ \tau' &= T(\psi, y, \tau), \end{aligned} \tag{12}$$

где T – гладкая функция и $T(\psi, y, \tau)\big|_{\tau=1} = 0$. По формуле Гаусса–Остроградского, примененной к полю $M\{-Y, \Psi, 0\}$ на цилиндре $Ц$, в координатах $\{\psi, y, \tau\}$ будет выполнено равенство

$$\int\limits_{\gamma_1 \cup \gamma_2} (-MYd\psi + M\Psi dy) = \int\limits_S divMVd\sigma,$$

поскольку цилиндр обладает евклидовой метрикой. Так как γ_1, γ_2 – кривые из траекторий, то левая часть последнего равенства обращается в нуль, а правая не равна нулю, в силу условия. Противоречие. Первая часть теоремы доказана.

Если существует центр симметрии поля, обладающий указанным свойством, то кривых из траекторий будет существовать по крайней мере две (если они вообще есть). В силу утверждения, доказанного выше, приходим к противоречию. Теорема доказана.

2. Замечания из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой.

Хотя утверждения этого пункта носят достаточно простой характер, идеология поиска фазовых характеристик, огибающих фазовый цилиндр (см. предыдущий пункт), прекрасно отражается на следствиях из теоремы 5.

Следствие. *Рассмотрим системы (2) на цилиндре. Если* $|h| \geq A_1 \max\left|\frac{d}{d\alpha}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha}\right|$, *то у систем вида (2) не существует более одной кривой из фазовых траекторий, огибающей цилиндр. Если же при этом* $F \in \Phi$, *то таких кривых вообще нет.*

Доказательство. Пусть $M(\alpha, \omega) \equiv 1$. Дивергенция поля системы (2) равна $A_1 \frac{d}{d\alpha}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha} - h$. Если же $F \in \Phi$, то существует центр симметрии поля – начало координат, обладающее свойством теоремы 5. Следствие доказано.

И хотя данное следствие носит очевидный характер, при условии, когда $F \in \Phi$, у систем вида (2) при любом $h \neq 0$ не существует замкнутых характеристик, огибающих фазовый цилиндр. При $h = 0$ таких кривых – бесконечно много.

Замечание. Когда будут разбираться системы сравнения [252], будет показано, что для системы, описывающей свободное торможение тела в среде (она задана на цилиндре) при некоторых естественных условиях не будет существовать ни одной фазовой характеристики, огибающей фазовый цилиндр.

Топографические системы Пуанкаре в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой

1. Топографические системы Пуанкаре

Пуанкаре предложил метод (хотя и не совсем общий) отыскания замкнутых орбит дифференциального уравнения (1). Для этого ему потребовалось ввести понятие «топографических систем» [196, 247, 252, 261, 271, 293]. Об уточнении метода топографических систем Пуанкаре (ТСП) см. также [247, 252].

В его трудах впервые начала рассматриваться алгебраическая функция $F(x_1, x_2)$, которая:

а) достаточно гладкая и ограниченная в любой ограниченной области, стремящаяся к бесконечности, когда одна из ее переменных стремится к бесконечности;

б) равная нулю при $x_1 = x_2 = 0$ и положительная в остальных точках;

в) имеет первые производные, обращающиеся в нуль лишь при $x_1 = x_2 = 0$;

г) такова, что при $x_1 = x_2 = 0$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right)^2 +$$

$$+4\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right) < 0.$$

Последнее неравенство означает, что кривая контактов имеет в начале координат изолированную особую точку (о кривых контактов см. ниже);

д) такова, что кривая, заданная уравнением

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0,$$

не уходит на бесконечность.

При выполнении условий а)–д) уравнение

$$F(x_1,\, x_2) = k$$

дает так называемую топографическую систему вложенных друг в друга кривых, имеющую вершину в начале.

Надо сказать, что не все аналитические условия а)–д) нам понадобятся. Мы будем учитывать лишь геометрию расположения кривых контактов, траекторий исследуемой динамической системы и кривых топографической системы Пуанкаре (ТСП).

Ниже рассмотрим системы вида (2), (7) и

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2 \sin\alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I} F(\alpha) - \frac{\sigma}{I}\omega F(\alpha)\sin\alpha + \sigma\omega^3 \cos\alpha \end{aligned} \tag{13}$$

на цилиндре $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$ или на плоскости $R^2\{\alpha,\ \omega\}$. Система (13) описывает плоскопараллельное движение тела в сопротивляющейся среде, при котором во все время движения постоянна скорость центра масс как вектор [248].

Если не будет дополнительно оговорено, можно считать, что выполнены условия (3), (8).

Под ТСП будем понимать систему вложенных друг в друга замкнутых кривых, полученных с помощью поверхностей уровня неотрицательной функции, которая равна нулю лишь в точке, к которой сходятся полученные вложенные замкнутые кривые. С помощью такой системы можно успешно «ловить» замкнутые траектории исследуемой динамической системы.

Последнее происходит следующим образом. Вычисляя угол между векторами поля, образующими семейство ТСП и векторами исследуемого поля динамической системы, можно получить информацию о расположении траекторий исследуемого векторного поля. Чтобы доказать отсутствие замкнутых фазовых характеристик достаточно выполнение неравенства

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} X_2 \leq (\geq) 0.$$

Здесь $F(x_1, x_2) = const$ – семейство замкнутых кривых, $X = \{X_1, X_2\}$ – исходное векторное поле. Таким образом, с помощью последнего неравенства можно исследовать качественное поведение траекторий исходной системы. Заметим, что векторное поле обязательно должно быть задано в некоторых координатах.

Выше указывалось, что можно определить ТСП более корректно, но это нам не потребуется. Более того, нас интересуют лишь геометрические свойства взаимного расположения кривых ТСП и фазовых кривых исследуемого поля.

2. Характеристические функции и кривые контактов векторных полей и динамика твердого тела, взаимодействующего со средой

С понятием топографической системы Пуанкаре тесно связано понятие характеристической функции двух полей на плоскости. Последняя функция определяет кососимметрическую форму на плоскости. Если $F(x_1, x_2) = const$ – семейство замкнутых кривых, то система, имеющая явный вид гамильтоновой,

$$x_1' = -\frac{\partial F}{\partial x_2},\ x_2' = \frac{\partial F}{\partial x_1},$$

задает векторное поле, касательное к семейству кривых ТСП. Тогда последнее неравенство эквивалентно

$$X_1Y_2 - X_2Y_1 \le (\ge) 0,$$

в котором $Y_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2},\ Y_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$, – векторное поле системы. Оно касается кривых ТСП.

Рассмотрим две системы уравнений на плоскости. Эти уравнения задаются полями $X = \{X_1, X_2\}$ и $Y = \{Y_1, Y_2\}$ в некоторых координатах. Естественно рассмотреть функцию $\chi = X_1Y_2 - X_2Y_1$, которая отвечает за знак синуса угла между полями X и Y. Очевидно $\chi = 0$ там и только там, где поля X и Y касаются.

Функция χ удовлетворяет следующим свойствам: $\chi(X, Y) = -\chi(Y, X)$, $\chi(\lambda X, Y) = \lambda\chi(X, Y)$ для любой действительной функции λ.

Определение. *Функцию χ мы назовем характеристической функцией двух векторных полей, а уравнение $\chi = 0$ назовем уравнением кривой контактов для полей X и Y.*

В применение метода ТСП к динамическим системам, возникающим в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, рассмотрим системы вида (2) при $h = 0$ в полосе П. Ранее (приложение 2) было показано, что при некоторых условиях у данной системы не существует монотонных предельных циклов. Оказывается, при тех же условиях у такой системы не существует никакой замкнутой кривой, состоящей из фазовых траекторий.

Лемма 6. *Пусть* $A_1 A_2 \neq 0$. *Если при* $\alpha \neq 0$ *справедливо неравенство* $F(\alpha) \neq 0$ *в полосе* Π*, то у системы вида (2) при* $h = 0$ *не существует замкнутой кривой из траекторий в полосе* Π*, когда* $F'(0) > 0, F(0) = 0$.

Доказательство. Систему (2) при $h = 0$ и при $A_1 = 0$ будем называть системой (2'). Для системы (2') начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траекторий, подходящих как угодно близко к точкам $(-\frac{\pi}{2},\ 0)$ и $(\frac{\pi}{2},\ 0)$. Характеристическая функция, отвечающая системам (2) и (2'), равна $A_1 A_2 \dfrac{F^2(\alpha)}{\cos\alpha}$. Единственная кривая контактов – прямая $\{(\alpha,\ \omega) \in R^2 : \alpha = 0\}$. В остальных точках полосы П характеристическая функция положительна.

От противного. Пусть существует замкнутая кривая из траекторий γ_0, ограничивающая область S_0. Пусть точка $(\alpha_0, 0) \in \gamma_0$, где $0 < \alpha_0 < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим точку $(\alpha_0 + \varepsilon,\ 0), \varepsilon$ – достаточно мало. Через нее проходит траектория ТСП – γ_ε, ограничивающая область S_ε. Очевидно, что, выходя из точки $(\alpha_0, 0)$, траектория γ_0 никогда не попадет в область S_ε, в силу положительности почти всюду характеристической функции. Но $(\alpha_0, 0) \in S_\varepsilon$. Противоречие. Лемма доказана.

Следствие. *Если* $F \in \Phi$*, то в полосе* Π *не существует замкнутой характеристики системы (2).*

Рассмотрим далее систему (13) в полосе П.

Лемма 7. *У системы (13) в полосе* Π *при* $\sigma \neq 0$ *не существует замкнутой кривой из траекторий, если* $F(\alpha) \neq 0$ *при* $\alpha \neq 0$*, а также* $F'(0) > 0, F(0) = 0$.

Доказательство. Систему (13) при $\sigma \neq 0$ обозначим (13'). Аналогично лемме 6, система (13') обладает особой точкой типа центр, окруженной замкнутыми траекториями, продолжающимися до точек $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ и $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Характеристическая функция, отвечающая системам (13) и (13'), равна

$$\sigma \cos\alpha \left\{ \left(\frac{F(\alpha)}{I} \right)^2 + \omega^4 \right\}.$$

Лишь в начале координат поля систем (13) и (13') касаются. Из рассуждений, используемых при доказательстве леммы 6, следует лемма 7.

Следствие. *Если* $F \in \Phi$*, то в полосе* Π *не существует замкнутой характеристики системы (13).*

Теперь рассмотрим систему (7) в полосе Π.

Лемма 8. *У системы вида (7) в полосе* Π *при* $\sigma \neq 0$ *не существует замкнутой кривой из траекторий, если* $F(\alpha) \neq 0$ *при* $\alpha \neq 0$*, а также* $s(\alpha)\big|_{\Pi} \geq 0, F(0) > 0, F(0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим систему (13') (см. лемму 7). Для нее, по прежнему, начало координат имеет топологический тип центра, обладающий семейством замкнутых траекторий, продолжающихся до точек $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ и $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Характеристическая функция, отвечающая полям систем (7) и (13'), равна

$$\sigma \cos\alpha \{ \left(\frac{F(\alpha)}{I} \right)^2 + \omega^4 \} + \frac{1}{I} F(\alpha) \frac{s(\alpha)}{m} \sin\alpha + \omega^2 \frac{s(\alpha)}{m} \cos\alpha .$$

Очевидно, что почти всюду в полосе Π характеристическая функция положительна. Остается сослаться на методы доказательств лемм 6 и 7.

Следствие. *Если* $F \in \Phi, s \in \Sigma$ *, то в полосе* Π *не существует замкнутой характеристики системы (7).*

Замечание. Как было показано в приложении 1, в полосе Π' у системы вида (7) возможны при некоторых условиях предельные циклы.

Рассмотрим систему (7) в области

$$O' = \{\Pi_{(0,\pi)} \cap \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega < 0\}\}.$$

Если $s\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, то существует особая точка $(\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{1}{\sigma})$. (Здесь, напомним, $\Pi_{(0,\pi)} = \{(\alpha, \omega) \in R^2 : 0 < \alpha < \pi\}$.)

Лемма 9. *Рассмотрим систему вида (7) в области* O'*. Пусть для простоты* $F \in \Phi, s \in \Sigma$*. Тогда вокруг точки покоя* $\left(\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{1}{\sigma}\right)$ *в области* O' *не существует замкнутой кривой из траекторий, если равенство*

$$\omega^2 s(\alpha)\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}\omega F(\alpha)s(\alpha) + \frac{1}{I}F(\alpha)s(\alpha)\sin\alpha = 0 \qquad (14)$$

выполнено в области O' *только при* $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. (Равенство (14) возникает при изучении так называемых нетривиальных положений равновесия (НПР) системы (7)).

Доказательство. В области O' рассмотрим систему (7). Точка покоя $\left(\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{1}{\sigma}\right)$ для системы (13) имеет топологический тип центра. Существует семейство замкнутых траекторий, окружающее точку $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma}\right)$. Это семейство может уходить на бесконечность. Оно неограниченно близко приближается к прямой $\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega = 0\}$. Характеристическая функция, отвечающая системам (13) и (7), равна

$$\omega^2 s(\alpha)\cos\alpha + \frac{\sigma}{I}\omega F(\alpha)s(\alpha) + \frac{1}{I}F(\alpha)s(\alpha)\sin\alpha .$$

Последняя величина знакоопределена, поскольку выполнено равенство (14) лишь при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Поля систем (7) и (13) в области O' касаются лишь на прямой $\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = \frac{\pi}{2}\}$. Остается сослаться на методы доказательств лемм 6, 7, 8.

При исследовании системы (7), в зависимости от области, используется одна из систем вида (13) или (13’).

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Кривые контактов и системы сравнения. Предельные циклы и проблема различения центра и фокуса

1. Системы сравнения и исследование топологической структуры расположения траекторий

Метод ТСП, о котором говорилось в приложении 4, является частным случаем метода исследования с помощью систем сравнения. Рассмотрим две системы уравнений на плоскости и характеристическую функцию определяющих их векторных полей, которая, как указывалось, отвечает за знак синуса угла между векторными полями данных систем. Зная фазовую топологию одной из них, возможен анализ устройства фазовой плоскости другой системы. В частности, ТСП позволяет исследовать вопрос существования предельных циклов и т.д. Таким образом, основной упор делается на вычисление угла между двумя полями рассматриваемых систем в одной и той же области фазовой поверхности (ср. с [271]).

Вычислять характеристическую функцию, конечно, можно для любых двух векторных полей на плоскости. В этой связи назовем системой сравнения для данной системы ту систему, качественное расположение траекторий которой полностью известно (ср. с [271]).

Ранее уже проводилось сравнение векторных полей систем (2’), (7), (13).

Предложение 2. *Рассмотрим системы вида (13) и (7) на плоскости. Система (13) является системой сравнения для системы (7) в следующем смысле: почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах* *от* 0 *до* π *, и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, если выполнены все условия леммы 9.*

Действительно, если $F \in \Phi, s \in \Sigma$ то в силу леммы 9 характеристическая функция во всей фазовой плоскости знакоопределена.

Замечание 1. Если $F(\alpha) = F_0(\alpha) = AB \sin\alpha \cos\alpha$, $s_0(\alpha) = B\cos\alpha,$ то угол между векторами полей систем (7) и (13) меняется монотонно относительно параметра $\mu_1 = \dfrac{B}{2mn_0}$, где, как и ранее, $n_0^2 = \dfrac{F'(0)}{I}$, $B = s(0)$. В частности, при $\mu_1 = 0$ последняя характеристическая функция тождественно равна нулю.

Замечание 2. Поскольку система (13) на плоскости имеет три топологически различных типа фазового портрета [248], для исследования системы (7) в каждой из областей ее параметров можно использовать свой топологический тип.

В качестве системы сравнения для системы (7) можно использовать систему (13’), описывающую консервативную систему – физический маятник на фазовом цилиндре.

Замечание 3. У системы (7) не существует замкнутых кривых из траекторий, огибающих фазовый цилиндр, если выполнены все условия предложения 2.

Доказательство. От противного. Пусть существует искомая замкнутая кривая. Можно считать, что начальными условиями для такой траектории является точка $(0,\omega^*), \omega^* > 0$. Проведем через данную точку траекторию системы сравнения (13), в зависимости от топологического типа ее фазового портрета. В силу предложения 2, если такая траектория существует, то она пройдет лишь через точку $(2\pi, \omega^* + \delta)$, где $\delta > 0$, что противоречит замкнутости кривой. Замечание можно считать доказанным, если присоединить к нему информацию о трех различных топологических типах фазовых портретов системы (13).

Предложение 3. *Рассмотрим системы (7) и (13') во всей плоскости. Система (13') является системой сравнения для системы (7) в следующем смысле: в полосе* Π *почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах от* 0 *до* π, *и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, а в полосе* Π' *при условии, что*

$$\frac{s(\alpha)}{m\cos\alpha} \geq \frac{\sigma}{I}\frac{F(\alpha)}{\sin\alpha}, \forall\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

существует кривая контактов рассматриваемых двух полей, которая является топологической окружностью.

Действительно, если $F \in \Phi, s \in \Sigma$, то в полосе Π кривая контактов – начало координат. Перенесем начало координат в точку $(\pi, 0)$ и перепишем уравнение кривой контактов в виде

$$\sigma\cos\alpha\left\{\left(\frac{F(\alpha)}{I}\right)^2 + \omega^4\right\} = \frac{1}{I}F(\alpha)\frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha + \omega^2\frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha\,. \quad (15)$$

Тогда уравнение (15) кривой контактов, которую назовем нетривиальной (НКК), можно разрешить относительно ω^2:

$$2\sigma\omega^2 = \frac{s(\alpha)}{m} \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{s^2(\alpha)}{m^2} + 4\sigma\frac{F(\alpha)}{I}\sin\alpha\left\{\frac{s(\alpha)}{m\cos\alpha} - \frac{\sigma}{I}\frac{F(\alpha)}{\sin\alpha}\right\}}. \quad (16)$$

В полосе Π уравнение (16), взятое со знаком «минус», задает лишь точку (0,0), а взятое со знаком «плюс», – точку (0,0) и НКК.

НКК симметрична относительно обеих осей координат (после переноса из полосы Π' в полосу Π), пересекает обе оси под прямым углом и только два раза (по теореме о неявной функции). Предложение можно считать доказаным.

2. Некоторые общие утверждения о ТСП и системах сравнения

С целью рассмотрения вопросов существования ключевых траекторий (замкнутых фазовых характеристик и др.), докажем одну общую теорему. Для этого заметим, что вплоть до прямых Λ_{-1} и Λ_0 (а также Λ_0 и Λ_1) существует семейство замкнутых кривых, которое является ТСП (интегральные кривые системы (13')). Здесь

$$\Lambda_k = \left\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k\right\}.$$

Поставим также вопрос о существовании замкнутых кривых из траекторий для системы (7) в полосе Π'. Для этого докажем утверждение, обобщающее рассуждения доказательств лемм 6, 7, 8, 9.

Теорема 6. *Пусть в односвязной области D плоскости, содержащей точку покоя x_0 достаточно гладкого векторного поля ϑ_1, существует кривая $\gamma \in x_0$, соединяющая две точки A, B $\in \partial D$ (точки A, B могут быть бесконечно удалены), такая, что существует ТСП с центром в x_0, задаваемая достаточно гладкой функцией V, продолжающаяся вдоль γ до A и B, заполняющая область $K \subseteq D$ и обладающая свойством*

$$(\vartheta_1,\ \vartheta_2)\Big|_{R^2} > 0$$

(где $\vartheta_2 = gradV$) почти всюду в K за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих x_0. (Здесь V = const – семейство кривых ТСП.)

Тогда во всей области D вокруг точки x_0 не существует ни одной замкнутой кривой из траекторий поля ϑ_1.

Доказательство. От противного. Пусть такая кривая γ_0 существует, ограничивая область $S_0 \supset x_0$. Пусть $\{N_1, N_2\} = \gamma \cap \gamma_0 \neq \varnothing$ (поскольку $x_0 \in \gamma$) и точка N_1 – неособое начальное условие при движении по кривой γ_0. Через точку N_1 проходит замкнутая кривая $\bar{\gamma}$ из ТСП, причем $\bar{\gamma} \subset K$. Если кривая $\bar{\gamma}$ ограничивает область $\bar{S}$, то существует $\varepsilon > 0$ (которое уменьшим насколько нужно), такое, что:

1) $N_\varepsilon \in \bar{\gamma}_\varepsilon \cap \gamma$, где $\bar{\gamma}_\varepsilon$ – кривая ТСП;

2) расстояние между точками N_ε и N_1 равно ε;

3) $\bar{\gamma}_\varepsilon$ ограничивает область $\bar{S}_\varepsilon \supset \bar{S}$.

Выбранное значение ε таково, что через конечное время точка, двигаясь по траектории γ_0 с начальным условием N_1, покинет область $\bar{S}_\varepsilon$. Поскольку $\bar{S}_\varepsilon \subset K$ и выполнено неравенство $(\vartheta_1, \vartheta_2)\big|_{R^2} > 0$ почти всюду в K за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих x_0, то точка с начальным условием N_1 никогда больше в область $\bar{S}_\varepsilon \subset K \subset D$ не вернется. Так как $\bar{S} \subset \bar{S}_\varepsilon$, то приходим к противоречию с замкнутостью кривой γ_0.

Как уже отмечалось, в полосе Π' для систем вида (7), при некоторых условиях существует ТСП с центром в точке $(\pi, 0)$, продолжающаяся до точек $(\frac{\pi}{2}, 0)$ и $(3\frac{\pi}{2}, 0)$. При этом НКК системы сравнения (ТСП) и поля системы (7) ограничивает область, целиком содержащую ТСП. Таким образом, ссылаясь на теорему 6, справедлива

Лемма 10. *Рассмотрим систему (7) в полосе* Π'*, при условиях, если НКК системы сравнения (13') и системы (7) ограничивает область, целиком содержащую ТСП, продолжающуюся до точек* $(\frac{\pi}{2},0)$ *и* $(3\frac{\pi}{2},0)$. *Тогда в полосе* Π' *не существует замкнутой кривой из траекторий системы (7).*

Замечание. Рассмотрим системы вида (7) при условиях (3), (8). Выше ставился вопрос о существовании замкнутых кривых из траекторий в полосе Π', т.е. кривых, окружающих точку $(\pi,0)$. Поставим также более общий вопрос о существовании любых замкнутых кривых из траекторий системы (7), стягиваемых по фазовому цилиндру в точку.

Очевидно, что сумма индексов особых точек, находящихся внутри таких кривых, должна равняться 1. Значит такие кривые могут возникнуть вокруг точек $(\pi k,0), k \in Z$. Внутри таких кривых не могут содержаться одновременно два седла $(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,0)$ и $(\frac{\pi}{2}+2\pi k,0)$ и точка $(2\pi k,0)$, поскольку сумма индексов при этом равна –1. Такие кривые не могут содержать внутри себя одновременно точки $(\pi k, 0)$ и $(\pi(k + 1), 0))$, поскольку в силу центральной симметрии поля системы (7) относительно точек $(\pi k,0)$ и теоремы единственности это невозможно.

Остается единственная возможность существования такой кривой, содержащей более одной особой точки внутри себя. Пусть для определенности $k=0$. Такая кривая может содержать точки $(0,0)$, $(-\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{2},-\frac{1}{\sigma})$, $(-\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sigma})$, сумма индексов которых равна 1. Но в силу леммы 9 это невозможно, хотя бы потому, что траектория, имеющая в качестве ω-предельного множества точку $(-\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sigma})$, имеет в качестве

α-предельного множества бесконечно удаленную точку (см. следующее приложение).

Таким образом, вопрос существования замкнутых кривых из траекторий системы (7), стягиваемых по фазовому цилиндру в точку, при условии выполнения леммы 9, свелся к отысканию таких кривых в полосе Π' вокруг точки $(\pi, 0)$. Как было показано в приложении 1, при некоторых условиях такие кривые существуют, а при некоторых – нет.

3. Проблема различения центра и фокуса и системы сравнения

Первая проблема различения в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений – проблема центра и фокуса – возникает в точке $(\pi,0)$ в полосе Π' для динамической системы вида (7) при условиях (3), (8), а также при $\mu_1 = \mu_2$ и $0 < \mu_2 < 2$ (см. приложение 1). В приложении 1 (предложение 1) данная проблема решена при $In \neq 0$ в пользу слабого фокуса. Таким образом, в достаточно малой окрестности точки $(\pi,0)$ все траектории-спирали приближаются к точке $(\pi,0)$ либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$ (здесь t – независимый параметр вдоль траекторий).

Поставим вопрос о расширении данной окрестности точки $(\pi,0)$ в полосе Π' (на плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$). Для этого переведем начало координат в точку $(\pi,0)$. После такой замены переменных система (7) (уже в полосе Π) примет вид:

$$\begin{gathered}
\alpha' = \omega - \frac{\sigma}{I} F(\alpha)\cos\alpha - \sigma\omega^2 \sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \\
\omega' = -\frac{1}{I} F(\alpha) - \sigma\omega^3 \cos\alpha + \frac{\sigma}{I}\omega F(\alpha)\sin\alpha + \frac{\omega}{m} s(\alpha)\cos\alpha.
\end{gathered} \tag{17}$$

Для простоты рассмотрим систему (17) при условии, что $F(\alpha)=F_0(\alpha), s(\alpha)=s_0(\alpha)$. После замены в полосе Π по формуле $\tau=\sin\alpha, |\tau|<1$, системе (17) сопоставим уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\frac{-n_0^2\tau-\sigma\omega^3+\sigma n_0^2\omega\tau^2+\dfrac{\sigma n_0^2}{2}\omega\sqrt{1-\tau^2}}{\omega-\sigma n_0^2\tau(1-\tau^2)-\sigma\omega^2\tau+\dfrac{\sigma n_0}{2}\tau\sqrt{1-\tau^2}}. \qquad (18)$$

В уравнении (18) уже учтено условие $\mu_1=\mu_2$, которое эквивалентно $\dfrac{B}{mn_0}=\dfrac{\sigma n_0}{2}$.

Пусть формально $\tau=x, \omega=y$. Система (17), фазовые траектории которой совпадают с интегральными траекториями уравнения (18), рассматриваемого в полосе

$$\{(x, y)\in R^2 : -1<x<1\},$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} x'&=y-\sigma n_0^2x+\sigma n_0^2x^3-\sigma y^2x+\frac{\sigma n_0}{2}x\sqrt{1-x^2},\\ y'&=-n_0^2x-\sigma y^3+\sigma n_0^2yx^2+\frac{\sigma n_0^2}{2}y\sqrt{1-x^2}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x'&=y-\frac{\sigma n_0^2}{2}x+\frac{3\sigma n_0^2}{4}x^3-\sigma y^2x,\\ y'&=-n_0^2x+\frac{\sigma n_0^2}{2}y-\sigma y^3+\frac{3\sigma n_0^2}{4}yx^2, \end{aligned} \qquad (20)$$

которая является системой сравнения для системы (19). Характеристическая функция пары систем (19) и (20) является, как уже отмечалось, кососимметрической билинейной функцией.

Для упорядоченной пары систем X и Y их характеристическую функцию будем обозначать через $\chi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Предложение 4. *Характеристическая функция* $\chi((19),(20))$ *при* $\sigma n_0 < 2$ *в полосе* $\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$ *положительно определена (она равна нулю лишь в начале координат).*

Действительно,

$$\chi((19),(20)) = \frac{\sigma n_0^2}{2}[y^2 - \sigma n_0^2 xy + n_0^2 x^2][(1 - \frac{x^2}{2}) - \sqrt{1 - x^2}].$$

Заметим, что правые части системы (20) отличаются от правых частей системы (19) лишь членами пятого порядка малости по $\rho = (x^2 + y^2)^{3/2}$, т.е. членами порядка $\underline{\underline{O}}(\rho^5)$. В связи со сделанным только что замечанием о представлении векторного поля системы (19) около точки (0, 0), справедливо

Предложение 5. *Точка* $(0, 0)$ *является сложным устойчивым фокусом при* $\sigma n_0 < 2$ *для системы (20).*

Действительно, индекс In (см. приложение 1) точки (0, 0) для системы (20) совпадает с индексом In точки (0, 0) для системы (19) и он отрицателен, поскольку зависит лишь от вторых и третьих производных правых частей рассматриваемых систем.

Поставим следующий вопрос: как соотносится знак характеристической функции как формы от упорядоченной пары систем на плоскости и угол поворота от поля одной системы к другой. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x' &= y - \sigma n_0^2 x + \sigma n_0^2 x^3 - \sigma y^2 x + \frac{\sigma n_0}{2} x\sqrt{1 - x^2}, \\ y' &= -n_0^2 x - \sigma y^3 + \sigma n_0^2 y x^2 + \frac{\sigma n_0^2}{2} y\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

зависящую от параметра $\lambda > 0$. Векторное поле системы (21) обладает некоторым свойством строгой монотонности (СМ) (см. следующее приложение) при некоторых условиях и при $\sigma n_0 < 2$ в любой области без особых точек. Если при $\lambda = \lambda_1$ систему (21) обозначить через (21'), а при $\lambda = \lambda_2$ – через (21''), то справедливо равенство

$$\chi((21'),(21'')) = (\lambda_2 - \lambda_1)[y^2 - \sigma n_0^2 xy + n_0^2 x^2]\sqrt{1-x^2} \ .$$

Таким образом, при $\lambda_2 > \lambda_1$ и при $\sigma n_0 < 2$ последняя функция положительно определена в полосе $\{(x,\ y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$ (равна нулю лишь в начале координат). Но как легко понять, начало координат для системы (21'') является «более неустойчивой» особой точкой, чем начало координат для системы (21'). Таким образом, векторное поле системы (21'') поворачивается при $\lambda_2 > \lambda_1$ около векторного поля системы (21') на положительный угол.

Прежде чем говорить о характере траекторий системы (19), докажем одно вспомогательное утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Для поиска подходящей системы сравнения, в целях исследования существования предельных циклов, проблемы различения центра и фокуса и т.д., вовсе не обязательно иметь ТСП с центром в данной особой точке. Искомая система сравнения может иметь либо притягивающую, либо отталкивающую особую точку.

Пусть в области *D*, содержащей единственную особую точку системы (*А*), заданной для простоты на плоскости, стоит проблема различения центра и фокуса. Пусть в этой же области система (*Б*) имеет ту же единственную особую точку x_0.

Рассмотрим для определенности так называемые отрицательно ориентируемые системы, в которых траектории обходят точку x_0 против часовой стрелки. Аналогично могут быть рассмотрены положительно ориентируемые системы.

Лемма 11. *Пусть область D является притягиваемой (отталкиваемой) точкой x_0 системы (Б). Тогда если характеристическая функция χ ((А), (Б)) положительно (отрицательно) определена в области D, то область D является притягиваемой (отталкиваемой) точкой x_0 системы (А).*

Лемма 11 носит явно геометрический характер. Действительно, векторное поле системы (*Б*) повернуто относительно векторного поля системы (*А*) на неотрицательный (неположительный) угол.

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для устойчивых и неустойчивых предельных циклов и т.д.

Итак, в качестве системы (*А*) возьмем систему (19), а в качестве системы (*Б*) – систему (20). Возникает вопрос о размерах области *D*, фигурирующей в лемме 11.

Предложение 6. *Система (20) при $\sigma n_0 < 2$ полосе $\left\{(x, y) \in R^2 :\ -1 < x < 1\right\}$ обладает первым интегралом, который одновременно является и трансцендентной функцией в полосе, и мероморфной функцией во множестве $\left\{(x, y) \in R^2 :\ -1 < x < 1\right\}$ без начала координат. Последняя точка – единственная существенно особая точка для данного первого интеграла.*

Доказательство. После замены переменных $\frac{\sqrt{3}}{2} n_0 x - y = u$, $\frac{\sqrt{3}}{2} n_0 x + y = v$ система (20) приведется к уравнению

$$\begin{gathered} du\left[u\left(\frac{\sigma n_0}{2\sqrt{3}} + \frac{7}{12}\right) - \frac{v}{12} - \frac{\sigma}{\sqrt{3} n_0} u v^2\right] + \\ + dv\left[\frac{u}{12} + v\left(-\frac{\sigma n_0}{2\sqrt{3}} + \frac{7}{12}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{3} n_0} u^2 v\right] = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

После же замены $u = tv, v^2 = p, v \neq 0$ уравнение (22) примет вид:

$$dp[C_1t^2 + C_2] + 2p[C_1t - 1 - u\sqrt{3}\frac{\sigma}{n_0}tp] = 0\ .$$

Здесь введены обозначения

$$C_1 = 7 + 2\sqrt{3}\sigma n_0,\ C_2 = 7 - 2\sqrt{3}\sigma n_0.$$

Заменой $p = q^{-1}$ приводим последнее уравнение к линейному неоднородному уравнению вида:

$$\frac{dq}{dt}[C_1t^2 + C_2] + 2[1 - C_1t]q + 8\sqrt{3}\frac{\sigma}{n_0}t = 0. \qquad (23)$$

Общее решение однородного уравнения имеет следующий вид:

$$q_0(t) = C\frac{C_1t^2 + C_2}{\exp\left\{\dfrac{2}{C_1}\operatorname{arctg}\sqrt{C_2t/C_1}\right\}}\ .$$

Варьируя постоянную C, имеем дифференциальное уравнение, позволяющее получить мероморфное решение уравнения (23), а значит и (22). Особенности возникают лишь при $u = v = 0$, т.е. когда значение t не определено. Но последнее уравнение и задает начало координат на плоскости R^2 $\{x,y\}$.

Следствие 1. *Для системы (20) область притяжения – вся полоса* $\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$.

Следствие 2. *У динамической системы (19) в полосе* $\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$ *не существует замкнутых характеристик.*

Доказательство. Начало координат для системы (20) – аттрактор (предложение 5). В силу предложения 6, область его притяжения – вся полоса. В силу предложения 4 попадаем в условия леммы 11.

Следствие 3. *При* $\sigma n_0 < 2$, *а также при* $\dfrac{B}{mn_0} < \dfrac{\sigma n_0}{2}$ *у систем вида (7) в полосе* Π' *не существует простых и сложных предельных циклов, а также любых замкнутых кривых, составленных из траекторий.*

–

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

О траекториях, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки плоскости

1. Примеры из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой

В этом параграфе будут рассмотрены вопросы существования и единственности траекторий динамических систем (1) на плоскости, имеющих в качестве α-, ω-предельных множеств бесконечно удаленные точки [253]. Таким образом, на сферах Римана или Пуанкаре предельными множествами данных траекторий будет северный полюс. Такие траектории уже по определению являются ключевыми, поскольку бесконечно удаленная точка всегда является особой.

Для начала рассмотрим системы вида (13) и (7).

Лемма 12. *Рассмотрим систему (13) на множестве*

$$\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega > 0\}.$$

Тогда для любой достаточно гладкой функции F существует единственная траектория, уходящая в бесконечность (имеющая в качестве ω-предельного множества точку $(-0, +\infty)$).

Доказательство. Дополним фазовую плоскость $R^2\{\alpha, \omega\}$ бесконечно удаленной точкой. Получим расширенную фазовую плоскость $\overline{R^2\{\alpha, \omega\}}$. Отобразим область $\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega > 0\}$ на сферу Римана или Пуанкаре. В окрестности северного полюса сферы существуют новые координаты $(\alpha,\ y)$, $y = \dfrac{1}{\omega}$, в которые переводятся старые координаты из рассматриваемой области расширенной фазовой плоскости, неособым преобразованием.

В переменных $(\alpha,\ y)$ система (13) эквивалентна уравнению

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{y + \frac{\sigma}{I} y^2 F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\sin\alpha}{\frac{y^4}{I} F(\alpha) - \sigma y\cos\alpha + \frac{\sigma}{I} y^3 F(\alpha)\sin\alpha}. \qquad (24)$$

При этом траектории уравнения (24) параметризованы по-другому, нежели траектории системы (13).

Видно, что у уравнения (24) существует особая точка (0,0), соответствующая бесконечно удаленной точке $(-0,+\infty)$ системы (13). Нетрудно убедиться в том, что точка $(0,0)$ уравнения (24) является гиперболическим седлом, что и доказывает лемму.

Лемма 13. *Рассмотрим систему (7) на множестве*

$$\Pi \cap \{(\alpha,\ \omega) \in R^2 : \omega > 0\}.$$

Тогда для любых достаточно гладких функций F и s существует единственная траектория, уходящая в бесконечность (имеющая в качестве ω*-предельного множества точку* $(-0,+\infty)$.

Доказательство. Следуя методу доказательства леммы 12, отображая расширенную фазовую плоскость на сферу, делая аналогичную замену координат, приходим к уравнению

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{\frac{y^4}{I} F(\alpha) - \sigma y\cos\alpha + \frac{\sigma}{I} y^3 F(\alpha)\sin\alpha - y^3 \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha}{y + \frac{\sigma}{I} y^2 F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\sin\alpha + y^2 \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha}. \qquad (25)$$

При этом траектории уравнения (25) параметризованы по-другому, нежели траектории системы (7).

Видно, что у уравнения (25) существует особая точка (0, 0), соответствующая бесконечно удаленной точке $(-0, +\infty)$ системы (7). Нетрудно убедиться, что данная особая точка имеет топологический тип грубого седла, что и доказывает лемму.

2. *Существование и единственность траекторий, уходящих на бесконечность*

Рассмотрим произвольную автономную систему дифференциальных уравнений (1) на плоскости. Будем сопоставлять данной системе уравнение, фазовые траектории которого параметризованы по-другому, а также последние отображены с расширенной фазовой плоскости системы на сферу Римана (или Пуанкаре). При этом, как уже отмечалось, бесконечно удаленные точки перейдут в северный полюс сферы.

Теорема 7.

1) Если после замены фазовых переменных $(x_1, x_2) \to (x_1, y)$, где $y = \dfrac{1}{x_2}$, у уравнения, заданного на сфере, появилась особая точка $(x_1^0, 0)$, то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой

$$\left\{(x_1, x_2) \in R^2 : \quad x_1 = x_1^0\right\},$$

и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удаленную точку.

2) Если после замены фазовых переменных $(x_1, x_2) \to (y, x_2)$, где $y = \dfrac{1}{x_1}$, у уравнения, заданного на сфере, появилась особая *точка* $(0, x_2^0)$*, то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой*

$$\left\{(x_1, x_2) \in R^2 : \quad x_2 = x_2^0\right\},$$

и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удаленную точку.

Доказательство. Следуя леммам 12, 13, дополним фазовую плоскость бесконечно удаленной точкой, получив $\overline{R^2\{\alpha, \ \omega\}}$. Отобразим расширенную плоскость на сферу Римана или Пуанкаре. В окрестности северного полюса сферы можно ввести координаты, отображающие эту окрестность на некоторую окрестность нуля координатной плоскости такие, что в случае 1) они равны (x_1, y), $y = \dfrac{1}{x_2}$, а в случае 2) – $(y, \ x_2)$, $y = \dfrac{1}{x_1}$. В первом случае изучаем бесконечно удаленные точки вдоль оси x_2, а во втором – вдоль оси x_1. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательствам лемм 12, 13.

Замечание 1. Количество траекторий, уходящих на бесконечность, определяется через топологический тип бесконечно удаленной особой точки. В частности, в системах (13), (7) существует единственная траектория, уходящая на бесконечность, поскольку бесконечно удаленная особая точка является седлом (если, конечно, отображать не плоскость, а фазовый цилиндр; см. также [253]).

Замечание 2. Могут существовать фазовые траектории, уходящие на бесконечность на фазовой плоскости, вдоль которых обе фазовые переменные неограниченно возрастают. В этом случае, после замены $x_1 = \dfrac{1}{y_1}$, $x_2 = \dfrac{1}{y_2}$, исследуя топологический тип северного полюса сферы, который всегда является особой точкой, можно попытаться доказать существование и единтвенность траекторий, приближающихся к прямым вида

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 = 0 ,$$

где $A_1 A_2 \neq 0$.

Действительно, в этом случае к северному полюсу сферы траектория будет стремиться под определенным углом, что соответствует стремлению траектории на плоскости к прямой, имеющей ненулевой и конечный угловой коэффициент наклона.

3. Элементы теории монотонных векторных полей

Рассмотрим семейство достаточно гладких векторных полей ϑ_ε в области D двумерной ориентированной римановой поверхности. В касательном пространстве $T_q D$ каждой точки $q \in D$ можно измерять углы между векторами рассматриваемого семейства.

Определение. *Однопараметрическое семейство полей* ϑ_ε $(\varepsilon \in \mathrm{E})$ *обладает свойством монотонности (СМ) в* D*, если для любых точек* $q \in D, \varepsilon_1 \in \mathrm{E}, \varepsilon_2 \in \mathrm{E}$ *в касательном пространстве* $T_q D$ *угол между векторами* $\vartheta_{\varepsilon_1}$, $\vartheta_{\varepsilon_2} \in T_q D$ *является монотонной функцией разности параметров* $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$*; при этом сохраняется ориентация изменения угла. Если рассматриваемая монотонная зависимость строгая, то говорим, что* ϑ_ε *обладает СМ строгим.*

Теорема 8. *Пусть поле* ϑ_ε *обладает СМ в области* D *плоскости. Пусть* x_0 *– неособое начальное условие для фазовой траектории поля* ϑ_ε *при всех* $\varepsilon \in \mathrm{E}$.

Тогда, если для любого $\varepsilon \in \mathrm{E}$ *предельное множество траекторий, начинающихся в* x_0, *есть множество* γ_0, *причем* $\{A, B\} = \partial\gamma_0$, A *– предельное множество траектории поля* $\vartheta_{\varepsilon_1}$, *а* B *– предельное множество траектории* $\vartheta_{\varepsilon_2}$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, *то* $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *тогда и только тогда, когда существует множество С, являющееся предельным множеством траектории поля* ϑ_ε, *причем при увеличении ε предельное множество монотонно смещается от А до В. (Здесь идет речь одновременно либо об* $\alpha -$, *либо об* $\omega -$*предельных множествах семейства траекторий.)*

При этом искомая фазовая траектория единственна, если СМ строгое (ср. [253]).

Схема доказательства. Можно считать, что для любого ε множество γ_0 состоит из $\omega -$предельных множеств. Согласно теореме о непрерывной зависимости решений от начальных условий и правых частей уравнений, при малом изменении параметра ε предельное множество останется в близкой окрестности первоначального (если множество γ_0 односвязно). Если последнее множество многосвязно, то последовательно перебираем каждую из компонент связности. В силу выполнения свойства монотонности, применяя теорию систем сравнения, немонотонная зависимость траектории от параметра ε исключается.

Пусть система обладает строгим СМ. От противного. Пусть для точки $M \in \gamma_0$ существуют хотя бы два параметра $\varepsilon^1, \varepsilon^2$, при которых траектории полей $\vartheta_{\varepsilon^1}, \vartheta_{\varepsilon^2}$ стремятся к точке *М*. Тогда траектории всех полей $\vartheta_{\bar{\varepsilon}}, \bar{\varepsilon} \in [\varepsilon^1, \varepsilon^2]$, стремятся к точке *М* (в силу выполнения СМ). Поскольку СМ строгое, для любого $\delta > 0$ система с векторным полем $\vartheta_{\varepsilon+\delta}$ $(\varepsilon + \delta \in \mathrm{E})$ является системой сравнения для ϑ_ε. Легко понять, что траектория поля $\vartheta_{\varepsilon+\delta}$, выпущенная из неособого начального условия, никогда не пересечет соответствующую траекторию поля ϑ_{ε}, выпущенную из того же начального условия. В силу последнего, траектории полей ϑ_{k_1} и ϑ_{k_2} будут иметь разные предельные множества, причем $\varepsilon^1 < k_1 < k_2 < \varepsilon^2$. Противоречие. Теорема полностью доказана.

Аналогично может быть доказана качественно другая лемма, которая верна и на любых гладких двумерных ориентированных многообразиях.

Лемма 14. *Рассмотрим семейство полей* $\vartheta_{\varepsilon}(\varepsilon \in \mathrm{E})$ *в области сферы* S^2 *следующего вида. Южный (S) и северный (N) полюса сферы являются седлами. Пусть данное семейство полей обладает строгим СМ таким образом, что при некотором* ε_1 $\omega-$ *предельным множеством траектории, выходящей из южного полюса, является южный полюс, а при некотором* $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ω-*предельным множеством траектории, выходящей из северного полюса, является северный полюс. При этом, обе рассмотренные ситуации – это гомоклинические ситуации на сфере, когда существует лишь одна точка покоя (кроме N и S), которая содержится в области, ограниченной указанными сепаратрисами. Других нетривиальных предельных множеств в этой области сферы нет.*

Тогда существует единственное значение параметра $\varepsilon = \varepsilon_0 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, *такое, что траектория, выходящая из южного (северного) полюса, входит в северный (южный) полюс (это – гетероклиническая ситуация на сфере).*

Доказательство. Единственность. От противного. Пусть два параметра $\bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}}$ обладают указанным свойством. Тогда, в силу строгого СМ, все параметры из интервала $(\bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}})$ обладают указанным свойством. Рассуждая как в теореме 8, приходим к противоречию со свойством монотонности.

Существование. Таким образом, существует единственное значение параметра $\varepsilon = \varepsilon_0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ реализуется одна гомоклиническая ситуация на сфере, а при $\varepsilon > \varepsilon_0$ – другая. От противного. Пусть при $\varepsilon = \varepsilon_0$ реализуется одна из гомоклинических ситуаций. Тогда существует окрестность значения $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$U_{\varepsilon_0}^{\delta} = \{\varepsilon : |\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta\}$$

такая, что для любого $\varepsilon \in U_{\varepsilon_0}^{\delta}$ справедлива одна и та же гомоклиническая ситуация. Противоречие. Лемма полностью доказана.

Замечание. Мы получили еще один метод доказательства лемм 12 и 13. Действительно, искомые поля удовлетворяют условиям леммы 14, поскольку бесконечно удаленная точка проектируется в северный полюс сферы Римана, а точка $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ – в южный.

Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в фазовых пространствах динамических систем

Часто в системах обыкновенных дифференциальных уравнений существуют бесконечные всюду плотные в некоторых множествах семейства замкнутых траекторий. При этом незамкнутые траектории также оказываются всюду плотными в некоторой области фазового пространства. Здесь наряду с понятием «всюду плотность во множестве» возникает более конкретное понятие всюду плотности возле себя. Последнее свойство траекторий имеет классическое название устойчивости по Пуассону [196, 260].

Напомним, что траектория в фазовом пространстве устойчива по Пуассону, если через конечное время она возвращается в любую достаточно малую окрестность любой своей точки [260].

Достаточные условия существования устойчивых по Пуассону траекторий формулируются в следующей теореме.

Теорема 9. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$x' = f(t,\ x,\ \mu), \tag{26}$$

зависящую от параметра $\mu \in M \subseteq R^1$ *в области* $D \subseteq R^{n+1}\{x,\ t\}$. *Пусть для некоторых начальных условий* $(x_0,\ t_0) \in D$ *проекция интегральной траектории* $(x_*(t),\ t)$ *с данными начальными условиями и параметром* $\mu = \mu_0$ *на пространство* $R^n\{x\}$ *является незамкнутой кривой и продолжаема на всю ось времени.*

Тогда, если в любой окрестности U_{μ_0} *точки* $\mu = \mu_0 \in M$ *существует значение* μ *такое, что проекция интегральной траектории* $x(t, \mu)$ *с произвольными начальными условиями* $(x_1, t_1) \in (x_*(t), t)$ *на пространство* $R^n\{x\}$ *– замкнутая кривая, то кривая* $x_*(t)$, $t \in R$, *принадлежащая пространству* $R^n\{x\}$, *всюду плотна возле себя (устойчива по Пуассону).*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x_1 проекции незамкнутой интегральной кривой $x_*(t)$ и проекцию решения системы (26) с начальным условием $(x_1, t_1) \in (x_*(t), t)$ при $\mu = \mu_0$. Поскольку это решение продолжаемо на всю ось времени, по теореме о непрерывной зависимости решения от правых частей и параметра, для любого $\varepsilon > 0$ существуют достаточно близкое значение μ_1 к значению μ_0, а также положительное число T_1 такие, что при $t_1 \le t \le T_1$ выполнено условие

$$\left| x_*(t) - x^0(t) \right| < \varepsilon .$$

Здесь $x_*(t)$ – решение системы (26) при $\mu = \mu_0$, с начальным условием (x_1, t_1), а $x^0(t)$ – решение системы (26) при $\mu = \mu_1$ с тем же начальным условием. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности $U_{x_1}^{\varepsilon}$ точки $x_1 \in R^n\{x\}$ существует решение системы (26) при $\mu = \mu_0$ и при некотором $T_1 > 0$. Отсюда вытекает плотность траектории $x_*(t)$, принадлежащей пространству $R^n\{x\}$, возле себя. При этом пространство $R^n\{x\}$ является проекцией пространства $R^{n+1}\{t, x\}$. Теорема 9 доказана.

Замечание 1. Под замкнутыми кривыми в пространстве $R^n\{x\}$ следует понимать проекции периодических решений системы (26) как интегральных кривых из пространства $R^{n+1}\{t,\ x\}$ в пространство $R^n\{x\}$.

Замечание 2. Если рассмотреть замыкание Z_1 устойчивой по Пуассону траектории $x_*(t)$ как множества в пространстве $R^n\{x\}$, то во множестве Z_1 рассматриваемое семейство замкнутых траекторий всюду плотно. В свою очередь, если рассмотреть замыкание Z_2 семейства замкнутых траекторий как множества в пространстве $R^n\{x\}$, то во множестве Z_2 устойчивая по Пуассону траектория $x_*(t)$ также всюду плотна.

Следствие. *Множества Z_1 и Z_2 совпадают. И прямое, и обратное включения следуют из плотности семейства замкнутых кривых и устойчивости по Пуассону.*

Об интегрировании в элементарных функциях некоторых классов динамических систем

Рассмотрим системы следующие системы, вообще говоря, неконсервативного вида:

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = f_{\alpha}(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha), \\ \omega^{\bullet} = f_{\omega}(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha), \end{cases} \tag{27}$$

где функции $f_{\lambda}(\omega,\ \sin\alpha,\ \cos\alpha)$, $\lambda = \alpha,\ \omega$, таковы:

$$f_{\alpha}(-t_1, -t_2, t_3) = -f_{\lambda}(t_1, t_2, t_3)\,,\ f_{\alpha}(t_1, t_2, -t_3) = f_{\lambda}(t_1, t_2, t_3)\,, \tag{28}$$

$$f_{\omega}(-t_1, -t_2, t_3) = -f_{\omega}(t_1, t_2, t_3)\,,\ f_{\omega}(t_1, t_2, -t_3) = -f_{\omega}(t_1, t_2, t_3)\,, \tag{29}$$

а система (27) соответствует уравнению $\dfrac{d\omega}{d\alpha} = \dfrac{f_{\omega}(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha)}{f_{\alpha}(\omega, \sin\alpha, \cos\alpha)}$, которое заменой $\tau = \sin\alpha$ приводится к уравнению $\dfrac{d\omega}{d\tau} = \dfrac{f_{\omega}(\omega, \tau, \varphi_{\omega}(\tau))}{f_{\alpha}(\omega, \tau, \varphi_{\alpha}(\tau))}$, где $\varphi_{\lambda}(-\tau) = \varphi_{\lambda}(\tau)$, $\lambda = \alpha, \omega$.

Пусть функции f_{λ} $(\lambda = \alpha, \omega)$ – полиномы по ω, τ.

Рассмотрим случай систем на $S^1 \times R^1$. Например, следующие системы

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = -\omega + \beta\sin\alpha, \\ \omega^{\bullet} = \sin\alpha\cos\alpha, \end{cases} \tag{30}$$

и

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = -\omega + \beta\sin\alpha + \beta\sin^2\alpha\cos\alpha + \beta\omega^2\sin\alpha, \\ \omega^{\bullet} = \sin\alpha\cos\alpha - \beta\omega\sin^2\alpha\cos\alpha + \beta\omega^3\cos\alpha, \end{cases} \tag{31}$$

в других переменных (ω, τ) будут эквивалентны уравнениям

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau}{-\omega + \beta\tau} \tag{32}$$

и

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau + \beta\omega[\omega^2 - \tau^2]}{-\omega + \beta\tau + \beta\tau[\omega^2 - \tau^2]}, \tag{33}$$

соответственно.

В случае же $S^1 \times R^2$ следующая система

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = -z_2 + \beta \sin\alpha, \\ z_2^{\bullet} = \sin\alpha\cos\alpha - z_1^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ z_1^{\bullet} = z_1 z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{cases} \tag{34}$$

эквивалентна

$$\begin{cases} \dfrac{dz_2}{d\tau} = \dfrac{\tau - z_1^2 \dfrac{1}{\tau}}{-z_2 + \beta\tau}, \\ \dfrac{dz_1}{d\tau} = \dfrac{z_1 z_2 \dfrac{1}{\tau}}{-z_2 + \beta\tau}. \end{cases} \tag{35}$$

Рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) системы следующего достаточно общего вида:

$$\begin{cases} x^{\bullet} = ax + by + f_1 x^3 + f_2 x^2 y + f_3 x y^2 + f_4 y^3, \\ y^{\bullet} = cx + dy + g_1 x^3 + g_2 x^2 y + g_3 x y^2 + g_4 y^3, \end{cases} \tag{36}$$

рассмотренной на плоскости $R^2\{x, y\}$.

Применяя подстановку $y = tx$, характерную для однородных систем, придем к интегрированию следующего тождества:

$$
\begin{aligned}
&[at + bt^2 + f_1 tx^2 + f_2 t^2 x^2 + f_3 t^3 x^2 + f_4 t^4 x^2 - \\
&-c - dt - g_1 x^2 - g_2 tx^2 - g_3 t^2 x^2 - g_4 t^3 x^2]dx + \\
&+[ax + bx^2 + f_1 x^3 + f_2 tx^3 + f_3 t^2 x^3 + f_4 t^3 x^3]dt = 0
\end{aligned} \tag{37}
$$

Видно, что нелинейность характеризуют 8 параметров, из них независимых лишь только 3, поскольку для полного интегрирования мы наложим на параметры 5 следующих соотношений:

$$
g_1 = 0,\ f_1 = g_2 = \beta_1,\ f_2 = g_3 = \beta_2,\ f_3 = g_4 = \beta_3,\ f_4 = 0. \tag{38}
$$

Предложение 1. *Трехпараметрическое семейство систем уравнений на плоскости* $R^2\{x, y\}$

$$
\begin{cases}
x^{\bullet} = ax + by + \beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 y + \beta_3 xy^2, \\
y^{\bullet} = cx + dy + \beta_1 x^2 y + \beta_2 xy^2 + \beta_3 y^3,
\end{cases} \tag{39}
$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

Пример 1. Системы следующего вида

$$
\begin{cases}
\alpha^{\bullet} = a\sin\alpha + b\omega + \beta_1 \sin^3\alpha + \beta_2 \omega \sin^2\alpha + \beta_3 \omega^2 \sin\alpha, \\
\omega^{\bullet} = c\sin\alpha\cos\alpha + d\omega\cos\alpha + \beta_1 \omega \sin^2\alpha\cos\alpha + \\
\quad + \beta_2 \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha + \beta_3 \omega^3 \cos\alpha,
\end{cases} \tag{40}
$$

имеют первый интеграл, выражающийся через элементарные функции.

Рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) системы следующего вида:

$$\begin{cases} x^{\bullet} = ax + by + p_1x^5 + p_2x^4y + p_3x^3y^2 + p_4x^2y^3 + p_5xy^4 + p_6y^5, \\ y^{\bullet} = cx + dy + q_1x^5 + q_2x^4y + q_3x^3y^2 + q_4x^2y^3 + q_5xy^4 + q_6y^5, \end{cases} \tag{41}$$

рассмотренной на плоскости $R^2\{x, y\}$.

Для интегрирования последней системы придем к интегрированию следующего тождества:

$$\begin{gathered} [at + bt^2 + p_1tx^4 + p_2t^2x^4 + p_3t^3x^4 + p_4t^4x^4 + \\ +p_5t^5x^4 + p_6t^6x^4 - c - dt - q_1x^4 - q_2tx^4 - \\ -q_3t^2x^4 - q_4t^3x^4 - q_5t^4x^4 - q_6t^5x_4]dx + [ax + btx + \\ +p_1x^5 + p_2tx^5 + p_3t^2x^5 + p_4t^3x^5 + p_5t^4x^5 + p_6t^5x^5]dt = 0 \end{gathered} \tag{42}$$

Видно, что в данном случае нелинейность характеризуют 12 параметров, из них независимых лишь только 5, поскольку для полного интегрирования мы наложим на параметры 7 следующих соотношений:

$$\begin{gathered} q_1 = 0,\ p_1 = q_2 = \gamma_1,\ p_2 = q_3 = \gamma_2,\ p_3 = q_4 = \gamma_3, \\ p_4 = q_5 = \gamma_4,\ p_5 = q_6 = \gamma_5,\ p_6 = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Предложение 2. *Пятипараметрическое семейство систем уравнений на плоскости* $R^2\{x, y\}$

$$\begin{cases} x^{\bullet} = ax + by + \gamma_1x^5 + \gamma_2x^4y + \gamma_3x^3y^2 + \gamma_4x^2y^3 + \gamma_5xy^4, \\ y^{\bullet} = cx + dy + \gamma_1x^4y + \gamma_2x^3y^2 + \gamma_{33}x^2y^3 + \gamma_4xy^4 + \gamma_5y^5, \end{cases} \tag{44}$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

Пример 1. Системы следующего вида

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = a\sin\alpha + b\omega + \gamma_1 \sin^5\alpha + \gamma_2\omega\sin^4\alpha + \\ +\gamma_3\omega^2\sin^3\alpha + \gamma_4\omega^3\sin^2\alpha + \gamma_5\omega^4\sin\alpha, \\ \omega^{\bullet} = c\sin\alpha\cos\alpha + d\omega\cos\alpha + \gamma_1\omega\sin^4\alpha\cos\alpha + \\ +\gamma_2\omega^2\sin^3\alpha\cos\alpha + \gamma_3\omega^3\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +\gamma_4\omega^4\sin\alpha\cos\alpha + \gamma_5\omega^5\cos\alpha, \end{cases} \tag{45}$$

имеют первый интеграл, выражающийся через элементарные функции.

А теперь рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) систем следующего вида. А именно, нелинейность является произвольной однородной формой нечетной степени $2n$–1.

Тогда справедливо более общее утверждение, чем предложения 1 и 2.

Предложение 3. *2n–1-параметрическое семейство систем уравнений на плоскости* $R^2\{x,\ y\}$

$$\begin{cases} x^{\bullet} = ax + by + \delta_1 x^{2n-1} + \delta_2 x^{2n-2}y + \ldots + \delta_{2n-1}xy^{2n-2} \\ y^{\bullet} = cx + dy + \delta_1 x^{2n-2}y + \delta_2 x^{2n-3}y^2 + \ldots + \delta_{2n-1}y^{2n-1} \end{cases} \tag{46}$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

Семейство уравнений (46) действительно зависит от $2n$–1 независимых параметров, поскольку общая нелинейность нечетной степени в данном случае характеризуется $4n$ параметрами, на которые накладываются $2n$–1 условий.

Рассмотрим далее случай системы, заданной на $S^1 \times R^2$. Будем исследовать систему вида (34), которая эквивалентна (35), а также

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = -z_2 + \beta(z_1^2 + z_2^2)\sin\alpha + \beta\sin\alpha\cos^2\alpha, \\ z_2^{\bullet} = \dfrac{\sin 2\alpha}{2} + \beta z_2(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - \beta z_2\sin^2\alpha\cos\alpha - z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ z_1^{\bullet} = \beta z_1(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - \beta z_1\sin^2\alpha\cos\alpha + z_1 z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{cases} \quad (47)$$

которая, соответственно, эквивалентна

$$\begin{cases} \dfrac{dz_2}{d\tau} = \dfrac{\tau + \beta z_2(z_1^2 + z_2^2) - \beta z_2\tau^2 - z_1^2\dfrac{1}{\tau}}{-z_2 + \beta\tau(z_1^2 + z_2^2) + \beta\tau(1-\tau^2)}, \\ \dfrac{dz_2}{d\tau} = \dfrac{\beta z_1(z_1^2 + z_2^2) - \beta z_1\tau^2 + z_1 z_2\dfrac{1}{\tau}}{-z_2 + \beta\tau(z_1^2 + z_2^2) + \beta\tau(1-\tau^2)}. \end{cases} \quad (48)$$

Далее производится очень важный переход к однородным координатам u_k, $k = 1, 2$, по формулам $z_k = u_k\tau$.

Система (35) приведется к виду

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{\tau - u_1^2\tau}{-u_2\tau + \beta\tau}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{u_1 u_2\tau}{-u_2\tau + \beta\tau}, \end{cases} \quad (49)$$

которая эквивалентна уравнению

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - \beta u_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1 u_2 - \beta u_1}. \quad (50)$$

Данное уравнение интегрируется, поскольку интегрируется тождество

$$d\left(\frac{1 - \beta u_2 + u_2^2}{u_1}\right) + du_1 = 0 \quad (51)$$

и имеет (в старых координатах) первый интеграл следующего вида:

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 - \beta z_2 \tau + \tau^2}{z_1 \tau} = const\,. \tag{52}$$

Система же (48) после приведения ее к «однородному» виду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{\tau + \beta u_2 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - \beta u_2 \tau^3 - u_1^2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + \beta \tau (1 - \tau^2)}, \\ \tau \dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{\beta u_1 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - \beta u_1 \tau^3 + u_1 u_2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + \beta \tau (1 - \tau^2)}, \end{cases} \tag{53}$$

которая приводится к (50).

Рассмотрим проблему интегрирования системы вида

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{ax + by + cz + c_1 z^2 \dfrac{1}{x} + c_2 zy \dfrac{1}{x} + c_3 y^2 \dfrac{1}{x} + Z_1(x,y,z)}{dx + ey + fz + f_1 z^2 \dfrac{1}{x} + f_2 zy \dfrac{1}{x} + f_3 y^2 \dfrac{1}{x} + X_1(x,y,z)}, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{gx + hy + iz + i_1 z^2 \dfrac{1}{x} + i_2 zy \dfrac{1}{x} + i_3 y^2 \dfrac{1}{x} + Y_1(x,y,z)}{dx + ey + fz + f_1 z^2 \dfrac{1}{x} + f_2 zy \dfrac{1}{x} + f_3 y^2 \dfrac{1}{x} + X_1(x,y,z)}, \end{cases} \tag{54}$$

имеющей особенность типа $\dfrac{1}{x}$.

Рассмотрим для простоты случай

$$X_1(x, y, z) = Y_1(x, y, z) = Z_1(x, y, z) \equiv 0\,.$$

Вводя, как и ранее, замены $y = ux$, $z = vx$, получим, что система (54) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} x\dfrac{dv}{dx}+v=\dfrac{ax+bux+cvx+c_1v^2x+c_2vux+c_3u^2x}{dx+eux+fvx+f_1v^2x+f_2vux+f_3u^2x}, \\ x\dfrac{du}{dx}+u=\dfrac{gx+hux+ivx+i_1v^2x+i_2vux+i_3u^2x}{dx+eux+fvx+f_1v^2x+f_2vux+f_3u^2x}, \end{cases} \tag{55}$$

которой сопоставим уравнение

$$\frac{dv}{du}= \tag{56}$$

$$=\frac{a+bu+cv+c_1v^2+c_2vu+c_3u^2-v[d+eu+fv+f_1v^2+f_2vu+f_3u^2]}{g+hu+iv+i_1v^2+i_2vu+i_3u^2-u[d+eu+fv+f_1v^2+f_2vu+f_3u^2]}$$

Рассмотрим случай, когда $f_1=f_2=f_3=0$. Все в таком случае сводится к интегрированию соотношения

$$\begin{gathered}[g+hu+iv+i_1v^2+i_2vu+i_3u^2-du-eu^2-fuv]dv= \\ =[a+bu+cv+c_1v^2+c_2vu+c_3u^2-dv-euv-fv^2]du. \end{gathered} \tag{57}$$

Имеем, вообще говоря, 15-параметрическое семейство уравнений в полных дифференциалах. Наложим на эти 15 параметров следующие 7 соотношений:

$$g=0\,,\ i_3=e\,,\ i_1=0\,,\ i=0\,,\ c_2=e\,,\ c=h\,,\ 2c_1=i_2+h\,. \tag{58}$$

Введем «оставшиеся» 8 параметров $\beta_1,\ldots,\beta_8$ и рассмотрим их в качестве независимых.

$g=0$	$h=\beta_1$	$i=0$	$i_1=0$	$i_2=\beta_2$	$i_3=\beta_3$
$d=\beta_4$		$e=\beta_3$		$f=\beta_5$	
$a=\beta_6$	$b=\beta_7$	$c=\beta_1$	$c_1=\dfrac{\beta_2+\beta_5}{2}$	$c_2=\beta_3$	$c_3=\beta_8$

Таким образом, уравнение (57) при выполнении группы условий (58) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_6 + \beta_7 u + (\beta_1 - \beta_4)v + \dfrac{\beta_2 - \beta_5}{2} v^2 + \beta_8 u^2}{(\beta_1 - \beta_4)u + (\beta_2 - \beta)vu}. \qquad (59)$$

Уравнение (59) интегрируется в элементарных функциях.

Таким образом, можно сделать вывод о полной интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 8 параметров:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\beta_6 x + \beta_7 y + \beta_1 z + \dfrac{\beta_2 + \beta_5}{2} z^2 \dfrac{1}{x} + \beta_3 zy \dfrac{1}{x} + \beta_8 y^2 \dfrac{1}{x}}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z}, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta_1 y + \beta_2 zy \dfrac{1}{x} + \beta_3 y^2 \dfrac{1}{x}}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z}. \end{cases} \qquad (60)$$

Следствие 1. *Следующая система третьего порядка на* $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^2\{z_1, z_2\}$, *зависящая от 8 параметров, обладает полным набором (вообще говоря, трансцендентных (в смысле ТФКП)) первых интегралов, выражающихся через элементарные функции:*

$$\begin{cases} \alpha^\bullet = \beta_4 \sin\alpha + \beta_3 z_1 + \beta_5 z_2, \\ z_2^\bullet = \beta_6 \sin\alpha\cos\alpha + \beta_7 z_1 \cos\alpha + \beta_1 z_2 \cos\alpha + \\ \quad + \dfrac{\beta_2 + \beta_5}{2} z_2^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_3 z_1 z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_8 z_1^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ z_1^\bullet = \beta_1 z_1 \cos\alpha + \beta_2 z_1 z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \beta_3 z_1^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \end{cases} \qquad (61)$$

Спектральный подход в динамике сплошной среды

(написано совместно с Р.Р. Айдагуловым)

Резонансные явления и различные неустойчивости относятся с точки зрения науки к явлениям одной природы, относящихся с математической точки зрения к спектральному анализу. Всем известна важность их исследования с практической точки зрения. Приведем только несколько современных примеров больших потерь из-за отсутствия теории этих явлений.

В Лондоне открыли пешеходный мост стоимостью 200 млн. фунтов. Однако уже после первого дня с момента открытия он был закрыт еще на два года из-за возникших резонансов. Потери США от недавнего урагана «Катрина» превысили астрономическую сумму 100 миллиардов долларов. Возможно, что с помощью резонансных воздействий электромагнитными волнами можно было предотвратить урон, рассеивая и (или) изменяя направление движения урагана.

Также нелегким вопросом является правильное моделирование расчета течения в первом контуре атомных реакторов. Дело в том, что среда с пузырьками приводит к появлению диффузионных скоростей жидкости, которые не учитываются в основных балансовых уравнениях. Тепловой отвод также происходит в основном не за счет конвекции осредненной скорости жидкости, а за счет не учтенных диффузионных скоростей, под которыми здесь мы понимаем мелкомасштабные колебания скоростей, исчезающие при осреднении по пространству (в более крупном масштабе).

Соответственно, отсутствует адекватное описание среды для вычисления неустойчивостей, приводящих к нештатным ситуациям. Таких примеров можно привести много и почти в каждой области. Для расчета или управления такими процессами необходимо знать спектральные свойства имеющихся в среде волн.

Существенное улучшение прогнозов и расчетов этих явлений может быть достигнуто только при правильном моделировании изучаемого явления с точки зрения изучения неустойчивостей резонансов. А этого нельзя добиться, оставаясь в рамках дифференциальных уравнений в частных производных. В этих вопросах существенными становятся дисперсионные соотношения и, в первую очередь, правильное моделирование малых диссипаций в среде.

В книге [362] приводятся экспериментальные данные о затухании волн в грунте, насыщенной жидкостью. Эти данные существенны для вычисления резонансов и отличаются в миллион раз от теоретических значений, полученных из уравнений Био [363] (которыми пользуются почти все исследователи в этой области) в низкочастотной области, где расположены основные резонансы. Сама пропорциональность этой величины частоте в низкочастотной области не может быть объяснена в рамках существующих (даже модифицированных) уравнений в рамках теории дифференциальных уравнений в частных производных. В то же время теория гетерогенных сред, изложение некоторых частей которой приводится ниже, теоретически объясняет именно такое поведение.

1. Псевдодифференциальность и гиперболичность эволюционных уравнений

Выясним вначале самый общий вид эволюционных уравнений. С этой целью вначале определим некоторые общеизвестные в среде математиков, но менее известные в среде механиков, понятия [364].

Линейный псевдодифференциальный оператор (ПДО) A задается своей амплитудой

$$a(\xi) = (a_{ij}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k))$$

и действует на вектор-функциях

$$y(x), y = (y_1, ..., y_m), x = (x_1, ..., x_k)$$

следующим образом:

$$\begin{gathered} Ay = (2\pi)^{-k} \int a(\xi)\, \bar{y}(\xi) \exp(i \sum_j x_j \xi_j) d\xi, \bar{y}(\xi) = \\ = \int y(x) \exp(-i \sum_j x_j \xi_j) dx. \end{gathered} \tag{62}$$

Соответственно, оператору дифференцирования по координате x_j соответствует амплитуда $i\xi_j E$, где E — единичная матрица. Считая, что амплитуда зависит так же и от x, получаем неоднородные линейные операторы, а, добавляя при этом зависимость от y, получаем квазилинейные операторы, когда при вычислении значения оператора в точке x по формуле (62) значения x и значения функции $y(x)$ (вычисленной в этой точке) входят как простые параметры.

Поясним, каким образом появляются псевдодифференциальные уравнения (содержащие псевдодифференциальные операторы) в механике. Общим подходом к динамической системе (не только механической) является подход, основанный на представлении группы сдвигов по времени на группе автоморфизмов некоторого расслоения. При этом представление, вообще говоря, локальное (не распространяется на всю ось времени), поэтому лучше говорить о представлении их алгебр Ли. При переводе на механический язык имеем следующее: база расслоения состоит из множества значений независимой переменной x, а слои — из основных переменных y. Тогда представление позволяет найти распределение $y(x,t)$, если известно начальное сечение, являющиеся начальным распределением $y(x,t_0)$. Последнее выполняется в силу принципа причинно-следственности (настоящее полностью определяет будущее).

При этом переход $S(t_1,t_0)$ (из $y(x,t_0)$ к $y(x,t_1)$) и далее переход $S(t_2,t_1)$ (из $y(x,t_1)$ к $y(x,t_2)$) дает тот же результат, что и переход $S(t_2,t_0)$ (основное свойство представления). Это представление (элемент алгебры) задается следующим эволюционным уравнением:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(y,t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x})y + F(y,t,x). \tag{63}$$

Здесь А — произвольный оператор, а $F(y,t,x)$ (выделенное отдельно) – обычно используется как внешнее воздействие.

Обычно вышеупомянутое расслоение имеет также внутреннюю структуру, и представление эту структуру сохраняет. В механике это выражается обычно галилеевой инвариантностью, т.е. решение эволюционных уравнений после действия на них группы Галилея опять является решением. Эта группа содержит группу сдвигов в пространстве-времени. Следовательно, локально, вблизи заданного решения, в некоторой окрестности оператор

$$A(y,t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x})$$

сводится к линейному псевдодифференциальному оператору, так как только такие операторы коммутируют со всеми операторами сдвига. Последнее свойство можно доказать с помощью нахождения всех собственных векторов операторов сдвига, которые являются (полным) базисом функций вида

$$\exp(i\xi x), (\xi x = \sum_j x_j \xi_j),$$

и, учитывая, что оператор, коммутирующий со всеми операторами сдвига, имеет те же собственные функции, их собственные значения являются (вообще говоря, произвольными) функциями $a(\xi)$ от (номеров) $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)$. Соответственно, неоднородность и нелинейность так же выражаются в вышеприведенном для псевдодифференциальных операторов смысле.

Отметим, что и дискретные уравнения могут быть интерпретированы в псевдодифференциальной постановке, поскольку они могут выражаться через свертки с обобщенными функциями вида

$$\sum_j a_j \delta(x - x_j),$$

которым соответствует амплитуда

$$\sum_j a_j \exp(-ix_j \xi).$$

Линейный интегральный оператор

$$f(x) \to \int K(x, y) f(y) dy$$

при некоторых условиях на K является псевдодифференциальным тогда и только тогда, когда ядро $K(x, y)$ — диагональное, т.е.

$$K(x, y) = K(x - y, 0) = K(0, y - x).$$

Общеизвестными применениями псевдодифференциальных операторов в механике служат формула Седова, являющаяся преобразованием Гильберта функции угла атаки, и формула для силы Бассе, являющаяся половинным дифференцированием вдоль траектории частиц.

Преобразованием Гильберта для функции $f(x)$ является следующий интеграл:

$$Hf = \operatorname{Re} s \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \right). \quad (64)$$

Этот оператор нулевого порядка замечателен тем, что, будучи действительным оператором, он служит одним из аналогов мнимой единицы (квадрат оператора равен «минус 1»).

Отметим, что в Новосибирской и Ленинградской школах [365] используются, как правило, псевдодифференциальные уравнения под видом нелокальных уравнений механики, а специалисты по теории упругости [366] — под видом уравнений среды с памятью. Таким образом, первые использовали псевдодифференциальность исключительно по пространственным, а вторые — исключительно по временной координате. В некоторых постановках задач это оправданно, однако в задачах распространения волн надо учитывать псевдодифференциальность как по пространственным координатам, так и по временной координате.

Математическим выражением физического принципа причинной следственности является гиперболичность уравнений (63) по временной координате. В [366] сделано попытка дать это понятие на математическом языке для псевдодифференциальных уравнений вида, рассмотренных там. Суть их сводится к действительности корней характеристического уравнения и обобщения условия Адамара [367].

2. Вывод псевдодифференциальных уравнений для разреженного газа

С механически точки зрения псевдодифференциальность системы уравнений в однофазной среде проявляется в зависимости от диссипативных сил и притока тепла, от предыстории и от окружения в пространстве. Здесь мы не рассматриваем многофазные среды, где это проявляется из-за отсутствия даже локального равновесия (многоскоростность среды). В однофазных средах это появляется при учете глобальной неравновесности состояния среды при наличии локального равновесия (квазиравновесное состояние) [368].

При выводе гидродинамических уравнений из уравнений Больцмана в нулевом приближении получаются чистые законы сохранения в виде дифференциальных уравнений Эйлера с простыми (алгебраическими) замыкающими соотношениями.

Следующее приближение получается при учете квазиравновесности и приводит к псевдодифференциальной системе уравнений, выводом которой сейчас займемся.

Пусть $f_0(\xi, r, t)$ — функция равновесного распределения массы частиц (молекул) по скоростям ξ. Пренебрегая пристеночными эффектами, предполагаем, что зависимость от пространственных координат r и времени t — неявная и выражается через моменты нулевого порядка ($\rho = \int f_0(\xi) d\xi$, плотности), первого порядка ($\rho v = \int \xi f_0(\xi) d\xi$, плотности импульса) и второго порядка ($\rho(u + v^2/2) = \int \xi^2 f_0(\xi) d\xi$, плотности энергии).

Для нулевого момента (переноса массы) получаем обыкновенное гидродинамическое уравнение сохранения масс и условие гладкого изменения плотности на расстояниях порядка средней длины пробега l_0, обеспечивающей квазиравновесность. Нелинейные притоки импульса и энергии, обеспечивающие отличие квазиравновесного случая от равновесного, дают в гидродинамических уравнениях переноса диссипативные силы вязкости и теплопроводности. Так как импульс и энергия сохраняются на микроуровне, то можно записать гидродинамические уравнения через потоки импульсов P^{lk} и энергии ε^k следующим образом:

$$\frac{\partial \rho v^l}{\partial t} = \frac{\partial P^{lk}}{\partial x^k}, \frac{\partial \rho(u + v^2/2)}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon^k}{\partial x^k}. \tag{65}$$

Для того, чтобы эти банальные соотношения превратить в уравнения, необходимо выразить потоки импульсов и энергии через гидродинамические переменные. Вначале выразим их через квазиравновесное распределение $f(\xi, r, t)$ предполагая, что частицы (молекулы) до прихода в заданную точку не меняли направление и скорость с момента последнего соударения, где их распределение соответствовало местному равновесному распределению. Таким образом, мы считаем, что молекулы газа не взаимодействуют между собой кроме как при соударениях. Это предположение является сильным ограничением, позволяющим вывести точные гидродинамические уравнения в первом приближении. Из него получаем:

$$\begin{aligned} P^{lk} &= -\int \xi^l \xi^k f(\xi, r - \xi\tau, t - \tau)\phi(\xi, \tau) d\xi d\tau, \\ \varepsilon^k &= -\int \xi^2 \xi^k f(\xi, r - \xi\tau, t - \tau)\phi(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \tag{66}$$

Здесь $\phi(\xi, \tau)$ — плотность вероятности столкновения за время τ для частицы со скоростью ξ.

Далее мы предполагаем, что имеем дело с разреженным газом, т.е.

$$2a\sqrt[3]{n} << 1,$$

где n — количество частиц в единице объема,
a – эффективный радиус.

Тогда естественно считать, что распределение $\phi(\xi,\tau)$ вероятности — Пуассоновское, т.е.

$$\phi(\xi,r,t,\tau)=\frac{1}{\tau_0}\exp(-\tau/\tau_0)\,.$$

Для разреженного газа имеем формулу для среднего времени пробега:

$$\tau_0=\tau_0(s)=\frac{l_0}{(2\pi)^{3/2}u(r,t)^{1/2}}\int\frac{\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)dxdydz}{\sqrt{(x-\sqrt{s})^2+y^2+z^2}}\,,$$

$$s=\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{u(r,t)},\, l_0=\frac{1}{4\pi a^2 n(r,t)}\,.$$

До сих пор мы не использовали квазиравновесность. Теперь потоки импульсов и энергии выразим через моменты квазиравновесного распределения для случая локального Максвеловского распределения:

$$f_0(\xi,r,t)=\frac{\rho}{(2\pi u)^{3/2}}\exp(\frac{-(\xi-v)^2}{2u}),$$

$$\rho=\rho(r,t),\ v=v(r,t),\ u=u(r,t).$$

При этом в смысл квазиравновесности включаем и то, что функции распределения мало меняются при сдвигах на расстояния порядка расстояния свободного пробега и за времена порядка интервала между двумя столкновениями, так что эти эффекты можно учесть только в первом приближении.

Точнее это выражается учетом первого порядка малости по числу Кнудсена, вычисленным по длине характерного изменения параметров:

$$Kn = l_0 / L, L = \min(L_\rho, L_v, L_u), L_y = |y| / |grad(y)|,$$

где l_0 – длина свободного пробега молекул,

L – характерный масштаб длины, на котором меняются параметры течения.

Это значит, что при вычислении интегралов из формулы (64) мы пользуемся приближением, полученным из следующего точного выражения:

$$f(\xi, r - \xi\tau, t - \tau) = f(\xi, r, t) -$$

$$-\int_0^\tau \left(\frac{\partial f(\xi, r - \xi\tau', t - \tau')}{\partial t} + \xi \frac{\partial f(\xi, r - \xi\tau', t - \tau')}{\partial r}\right) d\tau',$$

разложением до членов первого порядка малости, убедившись в том, что распределение

$$f_0(r,t,\xi) + f_1(r,t,\xi),\ f_1(r,t,\xi) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty [f_0(r - \xi t, t - \tau, \xi) - f_0(r,t,\xi)]\phi(\xi,\tau)d\tau$$

является точным в первом приближении решением кинетических уравнений.

Точность приближения решения кинетических уравнений получается от того, что равновесные распределения в интеграле столкновений (62) дают точный нуль, соответственно, при вычислении интеграла столкновений нужно считать только перекрестные члены $J(f_0, f_1)$.

Из-за малости первого порядка членов f_1 следует, что величина $J(f_0, f_1)$ не больше первого порядка малости. Тот факт, что вклады молекул, идущих в противоположных направлениях, сокращаются в первом приближении, дает, что величина $J(f_0, f_1)$ имеет второй порядок точности. Таким образом, получается точное в первом приближении решение.

На самом деле, нам необходимо только точность не самого решения кинетических уравнений, а только вклад соответствующей добавки f_1 при вычислении гидродинамических параметров потока.

Члены нулевого порядка малости дают обычные конвективные члены и давление:

$$P_0^{lk} = -\rho v^l v^k - p\delta_l^k,\ p = \frac{2}{3}u\rho,\ \varepsilon_0^k = -\rho v^k (u + v^2/2)\,. \qquad (67)$$

При этом, из-за сокращения членов со скоростями ξ и $-\xi$ в первом порядке малости, максвелловское распределение $f_0(r,t,\xi)$ больше ничего не даст. Диссипативные добавки в нашем приближении первого порядка появляются при вычислении потоков импульса и энергии (66) за счет нарушенного распределения:

$$f_1(r,t,\xi) = \theta(D_\xi) f_0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\exp(-\tau D_\xi) - 1) f_0 \phi(\xi,\tau) d\tau,\ D_\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial r}$$

(данная величина называется субстанциональной производной, ξ и r — трехмерные величины; соответственно, происходит дифференцирование вдоль направления ξ).

Подставляя сюда распределение f_0, и, учитывая ее инвариантность относительно оператора столкновений, получаем искаженное распределение в виде суммы, зависящей от трех инвариантов:

$$f_1(r,t,\xi) = f_{1\rho}(r,t,\xi) + f_{1v}(r,t,\xi) + f_{1u}(r,t,\xi),$$

$$f_{1\rho} = f_0 \frac{1}{\rho}\theta(D_\xi)\rho,\ f_{1v} = f_0 \frac{\xi - v}{u}\theta(D_\xi)v,$$

$$f_{1u} = f_0 \frac{(\xi - v)^2 - 3u}{2u^2}\theta(D_\xi)u.$$

Опять, подставляя эти выражения в (66), получим поправки, учитывающие диссипативные «вязкие» напряжения и теплопроводность через псевдодифференциальные операторы, примененные к плотности, к скоростям и температуре.

Оператор

$$Ag(x) = \int_0^\infty s(\eta)g(x - \tau\eta)d\eta \,,$$

получающийся усреднением по сферам некоторого радиуса и интегрированием по радиусу с весом, зависящим от данного радиуса, выражается как действие некоторого псевдодифференциального оператора, зависящего от оператора Лапласа [377].

Оператор

$$Bg(x,t) = \int_0^\infty g(x - v\tau, t - \tau)s(\eta)d\eta$$

выражается как применение псевдодифференциального оператора, являющегося функцией от субстанциональной производной. Поэтому «вязкие» напряжения и теплопроводность выражаются через псевдодифференциальные операторы, зависящие, как функции, от субстанциональной производной и оператора Лапласа:

$$\sum_y S_y(D,\Delta)y,\, y = \rho, v, u \,.$$

В связи с тем, что при $|\eta| \to \infty$ символы операторов $s(\eta)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю, порядок этих операторов равен $-\infty$, а не 2, как в уравнениях Навье–Стокса, получаемых как дифференциальное приближение в длинноволновой области.

Соответственно, уравнения не требуют дополнительных граничных условий. Однако, при решении граничных задач, из-за нелокальности псевдодифференциальных операторов (ПДО) необходимо определить эти операторы, как ПДО с граничными условиями [376]. Анализ линейных ПДО с граничными условиями приводит к выражению граничных условий как условию отражения волн.

Разбор условий отражения волн для ПДО приводит к определению ПДО с границей, выражаемой через интегралы, как продолжение интегрирования по лучам до отражения от границы с учетом изменения функции, как линейного преобразования на границе. Таким образом, оператор

$$\int d\xi \int_0^\infty s(\xi,\tau) g(x-\tau\xi, t-\tau) d\tau ,$$

как оператор с границей, вычисляется продолжением интегрирования по лучу η, соответствующему лучу ξ, как луч до отражения и примененный к g до отражения (являющемся линейным преобразованием g после отражения). Такое определение по сути не зависит от того, является ПДО линейным или нет.

Далее, поскольку среднеквадратичная скорость молекул является величиной порядка скорости звука, то при течениях с малыми числами Маха можно пренебречь псевдодифференцированием по t в добавочных членах и отбросить малые члены P_ρ^{lk}, P_u^{lk}. В этом случае из вышеприведенных уравнений получаются псевдодифференциальные уравнения, очень похожие на уже использовавшиеся ленинградской школой (Хантулева, Филиппов и др.), начиная с 1984 г.

Когда можно пренебречь отношением l_{cp}/L, из уравнений исчезает вся псевдодифференциальность, и они приобретают вид уравнений Навье–Стокса и теплопроводности. Псевдодифференциальность проявляется при расчетах структур ударных волн, когда это отношение не (очень) мало, и в аэродинамике в верхних слоях атмосферы.

Псевдодифференциальность уравнений также отражается на решении гидродинамических задач, когда отношение длины расстояния среднего пробега l_{cp} на расстояние характерного масштаба изменения параметров $L = |y| / |grad(y)|$ (в аэродинамических задачах эта величина порядка толщины погранслоя, точнее, толщина погранслоя измеряется в нескольких L) не является пренебрежимо малой. Когда это отношение пренебрежимо мало, при расчетах можно пользоваться локальными уравнениями (Навье–Стокса, теплопроводности).

За дальнейшими сведениями о применениях псевдодифференциальных уравнений, называемых уравнениями нелокальной гидромеханики, отсылаем в [369], которым посвящена последняя глава, и к цитированной там литературе. Отметим только одну существенную деталь, не затронутую там, а именно, приближенные локальные уравнения, полученные из более точных псевдодифференциальных (нелокальных) уравнений, являются секулярными (получены с увеличением порядка системы с малым множителем), а потому становятся совершенно непригодными при изучении на устойчивость и некоторых волновых свойств.

Возникает вопрос, стоит ли пользоваться такими усложненными уравнениями, если их отличие от привычных уравнений Навье–Стокса проявляется только при расстояниях порядка нескольких длин свободного пробега молекул. В задачах типа выявления структуры ударной волны эти уточнения того не стоят. К тому же, для этих задач имеются прямые расчеты кинетических уравнений [369, 370].

Однако, в аэродинамических задачах при подсчете силы сопротивления данное отличие может стать существенным из-за того, что основная область «потери» (изменения) импульса (из чего складывается сила сопротивления) является тонкой погранслойной зоной, ширина которой может оказаться не намного большей длины свободного пробега молекул при больших высотах. Они еще более существенны в задачах на устойчивость ламинарных течений относительно коротковолновых возмущений, так как меняется не только порядок, но и тип уравнений.

Возникает еще вопрос обоснованности этих уравнений с вычислительной точки зрения. Отметим, что решение линейных задач с такими уравнениями не сложнее решения уравнений Эйлера, т.е. менее трудоемкое, чем решение линеаризованных уравнений Навье–Стокса. Численное решение нелинейных уравнений также не намного сложнее, чем решение нелинейных уравнений Навье–Стокса, из-за того, что интегральные ядра являются достаточно сосредоточенными.

Вообще, для решения псевдодифференциальных систем уравнений можно разработать алгоритмы, не сильно уступающие алгоритмам решения дифференциальных систем уравнений, т.е. гораздо более экономные, чем решение прямых кинетических уравнений, когда размерность базового пространства вырастает как минимум на три, даже при решении одномерных задач.

Таким образом, мы показали, что правильный учет диссипации приводит к псевдодифференциальным (гиперболичным по t) уравнениям, являющимися более общими, чем дифференциальные уравнения. Их использование в механических задачах не менее обоснованно, чем использование привычных уравнений Навье–Стокса.

Здесь мы не рассматриваем вопрос о виде диссипативных уравнений для плотных газов и жидкостей, который заслуживает отдельного рассмотрения. Отметим только, что в этом случае, по мнению авторов, длина релаксационной передачи импульса уменьшится в направлении, перпендикулярном направлению движения, и увеличится в направлении движения.

Когда эти длины намного меньше длины характерного изменения параметров (длинноволновое приближение), наши уравнения перейдут в классические уравнения Навье–Стокса и теплопроводности. Так как псевдодифференциальные уравнения как бы содержат члены с множеством возможных степеней производных, то их решения обладают свойствами систем с вязкоупругостью. Поэтому уравнения для плотных газов и жидкостей имеют самостоятельный интерес, как модель с обобщенной вязкоупругостью. Некоторая модель будет рассмотрена в следующем параграфе.

Порядок псевдодифференциальных уравнений определяется как верхний предел

$$\overline{\lim}\frac{\ln|a(\xi)|}{\ln|\xi|}$$

при $|\xi|\to\infty$. За счет экспоненциальных множителей в правильных уравнениях диссипативные члены имеют самый низший ($-\infty$) порядок.

Однако экспонента начинает проявляться только при длинах волн, сравнимых с малой длиной (среднего пробега молекул для разреженного газа), и при достаточных длинах ведет себя как оператор двойного дифференцирования для вязкости.

Из за этой секулярности приближенных локальных уравнений при исследовании на устойчивость и некоторых волновых свойств мы получаем неправильные дисперсионные соотношения типа

$$\lambda = c\xi + i\mu\xi^2$$

вместо

$$\lambda = c\xi + i\mu\xi^2\exp(-a\xi^2 + b\xi),$$

дающих всегда устойчивость в коротковолновой области, вместо неопределенности, с точки зрения устойчивости в коротковолновой зоне.

Дело в том, что для гиперболичности, как и в случае простых (в частных производных) гиперболических уравнений [367], необходимым условием гиперболичности является действительность всех характеристических скоростей

$$c_i = \lim \frac{\lambda_i}{k_i}$$

при $|k| \to \infty$, где (λ_i, k_i) — решения дисперсионных уравнений (их несколько, из-за высокого порядка системы уравнений).

Из-за действительности характеристических скоростей в пределе, в коротковолновой зоне гиперболические уравнения находятся, с точки зрения устойчивости, в неопределенной (мнимая часть может качнуться как в верхнюю – устойчивую, так и в нижнюю – неустойчивую – область) зоне.

Поэтому неустойчивость может возникать раньше, чем при исследовании по локальной теории. Расчеты по негиперболичным уравнениям (не удовлетворяющим необходимым условиям гиперболичности) при высоких частотах в коротковолновой зоне дают всегда устойчивость (для Навье–Стокса) или всегда неустойчивость.

Известно, что для течений Пуазейля в цилиндре не возникает неустойчивость при использовании уравнений Навье–Стокса [378, с. 167], что не соответствует реальным наблюдениям. Однако, причиной тому является не гиперболичность уравнений Навье–Стокса. Известно также большое несоответствие (до тысяч раз) вычисленных сопротивлений в течениях Пуазейля в микроканалах, используемых в электронике. Оно объясняется тем, что в таких масштабах уравнения Навье–Стокса не являются хорошими приближениями истинных нелокальных псевдодифференциальных уравнений (ПДУ).

Здесь мы не приводим явное определение гиперболичности для псевдодифференциальных систем уравнений. Неявно под этим понимается возможность однозначного (единственного) получения решения, непрерывно зависящего от начальных условий.

Обычно в литературе под гиперболичностью понимается строгая гиперболичность из [367], когда гиперболичность (существование единственного, непрерывно зависящего от начальных данных решения) гарантируется и при малых деформациях меньшего порядка по дифференцированию. Некоторые обобщенные понимания гиперболичности для некоторых интегро-дифференциальных уравнений, применяемых при изучении волн на мелкой воде с перемещивающимися слоями, имеется в [377].

Однако, это определение с математической точки зрения не отличается от строгой гиперболичности для простых дифференциальных уравнений в частных производных ни чем, кроме распространения на случай, когда y — элемент бесконечномерного пространства. В псевдодифференциальном случае «перемешивание» происходит не только в независимом (в поперечном к направлению распространения волны) направлении, но и в продольном (реологическом) направлении, что существенно усложняет это понятие.

Отметим еще, что для более правильных псевдодифференциальных уравнений из-за не увеличения порядка системы уравнений, не требуется задание дополнительных граничных условий, кроме граничных условий для уравнений Эйлера. При этом условие «прилипания» выполняется автоматически при удалении от носа на расстоянии порядка нескольких (достаточно 10) длин

$$L = |y| / |grad(y)|$$

(характерный масштаб изменения параметров), т.е. за пределами горизонтального (вдоль потока) «погранслоя», из-за корреляции между касательными и нормальными скоростями для решения.

Для плотных газов, жидкостей, твердых тел потоки неравновесных импульсов и энергий формируются преимущественно не за счет диффузионного переноса массы, как в разреженном газе, а за счет сил взаимодействия «соседних» частиц. Соответствующие уравнения для напряжений и «притока тепла» нельзя получить из уравнений Больцмана. Для получения этих уравнений сейчас ведется работа по моделированию множества частиц с потенциалом взаимодействия типа Ленарда–Джонса. При этом уравнения должны появится в виде дробных степеней от операторов Лапласа и субстанциональной производной.

Интегральные ядра становятся убывающими по степенному закону, и представляют законы реологии для Лагранжевых частиц. Соответствующие законы движения приобретают вид уравнений движения для обобщенной вязко-упругой среды.

Непосредственный вывод реологических законов из микроуравнений становится более сложным, чем в случае разреженного газа, и здесь будет показано, что их проще «измерить» путем измерения дисперсионных соотношений. Последнее относится так же к многофазным средам, где отсутствует равновесие даже локальное (многоскоростность среды).

3. Псевдодифференциальный закон Гука

В однофазных средах псевдодифференциальность уравнений более существенна при описании вязко-упругих сред, когда реология проявляется в реальных масштабах. Псевдодифференциальность систем уравнений в однофазных средах возникает так же из-за микронеоднородностей (из-за не гомогенности). Анализ этого явления показывает, что распространение волн в таких средах может быть описано введением не-стационарных членов с дробным дифференцированием в законе Гука.

Напомним здесь определение производной дробного порядка α от функции $f(x)$:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{x} \frac{f^{/}(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\alpha}}$$

[372], введенного еще Абелем в случае $\alpha = 1/2$.

Многие авторы вводят эти члены с половинным дифференцированием по времени, не учитывая дробное дифференцирование по пространственным координатам, которые, как показывает анализ распространения волн в микронеоднодных средах, так же должны присутствовать в уравнениях. Без этого системы уравнений получаются сильно диссипативными (при не очень малых коэффициентах перед такими членами). Здесь мы не приводим этот анализ и будем пользоваться дробными дифференцированием как по времени, так и по пространственным координатам.

В многофазных средах, по мнению авторов, псевдодифференциальность проявляется почти всегда из-за диссипации (как в неравновесной системе) по неравным по фазам скоростям.

В предыдущем параграфе рассматривался вывод уравнений для описания разреженного газа. Усложненные уравнения существенны там, где существенна неоднородность газа. Для аэродинамических задач это возникает, когда число Кнудсена, вычисленное по толщине пограничного слоя, не является пренебрежимо малой величиной. В волновых процессах это выражается числом Кнудсена, вычисленным по длине волны.

В обычных условиях (условия на поверхности планеты Земля) эти числа всегда малы. Однако, в твердых фазах, например в скелете пласта, которым занимаются в фильтрации, учет неоднородностей становится существенным. Полный анализ на молекулярном уровне в жидких и твердых телах существенно усложняется из-за необходимости учета потенциалов взаимодействия. Поэтому здесь такой анализ не проводится. Целью этого параграфа является обоснование псевдодифференциального закона Гука.

Для начала рассмотрим линейные волновые решения вида

$$y = y_0 \exp[i\omega(t + kx)]$$

для скелета с введенным псевдодифференциальным членом

$$ctr\rho_0 \frac{\partial^\alpha \partial^\beta}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} v, (\alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha + \beta \le 1).$$

Тогда для числа k получаем следующее уравнение:

$$\frac{E_1}{\rho_0} k^2 = 1 + ctr(i\omega)^{\alpha+\beta-1} k^\beta.$$

Анализ на комплексной плоскости показывает, что при вычислении члена k^β надо брать следующее значение:

$$k^\beta = \begin{cases} |k|^\beta \exp(i\beta ph(k)), 0 < ph(k) < \pi/2, \\ |k|^\beta \exp(i\beta ph(k) - \pi i\beta), \pi/2 < ph(k) < 2\pi. \end{cases}.$$

Соответственно получается, что если $\alpha + \beta > 1$, то нарушается не только гиперболичность, но и волна становится антидиссипативной, т.е. экспоненциально растущей при убегании.

Когда $\alpha + \beta < 1$ волна – диссипативная, и скорость волны стремится к нулю при уменьшении частоты. Если $\alpha + \beta = 1$, то нет диссипации, и линейная система уравнений эквивалентна системе без этого члена с уменьшенным модулем Юнга:

$$E_1 - ctr\rho_0 c^{2-\beta},$$

где c – скорость волны.

Поэтому в этом случае назвать этот член трением не уместно.

Еще одно уточнение связано с направлением дифференцирования $\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$, точнее этот оператор должен выражаться через оператор Лапласа и иметь вид: $\Delta^{(\beta/2)}$.

Соответственно, оператор $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ является линеаризацией оператора дифференцирования вдоль траектории D^α, у которого нелинейная часть $v\frac{\partial}{\partial x}$ становится не существенной при малых числах Маха.

Рассмотрим теперь распространение волны в неоднородной среде. Обсудим вначале подход, основанный на невзаимодействующих волнах, т.е. на каждом участке волна распространяется в соответствии с параметрами среды, соответствующими данной точке. Разделим небольшой участок длиной l на однородные участки

$$(x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, ..., k,$$

с параметрами

$$E_i, \rho_i^0, c_i = \sqrt{E_i / \rho_i^0}, k_i = \omega / c_i.$$

Общий вид волны смещений в участке (x_{i-1}, x_i) имеет вид:

$$y(x) = \mathrm{Re}[e^{i\omega t}(a_i \cos k_i x + b_i \sin k_i x)] \tag{68}$$

с комплексными постоянными a_i, b_i. На границах участков должны выполняться равенство смещений и напряжений. Так как эти условия выполняются в любое время, они приводят к двум комплексным соотношениям на каждой границе сшивки:

$$a_i \cos k_i x_i + b_i \sin k_i x_i = a_{i+1} \cos k_{i+1} x_i + b_{i+1} \sin k_{i+1} x_i,$$
$$E_i k_i (b_i \cos k_i x_i - a_i \sin k_i x_i) = \qquad (69)$$
$$E_{i+1} k_{i+1} (b_{i+1} \cos k_{i+1} x_i - a_{i+1} \sin k_{i+1} x_i).$$

Эти соотношения позволяют определить все a_i, b_i, по заданным a_1, b_1.

Вычислим теперь средние деформации и напряжения. Деформация в точке x вычисляется как $y'(x)$, напряжение — как $E(x)y'(x)$. Соответственно, среднемассовая (следует использовать среднемассовые деформации для сохранения дифференциальных соотношений между скоростями, всегда вычисляемыми как среднемассовые, и деформациями) деформация вычисляется по следующей формуле:

$$\varepsilon = \int_0^l \rho(x) y'(x) dx / \int_0^l \rho(x) dx = \sum_i \rho_i^0 (y_i - y_{i-1}) / \sum_i \rho_i^0 (x_i - x_{i-1}). \quad (70)$$

Среднее (объемное) напряжение выражается по формуле

$$\sigma = \int_0^l E(x) y'(x) dx / l = \sum_i E_i (y_i - y_{i-1}) / l. \qquad (71)$$

Между этими средними имеется связь, если длина волны L намного больше длины рассматриваемого участка l, т.е. $k_i l \ll 1$.

Вычисление с точностью до второго порядка точности приводят соотношения (69) к следующим соотношениям:

$$a_{i+1} = a_i + b_i x_i k_i (1 - \frac{E_i}{E_{i+1}}), b_{i+1} =$$
$$= b_i \frac{E_i k_i}{E_{i+1} k_{i+1}} + a_i x_i (k_{i+1} - \frac{E_i k_i^2}{E_{i+1} k_{i+1}^2}). \qquad (72)$$

Соответственно, получается:

$$y_i - y_{i-1} = (x_i - x_{i-1})k_i \operatorname{Re} e^{i\omega t}(b_i - a_i \frac{x_i + x_{i-1}}{2} k_i),$$

$$b_{i+1}E_{i+1}k_{i+1} = b_i E_i k_i + a_i x_i (E_{i+1}k_{i+1}^2 + E_i k_i^2) = \tag{73}$$

$$= b_i E_i k_i + a_i x_i \omega^2 (\rho_{i+1}^0 + \rho_i^0).$$

Отсюда видно, что между средним давлением и средней деформацией имеется следующая связь:

$$\sigma = E_0 \varepsilon (1 + O(kl)),$$

$$E_0 = \frac{\sum_i \rho_i^0 (x_i - x_{i-1})}{\sum_i \rho_i^0 (x_i - x_{i-1}) / E_i} = \frac{\rho}{\sum_i \rho_i / E_i}, \tag{74}$$

$$\rho_i = \frac{\rho_i^0 (x_i - x_{i-1})}{l}, \rho = \sum_i \rho_i.$$

Это означает, что среднее значение модуля Юнга равно средне (массовому) гармоническому от модулей Юнга.

Рассмотрим теперь подход с взаимодействующими волнами. Соответственно, линейные уравнения движения для фаз запишем в виде:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = c_i^2 \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x} + \sum_j R_{ij}(v_j - v_i), c_i^2 = E_i / \rho_i^0, R_{ij} = \alpha_i \alpha_j K_{ij} / \rho_i,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, i = 1, 2, \ldots m. \tag{75}$$

Соответственно, решение представляется в виде:

$$y = \sum_j C_j y_{0j} \exp(i\omega t - ik_j x), y = (v_1, \varepsilon_1, \ldots, v_m, \varepsilon_m)^T. \tag{76}$$

Здесь k_j — волновые числа, C_j — произвольные постоянные. При этом волновые числа удовлетворяют следующему уравнению:

$$\det|kA + iR + \omega E| = 0\ , \tag{77}$$

а y_{0j} являются собственными векторами, т.е.

$$(k_j A + iR)y_{0j} = -\omega y_{0j}\ .$$

Уравнение (77) является уравнением порядка $2m$ относительно волнового числа, где m – количество твердых фаз.

Анализ несколько упрощается приведением матрицы A к диагональному виду, вводя переменные:

$$y_{1i} = v_{2i} + c_i\varepsilon_i, y_{2i} = v_{2i} - c_i\varepsilon_i\ .$$

Тогда уравнение для волновых чисел (77) представляется в виде:

$$\det|kA + \omega E + iR_1| = \sum_l (-i)^l (kA + \omega E, R_1)_l\ . \tag{78}$$

Здесь R_1 — матрица R, записанная в новых переменных.

Для двух квадратных матриц одинакового порядка X и Y через $(X,Y)_l$ обозначим сумму из произведений миноров порядка l матрицы X на дополнительный минор в матрице Y, взятой со знаком плюс или минус, в зависимости от четности или нечетности суммы всех номеров строк и столбцов, участвующих в соответствующем миноре матрицы X (тот же знак получится, если определить знак по номерам строк и столбцов в дополнительном миноре Y).

Ранг матрицы R_1 в системе (78) равен m – 1. Соответственно, эта система дает две волны (распространяющиеся в противоположных направлениях с конечной скоростью) с волновыми числами

$$k_{0\pm} = \pm\omega / c \,,$$

и $2(m-1)$ диффузионных быстро затухающих волн с волновыми числами

$$k_{i\pm} = \pm\sqrt{-i\omega} / c_i \,.$$

При правильной постановке граничных условий и при увеличении коэффициента связи между разными твердыми фазами уменьшаются амплитуды диффузионных волн и на границе. При этом вычисленный диффузионный тензор напряжений по основным волнам даст трение.

Так как сам вывод вида (с точностью до коэффициентов) трения не зависит от количества твердых фаз (лишь бы было не меньше двух для учета неоднородности) и от количества жидких фаз при условии, что связи в твердой фазе более «крепкие».

Для матрицы R «крепкие» связи означают, что ее спектральная норма намного больше рассматриваемых частот.

Для наглядности приведем подробный вывод вида трения, рассматривая случай $m = 2$. В этом случае волновые числа для поперечных волн определяются из следующих соотношений:

$$k^4 c_1^2 c_2^2 - k^2[\omega^2(c_1^2 + c_2^2) - i\omega(c_1^2 R_{21} + c_2^2 R_{12})] +$$

$$+\omega^4 - i\omega^3(R_{12} + R_{21}) = 0,$$

$$k^2 = \frac{\omega^2(c_1^2 + c_2^2) + i\omega(c_1^2 R_{21} + c_2^2 R_{12}) \pm \sqrt{D}}{2c_1^2 c_2^2}, \tag{79}$$

$$D = \omega^4(c_1^2 - c_2^2)^2 + 2i\omega^3(c_2^2 - c_1^2)(R_{21}c_1^2 - R_{12}c_2^2) -$$

$$-\omega^2(c_1^2 R_{21} + c_2^2 R_{12})^2.$$

Волновые амплитуды выражаются по формулам:

$$y_{0k} = \begin{pmatrix} \omega(k^2c_2^2 - \omega^2 + i\omega R_{21}) \\ -k(k^2c_2^2 - \omega^2 + i\omega R_{21}) \\ i\omega^2 R_{21} \\ -ik\omega R_{21} \end{pmatrix}. \qquad (80)$$

Волновая амплитуда средней деформации ε имеет вид

$$\varepsilon = (\rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2)/(\rho_1 + \rho_2) =$$

$$= -k\rho_1(k^2c_2^2 - \omega^2)/\rho - ik\omega R_{21}, \rho = \rho_1 + \rho_2,$$

а амплитуда общего напряжения имеет вид

$$\sigma = \rho_1 c_1^2 \varepsilon_1 + \rho_2 c_2^2 \varepsilon_2 .$$

Вычислим эти величины для основной волны, когда

$$\omega << R_{12}, \omega << R_{21} .$$

В теории фильтрации известно, что связь между жидкой и твердой фазой в грунте характеризуется частотой порядка 1 *Мгц*, так как между разными участками скелета связь должен быть «крепче», то предположительно R_{ij} измеряется десятками *Мгц*. Следовательно, наши условия имеют широкий диапазон применимости. В этом случае волновое число для диффузионных волн приближенно находится по формуле

$$k_{dif} \approx \pm(1-i)\sqrt{\omega(\frac{R_{12}}{2c_1^2} + \frac{R_{21}}{2c_2^2})} .$$

Соответственно, на частотах порядка 10 *Гц* скорость диффузионной волны меньше скорости основной волны в тысячи раз. К тому же, эта волна затухает за свою длину волны примерно в $\exp(2\pi) \approx 400$ раз и поэтому не как не отразится на решении, кроме как через граничные условия, в случае их задания сильно неравновесным образом.

Для основной волны получается следующее соотношение:

$$k^2 = \frac{\omega^2 (R_{12} + R_{21})}{c_1^2 R_{21} + c_2^2 R_{12}} \times$$

$$\times \{1 - i\omega [\frac{c_1^2 + c_2^2}{c_1^2 R_{21} + c_2^2 R_{12}} + \frac{(R_{12} + R_{21}) c_1^2 c_2^2}{(c_1^2 R_{21} + c_2^2 R_{12})^2} - \frac{1}{R_{12} + R_{21}}]\}.$$

Это определяет равновесную скорость

$$c = \sqrt{\frac{c_1^2 R_{21} + c_2^2 R_{12}}{R_{21} + R_{12}}} = \sqrt{\frac{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2}{\rho_1 + \rho_2}} \qquad (81)$$

и малое трение.

Оценка трения дает вывод, что им можно пренебречь в широком диапазоне значений параметров. Отношение средних

$$\sigma / \varepsilon = \rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2$$

при вычислении скорости волны для общей смеси дает тот же результат.

Несовпадение результатов вычисления по двум методам для неоднородных сред связано с наличием диффузионных напряжений, деформаций и скоростей, возникающих вследствие неоднородности. В частности, во втором уравнении (69) мы должны были учесть еще разницу напряжений на сшиваемых концах с учетом ускорений, становящихся существенными в коротковолновом (в более быстром) случае.

Поэтому, при приближении смеси однофазной средой лучше записать член с градиентом напряжения следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - ctr \frac{\partial^\alpha \partial^\beta \rho v}{\partial t^\alpha \partial x^\beta}.$$

Из-за практического отсутствия трения в твердой фазе следует брать $\alpha+\beta\approx 1$, но сумма при этом не больше 1.

Когда нет диссипации, линейная система не меняется при замене дифференцирования по времени на дифференцирование по длине x с коэффициентом $\frac{\partial}{\partial t}=c\frac{\partial}{\partial x}$. Поэтому величина $c^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$ эквивалентна величине $\frac{\partial v}{\partial t}$.

Замена половинное дифференцирования по времени на половинное дифференцирование по x учитывает некоторое затухание волны вдоль пути распространения по форме трапеции, которая лучше отражает диссипацию при распространении волн с дополнительными фазами.

Соответственно, считая, что при малых частотах диффузионность не проявляется (в качестве общего модуля принимаем величину $E=\sum_i \rho_i E/\rho$), а при больших частотах проявляется на все сто процентов, получаем:

$$ctr\approx\left(\frac{\sum_i \rho_i E_i}{\rho}-\frac{\rho}{\sum_i \rho_i/E_i}\right)/c^{2-\beta}\geq 0. \qquad (82)$$

Неравенство следует из того, что среднее первого порядка (среднее арифметическое) больше среднего минус первого порядка (среднего гармонического). Равенство нулю возможно только в случае, когда все $E_i=E$ (т.е. одинаковые).

Поэтому, введенное волновое напряжение с параметрами $\alpha=\beta<0.5$ связано с характером распространения волн в неоднородных средах и характеризует инерцию диффузионного движения. Равенство $\alpha=\beta$ связано с некоторой симметрией вхождения операторов D и Δ и имеет более глубинный смысл.

Заметим так же, что в твердой фазе относительное движение практический отсутствует. Но разное сжатие, согласно первому подходу, вполне допустимо. И в этом случае перевод части напряжения, не согласованного со средними деформациями со средним коэффициентом Юнга, введенным динамическим напряжением, оправдано.

При отсутствии диссипации (внутренней или внешней) такой перевод является чисто формальным. Но при включении в систему жидкой фазы, как в фильтрации, этот перевод влияет существенным образом на характер малой диссипации общей волны.

Отметим, что, по мнению авторов, динамические поправки к уравнениям импульсов нельзя получить методами усреднения [363] в принципе, т.е. эти методы никогда не дадут вид динамических поправок указанного вида.

Для правильной записи трехмерных уравнений надо комбинировать двумя инвариантными относительно вращений типами дифференциальных операторов к векторным объектам $grad(div)$ и $div(grad) = \Delta$.

Они одинаково действуют к продольным волнам и существенно отличаются (первое дает ноль) при действии к поперечным волнам. Обычно в средах показатели затухания поперечных волн больше, как минимум, на порядок. Соответственно, для различия этих волн вводим два оператора:

$$D_1 = grad(div), D_2 = (div(grad))^{\beta} - (grad(div))^{\beta},$$

первый из которых аннулирует поперечные волны, второй — продольные. Их действие существенно отличается и на потенциальных и вихревых течениях. С их помощью динамическую поправку в законе Гука можно записать в следующем виде:

$$a\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} D_1^{\alpha/2} + bD_2, 0 < \alpha < 0.5, 0 < \beta < 0.5 . \qquad (83)$$

Первый член этого соотношения связан с интегрированием дивергенции скорости и диффузионностью $E_i = \lambda_i + 2\mu_i$, а второй — с диффузионностью μ_i, которые можно определить по формуле (82) и ее модификации. Но при втором члене учтена диссипативность поперечных волн и при стационарных задачах. Это сделано за счет исключения дифференцирования по времени с учетом того, что уравнения в этом случае должны содержать стационарные диссипативные решения.

Оператор (83) можно интерпретировать как динамическую поправку к известному закону Гука [373].

Отметим, что для извлечения квадратного корня от оператора Лапласа Дирак ввел спиноры, тем самым расширив размерность слоя (пространство зависимых переменных). Здесь у нас этот оператор применяется к векторной величине и этим существенно отличается. Возможности аналога такой конструкции здесь не рассматривается.

Введенное псевдодифференциальное «трение», на самом деле, оказывается волновым напряжением, которое приводит к тому, что при медленном деформировании все сжатие происходит по закону Гука с равновесным модулем Юнга, а при быстром неоднородная среда не возвращается в исходное положение, из-за введенных неравновесных членов. Только, в отличие от пластичности, это происходит и при достаточно малых деформациях. Появляется так же «усталость» за счет многократных длительных напряжений.

Обсудим теперь вопрос о применимости такого члена в жидкой фазе. В задачах фильтрации учитывать неоднородность жидкости, по мнению авторов, – излишнее усложнение. Однако, при движении вязких жидкостей в трубах, в особенности для вихревых движений жидкостей с немалыми числами Рейнольдса, учет таких членов, по видимому, необходим.

При этом следует учесть и направленность неоднородностей, связанных с завихренностью, т.е. величину правильнее считать пропорциональной завихренности. Все это приводит, вдобавок, к указанным линейным членам, и возникает нелинейный диссипативный член следующего вида:

$$D\sum_j w^j \frac{\partial^\gamma v^i}{\partial x_j^\gamma}, w = rot(v). \tag{84}$$

Вообще говоря, конструкция нелинейного диссипативного члена может быть более сложной. Авторы считают, что в некоторых задачах нелинейный член типа (84) необходим. Однако, он должен быть инвариантным относительно вращений ((84) таким не является), и из-за сложности и не изученности требует отдельного рассмотрения. При этом в задачах, где существенны диффузионные скорости, вместо $w = \mathrm{rot}\, v$ должны стоять независимые векторные величины w, имеющие некоторую динамическую связь с импульсами среды.

Введенные члены следует использовать при наличии внутреннего или внешнего трения. Внутреннее трение здесь учтено через уменьшение порядка дифференцирования по времени.

Учет волнового напряжения связано с учетом диффузионного движения, имеющегося, вследствие неоднородности среды (исходной для твердой фазы и возникающей из-за завихренности в жидкой фазе).

Приведенные формулы для ее определения следует принимать как полуэвристические аппроксимационные в первом приближении. Этот член введен нисколько для описания внутренней структуры среды, сколько для лучшего согласования волновых процессов при наличии внутреннего или внешнего (как в теории фильтрации) трения.

Однако, надо иметь в виду удивительное совпадение в показателях затухания распространения волн при наличии таких членов в теории фильтрации [362], прямо пропорциональных частоте волны в широком диапазоне (в равновесной зоне). Причем, при отсутствии такого члена показатель затухания пропорционален квадрату частоты, и несогласование с экспериментом доходит до миллиона раз в области основных резонансов.

Введение чисто дифференциальных членов для диссипации не могут дать согласование с указанным экспериментальным законом. Отметим, что при изучении неустойчивостей или резонансов показатель затухания основной волны в среде становится одним из главных параметров, и при таком расхождении по основному параметру нельзя рассчитывать на понимание явлений резонансов или неустойчивостей.

4. Волновой подход к определению среды

Как уже было отмечено, для правильного отражения явлений резонансов и неустойчивостей в среде не пригодны общепринятые не динамические законы. Для лучшего описания этих явлений лучше «измерить» уравнения. Определяя из эксперимента частотные зависимости скоростей и коэффициентов затухания (для полноты, и соотношения между амплитудами разных переменных) всех видов волн, можно подобрать псевдодифференциальный вид систем уравнений. Опишем это подробнее.

Ставя задачу определения системы «псевдодифференциальных» уравнений и ее решения, надо иметь в виду, что прямой (первичной) задачей является не определение системы (псевдо) дифференциальных уравнений, а задача определения дисперсионных соотношений, считавшейся ранее как вторичной. Заметим также, что сами уравнения определяются неоднозначно, их можно дифференцировать по некоторой независимой переменной x_j, соответствующей умножению на $i\xi_j$, умножать на функции, зависящие от x и y, складывать, т.е. уравнения, как и решения, представляются как модуль над кольцом функций от переменных x, t, y, ξ, λ .

При определении из эксперимента дисперсионных соотношений мы непосредственно определяем базис этого модуля. Обозначая переменные преобразования Фурье по пространственным переменным через ξ, по времени — через λ, можно записать формальное решение в следующем виде:

$$y(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^k} \times$$

$$\times \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} c_l(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)\, \overline{y}_l(\xi) \exp(i[\lambda_l(\xi)t + \xi x]) d\xi. \tag{85}$$

Здесь величины $\lambda_l(\xi)$— корни характеристического уравнения

$$\det\left|\lambda E - a(\xi)\right| = 0$$

для однородной системы

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Ay + F,$$

$a(\xi, \lambda)$ — амплитуда псевдодифференциального оператора A,

$\overline{y}_l(\xi)$ — собственные вектора (размерность которых совпадает с размерностью уравнений), $c_l(\xi)$ — произвольные функции, с помощью которых удовлетворяются начальные условия.

Последние для линейной задачи являются коэффициентами разложения начальных данных по базису собственных векторов $\overline{y}_l(\xi)$, т.е.

$$c_l(\xi) = \overset{*}{\overline{y}}_l(\xi)\, \overline{y}_{00}(\xi),$$

где $\overset{*}{\overline{y}}_l(\xi)$ — элемент дуального базиса к базису собственных векторов,

$\overline{y}_{00}(\xi)$ — преобразование Фурье начальных условий.

Отметим, что (85) представляет решение в виде суперпозиции волн с разными волновыми векторами ξ. Соответственно, решение можно представить в виде свертки матричного ядра с начальными значениями [374]:

$$y(t,x)=\int R(t,x-z)y_{00}(z)dz, R(t,x)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^k}\sum_l\int_{-\infty}^{\infty}\overline{y}_l(\xi)\otimes\overline{y}_l^{\,*}(\xi)\exp(i\lambda(\xi)t+i\xi x)d\xi \qquad (86)$$

Здесь $\overline{y}_l(\xi)$ и $\overline{y}_l^{\,*}(\xi)$ — правые собственные векторы (столбцы) и левые собственные ковекторы (строки, представляющие дуальный базис в сопряженном пространстве, т.е. $\overline{y}_l^{\,*}(\xi)\,\overline{y}_k(\xi)=\delta_{lk}$) для матрицы $\lambda_l(\xi)E-a(\xi)$.

«Измерить» уравнения, наблюдая за решением созданных начальными условиями в виде гармонических колебаний, сложно, из-за сложности соблюдения соответствующих начальных условий.

Для гиперболических систем еще одним необходимым условием является аналитичность амплитуды оператора при продолжении в нижнюю комплексную полуплоскость. Это условие автоматически выполняется, когда оператор представляется в виде свертки с производными от функции с интегрируемым ядром (типично встречающийся случай для приложений). Оставшееся условие для гиперболичности — обобщенное условие Адамара [367].

Соответственно, это делает «эквивалентным» краевую задачу с задачей Коши. Последнее удобнее с точки зрения «измерений».

Для этого запускаем волны с разными частотами и измеряем комплексную (с учетом затухания) скорость, амплитуды возмущений для всех основных переменных для каждого типа волн, из которых восстанавливается вид, вообще говоря, псевдодифференциальных уравнений, в силу вышесказанного.

Отметим, что волна, движущаяся в противоположном направлении, считается другой, хотя, в силу действительности решения, может быть восстановлена (через комплексное сопряжение в случае малых чисел Маха для осредненного решения) через волны, движущиеся в исходном направлении.

Для лучшего понимания волнового (спектрального) подхода к (динамическим) законам механики сплошной среды, рассмотрим вначале простейшие виды одномерных уравнений. Первое уравнение сплошной среды, которое иногда называется законом сохранения массы, по сути является только введением новой переменной (импульса):

$$I = \rho v$$

(расширяющей размерность слоя расслоения), наряду с переменной (плотности) ρ, так же как в уравнениях Лагранжа, наряду с переменной q (определяющее положение системы), вводится новая переменная q (определяющее скорость системы и расширяющей размерность фазового пространства).

Соответственно, вся содержательная часть законов движения определяется вторым уравнением, называемым уравнением импульсов:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + (v\nabla)I = \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} + F \, . \tag{87}$$

Здесь F — внешняя сила, и она считается известной (обычно $F = \rho g$, g – ускорение силы тяжести).

Второй член связан с конвективным переносом импульса.

Пока не задан член τ^{ij}, называемый тензором напряжений, это уравнение может рассматриваться как определение этого тензора.

Соответственно, физическим законом является (динамическая) связь между этим тензором и имеющимися переменными ρ, I. При этом связь только с плотностью аналогична определению силы (в уравнениях Ньютона), зависящей только от положения, и они не дают диссипации малых возмущений.

Диссипация в среду вносится зависимостью этой силы от динамики положения (являющегося в линейной системе некоторым пседодифференциальным оператором от положения).

В связи с тем, что у нас уже есть связь-определение между плотностью и импульсом (или скоростями), то дополнительные члены в тензоре напряжений (связанные с движением) можно считать только функциями от импульса (или скорости) среды, являющемся псевдодифференциальным оператором.

Сопоставляя оператору дифференцированая его символ $i\lambda$, оператору дифференцирования по пространственным координатам — символ $i\zeta$, для линеаризованных уравнений получаем:

$$\begin{gathered} i\lambda\rho + i\zeta I = 0, \\ i\lambda I + i\zeta\rho c_0^2 = a(i\lambda, i\zeta) I. \end{gathered} \tag{88}$$

Здесь $c_0^2 = \dfrac{\partial p}{\partial \rho}$ — квадрат скорости звука в невозмущенной среде.

Подставляя вместо символа λ частоту волны ω, и вместо символа ζ — выражение $\dfrac{-\omega}{-c}$ ($-c$ — скорость волны с частотой ω), получим следующее дисперсионное соотношение:

$$i\omega(c^2 - c_0^2) = c^2 a(i\omega, \frac{i\omega}{c}). \tag{89}$$

Зная (или измерив заранее) дисперсионную зависимость для $k = \frac{\omega}{c} = k(\omega)$ как комплексной функции, в предположении, что $a(x, y) = x^{\alpha} b(y)$ (это имеет место и для других видов зависимостей по дифференцированию от времени), почти однозначно восстанавливается символ оператора поправочного члена к закону Гука.

При этом во многих задачах хорошо работает вид:

$$a(x, y) = \mu x^{\alpha} y^{\beta}, 0.8 < \alpha + \beta \leq 1.$$

Отметим, что в трехмерных задачах, появляется еще один вид волн – поперечные волны. При этом направление колебаний в плоскости, перпендикулярной направлению движения волны, не отражается на дисперсионных соотношениях этой волны. Поэтому все такие волны относят к одному типу волн, называемых поперечными. Отличие поперечных волн с разными направлениями колебаний, называемых поляризациями, сильно проявляются при их распространении в некоторых неоднородных средах.

Второй член поправки к закону Гука (например, как в (83)) связан с дисперсионными соотношениями для поперечных волн и также может быть измерен, т.е. определен через дисперсионные соотношения этой волны.

Рассмотрим теперь многофазные (многоскоростные) среды. Анализ дифференциальных уравнений показывает, что в этом случае дополнительных поперечных волн не возникает. Это связано с тем, что в многофазной среде не вводится более одного несимметричного тензора напряжений. При этом возникают дополнительные (назовем их диффузионными) продольные волны. Их количество, с учетом кратностей, равно количеству дополнительных фаз.

В статье авторов «Феноменологический подход к определению межфазных сил» [379] указывается на бесперспективность аналитических подходов для определения межфазных сил и формулируются некоторые принципы для феноменологического подхода к этому, а именно:

1. Механический процесс описывается квазилинейной системой уравнений. Также указывается, что этот принцип должен быть заменен на псевдодифференциальную систему уравнений. Более частный вид там принят в связи с форматом статьи.

2. Принцип гиперболичности системы уравнений по времени, являющейся математическим выражением физического принципа причинно-следственности.

3. Принцип инвариантности уравнений относительно группы движений пространства-времени Галилея.

4. Условие универсальности, заключающееся в неизменении решений системы уравнений при искусственном введении новых фаз или разделением одной из них на несколько фаз.

5. Принцип дивергентности. Этот принцип в псевдодифференциальной постановке несколько теряет свою силу и выражает только факт отсутствия членов с дифференцированием выше первого порядка. При этом существует такой вид, когда операторы со старшим дифференцированием (первого порядка) имеют вид, при котором нелинейные переменные занесены в знак дифференцирования.

6. Все сингулярные члены (члены со старшими производными) в уравнениях импульсов фаз определяются распределением полного диффузионного потока импульсов. Этот принцип также может быть сформулирован, в связи с волновыми свойствами многофазной среды. Связь предыдущих принципов с волновыми свойствами среды становится ясным из вышеизложенного. Объяснением этого принципа является наличие вместе с каждой волной некоторой диффузионной волны, где существенным является амплитуда отклонения скорости фазы от среднемассовой скорости среды. При наличии n фаз

появляются $n - 1$ диффузионных волн. На основной волне переносится в основном возмущение давления, а на этих волнах существенна амплитуда разницы скоростей, а стало быть ими переносится концентрация. Поэтому их можно назвать так же концентрационными волнами. Этот принцип ограничивает вид сингулярных частей для межфазных сил.

7. Вид не сингулярных частей в силе взаимодействия существенным образом разграничивается принципом существования устойчивого стационарного разрывного решения при любых разрывах объемных концентраций.

Распространению волн и разрывных решений (называемых ударными волнами) посвящена монография [375]. Со спектральной точки зрения, разрывные решения содержат все длины волн, а стало быть наше условие интерпретируется как положительность мнимых частей для всех спектральных частот

$$\omega_i(k), k \in R, i = 1, 2, \ldots, n$$

(n – количество типов волн, совпадающих в одномерной постановке с количеством фаз).

Соответственно, это условие задает более сильное ограничение на тип уравнений и в некоторых ситуациях дает возможность определить вид межфазной силы, в совокупности с другими условиями. Отметим, что это условие не следует из других, в частности, условие гиперболичности не гарантирует это условие даже в коротковолновой зоне (при больших k).

На самом деле, для существования разрывных решений система уравнений должна приводится в римановых переменных к следующему виду:

$$\frac{\partial r_i}{\partial \xi_i} = f(y). \qquad (90)$$

Соответственно, в псевдодифференциальной системе уравнений все дробные дифференцирования в соответствующих уравнениях (90) должны быть выражены через дробные дифференцирования по переменной ξ_i.

В некоторых ситуациях, например, при изучении задачи дозвукового обтекания потоком газа с частицами тонких тел, методами операционного исчисления удается получить сингулярное интегральное уравнение, связывающее давление на поверхности обтекаемого тела с функцией угла атаки тела.

Известно, что при обтекании без частиц имеет место парадокс Даламбера о нулевом сопротивлении. Р.Р. Айдагуловым доказано, что при наличии частиц (без собственного давления с известными межфазными силами) отсутствует парадокс Даламбера, и сила сопротивления всегда положительна. Суть этого заключается в положительной определенности в смысле Бохнера [376] интегрального ядра, связывающего давление с углом атаки.

Это свойство также является спектральным свойством системы псевдодифференциальных уравнений, описывающих среду, и в соответствующих ситуациях должна быть принята как дополнительное условие, ограничивающее вид операторов межфазных сил.

5. Заключение

Показано, что традиционная система уравнений сохранения масс и импульсов не пригодна для расчетов резонансов и возникающих неустойчивостей в среде, и правильные уравнения нельзя получить традиционными методами усреднения.

Правильная псевдодифференциальная система уравнений может быть получена измерением всех видов волн и соответствующих векторных амплитуд. Однако, во многих практических случаях, с учетом приведенных выше принципов, система (псевдодифференциальных) уравнений может быть восстановлена измерением одних только дисперсионных соотношений (зависимостей комплексных скоростей волн от частоты без измерения амплитуд переменных для этих волн). При этом учитывается, что амплитуды импульсов легко выражаются через амплитуды плотностей фаз (считается, что фазовые переходы отсутствуют) с помощью дисперсионных соотношений.

Используя одни только эти принципы, становится возможным судить о резонансных явлениях и неустойчивостях в средах, имея дисперсионные соотношения, которые существенно могут отличаться от вычисленных значений, полученных без учета (малых) динамических поправок.

То, что даже малые динамические поправки могут существенно повлиять на характер движения (неустойчивость) и резонансы системы, связано с тем, что во всех средах отношение длины основной волны к ее длине затухания уменьшается в e раз.

Литература для приложений

1. Альев Г.А. Пространственная задача о погружении диска в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1988. – № 1. – С. 17–20.

2. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск: БГУ, 1982.

3. Андронов А.А. Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956.

4. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Ученые записки ГГУ. – 1937. – Вып. 6.

5. Андронов А.А., Леонтович Е.А. К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории // ДАН СССР. – 1938. – Т. 21. – Вып. 9.

6. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла // Мат. сб. – 1956. – Т. 40. – Вып. 2.

7. Андронов А.А., Леонтович Е.А. О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел // Мат. сб. – 1959. – Т. 48. – Вып. 3.

8. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Динамические системы первой степени негрубости на плоскости // Мат. сб. – 1965. – Т. 68. – Вып. 3.

9. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6. – № 12.

10. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. – 1937. – Т. 14. – № 5. – С. 247–250.

11. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. – 568 с.

12. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.

13. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.

14. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. // Тр. МИАН, 90. М.: Наука, 1967.

15. Аппель П. Теоретическая механика: в 2-х т. М.: Физматгиз, 1960.

16. Арансон С.Х. Динамические системы на двумерных многообразиях // Тр. Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.

17. Арансон С.Х., Гринес В.З. Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях // УМН. – 1986. – Т. 41. – Вып. 1.

18. Арнольд В.И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела в идеальной жидкости // УМН. – 1969. – Т. 24. – № 3, с. 225–226.

19. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

20. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

21. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. – 472 с.

22. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. – 304 с.

23. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. – 328 с.

24. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. – 559 с.

25. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. – 320 с.

26. Баггис Г.Ф. Грубые системы двух дифференциальных уравнений // УМН. – 1955. – Т. 10. – Вып. 4.

27. Базыкин А.Д., Кузнецов Ю.А., Хибник А.И. Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости. Информационный материал. – Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.

28. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.

29. Баутин Н.Н. О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или центр // Мат. сб. – 1952. – Т. 30 (**72**). – Вып. 1.

30. Баутин Н.Н. Об аппроксимации и грубости пространства параметров динамической системы // Тр. Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. – Киев, 1970.

31. Баутин Н.Н. Некоторые методы качественного исследования динамических систем, связанные с поворотом поля // ПММ. – 1973. – Т. 37. – Вып. 6.

32. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. – 496 с.

33. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. – 416 с.

34. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ, 1975. – 308 с.

35. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова думка, 1984. – 188 с.

36. Беляев А.В. О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести // Мат. сб. – 1981. – Т. 114. – № 3, с. 465–470.

37. Бендиксон И. О кривых определяемых дифференциальными уравнениями // УМН. – 1941. – Т. 9.

38. Берже М. Геометрия. Т.т. I,II. М.: Мир, 1984.

39. Бессе А.Л. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981. – 325 с.

40. Бивин Ю.К. Изменение направления движения твердого тела на границе раздела сред // Изв. АН СССР. – МТТ. – 1981. – № 4. – С. 105–109.

41. Бивин Ю.К., Викторов В.В., Степанов Л.П. Исследование движения твердого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР. – МТТ. – 1978. – № 2. – С. 159–165.

42. Бивин Ю.К., Глухов Ю.М., Пермяков Ю.В. Вертикальный вход твердых тел в воду // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1985. – № 6. – С. 3–9.

43. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.

44. Бишоп Р.Л. Колебания. М.: Наука, 1986. – 189 с.

45. Блисс Дж.А. Лекции по вариационному исчислению. М.-Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.

46. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. – 255 с.

47. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в асторофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.

48. Богоявленский О.И. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // ДАН СССР. – 1983. – Т. 272. – № 6. – С. 1364–1367.

49. Богоявленский О.И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР. – 1986. – Т. 287. – № 5. – С. 1105–1108.

50. Богоявленский О.И., Ивах Г.Ф. Топологический анализ интегрируемых случаев В.А.Стеклова // УМН. – 1985. – Т. 40. – № 4. – С. 145–146.

51. Бойко Г.Л., Ерошин В.А. Определение перегрузок при ударе профиля о поверхность жидкости // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1975. – № 1. – С. 35–38.

52. Болотин С.В. О первых интегралах систем с гироскопическими силами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1984. – № 6. – С. 75–82.

53. Болотин С.В., Козлов В.В. Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1980. – № 4. – С. 84–89.

54. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Алгоритмы решения задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. матем. конф. «Еругинские чтения III», (Брест, 14–16.05.1996). – Брест, 1996. – С. 102.

55. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Существование и единственность решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. 5 Межд. совещ.-сем. «Инженерно-физические проблемы новой техники» (Москва, 19–22.5.1998). – М.: Изд-во МГТУ, 1998. – С. 6–7.

56. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Существование решения общей задачи дифференциальной диагностики // Тез. докл. Конф., посвящ. 40-летию Института механики МГУ (22–26 ноября 1999 г.). – М.: Изд-во МГУ, 1999. – С. 259–260.

57. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фунд. и прикл. мат. – 1999. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 775–790.

58. Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2001. – № 1. – С. 29–31.

59. Борисенок И.Т., Локшин Б.Я., Привалов В.А. О динамике полета осесимметричных вращающихся тел в воздушной среде // Изв. АН СССР. – МТТ. – 1984. – № 2. – С. 35–42.

60. Браилов А.В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения // ДАН СССР. – 1983. – Т.268. – № 5. – С. 1043–1046.

61. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. – 253 с.

62. Бурбаки Н. Интегрирование. М.: Наука, 1970. – 320 с.

63. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. – 331 с.

64. Буров А.А. Неинтегрируемость уравнений плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1984. № 1. – С. 71–73.

65. Буров А.А., Субханкулов Г.И. О движении твердого тела в магнитном поле // ПММ. – 1986. – Т. 50. – № 6. – С. 960–966.

66. Бутенина Н.Н. Бифуркации сепаратрис двумерной динамической системы при повороте поля. Качественные методы теории дифференциальных уравнений и их приложения // Ученые записки ГГУ. – 1973. – Вып. 187.

67. Бутенина Н.Н. Бифуркации сепаратрис и предельных циклов двумерной динамической системы при повороте поля // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т.9. – № 8.

68. Бутенина Н.Н. К теории бифуркаций динамических систем при повороте поля // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10. – № 7.

69. Бутенина Н.Н. О возможности поворота векторного поля динамической системы на угол с переходом лишь через системы первой степени негрубости // Межвузовский сб. «Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика». – Горький, 1974.

70. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2-х ч. М.: Наука, 1972.

71. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1969. – 349 с.

72. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1988. – 320 с.

73. Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функц. анализ и его прил. – 1987. – Т.21. – № 4. – С. 64–65.

74. Валле Пуссен Ш. Ж. Лекции по теоретической механике. – М.: ИЛ. – Т. 1, 1948. – 188 с.; т. 2, 1949. – 259 с.

75. Веселова Л.Е. О динамике тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1985. – № 3. – С. 64–67.

76. Вишик С.В., Должанский С.Ф. Аналоги уравнений Эйлера–Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли // ДАН СССР. – Т. 238. – № 5. – С. 1032–1035.

77. Врублевская И.Н. О геометрической эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем // Мат. сб. – 1947. – Т. 42.

78. Врублевская И.Н. Некоторые критерии эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем // – ДАН СССР. – 1954. – Т. 97. – № 2.

79. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1960. – 296 с.

80. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в R^n // Доклады РАН. – 2001. – Т. 380. – № 1. – С. 47–50.

81. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в R^n // Доклады РАН. – 2002. – Т. 383. – № 5. – С. 635–637.

82. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.С., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их приложения. М.: Наука, 1981.

83. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. – 188 с.

84. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.

85. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.-Л.: Гостехиздат, 1953. – 288 с.

86. Горлин С.М. Экспериментальная аэродинамика. М.: Высш. школа, 1970.

87. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 1978. – 296 с.

88. Горячев Д.Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшав. унив. изв. 1916. – Кн. 3. С. 1–15.

89. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и производных. М.: Гостехиздат, 1963. – 602 с.

90. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука, 1979. – 432 с.

91. Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М.: Мир, 1986. – 360 с.

92. Гробман Д.М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. – 1959. – Т. 128. – № 5. – С. 880–881.

93. Гробман Д.М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве // Мат. сб. – 1962. – Т. 56. – № 1. – С. 77–94.

94. Гудков Д.А. О понятии грубости и степеней негрубости для плоских алгебраических кривых // Мат. сб. – 1965. – Т. 67. – № 4.

95. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. – 322 с.

96. Джакалья Г.Е. Методы теории возмущений для линейных систем. М.: Наука, 1967. – 319 с.

97. Довбыш С.А. Пересечение асимптотических поверхностей возмущенной задачи Эйлера–Пуансо // ПММ. – 1987. – Т. 51. – № 3. – С. 363–370.

98. Довбыш С.А. Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // УМН. – 1989. – Т. 44. – № 2. – С. 229–230.

99. Довбыш С.А. Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1990. – № 3. – С. 70–77.

100. Дубровин Б.А., Новиков С.П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // ДАН СССР. – 1984. – Т. 279. – № 2. – С. 294–297.

101. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. – 760 с.

102. Дюлак Г. О предельных циклах. М.: Наука, 1980.

103. Ерошин В.А. Проникание конуса в жидкий слой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1963. – № 5. – С. 53–59.

104. Ерошин В.А. Рикошет пластинки от поверхности идеальной несжимаемой жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1970. – № 6. – С. 99–104.

105. Ерошин В.А. Погружение диска в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1983. – № 2. – С. 142–144.

106. Ерошин В.А. Экспериментальное изучение волн сжатия, возбуждающихся в упругом цилиндре при входе в воду // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1990. – Вып. № 46. – С. 54–59.

107. Ерошин В.А. Проникание упругого цилиндра в воду с большой скоростью: Препринт № 5. М.: Ин-т механики МГУ, 1991. – 83 с.

108. Ерошин В.А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. – МЖГ. – 1992. – № 5. – С. 20–30.

109. Ерошин В.А., Привалов В.А., Самсонов В.А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сб. научн.-метод. статей по теоретич. механ. Вып. 18. М.: Наука, 1987. – С. 75–78.

110. Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В. О движении тела в среде при струйном обтекании // Тез. всесоюзной конференции по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике. М., 2–4 февр., 1988. М.: МАИ, 1988. – С. 21. – Деп. в ВИНИТИ 22.12.88, № 8886-В-88.

111. Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Тез. докл. Чебышевских чтений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1995. – № 6. – С. 17.

112. Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Известия РАН. – МЖГ. – 1995. – № 3. – С. 23–27.

113. Ерошин В.А., Константинов Г.А., Романенков Н.И, Якимов Ю.Л. Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1988. – № 2. – С. 21–25.

114. Ерошин В.А., Константинов Г.А., Романенков Н.И., Якимов Ю.Л. Экспериментальное определение момента гидродинамических сил при несимметричном проникании диска в

сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1990. – № 5. – С. 88–94.

115. Ерошин В.А., Плюснин А.В., Созоненко Ю.А., Якимов Ю.Л. О методике исследования изгибных колебаний упругого цилиндра при входе в воду под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1989. – № 6. – С. 164–167.

116. Ерошин В.А., Романенков Н.И., Серебряков И.В., Якимов Ю.Л. Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1980. – № 6. – С. 44–51.

117. Жуковский Н.Е. О падении легких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси // П.с.с. – Т. 5. М.: Физматгиз, 1937. – С. 72–80, 100–115.

118. Жуковский Н.Е. О парении птиц // П.с.с. – Т. 5. М.: Физматгиз, 1937. – С. 49–59.

119. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. – 328 с.

120. Журавлев Ю.Ф. Погружение в жидкость диска под углом с свободной поверхности // Сб. работ по гидродинамике. М.: ЦАГИ, 1959. – С. 164–167.

121. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М.-Л.: Гостехиздат, 1938. – 400 с.

122. Златин Н.А., Красильщиков А.П., Мишин Г.И., Попов Н.Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. М.: Наука, 1974. – 344 с.

123. Иванова Т.А. Об уравненийя Эйлера в моделях теоретической физики // Мат. заметки. – 1992. – Т.52. – В.2. – С. 43–51.

124. Ильяшенко Ю.С. Мемуар Дюлака «О предельных циклах» и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений // УМН. – Т. 40. – № 6.

125. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. – 672 с.

126. Каток А.Б. Динамические системы с гиперболической структурой // 9-летняя матем. школа. Киев, 1972. – С. 125–211.

127. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Беркелеевский курс физики. Том 1. Механика. М.: Наука, 1983. – 447 с.

128. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

129. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: МГУ, 1980.

130. Козлов В.В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1983, № 6. – С. 10–22.

131. Козлов В.В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды // Прикл. матем. и механ. – 1983. – Т. 47. – Вып. 2. – С. 341–342.

132. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. – 1983. – Т. 38. – № 1 – С. 3–67.

133. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. – МТТ. – 1985. – № 6. – С. 28–33.

134. Козлов В.В. О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. – МТТ. – 1989. – № 5. – С. 10–17.

135. Козлов В.В. Вихревая теория волчка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1990. – № 4. – С. 56–62.

136. Козлов В.В. К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1990. – № 1. – С. 79–87.

137. Козлов В.В. О стохастизации плоскопараллельных течений идеальной жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1991, № 1, с. 72–76.

138. Козлов В.В., Колесников Н.Н. Об интегрируемости гамильтоновых систем // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1979, № 6, с. 88–91.

139. Козлов В.В., Онищенко Д. А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР. – 1982. – Т. 266. – № 6. – С. 1298–1300.

140. Колесников Н.Н. Натуральные системы с разрешимой группой симметрий // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1978, № 5, с. 99–103.

141. Колмогоров А.Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // В кн. Международный математический конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз, 1961. – С. 187–208.

142. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости. – М.: Физматгиз, 1963.

143. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Новые методы нелинейной механики. М.; Л.: ОНТИ, 1934.

144. Крылов Н.Н., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. М.: Изд-во АН СССР, 1937. – 112 с.

145. Кушниренко А.Г. Задачи общей теории динамических систем на многообразиях // 9-летняя матем. школа, Киев, 1972, с. 52–124.

146. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Физматгиз, 1947. – 928 с.

147. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1968.

148. Левшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1961. – 387 с.

149. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967.

150. Леонтович Е.А. К вопросу определения грубой динамической системы // Nonlinear vibrations problems, second conference on nonlinear vibrations. – Warsaw, 1964.

151. Леонтович Е.А., Майер А.Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // ДАН СССР. – 1937. – Т. 14. – № 5.

152. Леонтович Е.А., Майер А.Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // ДАН СССР. – 1955. – Т. 103. – № 4.

153. Леонтович Е.А., Шильников Л.П. Современное состояние теории бифуркаций динамических систем. Качественные методы теории нелинейных колебаний. Т. 2. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.

154. Лич Дж. У. Классическая механика. – М.: ИЛ, 1961. – 173 с.

155. Локшин Б.Я. Об одном движении быстровращающегося тела в воздухе // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1970. – № 6. – С. 93–98.

156. Локшин Б.Я. Об устойчивости плоского движения быстровращающегося симметричного тела в атмосфере // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1971. – № 4. – С. 113–118.

157. Локшин Б.Я. О винтовом движении быстровращающегося твердого симметричного тела в воздухе // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1973. – № 4. – С. 79–86.

158. Локшин Б.Я. Об устойчивости стационарных движений быстровращающегося симметричного твердого тела в воздухе // Изв. АН СССР. МТТ. – 1976. – № 2. – С. 18–24.

159. Локшин Б.Я., Черкасов О.Ю. О структуре оптимальных траекторий движения вращающегося твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1990. – № 1. – С. 63–68.

160. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М.: МГУ, 1986. – 86 с.

161. Локшин Б.Я., Привалов В.А.,Самсонов В.А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. – М.: МГУ, 1992. – 76 с.

162. Локшин Б.Я., Окунев Ю.М., Самсонов В.А., Шамолин М.В. Некоторые интегрируемые случаи пространственных колебаний твердого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. XXI научн. чтений по космонавтике (Москва, 28–31.01.1997). – М.: ИИЕТ РАН, 1997, с. 82–83.

163. Лунев В.В. Гидродинамическая аналогия задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца // ДАН СССР. – 1984. – Т.276. – № 2, с. 351–355.

164. Ляпунов А.М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости // В кн. Собр. соч. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1954. – С. 320–324.

165. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеориздат, 1956. 491 с.

166. Манин Ю.И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки. Вып. 11. Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1978. С. 5–112.

167. Маркеев А.П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненой идеальной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986, № 1, с. 64–65.

168. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.

169. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1986.

170. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. 342 с.

171. Митропольский Ю.А., Лопатин А.К. Асимптотическая декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром: Препр. Ин-та математики АН УССР № 86–71. Киев, 1986.

172. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973.

173. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.

174. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 439 с.

175. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. Ташкент: Фан, 1973. 272 с.

176. Неймарк Ю.И. О движениях, близких к двоякоасимптотическому движению // ДАН СССР. – 1967. – Т. 172. – № 5, с. 1021–1024.

177. Неймарк Ю.И. Структура движений динамической системы в окрестности гомоклинической кривой // 5-я летняя матем. школа, Киев, 1968, с. 400–435.

178. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.

179. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 550 с.

180. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975. – 304 с.

181. Новиков С.П., Шмельцер И. Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твердого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника–Шнирельмана–Морса (ЛМШ) I// Функцион. анализ и его прил. – 1981. – Т. 15, № 3, с. 54–66.

182. Одареев В.А. Декомпозиционный анализ динамики и устойчивости продольного возмущенного движения экраноплана. Докторская диссертация. М., МГАИ, 1995. – 385 с.

183. Окунев Ю.М., Садовничий В.А. Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения // Проблемы современной механики / Под

ред. чл.-корр. РАН С. С. Григоряна. – М.: Изд-во МГУ. – 1998. – С. 28–46.

184. Окунев Ю.М., Привалов В.А., Самсонов В.А. Некоторые задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Тр. Всес. конф. «Нелинейные явления». М.: Наука, 1991. – С. 140–144.

185. Окунев Ю.М., Садовничий В.А., Самсонов В.А., Черный Г.Г. Комплекс моделирования задач динамики полета // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996, № 6, с. 66–75.

186. Пали Дж., Смейл С. Теоремы структурной устойчивости // Сб. пер. Мат. – 1969. – Т. 13. – № 2. – С. 145–155.

187. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. – М.: Мир, 1986. – 301 с.

188. Переломов А.М. Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости // Функц. анализ и его прилож. – 1981. – Т. 15. – Вып. 2. – С. 83–85.

189. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952.

190. Плисс В.А. О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе // Вестн. ЛГУ, сер. матем., 1960, т. 13, с. 15–23.

191. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л.: Наука, 1964.

192. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.:Наука, 1967.

193. Плисс В.А. Об устойчивости произвольной системы по отношению к малым в смысле С возмущениям // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 10. – С. 1891–1892.

194. Погосян Т.И. Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. – 1980. – Т. 12. – С. 9–16.

195. Привалов В.А., Самсонов В.А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР. МТТ. – 1990. – № 2. – С. 32–38.

196. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

197. Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1,2. – М.: Наука, 1971, 1972. – 771 с. и 999 с.

198. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – 560 с.

199. Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974.

200. Рыжова В.Е., Шамолин М.В. О некоторых аналогиях в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Седьмой всес. съезд по теоретич. и прикл. механ., М., 15–21 авг., 1991. – М.,1991. – С. 305.

201. Садэтов С.Т. Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1990, № 3, с. 56–62.

202. Сальникова Т.В. Об интегрируемости уравнений Кирхгофа в симметричном случае // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1985, № 4, с. 68–71.

203. Самсонов В.А. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в некоторых случаях // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1962. – № 5. – С. 74–78.

204. Самсонов В.А. Об устойчивости равновесия физического маятника с жидким наполнением // Прикл. матем. и механ. – 1966. – Т. 30. – Вып. 6. – С. 1112–1114.

205. Самсонов В.А. О задаче минимума функционала при исследовании устойчивости движения тела с жидким наполнением // Прикл. матем. и механ. – 1967. – Т. 31. – Вып. 3. – С. 523–526.

206. Самсонов В.А. О квазистационарных движениях механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 1. – С. 32–35.

207. Самсонов В.А. Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. – М.: Наука, 1980. – 64 с.

208. Самсонов В.А. О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. – 1984, № 4, с. 32–34.

209. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1989. – № 3. – С. 51–54, 105.

210. Самсонов В.А., Шамолин М.В. О движении тела в сопротивляющейся среде // Современные проблемы механики и технологии машиностроения. Всес. конф. (16–18 апреля 1989 г.). Тез. докл. – М.: ВИНИТИ. – 1989. – С. 128–129.

211. Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3969. – М.,1990. – 80 с.

212. Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. II Всес. конф. (сентябрь 1990 г.), ч. 2. – Горький. – 1990. – С. 95–96.

213. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4141. – М., 1991. – 48 с.

214. Самсонов В.А., Шамолин М.В. Об устойчивости вращения тела при его торможении в сопротивляющейся среде / VII Четаевская конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 10–13 июня 1997 г.: Тез. докл. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. унта, 1997, с. 24.

215. Самсонов В.А., Ерошин В.А., Константинов Г.А., Макаршин В. М. Две модельные задачи о движении тела в среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3427. – М.,1987. – 27 с.

216. Самсонов В.А., Локшин Б.Я., Привалов В.А. Качественный анализ. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3245. М., 1985. – 58 с.

217. Самсонов В.А., Шамолин М.В., Ерошин В.А., Макаршин В. М. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. М., 1995. – 41 с.

218. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1954.

219. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. 1. – М.: Наука, 1983. – 528 с.; т. 2. – М.: Наука, 1984. – 560 с.

220. Синг Дж.Л. Классическая динамика. – М.: Физматгиз, 1963. – 448 с.

221. Смейл С. Грубые системы не плотны. – Сб. пер. Мат. – 1967. – Т. 11. – № 4. – С. 107–112.

222. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. – 1970. – Т. 25. – № 1. – С. 113–185.

223. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.

224. Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. – 234 с.

225. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959.

226. Стрекалов В.В. Рикошет при входе в воду диска, плоскость которого близка к вертикальной // Уч. записки ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 5. С. 66–73.

227. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 654 с.

228. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик. В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

229. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. Вып. 1621. – М., 1974. – С. 18–24.

230. Татаринов Я. В. Лекции по классической динамике. – М.: МГУ, 1984. – 296 с.

231. Трофимов В.В. Вложения конечных групп регулярными элементами в компактные группы Ли // ДАН СССР. – 1976. – Т. 226. – № 4. – С. 785–786.

232. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – Т. 44. – № 5, с. 1191–1199.

233. Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984, № 6, с. 31–33.

234. Трофимов В.В. Геометрические инварианты вполне интегрируемых систем // Тез. докл. Всесоюзн. конф. по геометрии «в целом». Новосибирск, 1987, с. 121.

235. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. – 1980. – Т. 254. – № 6, с. 1349–1353.

236. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Диссипативные системы с нетривиальными обобщенными классами Арнольда–Маслова. Тез. докл. сем. по вект. и тенз. ан. им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2000, № 2, с. 62.

237. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. – М.: ОНТИ, 1937. – 500 с.

238. Фоменко А.Т. Реализация циклов в компактных симметрических пространствах вполне геодезическими подмногообразиями // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195. – № 4. С. 789–792.

239. Фоменко А.Т. Полная интегрируемость некоторых классических гамильтоновых систем // Моногенные функции

и отображения. – Киев: Ин-т математики АН СССР. – 1982. – С. 3–19.

240. Фоменко А.Т. Об абсолютных минимумах функционала объема и функционала Дирихле на Римановых многообразиях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1983, № 6, с. 87–94.

241. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

242. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.

243. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. – С. 133–135.

244. Чаплыгин С.А. Избранные труды. – М.: Наука, 1976. – 495 с.

245. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. – 383 с.

246. Шамолин М.В. Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием. Кандидатская диссертация. М., МГУ, 1991. – 147 с.

247. Шамолин М.В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1992. – № 2. – С. 52–56, 112.

248. Шамолин М.В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1992. – № 1. – С. 52–58, 112.

249. Шамолин М.В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. матем. и механ. – 1993. – Т. 57. – Вып. 4. – С. 40–49.

250. Шамолин М.В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов задачи о движении тела в сопротивляю-

щейся среде // Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (24–28.5.1993): Тезисы докладов. – Киев: Знание, 1993. – Ч. 2. – С. 62–63.

251. Шамолин М.В. Относительная структурная устойчивость задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Механика и ее применения. Научн. конф. 9–11.11.93: Тез. докл. – Ташкент: ТашГУ, 1993. – С. 20–21.

252. Шамолин М.В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1993. – № 2. – С. 66–70, 113.

253. Шамолин М.В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1993. – № 1. – С. 68–71, 112.

254. Шамолин М.В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН. – 1994. – Т. 337. – № 5. – С. 611–614.

255. Шамолин М.В. Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в среде при струйном обтекании // Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (16–20.5.1994): Тез. докл. – Киев, 1994. – С. 144–145.

256. Шамолин М.В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов с предельными циклами в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (15–19.5.1995): Тезисы докладов (Исследование систем.). – Киев, 1995, с. 125.

257. Шамолин М.В. Относительная структурная устойчивость динамических систем задачи движения тела в среде // Аналитические, численные и экспериментальные методы в

механике: Сб. науч. трудов / Под ред. Б. Е. Победри и В.В. Козлова. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – С. 14–19.

258. Шамолин М.В. Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде. Тез. докл. Чебышевских чтений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1995, № 6, с. 17.

259. Шамолин М.В. Определение относительной грубости и двупараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела // Успехи матем. наук. – 1996, т. 51, вып.1, с. 175–176.

260. Шамолин М.В. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Известия РАН. МТТ. – 1996, № 2, с. 55–63.

261. Шамолин М.В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Тез. докл. матем. конф. «Еругинские чтения III», (Брест, 14–16.05.1996). – Брест, 1996, с. 107.

262. Шамолин М.В. Введение в пространственную динамику движения твердого тела в сопротивляющейся среде // Материалы межд. конф. и Чебышевских чтений, посвящ. 175–летию со дня рожд. П.Л.Чебышева (Москва, 14–19 мая 1996 г.). – Т. 2. – М.: МГУ, с. 371–373.

263. Шамолин М.В. Список интегралов динамических уравнений в пространственной задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (20–24.5.1996): Тезисы докладов (Исследование систем.). – Киев, 1996, с. 142.

264. Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН, 1996. – Т. 349. – № 2. – С. 193–197.

265. Шамолин М.В. Качественные методы в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // II Сибир-

ский Конгресс по прикл. и индустр. матем. (Новосибирск, 25–30.06.1996): Тезисы докладов. – Новосибирск, ч. III, 1996, с. 267.

266. Шамолин М.В. Об одном интегрируемом случае в динамике пространственного движения тела в сопротивляющейся среде // II Симпозиум по классической и небесной механике. Тез. докл. Великие Луки, 23–28.08.1996. – Москва – Великие Луки, 1996, с. 91–92.

267. Шамолин М.В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996, № 4, с. 57–69.

268. Шамолин М.В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. – 1997, № 2, с. 65–68.

269. Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби задачи о пространственном маятнике, помещенном в поток набегающей среды // Моделирование и исследование устойчивости систем (Modelling and Investigation of System Stability). Научн. конф. (19–23.5. 1997): Тезисы докладов (Mechanical Systems). – Киев, 1997, с. 143.

270. Шамолин М.В. Частичная стабилизация вращательных движений тела в среде при свободном торможении // Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием «Проблемы небесной механики», Санкт-Петербург, 3–6 июня 1997 г. / Ин-т теор. астрон.; Под ред. А.Г.Сокольского, А.С.Баранова. – Спр.: Изд-во ИТА РАН, 1997. – С. 183–184.

271. Шамолин М.В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи матем. наук. – 1997, Т. 52, вып. 3, с. 177–178.

272. Шамолин М.В. Математическое моделирование динамики пространственного маятника, обтекаемого средой // Тр. VII Межд. Симпозиума «Методы дискретных особенно-

стей в задачах математической физики», 26–29 июня 1997 г., Феодосия; Херсон: Изд-во ХГТУ, 1997, с. 153–154.

273. Шамолин М.В. Пространственная динамика твердого тела, взаимодействующего со средой // Сем. по мех. систем и пробл. управления движ. и навиг. Известия РАН. МТТ. – 1997, № 4, с. 174.

274. Шамолин М.В. Качественные методы в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // YSTM'96: «Молодежь и наука – третье тысячелетие». Тр. межд. конгресса – М.: НТА «АПФН», 1997 г. – (Сер. Профессионал), т. 2. – С. I–4.

275. Шамолин М.В. Качественные и численные методы в некоторых задачах пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. 5 Межд. совещ.-сем. «Инженерно-физические проблемы новой техники» (Москва, 19–22.5. 1998). – М.: Изд-во МГТУ, 1998. – С. 154–155.

276. Шамолин М.В. Некоторые задачи пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой в условиях квазистационарности // Тез. докл. Всерос. научн.-техн. конф. молодых ученых «Современные проблемы аэрокосмической науки» (г.Жуковский, 27–29.5.1998). – М.: Изд-во ЦАГИ, 1998. – С. 89–90.

277. Шамолин М.В. Абсолютная и относительная структурная устойчивость в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Тр. Межд. конф. «Математика в индустрии» (ICIM–98, г. Таганрог, 29.06.–03.07.1998). – Таганрог: Изд-во ТГПИ, 1998. – С. 332–333.

278. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. – 1998, Т. 53, вып. 3, с. 209–210.

279. Шамолин М.В. Семейства трехмерных фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // III межд. Симп. по клас. и неб.

механ. Август 1998, Великие Луки: Тез. докл., Великие Луки, 23–27.8.1998 г. / Москва–Великие Луки: ВЦ РАН, 1998. – С. 165–167.

280. Шамолин М.В. Методы нелинейного анализа в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой (Methods of non-linear analysis in dynamics of a rigid interacting with a medium), In: CD-Proc. of the Cong. «Nonlinear Analysis and It's Applications», Moscow, Russia, Sept. 1–5, 1998; 1999, pp. 497–508.

281. Шамолин М.В. Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. – 1998, № 6, с. 29–37.

282. Шамолин М.В. Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. – 1999, № 2, с. 178–189.

283. Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. – 1999. – Т. 364. – № 5. – С. 627–629.

284. Шамолин М.В. Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. – 1999, № 2. – С. 178–189.

285. Шамолин М.В. Семейства длиннопериодических траекторий в пространственной динамике твердого тела // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (25–29.5.1999): Тезисы докладов (System Modelling). – Киев, 1999, с. 60.

286. Шамолин М.В. Нелинейные динамические эффекты при пространственном торможении тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. III межд. конф. «Чкаловские чтения. Инж.-физ. пробл. авиац. и космич. техники» (1–4.6.1999). – Егорьевск: ЕАТК ГА, 1999. – С. 257–258.

287. Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН, 1999. – Т. 364. – № 5. – С. 627–629.

288. Шамолин М.В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией // Успехи матем. наук. – 1999, Т. 54, вып. 5, с. 181–182.

289. Шамолин М.В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН, 2000. – Т. 371. – № 4. – С. 480–483.

290. Шамолин М.В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости систем с переменной диссипацией. Тез. докл. сем. по вект. и тенз. ан. им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2000, № 2, с. 63.

291. Шамолин М.В. Задача о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде и один случай интегрируемости // Book of Abs. 3hird Int. Conf. «Differential Equations and Applications», Saint-Petersburg, Russia, June 12–17, 2000; Изд-во СПбГТУ, 2000, с. 198.

292. Шамолин М.В. О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек // Успехи матем. наук. – 2000. – Т. 55, вып. 3. – С. 187–188.

293. Шамолин М.В. Многомерные топографические системы Пуанкаре и трансцендентная интегрируемость // IV Сибирский Конгресс по прикл. и индустр. матем. (Новосибирск, 26.06–01.07.2000): Тезисы докладов. – Новосибирск: Изд-во ин-та матем., ч. I, 2000, с. 25–26.

294. Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин.

системам (Суздаль, 21–26.08.2000). – Владимир: Влад. гос. унив., 2000. С. 196–197.

295. Шамолин М.В. Сопоставление некоторых интегрируемых случаев из двумерной, трехмерной и четырехмерной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. V Крымской Межд. Мат. школы «Метод функции Ляпунова и его приложения» (МФЛ-2000) (Крым, Алушта, 05–13.09.2000). – Симферополь, 2000, с. 169.

296. Шамолин М.В. Об одном случае интегрируемости по Якоби в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Межд. конф. по дифферен. и интегр. уравнениям (Одесса, 12–14.09.2000). – Одесса: Изд-во «АстроПринт», 2000. – С. 294–295.

297. Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. – 2000. – Т. 375. – № 3. – С. 343–346.

298. Шамолин М.В. Об устойчивости движения твердого тела в сопротивляющейся среде, закрученного вокруг своей продольной оси // Известия РАН. МТТ. – 2001. – № 1. – С. 189–193.

299. Шамолин М.В. Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (22–25.5.2001): Thes. of Conf. Rep. – Kyiv, 2001. – С. 344.

300. Шамолин М.В. Задача диагностирования как главная задача общей задачи дифференциальной диагностики, In: Book of Abstracts of the Third Int. Conf. «Tools for Mathematical Modelling», Saint-Petersburg, Russia, 18–23 June, 2001; Saint-Petersburg State Tech. Univ., 2001, p. 121.

301. Шамолин М.В. Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37. – № 6. – С. 74–82.

302. Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Анн. докл. VIII Всеросс. съезда по теорет. и прикл. механ. (Пермь, 23–29.08.2001). – Екатеринбург: УрО РАН, 2001. – С. 599–600.

303. Шамолин М.В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2001. – № 5. – С. 22–28.

304. Шамолин М.В., Цыпцын С. В. Аналитическое и численное исследование траекторий движения тела в сопротивляющейся среде. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4289. – М.,1993.– 43 с.

305. Шамолин М.В., Шебаршов Д.В. Проекции лагранжевых торов для бигармонического осциллятора на пространство положений и динамика твердого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем (Modelling and Investigation of System Stability). Научн. конф. (19–23.5. 1997). Тезисы докладов (Mechanical Systems). – Киев, 1997, с. 142.

306. Шамолин М.В., Шебаршов Д.В. Некоторые вопросы геометрии в классической механике / М., 1999. – 19 с. Деп. в ВИНИТИ 12.05.99, № 1499-В99.

307. Шамолин М.В., Шебаршов Д.В. Методы решения основной задачи дифференциальной диагностики / М., 1999. – 21 с. Деп. в ВИНИТИ 12.05.99, № 1500-В99.

308. Шамолин М.В., Шебаршов Д.В. Некоторые задачи дифференциальной диагностики // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (25–29.5.1999): Тезисы докладов (System Modelling). – Киев, 1999, с. 61.

309. Шорыгин О.П., Шульман Н.А. Вход диска в воду с углом атаки // Уч. записки ЦАГИ. 1977. Т.8. № 1. С.12–21.

310. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.

311. Якоби К. Лекции по динамике. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 272 с.

312. Якобсон М.В. О гладких отображениях окружности в себя // Матем. сб., 1975, вып.85, с. 183–188.

313. Hubert Airy, The Soaring of Birds, «Nature», vol. XXVIII, 1.596.

314. Magnus Blix, Une nouvelle theorie sur le vol a viole des oiseaux, «Revue generale sciences pures et appliquees», 1890.

315. Bret Onniere, Etude sur le vol plane, «L'Aeronaute», 1891.

316. Ishlinsky A.Yu., Klimov D.M. Some aspects of the solution of the main problem of inertial navigation. – J. Inst. Navig., 1970, vol. 23, No. 4.

317. Otto Liliental, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Berlin, 1889, S. 81.

318. Marey, Le vol des oiseaux, chap.XX, Paris, 1890, 157 p.

319. Mouillard, L'empire de l'air, Paris, 1881.

320. Parseval, Die Mechanik des Vogelflugs, Wisbaden, 1889, S. 122.

321. Peixoto M., On structural stability, Ann. of Math. (2) 69 (1959), 199–222.

322. Peixoto M., Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology, 1962, v. 1, N 2, p. 101–120.

323. Peixoto M., On an approximation theorem of Kupka and Smale, J. Diff. Eq., 3 (1966), p. 214–227.

324. S. E. Peal, Soaring of Birds, «Nature», vol. XXVIII, 1.11.

325. L. Prandtl, A. Betz, Ergebmisse der Aerodinamishen Versuchsastalt zu Gottingen, b.4 Liefrung. M nchen Berlin; R. Oldenbourg, 1932. 148 p.

326. Rayleigh, The Soaring of Birds, «Nature», vol. XXVIII, 1.534.

327. M.V. Shamolin, Global qualitative analysis of the nonlinear systems on the problem of a body motion in a resisting medium // Fourth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, August 18–21, 1993. – Szeged, Hungary, 1993, p. 54.

328. M.V. Shamolin, Relative structural stability on the problem of a body motion in a resisting medium // ICM'94, Abstract of Short Communications, Zurich, 3–11 August, 1994. – Zurich, Switzerland, 1994, p. 207.

329. M.V. Shamolin, Structural Optimization of the Controlled Rigid Motion in a Resisting Medium. In: WCSMO-1, Extended Abstracts. Posters, Goslar, May 28 – June 2, 1995. Goslar, Germany, 1995, p. 18–19.

330. M.V. Shamolin, Qualitative Methods to the Dynamic Model of an Interaction of a Rigid Body with a Resisting Medium and New Two-Parametric Families of the Phase Portraits. In: DynDays'95 (Sixteenth Annual Informal Workshop), Program and Abstracts, Lyon, June 28 – July 1, 1995. Lyon, France, 1995, p. 185.

331. M.V. Shamolin, New Two-Parameter families of the phase patterns on the problem of a body motion in a resisting medium. In: ICIAM'95, Book of Abstracts, Hamburg, 3.–7.July, 1995. Hamburg, Germany, 1995, p. 436.

332. M.V. Shamolin, Poisson-stable and dense orbits in rigid body dynamics. In: 3rd Experimental Chaos Conference, Advance Program, Edinburg, Scotland, August 21–23, 1995. Edinburg, Scotland, 1995, p. 114.

333. M.V. Shamolin, Qualitative methods in interacting with the medium rigid body dynamics, In: Abstracts of GAMM Wissenschaftliche Jahrestangung'96, 27.–31.May, 1996, Prague, Czech Rep.; Karls-Universitat Prag, p. 129–130.

334. M.V. Shamolin, Relative structural stability and relative structural instability of different degrees in Topological Dynam-

ics, In: Abstracts of International Topological Conference Dedicated to P.S.Alexandroff's 100th Birthday «Topology and Applications», Moscow, May 27–31, 1996; Moscow: Phasys, 1996, p. 207–208.

335. M.V. Shamolin, Topographical Poincare systems in many dimensional spaces, In: Fifth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences, July 29 – August 2, 1996. Szeged, Hungary, 1996, p. 45.

336. M.V. Shamolin, Qualitative Methods in Interacting with the Medium Rigid Body Dynamics, In: Abstracts of XIXth ICTAM, Kyoto, Japan, August 25–31, 1996; Kyoto, Japan, 1996, p. 285.

337. M.V. Shamolin, Three-Dimensional Structural Optimization of Controlled Rigid Motion in a Resisting Medium. In: Proceedings of WCSMO-2, Zakopane, Poland, May 26–30, 1997. Zakopane, Poland, 1997, p. 387–392.

338. M.V. Shamolin, Classical problem of a three-dimensional motion of a pendulum in a jet flow. In: 3rd EUROMECH Solid Mechanics Conference, Book of Abstracts, Stockholm, Sweden, August 18–22, 1997. Royal Inst. of Technology, Stockholm, Sweden, 1997, p. 204.

339. M.V. Shamolin, Families of three-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body. In: EQUADIFF 9, Abstracts, Enlarged Abstracts, Brno, Czech Rep., August 25–29, 1997. Masaryk Univ., Brno, Czech Rep., 1997, p. 76.

340. M.V. Shamolin, Many-dimensional topographical Poincare systems in rigid body dynamics, In: Abstracts of GAMM Wissenschaftliche Jahrestangung'98, 6.–9.April, 1998, Bremen, Germany; Universitat Bremen, 1998, p. 128.

341. M.V. Shamolin, D.V.Shabarshov, LaGrange Torii and Equation of Hamilton-Jacobi, In: Book of Abstracts of Conference PDE Prague'98 (Praha, August 10–16, 1998; Partial Differential

Equations: theory and numerical solutions); Charles University, Praha, Czech Rep., 1998, p. 88.

342. M.V. Shamolin, New two-parametric families of the phase portraits in three-dimensional rigid body dynamics // Межд. конф., посвященная 90-летию со дня рожд. Л.С. Понтрягина. М., 31.8.–6.9. 1998. Тез. докл. Дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – С. 97–99.

343. M.V. Shamolin, Lyapunov functions method and many-dimensional topographical systems of Poincare in rigid body dynamics // IV Крымская Межд. мат. школа «Метод функции Ляпунова и его приложения». Тез. докл. Крым, Алушта (05–12.09. 1998). – Крым, Симферополь: Изд-во Симф. гос. ун-тет, 1998. – С. 80.

344. M.V. Shamolin, Some Classical Problems in a Three Dimensional Dynamics of a Rigid Body Interacting with a Medium, In: Proc. of ICTACEM'98, Kharagpur, India, Dec.1–5, 1998; Aerospace Engineering Dep., Indian Inst. of Technology, Kharagpur, India, 1998, 11 p. (CD-Rome, Printed at: Printek Point, Technology Market, KGP-2).

345. M.V. Shamolin, Structural Stability in 3D Dynamics of a Rigid. In: CD-Proc. of WCSMO-3, Buffalo, NY, May 17–21, 1999; Buffalo, NY, 1999, 6 p.

346. M.V. Shamolin, Integrability in Terms of Transcendental Functions in Rigid Body Dynamics, In: Booh of Abstracts of GAMM Annual Meeting, April 12–16 1999, Metz, France; Universite de Metz, 1999, p. 144.

347. M.V. Shamolin, Properties of Integrability of Systems in Terms of Transcendental Functions, In: Final Progr. and Abstracts of Fifth SIAM Conf. on Appl. of Dynamic. Syst., May 23–27, 1999, Snowbird, Utah, USA; SIAM, 1999, p. 60.

348. M.V. Shamolin, Mathematical Modelling in 3D Dynamics of a Rigid Interacting with a Medium, In: Book of Abstracts of

the Second Int. Conf. «Tools for Mathematical Modelling», Saint-Petersburg, Russia, 14–19 June, 1999; Saint-Petersburg State Tech. Univ., 1999, p. 122–123.

349. M.V. Shamolin, Some properties of transcendental integrable dynamical systems, In: Book of Abst. of EQUADIFF 10, Berlin, August 1–7, 1999; Free Univ. of Berlin, 1999, pp. 286–287.

350. M.V. Shamolin, Methods of analysis of a deceleration of a rigid in 3D medium, In: Contributed abstracts of 3rd ENOC, Copenghagen (Lyngby), Denmark, August 8–12, 1999; Tech. Univ. of Denmark, 1999 (without pages).

351. M.V. Shamolin, Long-Periodic Trajectories in Rigid Body Dynamics, In: Sixth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences, August 10–14, 1999. Szeged, Hungary, 1999, p. 47.

352. M.V. Shamolin, New Families of the Non-Equivalent Phase Portraits in 3D Rigid Body Dynamics, In: Abstracts of Second Congress ISAAC 1999, Fukuoka, Japan, August 16–21, 1999; Fukuoka Ins. of Tech, 1999, p. 205–206.

353. M.V. Shamolin, Methods of analysis of dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Book of Abstracts of Annual Scient. Conf. GAMM 2000 at the Univ. of Gottingen, 2–7 April, 2000; Univ. of Gott., 2000, p. 144.

354. M.V. Shamolin, Integrability and non-integrability in terms of transcendental functions, In: CD-abs. of 3rd ECM (Poster sessions), Barselona, Spain, June 10–14, 2000 (poster no. 36, without pages).

355. M.V. Shamolin, About interaction of a rigid body with a resisting medium under an assumption of a jet flow, In: Book of Abst. II (General sessions) of 4th EUROMECH Solid Mech. Conf., Metz, France (June 26–30, 2000); Univ. of Metz, 2000, p. 703.

356. M.V. Shamolin, New families of many-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a me-

dium, In: CD-Proc. of 16th IMACS World Cong. 2000, Lausanne, Switzerland, August 21–25; EPFL, 2000, 3 p.

357. M.V. Shamolin, Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability, In: Book of Abst. of ECCOMAS 2000, Barcelona, Spane, 11–14 September; Barcelona, 2000, p. 495.

358. M.V. Shamolin, Comparison of Some Cases of Integrability in Dynamics of a Rigid Body Interacting with a Medium, In: Book of Abs. of Annual Scient. Conf. GAMM 2001, ETH Zurich, 12–15 February, 2001; ETH Zurich, 2001, p. 132.

359. M.V. Shamolin, Pattern Recognition in the Model of the Interaction of a Rigid Body with a Resisting Medium, In: Col. of Abst. of First SIAM-EMS Conf. «Applied Mathematics in our Changing World», Berlin, Germany, Sept. 2–6, 2001; Springer-Birkhauser, 2001, p. 66.

360. M.V. Shamolin, Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 110, No. 2, 2002, p.p. 2526–2555 (пер. «Итоги науки и техники», сер. «Современные проблемы математики и ее приложения», тематические обзоры, т. 79, «Динамические системы-10», 2000).

361. Weyher, Observations sur le vol plane par obres, «L'Aeronaute», 1890.

362. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидинамика. М.: Изд-во «Недра», 1996.

363. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.

364. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 31. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1988.

365. Рудяк В.Я. Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Изд-во «Наука» СО АН СССР, 1987.

366. Локшин А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ. 1982.

367. Мизохато С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

368. Зубарев Д. Н., Морозов В. Г, Репке Г. Статистическая механика неравновесных состояний. Тт. 1, 2. М.: Физматлит, 2002.

369. Резибуа П., Ленер М. Де. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир, 1980.

370. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981.

371. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во «Наука» СО РАН, 2000.

372. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959.

373. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т. 1. М.: Наука, 1970.

374. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.

375. Куликовский А.Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Изд-во «Московский Лицей», 1998.

376. Хьют, Росс. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. М.: Мир, 1975.

377. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1958.

378. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Москва, 2001.

379. Айдагулов Р.Р., Шамолин М.В. Феноменологический подход к определению межфазных сил // Доклады РАН. – 2007. – Т. 412. – № 1. – С. 44–47.

Шамолин Максим Владимирович

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.02.953.Д.008330.09.06 от 14.09.2006 г.

Технический редактор *Н.Я. Богданова*
Корректор *Н.С. Садовникова*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *Е.Ю. Лысова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35 стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

М. В. Шамолин

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Работа возникла в результате изучения движения летательного аппарата, которое описывается нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. На базе этих уравнений дается классификация возможных неисправностей в системе управления движением. Вводятся понятия опорных неисправностей и их окрестностей, дается математическое моделирование этих неисправностей и их окрестностей, вводится понятие диагностического пространства и его математической структуры.

В приложениях рассмотрены вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и динамических систем как в применении к основной части книги, так и имеющих самостоятельный интерес.

ISBN 5-94692-748-5

9785946927482

ЭКЗАМЕН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

М. В. Шамолин

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

ЭКЗАМЕН